КВАНТ
ЖУРНАЛ

1982

1 - 12

НОМЕР
1

ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Основан в 1970 году

КВАНТ

1
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

С Новым годом! 3
А. Мигдал. Судьба нейтронных звезд 4
Н. Васильев, А. Зелевинский. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения 12

Лаборатория «Кванта»

А. Шмелев. Новогодний физический фейерверк 20

Задачник «Кванта»

Задачи М721 — М725; Ф733 — Ф737 23
Решения задач М681 — М685; Ф692 — Ф697 25

«Квант» для младших школьников

Задвчи 35
А. Савин. Камушки и шахматная доска 36

Практикум абитуриента

В. Тугушев. Электрические цепи с нелинейными элементами 40

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1981 году

Московский физико-технический институт 46
Московский электротехнический институт связи 48

Искусство программирования

Заочная школа программирования. Урок 17 49

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 53
Новый прием на Малый мехмат 54
Заочная физико-техническая школа 56

Рецензии, библиография

А. Зайдель. Что умеет микрокалькулятор 58
Ответы, указания, решения 59
Смесь *(39, 45, 48)*

Шахматная страничка

Играют компьютеры *(3 с. обложки)*

IN THIS ISSUE:

Happy New Year! 3
A. Migdal. The fate of neutron stars 4
N. Vasiliev, A. Zelevinski. Chebysheff polynomials and reccurent formulas 12

Kvant's lab

A. Shmelev. New Year's physics fireworks 20

Kvant's problems

Problems M721 — M725; P733 — P737 23
Solutions M681 — M685; P692 — P697 25

Kvant for younger school-children

Problems 35
A. Savin. Rocks and chessboards 36

College applicant's section

V. Tugushev. Electric cicuits with non-linear elements 40

College entrance exams in 1981

Moscow physico-technical institute 46
Moscow electrotechnical communications institute 48

The art of programming

Computer programming correspondance school. Lesson 17 49

Information

All-union math. correspondance school (entrance requirements) 53
Maly Mechmat (entrance requirements) 54
Phys.-tech. correspondence school 56

Book reviews

A. Zaidel. What can microcalculators do? 58
Answers, hints, solutions 59
Miscellaneous *(39, 45, 48)*

The chess page

Computers play *(3rd cover page)*

На первой странице обложки мы публикуем фотографию модели, сконструированной десятиклассником из г. Чебоксары Димой Гороховским по эпюре, которая была приведена на четвертой странице обложки двенадцатого номера «Кванта» за 1979 год

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982

УКАЗ ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

О награждении Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР, Маршала Советского Союза товарища Брежнева Леонида Ильича орденом Ленина и медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза

За выдающиеся заслуги перед Коммунистической партией и Советским государством в деле укрепления экономического и оборонного могущества Советского Союза, большой личный вклад в достижение победы над немецко-фашистскими захватчиками в годы Великой Отечественной войны, восстановление и дальнейшее развитие народного хозяйства СССР в послевоенный период, неутомимую деятельность в борьбе за мир, за плодотворное руководство коммунистическим строительством и в связи с семидесятипятилетием со дня рождения наградить Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР, Маршала Советского Союза товарища Брежнева Леонида Ильича орденом Ленина и медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза.

Первый заместитель Председателя Президиума Верховного Совета СССР
В. КУЗНЕЦОВ.

Секретарь Президиума Верховного Совета СССР
М. ГЕОРГАДЗЕ.

Москва, Кремль. 18 декабря 1981 г.

С Новым годом!

Наступил новый 1982 год, второй год одиннадцатой пятилетки. Большие надежды связывает с ним советский народ. Предстоит огромная работа по совершенствованию всех звеньев нашего народного хозяйства и переводу его на путь всесторонней интенсификации. Необходимо расширять и углублять научно-техническую революцию, эффективно использовать ее величайшие достижения. Наука теперь является главным источником разнообразных перемен в промышленности и строительстве, на транспорте, в технике связи и сельском хозяйстве. Недаром в отчетном докладе XXVI съезду КПСС Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев сказал такие слова: «Партия коммунистов исходит из того, что строительство нового общества без науки просто немыслимо».

В нашей стране уделяется огромное внимание успешному развитию науки и подготовке научных кадров. «Квант» стремится внести свой вклад в решение этой важной государственной задачи — помочь воспитать побольше талантливых молодых исследователей.

В целом облик нашего журнала остается и в этом году прежним. Тем не менее некоторые его разделы будут выглядеть несколько по-иному.

В 1982 году вы найдете в «Кванте» больше статей по различным разделам современной физики и математики, которыми обычно открывается каждый номер журнала. Больше будет опубликовано и статей по истории науки. Мы намерены рассказать читателям о выдающихся русских ученых М. В. Остроградском, А. М. Ляпунове и К. Э. Циолковском, а также о Гаспаре Монже, Данииле Бернулли и Симеоне Дени Пуассоне.

По иному будет выглядеть раздел «Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1981 году». Прежде всего, в нем будет значительно больше вузов, чем в прежние годы. В каждом из номеров первого полугодия вы увидите варианты вступительных экзаменов в вузы разного профиля — университеты, педагогические институты, технические вузы. Идя навстречу многочисленным пожеланиям наших читателей, мы расскажем также об экзаменах в экономические, пищевые, текстильные и некоторые другие вузы, где физика и математика не являются основными учебными дисциплинами.

Три года журнал «Квант» вел раздел «Искусство программирования», в котором, главным образом, помещались материалы школы юных программистов, организованной новосибирскими учеными. Она нашла своих энтузиастов в самых отдаленных уголках нашей страны и за рубежом. Последние уроки этой школы будут опубликованы в первом полугодии нынешнего года. Затем с сентября журнал начнет публикацию материалов новой одногодичной школы юных программистов.

В № 11 за 1981 год была опубликована небольшая анкета, адресованная читателям. Мы получили много интересных ответов. Благодарим наших читателей и надеемся, что они будут обращаться к нам со своими предложениями и пожеланиями, сообщать об интересующих их проблемах науки, присылать свои вопросы и задачи, активно участвовать в наших конкурсах.

Желаем вам больших успехов в учебе и жизни, наши дорогие читатели!

Эта статья посвящена последним достижениям в бурно развивающейся области современной науки — астрофизике. Автор — известный советский физик-теоретик академик А. Б. Мигдал — выводит читателя на самый передний край исследований, на границу между известным и неизвестным, показывает, как много интересных и важных проблем еще ждут своего решения.

А. Мигдал

Судьба нейтронных звезд

Незнание природы — величайшая неблагодарность
Плиний Старший

Я попытаюсь рассказать о сверхмощных взрывах звезд и о том, как возникают звезды, состоящие из нейтронов. Теория предсказывает, что в таких звездах может происходить еще не обнаруженный на опыте вид ядерных превращений — образование ядерного вещества с плотностью намного большей, чем плотность атомных ядер (а плотность атомных ядер — порядка 10^{14} г/см^3).

Для того чтобы разобраться в этих явлениях, нам придется обращаться ко многим областям физики. Здесь астрономия и теория тяготения переплетаются с физикой элементарных частиц и ядерной физикой. Нам понадобится узнать, что такое «вакуум» и как изменяются свойства пространства вблизи физических тел.

Можно ли об этом рассказать в одной статье так, чтобы читателю все было понятно? Автор не ставил перед собой такой задачи. Главная цель статьи — показать, хотя бы отчасти, ту внутреннюю красоту Вселенной, которая проявляется в богатстве связей между разнородными явлениями.

Предвижу, что не все будет понятно, но считаю, что беды в этом нет. Ведь слово «понимать» имеет много значений — от полной ясности до смутного ощущения. Запаситесь терпением и читайте дальше: самое интересное — в конце.

Ярче ста миллиардов солнц

Уже в древности астрономы заметили, что время от времени внезапно вспыхивают новые сверхъяркие звезды. Такая вспышка была, например, отмечена китайскими астрономами в 1054 году в Крабовидной туманности, входящей в состав нашей Галактики. Сейчас «вспышки сверхновых» хорошо изучены и обнаружены не только в нашей Галактике, но и в других звездных скоплениях. За несколько месяцев сверхновая испускает столько же света, сколько целая галактика, в которую входят десятки или сотни миллиардов солнц. По интенсивности и длительности излучения можно было установить, что полная энергия, выделяющаяся при вспышке сверхновой, составляет $10^{43} \div 10^{45}$ Дж. Между тем тепловая энергия звезды в тысячу раз меньше. Значительно меньше и энергия, которая могла бы выделиться при химических превращениях. Откуда же берется громадная энергия сверхновой? Этот вопрос долго оставался без ответа. Надежды объяснить вспышки сверхновых появились только после открытия ядерных реакций, освобождающих энергию в миллионы раз бо́льшую, чем химические превращения.

Итак, источником энергии сверхновой могли бы быть ядерные реакции, протекающие внутри звезды. Существует, впрочем, еще более мощный источник — это гравитационная энергия звезды. Однако освободить эту энергию можно только с помощью ядерных превращений. Если в ходе ядерных реакций плотность центральной части звезды увеличится, то под действием сил тяготения вещество наружных областей начнет падать к центру, приобретая кинетическую энергию. Иными словами, потенциальная энергия тяготения превратится в кинетическую энергию звездного вещества.

Плотность звезды определяется равновесием между силой тяжести и силой давления вещества звезды. Для того чтобы звезда сжалась, давление должно уменьшиться. Очень сильное уменьшение давления могло бы произойти при образовании нейтронного вещества, когда протоны и электроны превращаются в нейтроны. Попробуем в этом разобраться.

Давление пропорционально кинетической энергии частиц, из которых состоит вещество. При понижении температуры падает кинетическая энергия частиц, и поэтому падает давление. Однако даже при абсолютном нуле температуры кинетическая энергия частиц не равна нулю. Дело в том, что нейтроны, протоны и электроны имеют замечательное свойство — две одинаковые частицы не могут находиться в одном и том же состоянии («запрет Паули»). По этой причине даже при абсолютном нуле температуры частицы не покоятся и обладают различными скоростями — как говорят, разбросаны по скоростям. При этом наибольшую кинетическую энергию имеют легкие частицы. Таким образом, главный вклад в давление в звезде вносят электроны, масса которых приблизительно в две тысячи раз меньше массы протона или нейтрона. Не удивительно, что сила тяжести сжимает нейтронное вещество до гораздо большей плотности, чем обычное вещество, состоящее из атомных ядер и электронов,— ведь при этом легкие частицы заменяются тяжелыми и давление резко падает.

Поэтому, если бы в результате ядерных превращений звезда могла превратиться в нейтронную, то это привело бы к резкому сжатию звезды, и за короткое время освободилась бы громадная энергия, достаточная для объяснения вспышки сверхновой. При таком внезапном сжатии звезды должны возникать могучие упругие волны, идущие от центра. Под их действием наружная часть звезды сбрасывается, превращаясь в горячий газ, который разлетается с громадной скоростью. Свечение этого газа и объясняло бы длительность вспышек сверхновых.

Итак, вспышки сверхновых перестали казаться загадочным явлением — появились надежды объяснить их как следствие сжатия звезды в ходе ядерных превращений.

Но от догадки до прочно установленного утверждения нужно пройти долгий путь сомнений и доказательств.

В 1932 году Джеймс Чедвик открыл нейтрон. Уже два года спустя астрономы Бааде и Цвики сделали предположение, что вспышки сверхновых возникают в процессе рождения нейтронной звезды. Для того чтобы подтвердить или опровергнуть эту догадку, следовало изучить свойства нейтронного вещества и выяснить, может ли оно образоваться внутри звезды. А для этого понадобилось около тридцати лет экспериментального и теоретического исследования ядерной материи.

Что же стало известно в результате этого исследования?

Нейтронная жидкость

Сразу же после открытия нейтрона Л. Д. Ландау высказал мысль, что звезда достаточно большой массы должна состоять из нейтронного вещества. Для образования нейтронного вещества атомные ядра и электроны должны превратиться в нейтроны. Допустим, что звезда состоит из кислорода. В ядре каждого атома кислорода имеется восемь нейтронов и восемь протонов. Восемь протонов ядра и восемь электронов, окружающих атомное ядро кислорода, должны превратиться в восемь нейтронов. Эта реакция энергетически невыгодна — на образование каждого нейтрона надо израсходовать несколько миллионов электрон-вольт. Если масса звезды достаточно велика, процесс образования нейтронов с избытком обеспечивается энергией, выделяющейся при сжатии звезды. В 1937 году Ландау показал, что превращение кислорода в нейтронное вещество делается энергетически возможным уже при массе звезды, составляющей малую долю массы Солнца. Однако такое превращение не может произойти сразу, а только через целую цепь ядерных реакций; каждая из этих реакций требует сравнительно небольшой затраты энергии, которая берется из энергии теплового движения частиц звезды.

Для того чтобы убедительно доказать возможность образования нейтронной звезды, понадобились детальные сведения о ядерных реакциях и особенно о свойствах нейтронного вещества. Эти сведения были получены из анализа свойств атомных ядер и из опытов по рассеянию нейтронов и протонов на ядрах. Так, например, стало известно, что на малых расстояниях притяжение между нуклонами (нейтронами и протонами) сменяется отталкиванием, что затрудняет сжатие нейтронного вещества до плотности, в несколько десятков раз превышающей ядерную плотность. Некоторые из энергетических уровней ядра связаны с его вращением вокруг собственной оси. Измеряя энергии спектральных линий, испускаемых при переходах между такими уровнями, можно определить моменты инерции ядер.

Моментом инерции тела, вращающегося вокруг оси, называют величину, равную

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

где m_i — масса отдельного элемента тела, r_i — расстояние от этого элемента до оси. С помощью момента инерции удобно выражать кинетическую энергию вращающегося тела:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega^2 = I \frac{\omega^2}{2},$$

где $v_i = \omega r_i$ — линейная скорость элемента массы m_i. Из этого выражения видно, что момент инерции при вращательном движении играет такую же роль, какую играет масса при поступательном движении тела.

Если сумма моментов внешних сил, действующих на вращающееся тело, относительно оси вращения равна нулю, то произведение момента инерции на угловую скорость (то есть величина $I\omega$) остается постоянным.

(Здесь и далее текст, напечатанный мелким шрифтом, — примечания редактора.)

Моменты инерции, найденные таким способом, оказались значительно меньше, чем они должны быть у шарика того же радиуса и той же плотности, что и ядро. Это значит, что во вращение вовлекается не все вещество ядра. Следовательно, отдельные части ядра могут двигаться без трения друг относительно друга — ведь трение обязательно вовлекло бы во вращение все вещество. Теоретический анализ экспериментальных данных по моментам инерции ядер позволил автору этой статьи в 1959 году сделать утверждение о том, что нейтронное вещество при ядерной плотности должно быть сверхтекучим, то есть двигаться без трения, вплоть до температур $T \sim 10^{10}$ К.

Итак, физики пришли к выводу, что под большим давлением из обычного вещества должна образоваться нейтронная сверхтекучая жидкость, которая сжимается в звезде до ядерных плотностей. Однако все заключения о свойствах нейтронного вещества были абстрактной игрой ума, поскольку само существование нейтронных звезд оставалось только правдоподобным предположением. Так было вплоть до 1968 года, когда астрономы обнаружили новые объекты, названные пульсарами.

Открытие пульсаров

В 1968 году группа астрономов из Кембриджа открыла звезду с пульсирующим радиоизлучением — пульсар. Уже через год десятки пульсаров были обнаружены многими обсерваториями земного шара. Это открытие стало возможным благодаря развитию радиоастрономии, позволяющей обнаруживать объекты со светимостью в 10^{10} меньше, чем у тех, которые доступны оптическим телескопам.

Пульсары — это звезды, испускающие импульсы радиоизлучения длительностью в $10 \div 30$ мкс, следующие строго периодично с периодом порядка $10^{-2} \div 1$ с. Строжайшая периодичность излучения вместе со сложной формой импульсов навели астрономов, открывших первый пульсар, на мысль о сигналах внеземной цивилизации. Однако, после того как десятки пульсаров обнаружились в разных областях Вселенной, эта мысль отпала сама собой. В самом деле, возникновение жизни — событие крайне маловероятное, и Вселенная не может быть заселена так густо. Предположить же, что инопланетяне дают о себе знать одинаковым способом, просто нелепо. Чем же объясняется поразительно точная периодичность импульсов радиоизлучения пульсаров?

Детальный анализ всех возможных типов периодических движений привел астрофизиков к однозначному заключению: период пульсара соответствует периоду обращения звезды вокруг своей оси.

Следовательно, пульсар — это звезда, вращающаяся с громадной скоростью: за земные сутки она совершает миллионы оборотов. Сейчас мы увидим, что из этого вытекает важнейшее следствие.

Пульсары — нейтронные звезды

Для того чтобы материя звезды не разлеталась при таком быстром вращении, необходимо, чтобы сила тяжести на поверхности звезды превосходила центробежную силу инерции. А это возможно только при очень большой плотности звезды.

Система отсчета, связанная с вращающейся звездой, является неинерциальной. В таких системах помимо «обычных» сил на любое тело действуют силы инерции, которые сообщают телу ускорения (в этой системе) пропорциональные массе тела. Если во вращающейся неинерциальной системе отсчета тело покоится, на него, помимо «обычных» сил, действует центробежная сила инерции, направленная от оси вращения перпендикулярно оси и равная $m\omega^2 r$, где m — масса тела, ω — угловая скорость вращения системы, r — радиус окружности, по которой вращается данное тело.

Так, рассматривая тело, находящееся на экваторе Земли и покоящееся относительно Земли, в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, мы запишем условие, при котором тело не слетает с поверхности Земли, так:

$$|\vec{F}_{т} + \vec{F}_{цб}| = G\frac{Mm}{R^2} - m\omega^2 R = 0$$

Простой расчет показывает, что пульсар с периодом обращения 0,1 с должен иметь плотность больше 10^{10} г/см^3 (проверьте этот расчет самостоятельно). Обычное вещество нельзя сжать до такой громадной плотности. Только нейтронное вещество, которое сжимается до ядерной плотности при массе звезды порядка массы Солнца, может вращаться с угловой скоростью пульсара, не разлетаясь при этом.

Таким образом, физики пришли к заключению, что пульсары и есть те самые нейтронные звезды, существование которых предсказал Ландау.

Подтвердилось и предсказание о сверхтекучести вещества нейтронных звезд. Оказалось, что в некоторых случаях период пульсара внезапно уменьшается. Это явление было названо «сбоем». Уменьшение периода естественно объяснить звездотрясением. Если при звездотрясении звезда внезапно сделается менее сплюснутой, то ее момент инерции уменьшится; тем самым уменьшится и период вращения.

Из определения момента инерции (мы привели его на с 6) следует, что если при звездотрясении звезда становится менее сплюснутой, момент инерции ее уменьшается. Поскольку величина $I\omega$ остается постоянной (ведь звездотрясение происходит в результате внутренних «потрясений», без участия внешних сил), уменьшение момента инерции приводит к увеличению угловой скорости вращения звезды. Значит, период вращения уменьшается.

Однако после начала сбоя, когда звездотрясение уже окончилось, период продолжает уменьшаться еще долгое время. В одном случае это время — несколько суток, в другом — несколько лет. Объяснить столь длительное изменение периода можно, лишь предположив, что после того как наружная часть звезды, состоящая из обычного вещества, ускорила свое движение, нейтронная сердцевина продолжает вращаться с прежней скоростью, и лишь за длительное время скорости сравниваются. Но это означает, что нейтронная сердцевина находится в сверхтекучем состоянии! Ведь при обычном трении скорости выравнялись бы за несколько секунд.

Связано ли образование нейтронных звезд со вспышками сверхновых, как это предполагали Бааде и Цвики?

Некоторые пульсары расположены там, где вспыхивали сверхновые — например, пульсар в Крабовидной туманности. Но в большинстве случаев такой связи нет.

Это означает, что иногда нейтронные звезды рождаются без образования сверхновых; и наоборот, некоторые вспышки возникают в результате ядерных реакций, не приводящих к образованию нейтронной звезды с пульсирующим радиоизлучением, или, быть может, появляются после взрыва нейтронной звезды. Но об этом речь пойдет дальше.

Теперь мы можем приступить к главной теме нашего рассказа — судьбе нейтронной звезды, масса которой растет. Масса звезды может увеличиваться от падения на нее небесных тел и за счет притока вещества от соседних звезд меньшей массы. Рост массы приводит к увеличению плотности в центре звезды.

Как мы увидим, при достаточно большой плотности нейтронная жидкость скачком переходит в новое сверхплотное состояние. При этом выделяется громадная энергия, и звезда взрывается. Причина этого перехода — неустойчивость вакуума в сильных полях. Эти непонятные пока слова имеют очень простой смысл.

Неустойчивость вакуума и пионная конденсация

Что такое вакуум? Не есть ли это просто пустота — пространство, в котором движутся нейтроны, протоны, электроны, кванты?

Оказалось, что это не так. Вакуум, то есть наше физическое пространство,— не просто геометрический объект, а сложная физическая система, обладающая интереснейшими свойствами.

Прежде всего, частицы своим присутствием изменяют окружающее их пространство. Вокруг заряженной частицы появляется электрическое поле, которое нужно понимать как некое состояние вакуума. В таком измененном вакууме появляется сила, действующая на другие заряженные частицы.

Вокруг тяжелых тел изменяются даже геометрические свойства пространства. Так, вблизи Солнца геометрия вакуума хоть и мало, но отличается от евклидовой. Отношение длины окружности к радиусу не равно 2π, как нас учат в школе.

Переменное электрическое поле, создаваемое в вакууме антенной радиопередатчика, вызывает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, приводит к появлению переменного электрического поля уже в более широкой области пространства. Таков механизм распространения в вакууме электромагнитных волн. Но вот самое замечательное свойство вакуума: в пустом пространстве, даже когда поблизости нет никаких реальных частиц и никаких посторонних полей, рождаются и исчезают кванты, электроны, позитроны, пи-мезоны и все другие частицы. Вакуум непрерывно бурлит; в нем появляются и исчезают такие не реальные, а как бы мерцающие или, как говорят физики, «виртуальные» частицы. Для того чтобы виртуальные частицы стали реальными, нужно сообщить им достаточную энергию. Для этого надо, например, столкнуть две реальные частицы, и тогда в пространстве, окружающем место столкновения, виртуальные частицы смогут получить энергию, достаточную для того, чтобы сделаться реальными. Так, два энергичных кванта света, сталкиваясь, могут извлечь из вакуума целый ливень частиц. Для рождения частицы из вакуума требуется затратить энергию, равную или большую ее энергии покоя.

Теперь зададим себе вопрос: что случится с виртуальными частицами, если в вакууме появится сильное поле? Не сделаются ли они реальными?

Допустим, что в некоторой области пространства создано сильное поле — электрическое, гравитационное или ядерное (то есть поле, создаваемое нуклонами). Пусть поле имеет вид потенциальной ямы. Самый простой пример потенциальной ямы — это впадина на поверхности земли. Когда частица попадает извне в потенциальную яму, ее кинетическая энергия увеличивается, как у камня, скатывающегося с горы. Если виртуальная частица в процессе своего появления на свет падает в потенциальную яму, то для ее реального рождения понадобится только часть энергии покоя. Недостающая часть возместится энергией, выигранной при падении. Если потенциальная яма настолько глубока, что кинетическая энергия, освобождающаяся при падении частицы, превышает энергию покоя, то вакуум потеряет устойчивость — в нем будут рождаться реальные частицы. Это будет продолжаться до тех пор, пока поле, создаваемое этими частицами, не сделает дальнейшее рождение невыгодным. Произойдет перестройка вакуума. Аналогом подобной перестройки может служить, например, переход вещества из жидкого состояния в твердое.

Особенно интересное следствие вытекает из перестройки вакуума под действие поля, создаваемого нуклонами. При достаточной плотности нуклонов глубина создаваемой ими ямы делается больше энергии покоя пи-мезонов, и вакуум становится неустойчивым по отношению к рождению этих частиц. В результате рождения пи-мезонов устанавливается такое поле этих частиц, что дальнейшее их рождение делается невозможным из-за отталкивания между ними.

Это явление названо пионной конденсацией. Пионная конденсация сопровождается выделением энергии (подобно тому, как это происходит, например, при замерзании воды). Выигрыш энергии при пионной конденсации мал, пока плотность нуклонов близка к той критической плотности, при которой конденсация началась. Однако при увеличении плотности нуклонов выделение энергии резко возрастает. При достаточно большой плотности выигрыш энергии может превысить работу, которую необходимо произвести, для того чтобы сжать ядерное вещество. Тогда ядерное вещество с большой плотностью будет иметь меньшую энергию, чем менее плотная ядерная материя. Но отсюда следует важное заключение: наряду с обычным состоянием ядерной материи, в котором она находится в атомных ядрах, возможно еще одно состояние — с большей плотностью. Это означает, что помимо обычных атомных ядер могут оказаться устойчивыми необычные сверхплотные ядра. Пока такие ядра не обнаружены. Их поисками заняты физические лаборатории многих стран. Теоретическое исследование пионной конденсации и ее следствий началось в 1971 году с работы автора этой статьи и продолжается до сих пор во многих научных центрах.

Как связана пионная конденсация с интересующей нас судьбой нейтронных звезд?

Пионная конденсация в нейтронной жидкости

Когда плотность в центре нейтронной звезды достигает критического значения $\varrho_к$, соответствующего пионной конденсации, должен наступить драматический поворот в судьбе звезды. Сначала в центре звезды возникает зародыш нового сверхплотного состояния нейтронного вещества. Такое состояние оказывается неустойчивым — по мере увеличения радиуса зародыша освобождается энергия тяготения. В равновесном состоянии значительная часть звезды должна стать сверхплотной. Поэтому сверхплотный зародыш начинает расти — вещество наружных частей звезды с большой скоростью устремляется к границе зародыша. К тому времени, когда радиус сверхплотной сердцевины достигает величины, соответствующей равновесному состоянию, вещество наружных областей продолжает по инерции двигаться, и радиус сердцевины проскакивает свое равновесное значение. Поскольку равновесие нарушено, начинается обратное движение. Таким образом, радиус сверхплотного зародыша сначала резко возрастает, а затем колеблется около значения, сравнимого с радиусом нейтронной звезды. Процесс образования сверхплотной звезды занимает тысячные доли секунды. При этом переходе выделяется энергия, в несколько раз бо́льшая той, которая освобождается при образовании нейтронной звезды. Можно ожидать, что под действием упругих волн, возникающих при колебании радиуса сверхплотной сердцевины, наружная часть звезды выбрасывается в сильно нагретом состоянии, и картина взрыва напоминает вспышку сверхновой.

Таким образом, помимо вспышек, вызванных ядерными реакциями и предшествующих образованию нейтронной звезды, возможны вспышки другой природы, возникающие в результате пионной конденсации и последующего взрыва нейтронной звезды.

К каким последствиям может привести взрыв нейтронной звезды?

Черные дыры

Если заключение о взрыве нейтронной звезды, вызванном пионной конденсацией, будет убедительно доказано теоретически или подтвердится наблюдениями, это будет означать, что нейтронные звезды не могут иметь плотность, превышающую критическое значение $\varrho_к$ (как показывает расчет, $\varrho_к$ имеет тот же порядок, что и ядерная плотность). Между тем, принципиально важно знать, существуют ли звезды с плотностью, значительно превышающей ядерную.

Согласно общей теории относительности при массе звезды, превышающей 2—3 массы Солнца, возникает гравитационная неустойчивость — звезда начинает сжиматься, и, после того как ее радиус сделается меньше некоторого критического значения (гравитационный радиус), никакие силы отталкивания не смогут удержать материю от падения к центру — сжимающее давление сил тяжести превышает расталкивающее давление частиц вещества. Это явление называют коллапсом звезды. Оно заканчивается образованием нового объекта — черной дыры. Черная дыра проявляет себя практически только как источник гравитационного поля. Тело, попадающее в поле черной дыры, падает к центру дыры и перестает быть видимым. Какую бы энергию ни имела частица, она не может вырваться из черной дыры — ведь с увеличением энергии частицы, согласно Эйнштейну, увеличивается ее масса, в следовательно, и притяжение к черной дыре. Из черной дыры не только нельзя отправить космический корабль, но даже нельзя подать световой сигнал. В двойных звездах материя легкой звезды перетекает к более тяжелой. Анализ излучения перетекающего вещества позволяет в нескольких случаях заподозрить, что тяжелый партнер — черная дыра.

Но если бы оказалось, что нейтронные звезды в результате взрыва, вызванного пионной конденсацией, разбрасывают материю уже при ядерных плотностях, то черные дыры не могли бы образоваться.

Другое явление, вызывающее интерес к сверхплотной материи, состоит в том, что при достаточно большой плотности нейтронное вещество может перейти в новое состояние — кварковую материю.

Еще один переход

За последние годы физики пришли к заключению, что все сильно взаимодействующие элементарные частицы — такие частицы называют адронами — состоят из нескольких типов кварков — частиц с дробным электрическим зарядом, равным —1/3 или +2/3 от заряда электрона. Нейтрон и протон (а они — адроны) состоят из трех кварков, а пи-мезон — из кварка и антикварка. Кварки, по-видимому, не существуют как свободные частицы. До сих пор все попытки обнаружить отдельный кварк давали отрицательный результат. Но зато на малых расстояниях между ними их свойства настолько хорошо изучены, что сейчас у большинства физиков нет сомнения в реальности этих частиц. Из анализа опытов по рассеянию адронов друг на друге удалось установить, что при сближении кварков взаимодействие между ними уменьшается. Это явление было названо асимптотической свободой.

Известны частицы, которые существуют длительное время в связанном состоянии, но на свободе живут недолго. Самый простой пример — это нейтрон, который в дейтроне живет неограниченно долго, а в свободном состоянии распадается за десять минут. Причина «невылетания» кварков другая. Когда расстояние между кварками делается больше радиуса адрона, притяжение между ними резко возрастает, так что они не могут удалиться друг от друга на большое расстояние, какую бы энергию они ни получили при столкновении.

Когда сталкиваются два энергичных адрона, содержащиеся в них кварки не вылетают, а превращаются в другие нуклоны или пи-мезоны.

Для наглядности можно себе представить, что адрон — это нечто вроде мешка, в котором кварки двигаются свободно, но за пределы которого они не могут удалиться. Если сблизить два нуклона на расстояние, меньшее размера мешка, то получится один общий мешок, в котором будет уже шесть кварков. При большой плотности нейтронного вещества, когда расстояния между нейтронами сравнимы с радиусом мешка, нейтроны распадаются на свои составные части — нейтронная материя превращается в кварковую. Как показывают расчеты, звезда делается кварковой, когда ее плотность в 10—20 раз превышает ядерную. При этом переходе выделяется энергия, и может произойти еще один взрыв звезды.

Осуществляется ли в природе кварковое состояние звезды? Или нейтронная материя уже при ядерной плотности взрывается и разбрасывается? Возможно ли, несмотря на это, образование черных дыр? Уже тот факт, что мы можем ставить такие вопросы, показывает, как далеко мы продвинулись в понимании структуры нейтронных звезд.

У каждого из нас есть свое ощущение красоты Вселенной. Удалось ли мне добавить новые краски к вашей картине мира, читатель?

Н. Васильев, А. Зелевинский

Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения

Широко распространен взгляд на математика как на человека, беспрерывно занимающегося сложнейшими арифметическими вычислениями (в более утонченном варианте — выписывающего и преобразующего длинные и сложные формулы). Читателям «Кванта» хорошо известно, что бывает красивая и важная математика «без формул», однако доля истины в таком взгляде все же есть. Умение взглянуть на формулы с неожиданной точки зрения, преобразовывать их, открывать новые, находить связи между ними — важная часть работы математика. В этой статье мы рассмотрим каскад любопытных формул, связанных со знаменитой последовательностью «многочленов Чебышева» (некоторые из этих формул предлагалось доказать в задаче М488 — «Квант», 1978, № 2), а также общие математические идеи, которые стоят за ними.

Введение. Две замечательные последовательности многочленов

Многочлены, о которых будет идти речь, встречаются во многих задачах анализа, вычислительной математики, алгебры. Они появились в 1854 году, в работе русского математика Пафнутия Львовича Чебышева в связи с таким вопросом.

Рассмотрим всевозможные многочлены данной степени n со старшим коэффициентом 1; какой из них *наименее уклоняется от нуля* на отрезке $[-1;\ 1]$, то есть для какого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ величина

$$c_n=\max_{[-1;\ 1]}|F_n(x)|$$

наименьшая?

Оказывается, это $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ — многочлен из левой колонки таблицы 1, деленный на старший коэффициент. Например, среди квадратных трехчленов — это $x^2-\frac{1}{2}$ (его *отклонение от нуля* c_2 равно $\frac{1}{2}$, а у любого другого квадратного трехчлена x^2+px+q оно больше); среди кубических многочленов — это $x^3-\frac{3}{4}x$ (для него $c_3=\frac{1}{4}$); и вообще отклонение от нуля $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ многочлена $\tilde{T}_n(x)$ меньше, чем у любого другого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ степени n.*).

Таблица 1. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Если умножить каждый из многочленов на $2x$ и вычесть предыдущий (стоящий над ним), получится следующий.

n	T_n	U_n
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2-1$	$4x^2-1$
3	$4x^3-3x$	$8x^3-4x$
4	$8x^4-8x^2+1$	$16x^4-12x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$32x^5-32x^3+6x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	. . . .
	. . . .	

Если же отклонение от нуля измерять иначе — заменить выражение c_n выражением

$$l_n=\int_{-1}^{1}|F_n(x)|\,dx,$$

то наименее уклоняющимся от нуля многочленом n-й степени со старшим коэффициентом 1 окажется многочлен $\widetilde{U}_n(x)=\frac{1}{2^n}U_n(x)$, где $U_n(x)$ берется из правой колонки таблицы 1: для многочлена $U_n(x)$ величина l_n (голубая площадь на рисунке 1) равна 2; стало быть, для $\widetilde{U}_n$ она равна $1/2^{n-1}$; для любого другого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ она больше (теорема А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева).

Эти факты связаны с такими характеристическими свойствами *многочленов Чебышева:*

1°. *Значения многочлена T_n во всех точках экстремума и в концах отрезка $[-1;1]$ одинаковы по модулю. Площадь каждого из $n+1$ кусочков, ограниченных графиком многочлена $U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$, осью Ox и прямыми $x=\pm 1$, одна и та же* (рис. 1).

(Подобными свойствами обладают лишь многочлены, полученные из равенств $y=U_n(x)$ и $y=T_n(x)$ линейной заменой переменных x и y.)

Свойство 1° вытекает из основных соотношений

2°. $T_n(\cos\varphi)=\cos n\varphi,\quad \sin\varphi\cdot U_{n-1}(\cos\varphi)=\sin n\varphi.$

---

*) Здесь мы доказывать этого не будем. Элементарное доказательство можно найти в [1] — первой книге из списка литературы в конце статьи.

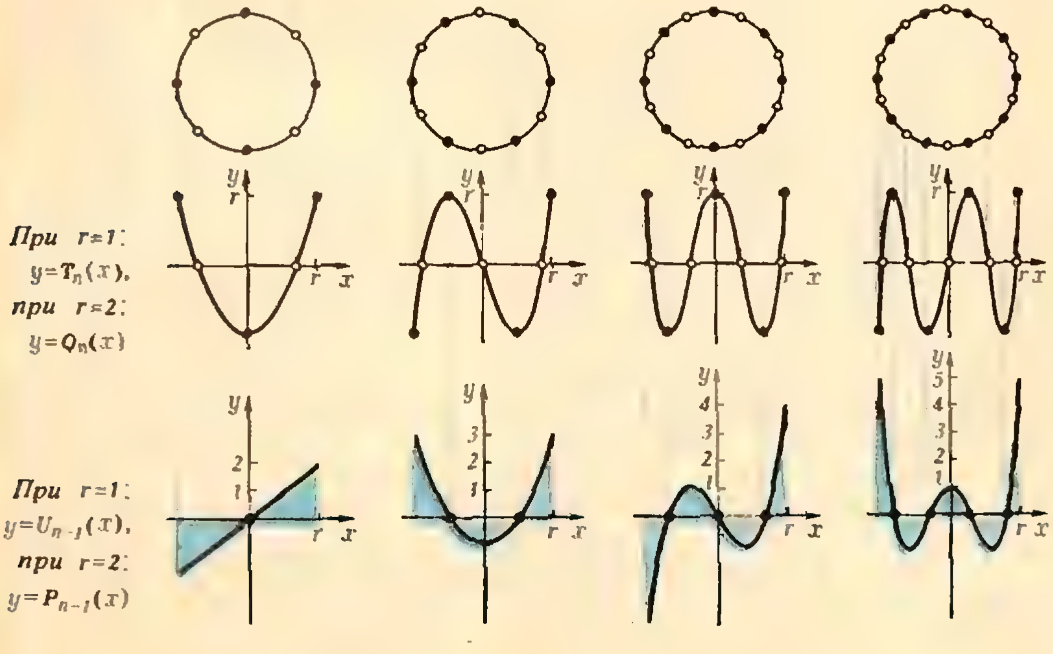


Рис. 1. Если прозрачный лист бумаги $0<x<2\pi r$, $-r<y<r$ с нарисованным на нем графиком $y=r\cos nx$ скрутить в цилиндр (диаметра и высоты $2r$) и посмотреть на него сбоку так, чтобы графики на передней и задней половинках совместились, мы увидим график n-го многочлена Чебышева первого рода. Эти графики при $n=2,3,4,5$ изображены в верхнем ряду (при выборе масштаба $r=1$ получаются графики $y=T_n(x)$, при $r=2$ — графики $y=Q_n(x)$ — см. упражнение 3). В нижнем ряду под n-м многочленом изображена его производная, деленная на n; это — $(n-1)$-й многочлен Чебышева второго рода; у него все n голубых фигурок имеют одинаковую площадь.

В дополнение к тригонометрическим формулам 2°, которые определяют значения многочленов T_n и U_n при $|x| \leqslant 1$, для $|x| > 1$ имеются совершенно иные на вид тождества:

3°.
$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$
$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Корни многочленов T_n и U_n видны из следующей пары тождеств:

4°.
$$T_n(x) = 2^{n-1}\left(x-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right),$$
$$U_n(x) = 2^n\left(x-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x-\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Таким образом, корни и точки экстремума многочлена $T_n(x)$ — проекции вершин правильного $4n$-угольника с диаметром $[-1; 1]$ на этот диаметр (рис. 1).

Ниже мы докажем, наряду с другими, соотношения 2°—4° и проиллюстрируем на их примере некоторые важные методы алгебраических преобразований.

За определение многочленов Чебышева можно было бы принять любую из написанных выше формул, но нам удобнее положить в основу простое рекуррентное соотношение между ними, которое описано в подписи к таблице 1, и вывести из него все формулы.

Ниже мы предпочитаем иметь дело с многочленами, получающимися из T_n и U_n изменением масштаба (см. рис. 1): $P_n(x) = U_n(x/2)$, $Q_n(x) = 2T_n(x/2)$; ту роль, которую для T_n и U_n играет отрезок $[-1; 1]$, будет играть теперь отрезок $[-2; 2]$. Новые многочлены хороши тем, что имеют целые коэффициенты, а их старшие коэффициенты равны 1. (Разумеется, формулы перехода, переписанные в «обратном» виде: $P_n(2x) = U_n(x)$, $Q_n(2x) = 2T_n(x)$, — позволяют в любой момент вернуться к многочленам U_n и T_n.) Как правило, мы будем, доказывая что-то для P_n, предлагать аналогичные свойства Q_n читателю в качестве упражнений. Призываем его вооружиться карандашом и бумагой и проделывать подробно все выкладки, причем сначала — для конкретных небольших значений $n = 2, 3, 4, \ldots$ (пока все не станет ясным).

Рекуррентные соотношения и индукция

Положим $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ и
$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x). \qquad (1)$$

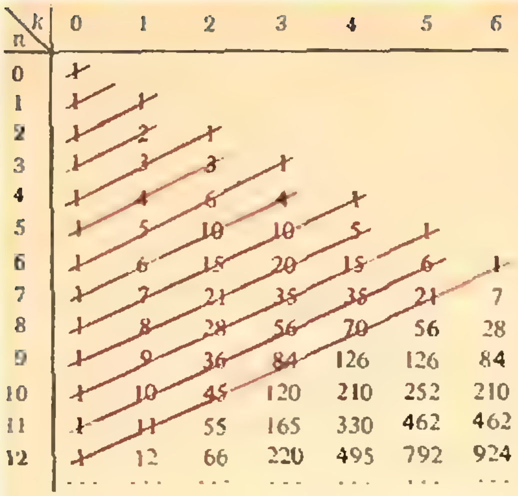
Выпишем несколько первых членов этой последовательности. Вслед за $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$ идут

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= x^2-1,\\
P_3(x) &= x(x^2-1)-x = x^3-2x,\\
P_4(x) &= x(x^3-2x)-(x^2-1) = x^4-3x^2+1,\\
P_5(x) &= x(x^4-3x^2+1)-(x^3-2x) = x^5-4x^3+3x
\end{aligned}$$

и т. д. (для многочленов до P_{12} вы можете проверить результаты по таблице 2).

Многочлены $P_n(x)$ возникают в разных ситуациях. Рассмотрим, например, дроби

$$R_1(x) = x,\quad R_2(x) = x-\frac{1}{x},\quad R_3(x) = x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}},$$
$$R_4(x) = x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}},\quad R_5(x) = x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}},\ldots$$



k n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 2. Треугольник Паскаля. О свойствах биномиальных коэффициентов, составляющих этот треугольник, подробно рассказано в брошюре [7]. Числа, стоящие на n-й красной диагонали, взятые с чередующимися знаками, — коэффициенты многочленов $P_n(x)$; про их сумму — со знаками и без — см. упражнения 6а) и 8в).

Подобные «многоэтажные» (так называемые *цепные*) дроби — полезный инструмент для различных задач о приближениях чисел и функций; ими, кстати говоря, тоже занимался П. Л. Чебышев.

После преобразований получается

$$R_2(x) = \frac{x^2-1}{x}, \quad R_3(x) = \frac{x^3-2x}{x^2-1},$$

$$R_4(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^3-2x}, \quad R_5(x) = \frac{x^5-4x^3+3x}{x^4-3x^2+1}, \ldots$$

(проверьте!). Мы видим, что числители и знаменатели в стандартной записи этих дробей — как раз многочлены $P_n(x)$.

Другой пример: рассмотрим функцию $\sin n\varphi$ и постараемся выразить ее через $\sin\varphi$ и многочлен от $\cos\varphi$:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = \sin\varphi\cdot(4\cos^2\varphi-1),$$
$$\sin 4\varphi = \sin\varphi(8\cos^3\varphi-4\cos\varphi)$$

(проверьте!). Оказывается, $\sin n\varphi = \sin\varphi\cdot P_{n-1}(2\cos\varphi)$ для всех $n \geqslant 1$; другими словами, при $\sin\varphi \neq 0$

$$P_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Полученные соотношения нетрудно получить с помощью метода математической индукции и формулы (1). Действительно, $R_{n+1}(x) = x - \frac{1}{R_n(x)}$. Поэтому, если предположить, что для некоторого n

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$

то из соотношения (1) легко получить аналогичное равенство для n, увеличенного на 1:

$$R_{n+1}(x) = x - \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

что и требуется.

Аналогично для синусов: если предположить, что при $k=n-1$ и $k=n$

$$\sin(k+1)\varphi = \sin\varphi\cdot P_k(2\cos\varphi),$$

то из (1) следует

$$\sin\varphi\cdot P_{n+1}(2\cos\varphi) = 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot P_n(2\cos\varphi) - \sin\varphi\cdot P_{n-1}(2\cos\varphi) =$$
$$= 2\cos\varphi\cdot\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = \sin(n+2)\varphi;$$

мы воспользовались тождеством $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha)$.

(Заметим, что мы провели индуктивный переход не от n к $n+1$, как обычно, а от $n-1$ и n к $n+1$; при этом необходимо отдельно проверить первые два равенства при $n=0$ и $n=1$.)

Упражнения

1. Докажите с помощью индукции и рекуррентного соотношения (1), что при $|x|>2$ справедливо тождество

$$P_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-4})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2-4}}. \tag{3}$$

(Мы еще к нему вернемся.)

2. Докажите, что а) $P_n(2)=n+1$, б) $P_n(-2)=(-1)^n\cdot(n+1)$. (Сделайте это тремя способами: с помощью (1), а также переходя к пределу в равенстве (2) при $\varphi\to 0$ и $\varphi\to\pi$ и в равенстве (3) — при $x\to\pm 2$.)

3. Рассмотрим последовательность многочленов $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., удовлетворяющую соотношению (1) и начальным условиям $Q_0(x)=2$, $Q_1(x)=x$. Выпишите первые 6 многочленов $Q_n(x)$ Докажите тождества

а) $$Q_n(x)/Q_{n-1}(x)=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x}}}}$$ ($n-1$ минус);

б) $2\cos n\varphi=Q_n(2\cos\varphi)$; (2′)

в) при $|x|>2$

$$Q_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-4})^n+(x-\sqrt{x^2-4})^n}{2^n}$$

4. Докажите, что любая последовательность многочленов $R_0(x)$, $R_1(x)$, ..., удовлетворяющая соотношению (1), выражается через последовательность $(P_n(x))$ по формуле

$$R_n(x)=R_1(x)\cdot P_{n-1}(x)-R_0(x)\cdot P_{n-2}(x).$$

В частности, $Q_n(x)=xP_{n-1}(x)-2P_{n-2}(x)=P_n(x)-P_{n-2}(x)$. Выведите отсюда все тождества из упражнения 3.

Корни многочленов и произведения

Многие интересные формулы, в которых участвуют симметричные выражения от n чисел (или букв), оказываются легко объяснимыми, если эти числа рассматривать как корни некоторого многочлена степени n. Для n чисел $\gamma_k=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ (где $k=1,2,\ldots,n$) таким многочленом служит наш $P_n(x)$. В самом деле, подставляя в (2) вместо φ значения $\frac{\pi}{n+1}$, $\frac{2\pi}{n+1}$, ..., $\frac{n\pi}{n+1}$, мы видим, что числа $\gamma_k=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ — корни многочлена $P_n(x)$. Тут нам понадобится следствие из *теоремы Безу: если γ — корень многочлена $F(x)$, то $F(x)$ делится на $x-\gamma$.* (В самом деле, заменив переменную x на $y=x-\gamma$, мы получим многочлен $\bar F(y)=F(x-\gamma)$, у которого есть корень $y=0$, а такой многочлен, очевидно, делится на y*).) Наш многочлен $P_n(x)$ должен делиться на каждый из двучленов $x-\gamma_k$, а значит — и на их произведение; поскольку он имеет степень n и старший коэффициент 1, он просто равен произведению $\prod\limits_{1<k<n}(x-\gamma_k)$. Итак,

$$P_n(x)=\prod_{1<k<n}\left(x-2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right). \tag{4}$$

Упражнение 5. а) Докажите тождество

$$Q_n(x)=\prod_{1<k<n}\left(x-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right). \tag{4′}$$

б) Проверьте его и тождество (4) для $n=2$, 3, 4 и 5.

---

*) Подробнее о теореме Безу и разложении на множители многочленов см [2]

Приведем одно любопытное тождество, которое вытекает из сопоставления формул (4) и (2).

Вычислим двумя способами $P_{2m}(0)$ при $m>0$ и приравняем полученные выражения.

С одной стороны, из (2) получаем

$$P_{2m}(0)=P_{2m}\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)/\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)=(-1)^m$$

С другой стороны, согласно (4),

$$P_{2m}(0)=\prod_{1\leqslant k\leqslant 2m}\left(-2\cos\frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Заменив каждое $\cos\frac{k\pi}{2m+1}$ при $m+1\leqslant k\leqslant 2m$ на $\left(-\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$, получим

$$P_{2m}(0)=(-1)^m\cdot\left[2^m\cdot\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}\right]^2.$$

Но выражение в квадратных скобках положительно, поскольку в произведение входят косинусы только острых углов; поэтому оно равно 1, то есть

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}. \qquad (5)$$

Приведем красивую «словесную» формулировку (5): *при $m>0$ среднее геометрическое косинусов острых углов, кратных $\frac{\pi}{2m+1}$, равно $\frac{1}{2}$.*

Упражнения

6. а) Найдите $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $Q_n(1)$, $Q_n(-1)$.

Докажите похожие на (5) равенства:

б) $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\sin\frac{k\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$ $(m\geqslant 1)$;

в) $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2m+1}=\sqrt{2m+1}$ $(m\geqslant 1)$;

г) $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4m}=\frac{\sqrt{2}}{2^m}$ $(m\geqslant 1)$.

7. Выясните, при каких m и n
а) многочлен P_n делится на P_m;
б) многочлен Q_n делится на Q_m.

Производящие функции, степенные ряды и коэффициенты

В этом разделе мы познакомим вас с очень плодотворным методом, широко применяемым в самых различных разделах математики — анализе, комбинаторике, теории вероятностей, — с *методом производящих функций*. Этот метод позволяет иногда собрать отдельные члены последовательности, как «кирпичи», в одно целостное «здание» и получить информацию сразу обо всей последовательности.

Пусть нам дана последовательность a_0, a_1, a_2, ... Назовем ее *производящей функцией* выражение

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n.$$

Такие выражения математики называют *формальными степенными рядами*. Эти ряды можно складывать, вычитать и перемножать как обычные многочлены, можно делить один ряд на другой (если свободный член ряда-делителя отличен от 0), любой ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать — и все эти операции можно использовать, чтобы получать новые последовательности из уже изученных. Часто оказывается возможным из рекуррентного соотношения, которым определена последовательность, найти простую формулу для ее производящей функции, и наоборот — из производящей функции извлечь формулу или соотношения для членов последовательности.

Для конечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ производящей функцией будет многочлен $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Например, многочлен $f_n(z)=(1+z)^n$ служит производящей функцией для *биномиальных коэффициентов* $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ — членов n-й строки треугольника Паскаля (таблица 2):

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k z^n = (1+z)^n. \tag{6}$$

Продифференцировав это тождество k раз и заложив затем $z=0$, найдем $C_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)/1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$.

Раскрывая скобки и выделяя коэффициенты при z^m в очевидном тождестве $(1+z)(1+z)^n=(1+z)^{n+1}$, записанном в виде

$$(1+z)\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k z^k\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} C_{n+1}^k z^k,$$

получим важное соотношение $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

Среди бесконечных последовательностей особенно простую, легко «сворачивающуюся» производящую функцию имеет геометрическая прогрессия $b_0=b$, $b_n=qb_{n-1}$. Заменив в сумме $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_nz^n=b+\sum_{n\geqslant 1} b_nz^n$ каждое b_n на qb_{n-1}, получим $f(z)=b+qz\sum_{n\geqslant 1} b_{n-1}z^{n-1}=b+qzf(z)$, откуда $f(z)(1-qz)=b$, то есть

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_nz=\frac{b}{1-qz}. \tag{7}$$

Это, конечно, известная формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии (при $|qz|<1$). Но тем же приемом можно получить и производящую функцию для нашей последовательности многочленов $P_n(x)$.

Положим $\Phi(z)=\sum_{n\geqslant 0} P_n(x)z^n=1+xz+\sum_{n\geqslant 2} P_n(x)z^n$. (Здесь x играет роль параметра и ниже мы для краткости вместо $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$,... будем писать P_n, P_{n-1},...) Согласно (1), заменим каждое P_n при $n\geqslant 2$ на $xP_{n-1}-P_{n-2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=1+xz+\sum_{n\geqslant 2} xP_{n-1}z^n-\sum_{n\geqslant 2} P_{n-2}z^n=\\ &=1+xz+xz\cdot\sum_{n\geqslant 2} P_{n-1}z^{n-1}-z^2\cdot\sum_{n\geqslant 2} P_{n-2}z^{n-2}=\\ &=1+xz+xz(\Phi(z)-1)-z^2\Phi(z).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(z)\cdot(z^2-xz+1)=1$ и

$$\Phi(z)=\frac{1}{z^2-xz+1}. \tag{8}$$

В этой простой формуле скрыта вся хитрая последовательность многочленов P_n, которой мы до сих пор занимались! Отдельные P_n, спрятанные в ней, мы «вытащим» двумя разными способами.

1) При $|x|>2$ квадратное уравнение $z^2-xz+1=0$ имеет два корня:

$$u=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2},\qquad v=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}. \tag{9}$$

Из $z^2-xz+1=(z-u)(z-v)$, учитывая $uv=1$, получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{(u-z)(v-z)}=\left(\frac{1}{v-z}-\frac{1}{u-z}\right)\frac{1}{u-v}=$$

$$=\left(\frac{u}{1-zu}-\frac{v}{1-zv}\right)\frac{1}{u-v}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v}z^n,$$

то есть $P_n(x)=(u^{n+1}-v^{n+1})/(u-v)$; это формула (3).

2) Найдем из (8) отдельные коэффициенты каждого многочлена $P_n(x)$. Делается это так:

$$\Phi(z)=\frac{1}{1-(xz-z^2)}=\sum_{k>0}(xz-z^2)^k=\sum_{k>0}\Big(\sum_{0<i<k}(-1)^iC_k^ix^{k-i}z^{k+i}\Big)=$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}z^n\Big(\sum_i(-1)^iC_{n-i}^i\cdot x^{n-2i}\Big)$$

(мы воспользовались формулами суммы бесконечной геометрической прогрессии (7), бинома Ньютона (6) и выделили коэффициент при z^n, который и есть нужный нам $P_n(x)$). Следовательно,

$$P_n(x)=\sum_i(-1)^iC_{n-i}^ix^{n-2i} \tag{10}$$

(например: $P_6(x)=C_6^0x^6-C_5^1x^4+C_4^2x^2-C_3^3=x^6-5x^4+6x^2-1$).

Конечно, доказать готовые формулы (3) и (10) можно без производящих функций — самое замечательное, как они возникли, почти сами собой, из короткой формулы (8).

Обоснование всех действий с бесконечными рядами, которые мы производили — а оно, разумеется, необходимо, — можно было бы провести, либо заметив, что при небольших по модулю числовых значениях z все рассматриваемые ряды сходятся (как (7) при $|z|<1/|q|$), то есть представляют настоящие функции от z, либо проверив, что для определенных формально операций сложения, умножения и т. д. (каждый коэффициент ряда выражается через конечное число других, а z — просто буква!) выполнены все обычные законы. Подробнее с методом производящих функций и степенными рядами можно познакомиться по книгам [3], [4], [6].

Упражнения

8. Рассмотрим последовательность *чисел Фибоначчи*

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}.$$

а) Докажите, что ее производящая функция равна $\frac{z}{1-z-z^2}$. Выведите отсюда

б) *формулу Бине*

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(другой вывод этой формулы см. в [5]).

в) Докажите тождество $u_n=\sum_j C_{n-j-1}^j$.

9. а) Найдите производящую функцию для последовательности многочленов $Q_n(x)$ из упражнения 3 и докажите с ее помощью, что (при $|x|>2$)

$$Q_n(x)=u^n-v^n,$$

где u и v определены формулами (9) (в этом заключалось упражнение 3 в)).

б) (Для тех, кто знаком с комплексными числами; см. [1]). Проверьте, что формулы (3) и (3′) при $|x|<2$ превращаются в формулы (2) и (2′). (Указание. $u=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $v=\cos\varphi-i\sin\varphi$, если $x=2\cos\varphi$.)

Литература

1. А. М. Яглом и И. М. Яглом. «Неэлементарные задачи в элементарном изложении». («Библиотека математического кружка», выпуск 5) (М., Гостехтеоиздат, 1954); задачи 130—134.

2. «Избранные вопросы математики» (факультативный курс 10), раздел «Комплексные числа и многочлены» (М., «Просвещение», 1980).

3. Д. Пойа, Г. Сеге. «Задачи и теоремы из анализа» (М., «Наука», 1978).

4. Анри Картан. «Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных» (М., «ИЛ», 1963).

5. Н. Н. Воробьев. «Числа Фибоначчи» («Популярные лекции по математике», выпуск 6) (М., «Наука», 1978).

6. Н. Я. Виленкин. «Комбинаторика» (М., «Наука», 1969).

7. В. А. Успенский. «Треугольник Паскаля» («Популярные лекции по математике», выпуск 43) (М., «Наука», 1979).

Физика — наука экспериментальная. Каждое физическое исследование начинается с наблюдения и изучения какого-либо природного явления и заканчивается сравнением теории с результатами эксперимента.

Многие законы и явления природы в основе своей не так уж сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Галилей открыл законы падения тел, наблюдая за тем, как они падали с вершины Пизанской башни. Ньютон установил, что солнечный свет является сложной смесью различных цветов, с помощью простой стеклянной призмы. Поразительно простыми, но необычайно глубокими по содержанию и выводам были многие опыты Фарадея.

Конечно, сегодня очень мало надежды на то, что с подручными средствами можно открыть новый закон природы. Физикам наших дней нужны очень сложные экспериментальные установки — ускорители заряженных частиц, атомные реакторы, электронные и ионные микроскопы и т. п. Но многое из того, что уже известно науке, можно самому проверить в простых домашних экспериментах. Движение маятников, рост кристаллов, дифракция и интерференция волн, поверхностное натяжение или сухое трение — все это можно исследовать простыми, подручными средствами. Деревянные кубики или шары, лист бумаги, швейная игла, мыльный пузырь или струя воды из крана, не говоря уже о компасе и карманном фонаре, — все это можно использовать для разнообразных и поучительных физических экспериментов. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям. Они помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают наблюдательность и сообразительность.

Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести простые, но весьма поучительные эксперименты, не требующие специального лабораторного оборудования. Из писем читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. д.). При этом у них возникает много неожиданных и интересных вопросов, с которыми они обращаются в «Квант».

При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго соблюдать рекомендуемые в статьях меры предосторожности.

Мы надеемся, что Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить навыки исследователей природы.

А. Шмелев

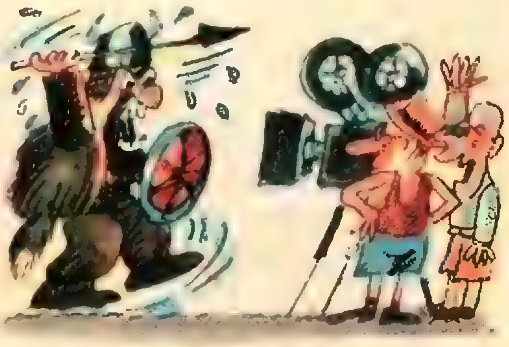
Новогодний физический фейерверк

Уже несколько раз в Лаборатории «Кванта» публиковались задачи-вопросы из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк» (см. «Квант», 1980, №№ 11 и 12). Ответы на многие из них связаны с проведением опытов или с наблюдениями.

Однако данная публикация отличается от предыдущих. Во-первых, чтобы фейерверк получился новогодним, специально выбраны те опыты, которые легко провести зимой. Во-вторых, текст Уокера существенно дополнен: приведены любопытные истории, связанные с основной темой задачи, и описаны дополнительные подготовительные эксперименты. Наконец, в-третьих, было решено не публиковать ответы сразу, а подождать писем читателей.

Когда мы идем по снегу

Многие, наверное, видели фильм «Александр Невский». Но, возможно, не все знают, что основной эпизод картины — Ледовое побоище — снимался...летом. Жара достигала тридцати градусов, а надо было показать снег и лед на Чудском озере. Однако выход был найден: большую площадку около Мосфильма засыпали смесью нафталина и соли. Когда актеры шли по такому «снегу», он



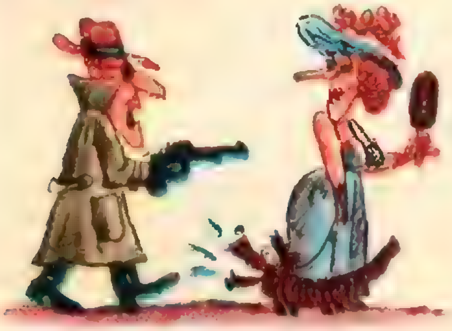
скрипел как настоящий в сильный мороз.

Можно легко повторить этот опыт, насыпав ровным слоем на тарелку сахарный песок или соль. Нажмите ложкой на такой слой и вы услышите слабый скрип. Попробуйте смочить сахар или соль или слегка расплавить сахарный песок (например, на сковородке) — скрип прекратится.

Теперь предоставим слово Уокеру: «Иногда снег скрипит под ногами, но это бывает лишь в те дни, когда температура воздуха существенно ниже нуля. Что создает этот звук, и почему его возникновение зависит от температуры?»

Тайна мороженого

Когда впервые появилось мороженое, способ его приготовления охранялся как строжайший секрет. Напрасно при многих европейских дворах пытались использовать снег или лед для замораживания смеси из сливок, сахара и фруктовых соков. Смесь охлаждалась, но не замерзала. Пришлось прибегнуть к средству, которое мы теперь называем промышленным шпионажем. Что же выяснилось?



«Когда моя бабушка делает дома мороженое, — пишет Уокер, — она обкладывает сосуд для мороженого льдом, а лед посыпает солью. Зачем она сыпет соль?»

Итак, все дело в обычной соли. Проделайте ряд простых опытов, прежде чем ответить Уокеру. Возьмите снег или истолченный лед и постепенно добавляйте к ним соль, перемешивая смесь. (Приятно, но не обязательно, чтобы опыт сопровождался приготовлением мороженого.) Оказывается, температуру такой смеси можно понизить до —20°C.

Чаще всего для охлаждения используют поваренную соль $NaCl$. Но подойдут и более редкие вещества: KCl, $NaNO_3$ и т. п. «Чемпионом» по понижению температуры оказывается $CaCl_2$. Смешав 42 г этой соли со 100 г истолченного льда, можно получить температуру —55°C!

А каковы результаты ваших опытов? И что ответить Уокеру?

Какая вода замерзнет быстрее?

«В холодных странах, таких, как Канада или Исландия, хорошо известно, что горячая вода, выставленная в мороз на улицу, замерзает скорее, чем холодная. Возможно, вам это покажется вздором, однако это отнюдь не бабушкины сказки: даже Фрэнсис Бэкон в свое время отмечал данный факт.

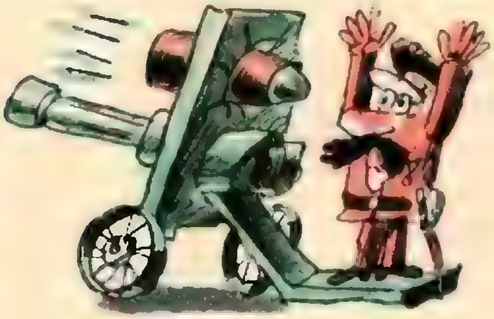
Наполните несколько сосудов различной формы теплой и холодной водой и поставьте их в морозный день за окно... И не удивляйтесь, если в каком-либо из сосудов теплая вода замерзнет раньше, чем холодная, а попытайтесь объяснить, почему?» (Дж. Уокер).

К этому трудно что-либо добавить; кроме, быть может, некоторых советов: в качестве сосудов различной формы возьмите бутылки с узкими горлышками и широкие банки. И еще одно: подумайте, как изменится температура жидкости, если понизить давление над ее поверхностью и, тем самым, дать возможность жидкости испаряться более интенсивно. (Можно провести и соответствующий эксперимент, используя для понижения давления обычный пылесос.)

На катке

Чтобы уменьшить трение, в технике применяются смазки. Эту роль могут выполнять различные материалы, иногда самые, казалось бы, неподходящие. Для примера расскажем о случае, когда роль смазки сыграла... сталь.

В конце прошлого века английский промышленник Гарвей прислал в Россию образцы новых броневых плит для защиты кораблей. На испытаниях снаряды тяжелых орудий вместо того, чтобы пробивать плиты, сами разбивались о броню, не принося вреда тому, что могло скрываться за ней. Но вот русские попросили повторить испытания. И снаряды начали разбивать броневые плиты (а позже, после некоторых усовершенствований,— и пробивать в них отверстия).



Все дело оказалось в том, что теперь снаряды были снабжены специальными колпачками из мягкой стали. Колпачок расплющивался, плавился и, с одной стороны, мешал снаряду расколоться, а с другой — служил своеобразной смазкой при его прохождении сквозь броневую плиту. Изобретателем колпачка был талантливый русский ученый и моряк адмирал Макаров.

Итак, при огромных давлениях сталь может служить смазкой. А «почему коньки скользят по льду?» (Дж. Уокер). Что является смазкой в этом случае?

«Сквозь волнистые туманы...»

Влажной зимой дни часто бывают туманными. Принято считать, что туман имеет серый цвет, но это не всегда так.

«Французский художник Моне приехал в Лондон и написал Вестминстерское аббатство. Работал Моне в обыкновенный лондонский туманный день. На картине Моне готические очертания аббатства едва выступают из тумана. Написана картина виртуозно.

Когда картина была выставлена, она произвела смятение среди лондонцев. Они были поражены, что туман у Моне был окрашен в багровый цвет, тогда как всем известно, что цвет тумана серый.

Дерзость Моне вызвала сначала возмущение. Но возмущавшиеся, выйдя на лондонские улицы, вгляделись в туман и впервые заметили, что он действительно багровый», — так писал К. Паустовский в своей книге «Золотая роза».

Вот и Уокер тоже согласен с Моне: «Почему дымка, витающая над городом, имеет коричневый оттенок?» — спрашивает он.

Вопрос о причинах цветного тумана — не легкий вопрос. Не случайно мы приберегли его на самый конец. Понаблюдайте за цветом тумана в городе и в сельской местности. А может быть вы даже сумеете придумать опыты и получить «туманы» разной окраски?

задачник Кванта

Этот раздел ведется с момента основания нашего журнала. В каждом номере мы помещаем пять задач по математике и пять задач по физике. (Для зарубежных читателей мы приводим тексты задач на английском языке) Степень сложности задач различна. Наряду с относительно легкими публикуются задачи, требующие длительного размышления; встречаются задачи, которые нелегко решить и специалистам. Наиболее трудные задачи помечаются звездочкой.

Если задача вас заинтересовала, но решение ее не получается сразу — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней снова и снова. Не откладывайте ее даже после того, как она решена,— подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как обобщить задачу, уточнить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решать. Ваши решения присылайте в редакцию по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, «Квант». На конверте в графе «Кому» напишите Задачник «Кванта» и укажите, решения каких задач вы посылаете. Решения задач по разным предметам (математике и физике) или из разных номеров журнала высылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем домашним адресом (в нем вы получите ответ с результатами проверки ваших решений). В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес; школьников просим также указывать класс и номер школы.

Мы регулярно публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения. Журнал проводит конкурс на лучшие решения задач из Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения, — получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников. Жюри конкурса «Кванта» принимает к рассмотрению только решения, высланные не позже срока, указанного в журнале. Крайний срок отправки ответов на задачи этого номера — 30 марта. Для учеников Всесоюзной заочной математической школы правильное решение задач из Задачника считается выполненным факультативным заданием (им необходимо в начале письма указывать свой «номер» или адрес филиала ВЗМШ).

Разумеется, не все задачи, помещаемые в Задачнике, публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Придумать новую оригинальную задачу, пожалуй, труднее, чем решить чужую. Если вам это удастся — присылайте нам в двух экземплярах задачу и ее решение. При этом на конверте пометьте «Новая задача по математике (по физике)».

Наиболее интересные задачи наших читателей мы помещаем в Задачнике «Кванта» или в других разделах журнала.

Задачи

М721 — М725; Ф733 — Ф737

М721. Каждая сторона треугольника поделена на 3 равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.

А. Золотых, ученик 10 кл.
(Москва, ФМШ № 18 при МГУ)

М722. В точках A_1, A_2, ..., A_n, расположенных по окружности, расставляются в некотором порядке числа 1, 2, ..., n. а) Докажите, что сумма n модулей разностей соседних чисел не меньше $2n-2$. б) Для какого количества расстановок эта сумма равна $2n-2$?

А. Разборов

М723*. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не являются степенью натурального числа (a^k, где $k \geqslant 2$)?

Л. Гурвиц

М724. По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлениям. Докажите, что, как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.

В. Прасолов

М725*. Положим $z_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$. Найдите а) z_1 и z_2, б) z_3 и z_4. в) Докажите, что z_n — рациональное число при любом n.

Н. Васильев

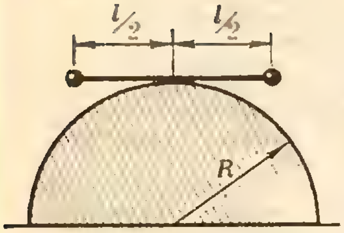


Рис. 1.

Ф733. На «полуцилиндре» с радиусом основания R лежит гантелька длины l (рис. 1). Найти период малых колебаний гантельки.

А. Фролов

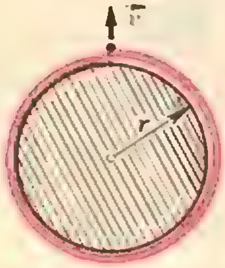


Рис. 2.

Ф734. Веревка, прикрепленная одним концом к боковой поверхности цилиндра у его основания радиуса r, обмотана вокруг цилиндра k раз (k — целое число). К свободному концу веревки привязан груз. Грузу сообщают скорость v, направленную вдоль радиуса цилиндра (рис. 2). За какое время вся веревка снова намотается на цилиндр? Цилиндр закреплен на гладкой поверхности.

Б. Мукушев

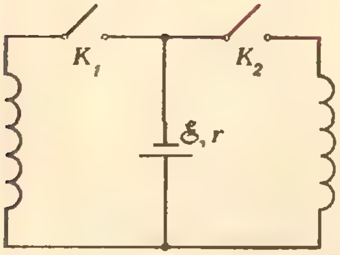


Рис. 3.

Ф735. Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 3). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить величину тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше установившегося тока через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

В. Можаев

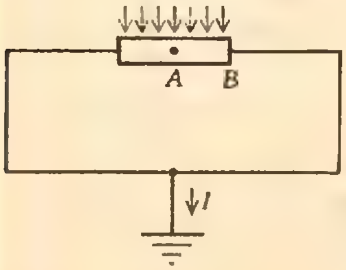


Рис. 4.

Ф736. На однородный стержень, оба конца которого заземлены, падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня попадает одно и то же число электронов в секунду. Сопротивление стержня R. Ток на участке заземления равен I. Найти разность потенциалов между серединой стержня A и его концом B (рис. 4).

Н. Диканский

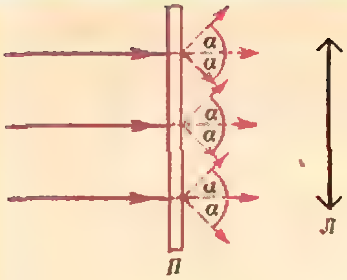


Рис. 5.

Ф737. Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку *П*. Для любого луча, проходящего пластинку, максимальный угол отклонения от первоначального направления равен α. Каков наименьший радиус светлого пятна, которое можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу *Л* с фокусным расстоянием F (рис. 5)?

Н. Воробьев

Problems

M721 — M725; P733 — P737

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 30th to the following address: USSR, 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M721. Each side of a given triangle is divided into three equal parts. The six division points are the vertices of two triangles whose intersection is a hexagon. Find the area of the hexagon if S is the area of the given triangle.

A. Zolotykh (Moscow Phys.— Math. School № 18, 10th grade)

M722. The integers 1, 2, ..., n are written in some order at the points A_1, A_2, ..., A_n of a circle. a) Prove that sum of the n absolute values of the differences between neighbouring numbers is no less than $2n-2$. b) What is the number of distributions for which the sum equals $2n-2$?

A. Razborov

M723*. Does an infinite set of natural numbers none of which and no sum of which is a power a^k of a natural number a, where $k \geqslant 2$, exist?

L. Gurvits

M724. Some turtles are creeping in the plane in different (constant) directions, but at the same speed. Prove that the turtles will eventually be located at the vertices of a convex polygon, no matter what their initial positions were.

V. Prasolov

M725*. Put $\Gamma_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$. Find a) Γ_1 and Γ_2, b) Γ_3 and Γ_4. c) Prove that Γ_n is rational for any n.

N. Vassiliev

P733. A weight (used for muscle-building) of length l is balanced on a half-cylinder of base radius R (see figure Рис. 1). Find the period of small oscillations of the weight.

A. Frolov

P734. A rope attached at one end to the lateral surface of a cylinder at its base of radius r is wound about the cylinder k times (k is an integer). A weight is attached to the other end and the velocity v, directed along the radius of the cylinder, is communicated to the weight (see figure Рис. 2). How long will the rope take to wind itself around the cylinder again? The cylinder is fixed on a smooth plane surface.

B. Mukushev

P735. Two identical induction coils are connected through two switches K_1 and K_2 to a source of constant electromotive force $\mathscr{E}$ and inner resistance r (see figure Рис. 3) At the initial moment of time both switches are open, then the switch K_1 is closed, followed after a while by the switch K_2. Determine the current passing through the switch K_1 at the moment when K_2 is closed, if it is known that, after K_2 is closed, the steady-state current through the switch K_1 is twice the steady-state current through the switch K_2. The active resistances of the coils are negligible.

V. Majaev

P736. A beam of electrons is directed on a uniform rod, both ends of which are grounded, the same amount of electrons hitting each centimeter length of the rod per second. The resistance of the rod is R. The current at the place of grounding is I. Find the difference of potential between the middle of the rod A and its extremity B (see figure Рис. 4).

N. Dikanski

P737. A parallel beam of light dissiminates as it passes through a plate Π. For any ray passing through the plate, the maximal angle of deflection is α. What is the smallest radius of a spot of light that can be obtained by placing a convergent lens of focal distance F after the plate (see figure Рис. 5)?

I. Vorobiev

Решения задач

M681 — M685; Ф692 — Ф697

M681. *а) Придумайте целые числа a, b, c, d такие, что числа a^2+b^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2+d^2$ — квадраты целых чисел.*

б) Существует ли последовательность, состоящая из квадратов целых чисел такая, что при любом n сумма n ее первых членов — квадрат целого числа?

Приведем сразу решение задачи б), следуя В. Серпинскому (большое количество задач такого типа содержится в его книге «Элементарная теория чисел»): построим бесконечную последовательность (a_n) натуральных чисел такую, что для любого n сумма квадратов первых n ее членов есть квадрат нечетного числа. Возьмем $a_1=3$, $a_2=4$; если первые n членов уже выбраны и

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(2k+1)^2,$$

положим $a_{n+1}=2k^2+2k$. Из тождества

$$(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$$

получим, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=(2k^2+2k+1)^2$$

— снова квадрат нечетного числа.

Первые пять членов этой последовательности 3, 4, 12, 84, 3612:

$$3^2+4^2=5^2,\ 3^2+4^2+12^2=13^2,$$
$$3^2+4^2+12^2+84^2=85^2,$$
$$3^2+4^2+12^2+84^2+3612^2=3613^2.$$

Из решения задачи вытекает также факт, указанный в письме *Ю. Микарова* из Ленинграда: для любого n существует $\frac{n(n+1)}{2}$ натуральных чисел a_1, a_2, …, $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ таких, что

$$a_1^2=a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2+a_6^2=\ldots=a^2_{\frac{n(n-1)}{2}+1}+\ldots+a^2_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Нам, как и автору письма, неизвестно, могут ли при этом все числа a_1, a_2, …, $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ быть различными.

Н. Васильев

◆

M682. *Внутри треугольника $\triangle$ нужно расположить треугольник $\triangle_1$ так, чтобы у каждого из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника $\triangle_1$, две вершины лежали на разных сторонах треугольника $\triangle$ (рис. 1).*

а) Докажите, что медианы треугольника $\triangle$ перпендикулярны сторонам треугольника $\triangle_1$.

б) Для любого ли остроугольного треугольника $\triangle$ такое построение возможно?

а) Легко видеть, что из трех голубых треугольников (см. рис. 1) при помощи трех параллельных переносов, переводящих вершины треугольника $\triangle_1$ в некоторую точку O, можно составить треугольник $\widetilde{\triangle}$, подобный исходному треугольнику $\triangle$ (рис. 2). Отрезки, соединяющие вершины треугольника $\widetilde{\triangle}$ с точкой O, делят треугольник $\widetilde{\triangle}$ на три равновеликих треугольника, площадь каждого из которых равна площади треугольника $\triangle_1$. Поэтому O — точка пересечения медиан треугольника $\widetilde{\triangle}$ (расстояние от O до любой из сторон треугольника $\widetilde{\triangle}$ равно $\frac{1}{3}$ высоты, опущенной на эту сторону).

Таким образом, медианы треугольника $\triangle$ параллельны медианам треугольника $\widetilde{\triangle}$ и, следовательно, перпендикулярны сторонам треугольника $\triangle_1$.

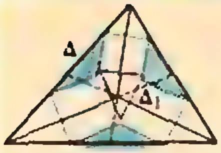


Рис. 1.

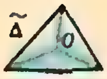


Рис. 2.

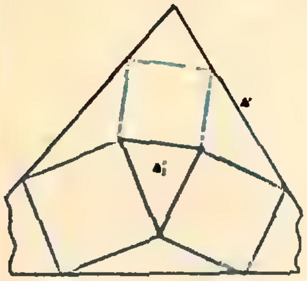


Рис. 3.

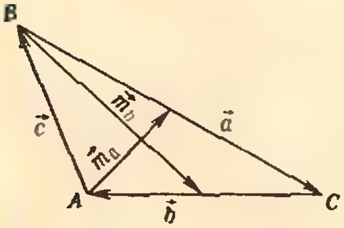


Рис. 4.

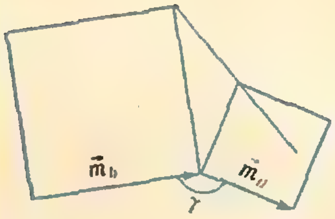


Рис. 5.

б) О т в е т: для любого.

Прежде всего заметим, что медианы построенного треугольника $\triangle$ пропорциональны медианам треугольника $\triangle$ и сторонам треугольника $\triangle_1$. Поэтому треугольник $\triangle_1$ подобен треугольнику $\triangle_1'$, стороны которого равны по длине медианам треугольника $\triangle$ (рис. 3; такой треугольник всегда существует).

Построим на сторонах треугольника $\triangle_1'$ квадраты, после чего соединим их вершины (см. рис. 3). Ясно, что никакие две из проведенных прямых не параллельны. Если образованный ими треугольник $\triangle'$ содержит построенные квадраты, то нужное построение мы получим переведя преобразованием подобия треугольник $\triangle'$ в треугольник $\triangle$ (треугольники $\triangle$ и $\triangle'$ подобны). Если же какая-нибудь из трех прямых попадает внутрь одного из квадратов, построение окажется невозможным. Посмотрим, когда это может произойти.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы, определяемые сторонами треугольника $\triangle$, $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ — векторы, определяемые соответствующими медианами (рис. 4), так что $\vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$, $\vec{m}_b = -\vec{c} - \frac{\vec{b}}{2}$. Пусть, далее прямая, соединяющая вершины квадратов, построенных на векторах $\vec{m}_b$ и $\vec{m}_a$, попадает внутрь квадрата, построенного на $\vec{m}_a$ (рис. 5). Легко видеть, что это может быть тогда и только тогда, когда угол γ между векторами $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ — тупой и $m_b \cos(\pi - \gamma) > m_a$ (см. рис. 5; через x мы обозначаем длину вектора $\vec{x}$). Поскольку $\cos(\pi - \gamma) = \frac{\vec{m}_a \cdot \vec{m}_b}{m_a \cdot m_b}$, наше неравенство равносильно такому: $\vec{m}_a \cdot \vec{m}_b > m_a^2 = \vec{m}_a \cdot \vec{m}_a$, или $\vec{m}_a \cdot (\vec{m}_b - \vec{m}_a) > 0$.

Подставляя вместо $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ их выражения через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, после преобразований получим $\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 > 0$, или $b \cdot c \cos(\pi - \widehat{A}) > c^2$ (см. рис. 4), то есть $\cos \widehat{A} < \frac{c}{b}$, что возможно лишь при условии, что угол A — тупой, причем $b > c$.

Таким образом, если в исходном треугольнике ABC, $a \geqslant b \geqslant c$, угол A таков, что $\cos \widehat{A} \geqslant -\frac{c}{b}$, требуемое построение возможно. В частности, оно возможно для любого остроугольного треугольника.

А. Егоров, А. Ягубьянц

◆

М683. *Несколько кружков одинакового размера положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что кружки можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающиеся кружка будут окрашены в разные цвета. Найдите расположение кружков, при котором трех цветов для такой раскраски недостаточно.*

Доказательство возможности требуемой раскраски проведем индукцией по числу кружков n.

При $n \leqslant 4$ утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для любого расположения k кружков. Пусть на столе лежит $k+1$ кружков. Зафиксируем на плоскости произвольную точку M и рассмотрим кружок, центр O которого находится на наибольшем расстоянии от M (если таких кружков несколько, возьмем любой из них). Нетрудно убедиться, что выбранного кружка касается не более трех других (центры всех кружков лежат в круге $(M, |OM|)$ — рис. 1).

Отбросим кружок с центром O и раскрасим нужным образом в четыре цвета оставшиеся k кружков (по предположению индукции это можно сделать). Вернем теперь кружок с центром O на место. Поскольку он касается не более трех

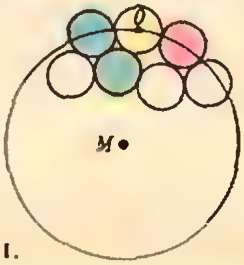


Рис. 1.

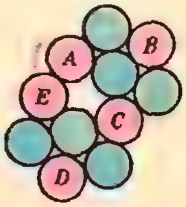


Рис. 2.

из уже покрашенных кружков, его можно раскрасить в тот цвет, который не был использован при раскраске касающихся его соседей.

Утверждение доказано.

На рисунке 2 изображены 11 кружков, для нужной раскраски которых трех цветов недостаточно. Действительно, предположив, что эти кружки можно раскрасить тремя цветами, получим, что кружки A, B, C, D, E должны быть окрашены одинаково. Но это невозможно, поскольку кружки A и E касаются.

В. Покровский

◆

М684. *Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске $n \times n$ некоторое количество непересекающихся кораблей $n \times 1$ (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному количеству полей следует нанести удары, чтобы по ответам противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите три случая:* а) $n=4$, б) $n=10$, в) n — *любое натуральное число.*

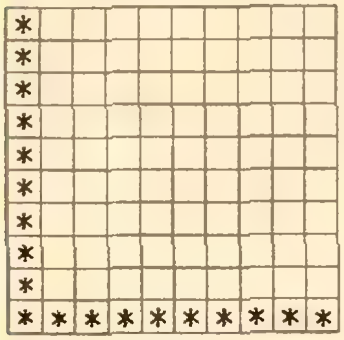
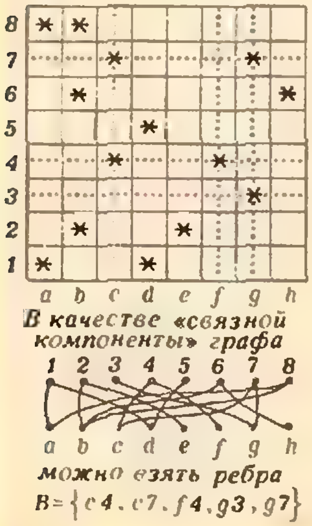


Рис. 1.



В качестве «связной компоненты» графа можно взять ребра $B=\{c4, c7, f4, g3, g7\}$

Рис. 2.

Как показывают письма читателей, формулировка задачи допускает два одинаково осмысленных толкования — в зависимости от того, какие корабли считать «непересекающимися»: (1) те, которые не имеют общих клеток; 2) те, которые вообще не имеют общих точек, даже граничных — как это принято в обычной игре «морской бой», в которую все мы играли в детстве*). Обе задачи получились довольно интересными, хотя (1), пожалуй, попроще. С нее мы и начнем.

(1) Пусть корабли заполняют произвольное множество K из нескольких горизонталей или вертикалей доски $n \times n$; мы должны указать множество A из возможно меньшего числа клеток такое, что пересечение $A \cap K$ однозначно определяет множество K. (Заметим, что если кораблей n, то они занимают все клетки доски, и мы, разумеется, никак не сможем узнать, горизонтальные корабли или вертикальные.)

Легко указать множество A из $2n-1$ клеток, удары по которым позволяют найти любое K (пример для $n=10$ приведен на рисунке 1). С другой стороны, $2n-2$ клеток заведомо недостаточно. Это следует из того, что *любое множество A из $2n-2$ клеток доски $n \times n$ можно разбить на два непустых подмножества B и C, так, что ни одна из вертикалей и ни одна из горизонталей, пересекающихся с B, не пересекается с C* (тогда, если ответ «попал!» будет в точности на B, мы не сможем узнать, горизонтальные корабли или вертикальные). Докажем это.

Сопоставим каждой горизонтали красную, а вертикали — синюю точку (*вершину* графа) и для каждой клетки множества A (на рисунке 2 они обозначены звездочками) соединим ребром пару точек, соответствующую ее вертикали и горизонтали (рис. 2). Мы получим *граф* с $2n$ вершинами и $2n-2$ ребрами. Такой граф не может быть *связным* (см. «Квант», 1981, № 6, с. 10) — он обязательно распадается на два или больше отдельных кусков. Ребра одного из связных кусков можно принять за множество B (см. рис. 2), остальные — за множество C. (Разумеется, это рассуждение можно изложить и не пользуясь терминологией теории графов.) Итак, в случае (1) ответ: $2n-1$.

(2) Пусть корабли не имеют общих точек. Докажем, что в этом случае необходимое количество a ударов — клеток в множестве A — не меньше $\frac{4n}{3}$. При этом будут использованы только такие свойства множества A: в каждой горизонтали и вертикали встречается хотя бы одна клетка множества A, и для любой клетки множества A в ее горизонтали или вертикали есть еще хотя бы одна клетка A.

Расставим в клетках множества A синие и красные единицы и двойки так: на каждой горизонтали, где клеток A более одной, запишем в каждую из них красную 1, а где лишь одна клетка — запишем в нее красную 2; точно так же на каждой вертикали запишем в клетки множества A синие 1 и 2 (рис. 3). Поскольку в каждой клетке множества A стоят либо единица и двойка, либо две единицы, сумма s всех написанных чисел не больше $3a$. Поскольку на каждой линии

---

*) Отличие нашей игры от «детской», конечно, прежде всего в том, что нам очередной удар наносится после получения информации о предыдущем ходе.

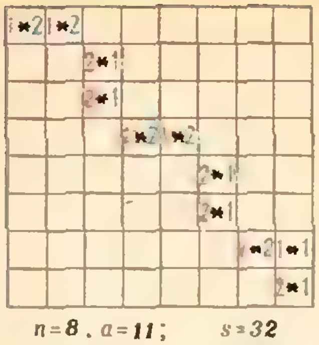


Рис. 3.

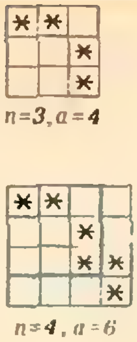


Рис. 4.

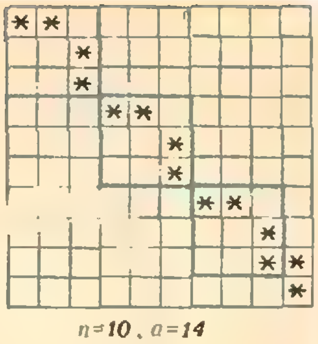


Рис. 5.

(горизонтали и вертикали) мы записали числа с суммой не меньше 2, $s \geqslant 4n$. Поэтому $a \geqslant s/3 \geqslant 4n/3$*).

На рисунке 4 показано, как можно направить требуемым образом 4 удара на доске 3×3 ($n=3$). Используя этот «блок» 3×3, можно построить пример направления a ударов, где a — наименьшее целое число, для которого $a \geqslant \frac{4n}{3}$ (примеры для $n=4$, $n=8$ и $n=10$ показаны на рисунках 3 и 5).

Итак, в этом случае ответ: $\left[\frac{4n+2}{3}\right]$, то есть для $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$ нужно соответственно $4k$, $4k+2$, $4k+3$ ударов.

Н. Васильев

M685. *Два подмножества множества натуральных чисел назовем конгруэнтными, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества четных и нечетных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (непересекающихся) бесконечных конгруэнтных подмножеств?*

Ответ: можно. Предположим, что задача уже решена. Пусть A — то из множеств разбиения, которое содержит единицу. Остальные множества разбиения получаются из A сдвигами на некоторые натуральные числа, множество которых, дополненное нулем, мы обозначим через B. Пусть для каждого $b \in B$ множество A_b — результат сдвига множества A на b, то есть множество всех чисел вида $a+b$, где $a \in A$ (в частности, $A_0=A$). По условию, если $b_1 \neq b_2$, то $A_{b_1} \cap A_{b_2} = \varnothing$, и всякое натуральное число n принадлежит одному из множеств A_b, то есть

каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы $n=a+b$, (*) где $a \in A$, $b \in B$.

Если, наоборот, даны два множества A и B, обладающие свойством (*) и такие, что $0 \in B$, $1 \in A$, то множества A_b, где $b \in B$, образуют требуемое разбиение.

Построение множеств A и B мы осуществим двумя способами.

Первый способ. Пусть множества A и B, обладающие свойством (*), построены. Поставим в соответствие каждому натуральному числу $n=a+b$ ($a \in A$, $b \in B$) точку плоскости Oxy с координатами $(a; b)$.

Пусть M — множество всех полученных точек плоскости. Множество M, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) если A — проекция множества M на ось Ox, а B — проекция M на ось Oy, то множество M совпадает со всем множеством пар $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$;

б) пересечение множества M с каждой прямой $x+y=n$ (n — натуральное) состоит из единственной точки; в частности, при $n=1$ — это точка $(1; 0)$.

Ясно, что, построив хотя бы одно множество M, обладающее свойствами а) и б), мы получим нужное разбиение множества натуральных чисел (состоящее из множеств A_b).

---

*) Точно такое же рассуждение с заменой слов «больше» на «меньше» приводилось в решении задачи M262 («Квант», 1974, №5) про расстановку ладей, бьющих доску дважды.

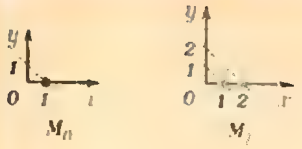


Рис. 1.

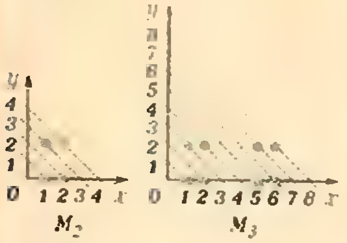


Рис. 2.

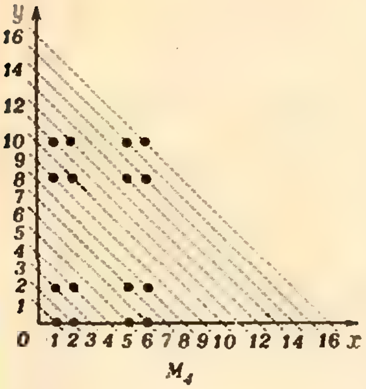


Рис. 3.

Множество M построим как объединение множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$, которые, в свою очередь, будем строить так:

Пусть $M_1 = \{(1; 0)\}$. Назовем *n-й диагональю* прямую $x+y=n$. Точка $(1; 0)$ попадает на первую диагональ; вычеркнем ее и в дальнейшем, строя множества M_i, будем последовательно вычеркивать диагонали, на которые попадают построенные точки.

Сдвинем множество M_0 на единицу вправо и положим $M_1 = \{(1; 0), (2; 0)\}$; при этом вычеркнем вторую диагональ (см. рисунок). Затем сдвинем множество M_1 на две единицы вверх и присоединим полученные точки к M_1; это будет множество M_2; при этом вычеркнем третью и четвертую диагонали (см. рисунок).

Множество M_2 сдвинем на четыре единицы вправо — так, чтобы вычеркнуть следующие четыре диагонали; получим множество M_3 (см. рисунок).

Вообще, множество M_{k+1} строим так: сдвигаем множество M_k (его точки принадлежат первой, второй, ..., 2^k-й диагонали) на 2^k единиц вправо или вверх (в зависимости от четности k) — так, чтобы вычеркнуть диагонали с номерами $2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}$.

Легко видеть, что объединение множеств $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ (по всем натуральным n) обладает свойствами а), б).

Второй способ. Как известно, всякое натуральное число n представляется в виде

$$n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + \ldots + a_{k-1} \cdot 2 + a_k,$$

где a_i равно 0 или 1, причем такое представление единственно. На этом основана *двоичная запись* числа n: $n_2 = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1} a_k}$. Например, $2_2 = 10$, $7_2 = 111$, $17_2 = 10001$ и т. д.

Рассмотрим теперь два множества натуральных чисел: множество A, состоящее из чисел, в двоичной записи которых единица находится в нечетных (считая справа) разрядах: $A = (1, 100, 101\ldots)$, и множество B, состоящее из 0 и чисел, в двоичной записи которых единица находится в четных разрядах:

$$B = (0, 10, 1000, 1010, \ldots).$$

Очевидно, любое натуральное n единственным образом представляется в виде суммы $n = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Множества A и B обладают свойством (•), и поэтому множества A_b $(b \in B)$ дают нужное разбиение.

А. Федоров, С. Шлосман

◆

Ф692. *Конструкция, изображенная на рисунке 1, состоит из четырех легких жестких стержней длины l каждый и легкой пружины длины $2l$. Стержни скреплены небольшими одинаковыми массивными шариками. В точке A система закреплена. В состоянии равновесия система стержни образуют квадрат. Определить период малых колебаний системы, при которых точка C движется вдоль вертикали.*

Совместим начало системы координат с точкой A, оси X и Y направим так, как на рисунке 2.

Запишем уравнения движения грузов C и B (в проекциях на оси X и Y):

$$ma = mg - 2T_2 \cos\alpha, \qquad (1)$$

$$ma_{Bx} = mg - T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha, \qquad (2)$$

$$ma_{By} = F_{\text{упр}} - T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha, \qquad (3)$$

где $F_{\text{упр}} = k(2l - 2l\sin\alpha) = k \cdot 2l(1 - \sin\alpha)$ — сила упругости. Из уравнений (1)—(3) после несложных преобразований получим

$$ma_{Cx} + ma_{Bx} - ma_{By}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2mg - F_{\text{упр}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

(это соотношение верно при любых значениях α). Преобразуем левую часть уравнения (4). Учтем, что изменения Δx_B и Δx_C координат грузов B и C связаны соотношением $\Delta x_B = \frac{1}{2}\Delta x_C$ (иными словами, таким соотношением связаны смещения грузов B и C от положения равновесия), и следовательно,

$$(x_B)'' = \frac{1}{2}(x_C)'' \text{ или } a_{Bx} = \frac{1}{2}a_{Cx}.$$

Кроме того, $y_B = l\sin\alpha$, $x_C = 2l\cos\alpha$, и при малых отклонениях от положения равновесия (то есть когда $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$,

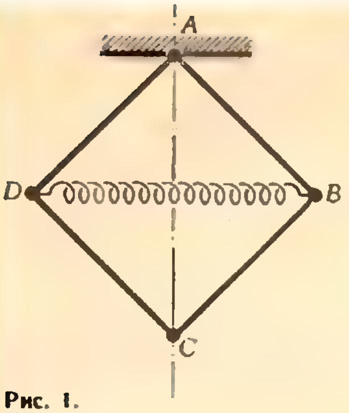


Рис. 1.

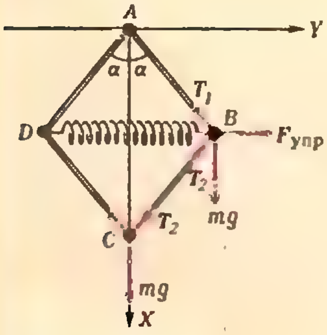


Рис. 2.

где $\alpha_0=45°$, $\Delta\alpha\ll\alpha_0$) изменения соответствующих координат равны

$$\Delta y_B=l(\cos\alpha)\cdot\Delta\alpha\approx l(\cos\alpha_0)\cdot\Delta\alpha,$$

$$\Delta x_C=-2l(\sin\alpha)\cdot\Delta\alpha\approx-2l(\sin\alpha_0)\cdot\Delta\alpha,$$

то есть $\Delta y_B\approx-\Delta x_C/2\operatorname{tg}\alpha_0=-\Delta x_C/2$. Следовательно,

$$a_{By}\approx-\frac{a_{Cx}}{2\operatorname{tg}\alpha_0}=-\frac{a_{Cx}}{2}.$$

Таким образом, левая часть уравнения (4) в случае малых колебаний может быть представлена в виде

$$ma_{Cx}+\frac{1}{2}ma_{Cx}+\frac{1}{2}ma_{Cx}\approx2ma_C=2m(x_C)''.$$

Теперь преобразуем правую часть (4). В положение равновесия, когда $a_{C0}=0$, уравнение (4) превращается в уравнение

$$2mg=F_{упр.\,0}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}=2kl\,(1-\sin\alpha_0),$$

откуда

$$2mg=2kl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad (5)$$

Запишем правую часть (4) в виде

$$F_{упр.\,0}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}-F_{упр}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=2kl(1-\sin\alpha_0)\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}-2kl(1-\sin\alpha)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=2kl\left(\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+2kl(\cos\alpha-\cos\alpha_0).$$

Заметим, что $2kl(\cos\alpha-\cos\alpha_0)=\Delta x_C$; при малых отклонениях от положения равновесия

$$\Delta x_C\approx-2l(\sin\alpha_0)\cdot\Delta\alpha;$$

а $$\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\approx\frac{\alpha-\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}=\frac{\Delta\alpha}{\sin^2\alpha_0}\approx-\frac{\Delta x_C}{2l\sin^3\alpha_0}.$$

Итак, правая часть уравнения (4) в случае малых колебаний может быть представлена в виде

$$2mg-F_{упр}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\approx-k\cdot\Delta x_C\left(\frac{1}{\sin^3\alpha_0}-1\right)=$$

$$=-k\cdot\Delta x_C\,(2\sqrt{2}-1).$$

Учитывая, что

$$\frac{m}{k}=\frac{l}{g}(1-\sin\alpha_0)=\frac{l}{g}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

(см. (5)), запишем окончательно уравнение малых колебаний системы в виде

$$\Delta x''=-\frac{g(2\sqrt{2}-1)}{l(2-\sqrt{2})}\cdot\Delta x.$$

Период колебаний равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l(2-\sqrt{2})}{g(2\sqrt{2}-1)}}.$$

К. Сергеев

◆

Ф693. *На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая невесомая веревка (рис. 1). Один из концов веревки закреплен в точке A. К нижнему концу веревки (в точке B) прикреплен небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a. С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине?*

К моменту времени t от начала движения клин проедет расстояние $S=at^2/2$ и приобретет скорость $\vec{v}_{кл}=\vec{a}t$. К этому моменту грузик переместится вдоль клина на такое же расстояние S, его скорость $v_{отн}$ относительно клина будет равна $|\vec{v}_{отн}|=|\vec{a}|t$ и направлена вдоль клина вверх. Скорость $\vec{v}_{гр}$ грузика относительно земли равна $\vec{v}_{гр}=\vec{v}_{отн}+\vec{v}_{кл}$, то есть (рис. 2)

$$|\vec{v}_{гр}|=2|\vec{v}_{кл}|\sin\frac{\alpha}{2}=\left(2|\vec{a}|\sin\frac{\alpha}{2}\right)t,$$

а угол, который составляет $\vec{v}_{гр}$ с горизонтом, равен

$$\beta=(\pi-\alpha)/2=\mathrm{const}.$$

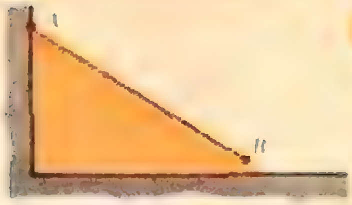


Рис. 1.

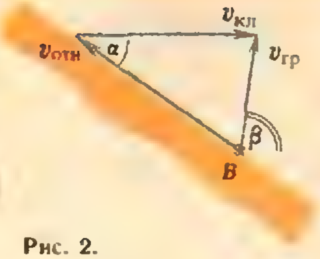


Рис. 2.

Таким образом, грузик движется вдоль прямой, составляющей угол $\beta = (\pi - \alpha)/2$ с горизонтом; ускорение грузика относительно земли равно

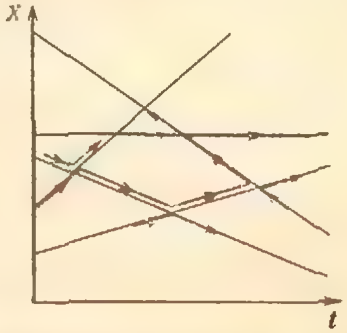
$$|\vec{b}| = 2|\vec{a}|\sin\frac{\alpha}{2}.$$

С. Кротов

Ф694. *По длинному прямолинейному желобу, наклоненному под углом α к горизонту, движутся без трения N одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений может произойти в системе при произвольных начальных положениях и скоростях шаров? Соударения шаров считать абсолютно упругими.*

Рассмотрим движение шариков в системе отсчета, которая движется вдоль желоба с ускорением $g \sin \alpha$. В этой системе шарики в промежутках времени между столкновениями движутся равномерно; при столкновениях шарики просто обмениваются своими скоростями (абсолютно упругие удары).

Нарисуем графики $x(t)$ зависимости координат всех N шариков от времени (в выбранной нами системе отсчета). Из сказанного выше ясно, что общая картина этих графиков представляет собой «сетку» из N прямых; точки пересечения этих прямых (узлы сетки) соответствуют столкновениям шариков (пары шариков) друг с другом. Таким образом, общее число соударений равно числу пересечений N прямых. Нетрудно показать, что максимальное число пересечений равно



$$n_{\max} = N(N-1)/2.$$

Е. Сурков

Ф695. *В простейшей модели звезда рассматривается как газовый шар, находящийся в равновесии в собственном поле тяжести. Считая, что газ состоит из полностью ионизированных атомов водорода и гелия, оценить температуру звезды. Масса звезды M, радиус r; относительное содержание водорода в газе равно n.*

Газовый шар состоит из огромного числа ионов и электронов; под действием сил тяготения между отдельными частицами газа шар должен был бы сжиматься. Равновесие шара в собственном поле тяжести возможно при условии, что силы тяготения уравновешиваются силами газового давления.

Вблизи центра шара численное значение давления p должно равняться численному значению веса газового столба с поперечным сечением $\Delta s = 1$ (см^2) и высотой, равной радиусу шара r (см). Масса такого столба равна $m = \varrho r \cdot \Delta s$ (кг), где ϱ (кг/см^3) — плотность газа, которую для приближенной оценки будем считать постоянной. Вес столба равен силе, с которой он притягивается к центру шара:

$$F = G\frac{mM}{(r/2)^2}.$$

Эта формула не совсем точна, поскольку разные части столба притягиваются к центру, вообще говоря, по-разному. Но для наших приближенных оценок мы можем считать, что сила притяжения F такая, как если бы вся масса столба была сосредоточена в его центре (на расстоянии $r/2$ от центра шара).

Таким образом,

$$p=\frac{F}{\Delta s}=4G\frac{\varrho M}{r}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$p=\frac{M}{V\mu}RT=\frac{\varrho}{\mu}RT, \qquad (2)$$

где μ — молярная масса звездного газа. Приравнивая (1) и (2), находим температуру звезды T:

$$T=4G\frac{\mu M}{rR}.$$

Найдем молярную массу μ. Давление p складывается из парциальных давлений водорода и гелия, то есть

$$\frac{M}{V\mu}RT=\frac{Mn}{V\mu_H}RT+\frac{M(1-n)}{V\mu_{He}}RT,$$

откуда

$$\mu=\frac{\mu_H\mu_{He}}{n(\mu_{He}-\mu_H+\mu_H)}=\frac{2\cdot 10^{-3}}{3n+1}\ \text{кг/моль}.$$

При таком вычислении μ мы не учли давление электронного газа. Однако учет этого давления не изменит порядка величины μ, и для наших оценочных расчетов мы можем пользоваться найденным приближенным значением μ.

Таким образом,

$$T=4G\frac{2M}{rR(3n+1)}\cdot 10^{-3}\ \text{К}. \qquad (3)$$

При получении формулы (3) нами были сделаны некоторые упрощающие предположения. Для более точного расчета необходимо знать распределение плотности внутри газового шара, а это требует существенного выхода за рамки школьного курса математики. Кроме того, оценочная формула (3) предполагает, что температура в центральной области звезды не слишком резко меняется при удалении от центра к периферии, и имеет смысл говорить о некоторой средней температуре. На самом деле, в областях, удаленных от центра, температура существенно ниже, чем в центральной части звезды.

В. Тугушев

Ф698. *Емкостный вольтметр представляет собой плоский воздушный конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а вторая может перемещаться поступательно в направлении, перпендикулярном плоскости пластин. К подвижной пластине прикреплена пружина жесткости k (рис. 1). Мерой приложенного напряжения служит изменение зазора между пластинами. Какое максимальное напряжение можно измерить таким прибором? Площади пластин S, зазор между пластинами при нулевом напряжении d.*

Обозначим $x(U)$ смещение пластины относительно начального положения ($x_0=0$ при $U_0=0$) при данном напряжении U. Найдем силу F притяжения между пластинами конденсатора, заряженного до напряжения U. Эта сила, очевидно, не зависит от того, подсоединен конденсатор к источнику напряжения или нет.

Если конденсатор заряжен до напряжения U и отсоединен от источника, то его заряд равен $Q=UC$, а энергия — $W=Q^2/2C$. При изменении зазора между пластинами на малую величину $\Delta x\ll d$ энергия конденсатора меняется на величину

$$\Delta W=\frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}Q^2\left(\frac{d-\Delta x}{\varepsilon_0 S}-\frac{d}{\varepsilon_0 S}\right)=-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\cdot\Delta x,$$

где C' — емкость того же конденсатора при зазоре между пластинами $d-\Delta x$. Это изменение энергии равно по абсолютной величине работе силы F на пути Δx, то есть $F\cdot\Delta x=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\cdot\Delta x$, откуда

$$F=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U^2C^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U^2\varepsilon_0 S}{2d^2}.$$

Итак, при данном напряжении U сила F обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

Пусть конденсатор емкостного вольтметра подсоединен к источнику с напряжением U_x и при этом пластина конденсатора смещена на расстояние x от $x_0=0$. Сила притяжения между пластинами конденсатора $F_x=\frac{U_x^2\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}$ уравновеши-

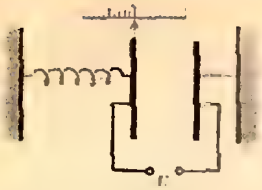


Рис. 1.

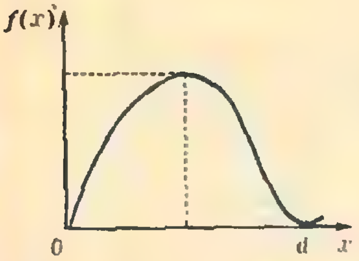
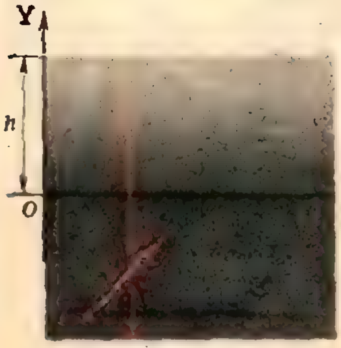


Рис. 2.

Ф697. *Между двумя средами с показателями преломления $n_0>1$ и $n_1=1$ имеется неоднородный слой высоты $h=H\left(1-\frac{1}{n_0^2}\right)$, где $H=\text{const}$, внутри которого показатель преломления меняется с высотой по закону $n=n_0\sqrt{1-\frac{y}{H}}$ (см. рисунок). Из среды с показателем преломления n_0 в неоднородный слой входит луч света. При каких значениях угла α луч вернется в оптически более плотную среду? При каком значении угла α_0 расстояние между точками входа и выхода луча максимально?*



вается упругой силой пружины, то есть

$$kx=\frac{U_x^2\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}.$$

Отсюда находим U_x^2:

$$U_x^2=\frac{2k}{\varepsilon_0 S}x(d-x)^2.$$

Очевидно, что максимальному значению $U_{\max}$ соответствует максимум функции $f(x)=x(x-d)^2$. График функции $f(x)=x(d-x)^2$ приведен на рисунке 2. Найдем значение x, соответствующее максимуму:

$$f'(x)=3x^2-4dx+d^2=0,$$

$x_1=d$ соответствует минимуму $f(x)$, $x_2=\frac{d}{3}$ соответствует максимуму $f_{\max}(x)=\frac{4}{27}d^3$.

Таким образом,

$$U_{\max}^2=\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S}, \quad |U_{\max}|=\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{2kd}{3\varepsilon_0 S}}.$$

Д. Павлов

◆

Из закона преломления света следует, что при изменяющемся коэффициенте преломления среды изменяется угол φ отклонения луча от нормали (к границе раздела между соседними участками среды с разными значениями n), причем

$$n\sin\varphi=n\cos\alpha=n_0\sin\varphi_0=n_0\cos\alpha_0=\text{const}, \text{ где } \alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

Для нахождения траектории луча в неоднородной среде воспользуемся следующей аналогией: тело массы m (размеры тела пренебрежимо малы) движется по траектории луча, скорость тела в точке с ординатой y равна $v(y)=v_0n_y$ (v_0 — величина начальной скорости тела в точке с ординатой 0). Тогда проекция скорости на границу раздела (горизонтальная проекция) остается постоянной. Если при этом на точку действует постоянная сила $F=\frac{mv_0^2}{2H}$, направленная вертикально вниз, то согласно закону сохранения энергии в любой точке траектории

$$\frac{m(v(y))^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}-m\frac{v_0^2}{2H}y.$$

Видно, что при заданном законе изменения $n(y)$ траектория луча совпадает с траекторией тела, брошенного под углом к горизонту и движущегося под действием «силы тяжести» $F=mv_0^2/2H$. Поэтому для ответа на поставленные в задаче вопросы можно воспользоваться формулами для такого движения, учитывая, что «ускорение свободного падения» в нашем случае равно «g»$=v_0^2/2H$.

Итак, расстояние l между точками входа и выхода луча будет максимальным, если луч входит в неоднородную среду под углом $\varphi_0=45°$. При этом

$$l_{\max}=\frac{2vA_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{v_0^2/2H}=2H \quad \left(\text{так как } \alpha_0=\frac{\pi}{2}-\varphi_0=45°\right).$$

Для того чтобы при $\alpha_0=45°$ луч не прошел в верхнюю однородную среду, высота h неоднородной области должна удовлетворять условию $h\geqslant\frac{H}{2}$. В противном случае $\left(h<\frac{H}{2}\right)$ максимальное расстояние между точками входа и выхода луча соответствует такому углу α_0', при котором высота траектории равна h', то есть траектория касается верхней границы раздела. Этот угол α_0' находим из условия

$$n_0\cos\alpha_0'=n(y=h')\cos 0°=n_0\sqrt{1-\frac{h'}{H}};$$

$$\cos\alpha_0'=\sqrt{1-\frac{h'}{H}}.$$

П. Калугин

Квант для младших школьников

Задачи

1. Толя и Саша, сыграв партию в домино, выложили все косточки. При этом у них получилась прямоугольная рамка. Очки заменены в этой рамке буквами (пустые клетки — это «нулевые» очки). На рисунке показано, как расположены косточки в вершинах рамки (они закрашены). Положения остальных косточек неизвестны, но известно, что сумма очков по горизонтальным и вертикальным сторонам рамки одна и та же. Восстановите расположение косточек.

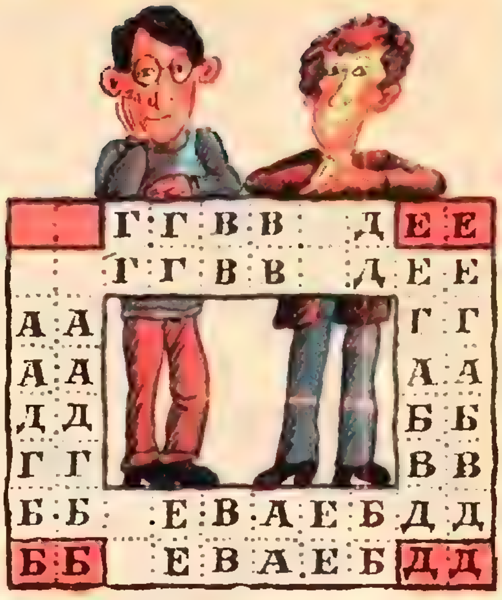
2. В 1982 году квадрат возраста Матлеба совпал с числом, образованным первыми тремя цифрами его года рождения. В каком году родился Матлеб?

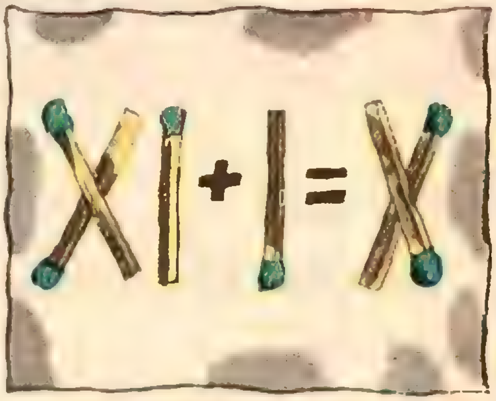
3. В 1981 году 1 января и 31 декабря были одним и тем же днем недели. А будет ли так в этом году? И вообще, когда 1 января будет тем же днем недели, что и 31 декабря?

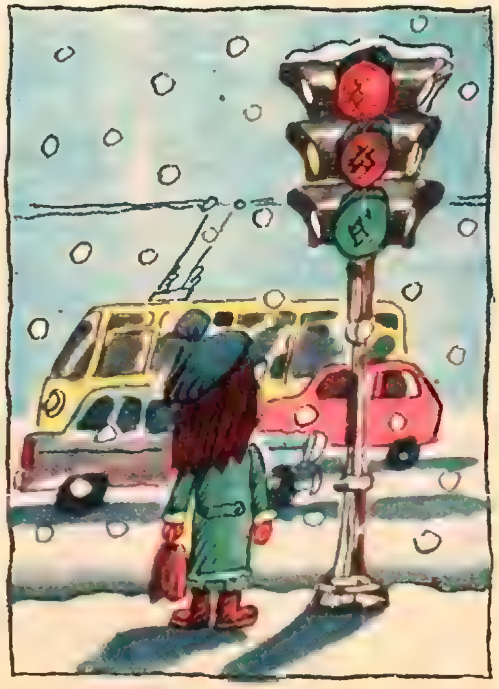
4. На листке бумаги из спичек выложили равенство (см. рисунок; знаки действия — не из спичек). Какое минимальное количество спичек нужно переложить, чтобы равенство стало верным?

5. Девочка подошла к переходу через улицу в тот момент, когда загорелся желтый свет, и загляделась на работу светофора. По своим часам она заметила, что красный свет горит в полтора раза меньше времени, чем зеленый, а желтый — в четыре раза меньше, чем красный. После того, как в восемнадцатый раз горел желтый свет, зажегся зеленый, и девочка, простояв 17 минут, стала переходить улицу. Сколько времени горит желтый свет?

Эти задачи нам предложили: *М. Агаев* (ученик 8-го класса Казвиобинской сельской школы Масаллинского р-на Аз. ССР), *М. Варга, Н. Розов, А. Швецов.*


Г Г В В Д Е Е
Г Г В В Д Е Е
А А Г Г
А А А А
Д Д Б Б
Г Г В В
Б Б Е В А Е Б Д Д
Б Б Е В А Е Б Д Д





А. Савин

Камушки и шахматная доска

(воспоминания о летних каникулах)

Жаркими июльским днем мы с Колей отправились на пляж. Вдоволь накупавшись, мы улеглись на песке загорать. Рядом с нами двое мужчин играли в шахматы. Естественно, мы тотчас начали обсуждать позицию на доске и подсказывать: я — одному, а Коля — другому. Но игроки были невозмутимы и на наши подсказки совершенно не реагировали. Отчаявшись превратить эту партию в шедевр шахматного искусства, мы стали думать, чем же нам заняться.

«А не сыграть ли нам в камушки?» — спросил у меня Коля. «Это что — подбрасывать и ловить?» «Да нет! — ответил он, — Гораздо интереснее! Для начала сыграем в такую игру.

Имеется кучка камней. Мы по очереди берем по одному, по два или по три камня. Выигрывает тот, кто берет последний камень».

Я решил играть так, чтобы у меня всегда было четное число камней, — и проиграл. Во второй партии я стал брать камни так, чтобы у меня все время было нечетное число камней,— и снова проиграл. Проигрывать в третий раз мне очень не хотелось, и я решил попытаться понять смысл игры.

И в первый раз, и во второй раз получилось так, что перед моим последним ходом в кучке оказывалось 4 камня. Если я брал только один камень, Коля забирал остальные три. Если же я брал два или три камня, он забирал оставшиеся два или единственный последний камень.

Как же мне сделать, чтобы вновь не оказаться перед четырьмя камнями? Оставлять ему 5, 6 или 7 камней нельзя: взяв 1, 2 или 3 камня, он вновь оставит мне 4 камня. А если я оставлю ему 8 камней? Тогда уже он будет вынужден оставить мне 5, 6 или 7 камней, а я заставлю его делать ход в ситуации, когда в кучке лежит 4 камня. И тут меня осенило! Если игрок получает на своем ходе кучку камней, количество которых делится на 4, то после любого его хода количество оставшихся камней уже не сможет делиться на 4, а его партнер вновь сможет сделать ход, приводя-

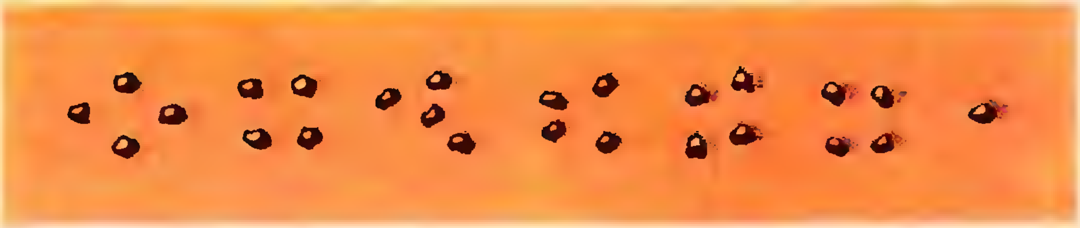


Рис. 1.

щий к кучке, количество камней в которой вновь делится на 4, и так далее, пока не исчерпаются все камни. Все ясно!

Пересчитав камни в кучке (их оказалось 25), я поднял голову, чтобы сказать Коле, что беру один камень, но ...он уже махал мне рукой с середины реки.

Когда мы, накупавшись, вернулись на старое место, я, как бы нехотя, спросил: «Сыграем еще партию в камни? Начинать должен вроде бы я?» «Что ж,— ответил Коля, — давай; только сейчас будем играть по новым правилам:

Из кучки камней снова берем по одному, по два или по три камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Ну, начинай!»

Я задумался, а через минуту, еще раз пересчитав камни в кучке — их как было, так и осталось 25, поднял руки вверх. «Сдаюсь, проиграл!» «Почему?» — удивился Коля. В ответ я разложил камни так, как показано на рисунке 1 — шесть кучек по 4 камня и еще один камень.

«В первой игре я выигрывал, беря первым ходом один камень, — сказал я, — а потом — столько камней, чтобы в сумме с камнями, взятыми перед этим тобой, получилось четыре камня. А теперь, сколько бы камней я ни взял, ты, беря всякий раз столько камней, чтобы в сумме со взятыми перед этим мной камнями получалось четыре камня, оставишь мне последний камень».

«Молодец, — похвалил меня Коля. — Ты нашел выигрышную стратегию для второго игрока. Что же мы будем делать дальше?»

Тут мы заметили, что наши соседи-шахматисты ушли купаться. «Эх, жаль, не попросили у них шахматы поиграть, пока они купаются!» — сказал я, глядя на пустую шахматную доску. Фигуры наши соседи убрали в сумку. На песке валялась лишь одна забытая пешка. А мне хотелось после всех моих неудач взять реванш у Коли.

«Знаешь что, — сказал Коля, придвигая шахматную доску и устанавливая эту единственную пешку в угол доски, — давай сыграем в игру, автором которой является известный советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР И. М. Гельфанд. Играют в нее так: *сначала пешка стоит в одном из углов доски, а затем мы ее по очереди будем передвигать на одну из соседних клеток, причем назад ходить нельзя,* — и он, поставив пешку на одно из центральных полей, показал, на какие поля ее можно передвинуть (на рисунке 2 эти ходы указаны стрелками). — *Выигрывает тот, кто поставит пешку в противоположный угол доски».*

Я тотчас согласился — ведь в шахматы я играю куда лучше Коли, а здесь не какие-то там камушки, а настоящая шахматная доска, настоящая пешка, которая, правда, ходит почти как король.

Первую партию я проиграл и решил во второй не торопиться, а хо-

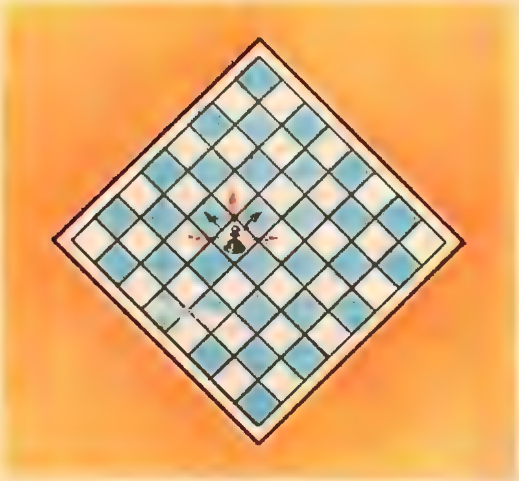


Рис. 2.

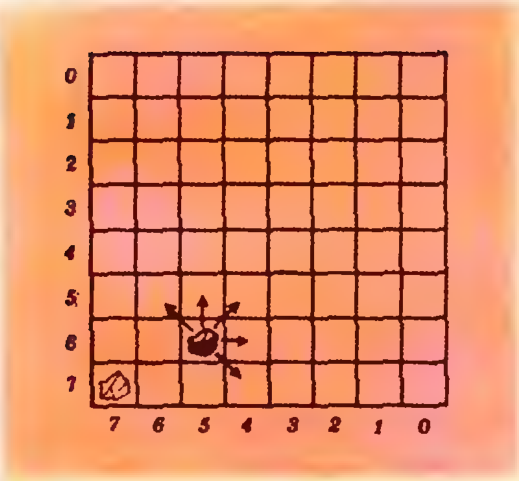


Рис. 3.

рошенько обдумывать позицию. Однако тут вернулись наши соседи, и нам пришлось, извинившись, вернуть им доску с пешкой. «Не расстраивайся, — сказал мне Коля, — в эту игру можно играть и при помощи камушков».

Я тут же расчертил на песке квадрат, провел линии, делящие его на 64 квадратика, а на угловое поле поставил камушек.

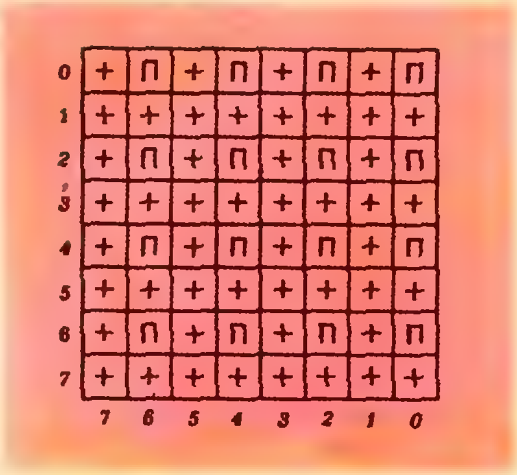
«Можно, конечно, и так, — сказал Коля, — но я имел в виду совсем другое».

Он сложил две кучки камней, по 7 камней в каждой. «*Будем по очереди брать камни: либо один камень из первой кучки, либо один камень из второй кучки, либо два камня — по одному из каждой кучки; а можно не брать камни, а переложить один камень из одной кучки в другую. Выигрывает тот, кто забирает последний камень*».

«Не хочу я играть в твои дурацкие камни, — возмутился я, — давай играть в игру Гельфанда! Ты что — боишься?» «А это и есть та же самая игра Гельфанда, — ответил Коля. — Вот смотри!» И он нарисовал на песке около начерченного мной квадрата цифры от 0 до 7 сначала вдоль одной стороны, а потом вдоль другой стороны, как на рисунке 3.

«Посмотри, что происходит. Пусть фишка стоит на поле, скажем, (5;6), то есть на пересечении вертикали, помеченной цифрой 5, и горизонтали, помеченной цифрой 6 (см. рис. 3). Положим в сторонке две кучки камней: в первой 5 камней, а во второй 6. В какие клетки я имею право передвинуть фишку? В клетки (6; 5), (5; 5), (4; 5), (4; 6) и (4;7). Как из наших двух кучек, содержащих 5 и 6 камней, получить кучки, соответствующие новым положениям фишки? Очень просто! Чтобы получить положение (6; 5), нужно один камень переложить из второй кучки в первую; положение (5; 5) получается, если взять из второй кучки один камень; (4; 5) — если взять по камню из обеих кучек; (4; 6) — если взять один камень из первой кучки; наконец, положение (4; 7) получается, если один камень переложить из первой кучки во вторую. Поскольку начальное поле занумеровано цифрами (7; 7), вначале в каждой кучке должно быть по 7 камней. Конечное же поле занумеровано цифрами (0; 0) — в кучках не остается ни одного камня».

«А мне игра на шахматной доске нравится гораздо больше, — сказал я. — Вот смотри: клетка (0; 0) — проигрышная в том смысле, что если ход мой, а фишка уже стоит в этой клетке, то я проиграл. А соседние с ней клетки (0; 1), (1; 1) и (1; 0) — выигрышные. Тогда клетки (0; 2) и (2; 0) — проигрышные, так как с них можно пойти лишь на выигрышные клетки (на рисунке 4 проигрышные клетки помечены буквой П, а выигрышные — знаком +). Продолжая эти рассуждения, я смогу для каждой клетки определить, выигрышная она или проигрышная, — сказал я, заканчивая разметку полей квадрата (в результате получился рисунок 4). — Теперь я могу с тобой сыграть и



0	+	П	+	П	+	П	+	П
1	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	П	+	П	+	П	+	П
3	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	П	+	П	+	П	+	П
5	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	П	+	П	+	П	+	П
7	+	+	+	+	+	+	+	+
	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 4.

в «каменный» вариант игры Гельфанда: буду передвигать фишку по доске и соответственным образом брать или перекладывать камни». «А я могу сформулировать совсем простое правило, — сказал Коля. — Посмотри, проигрышные клетки — это те, у которых обе «координаты» четные; у выигрышных же клеток хотя бы одна «координата» нечетна. Таким образом, в «каменной» игре Гельфанда стратегия у начинающего игрока очень простая: он должен брать камни так, чтобы в обеих кучках было четное число камней, причем, если в каждой кучке нечетное число камней, то это можно сделать двумя способами: либо взяв по одному камню из каждой кучки, либо переложив камень из одной кучки в другую». «А вот этого делать как раз не следует,— сказал я,— так мы и будем перекладывать камни по очереди из одной кучки в другую до бесконечности. В этом случае нужно брать два камня, тогда общее количество камней в кучках все время будет уменьшаться и начинающий сможет торжествовать победу, если, конечно, он сделает правильный первый ход — на поле (6, 6) — и дальше будет придерживаться нашей стратегии».

Таким образом, мы полностью разобрались в «игре Гельфанда», а раз так, то играть в нее стало не интересно. Другое дело — шахматы! Там сыграны, наверно, уже миллионы партий, а выигрышной стратегии пока так и не нашли. Зато в игре с камушками можно придумывать все новые и новые правила игры, а найти стратегию, приносящую выигрыш, не менее, если не более, интересно, чем найти решение замысловатого шахматного этюда.

Попробуйте найти, кто и как выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер — в следующих играх:

1. *Имеется две кучки по 10 камней. Двое поочередно берут камни из какой-нибудь кучки (не обязательно всякий раз из одной и той же). Выигрывает тот, кто заберет последние камни.*

2. *Условия те же, что и в предыдущей игре, но игрокам запрещается брать такое количество камней, при котором в кучках в результате остается одинаковое количество камней.*

3. *На столе лежат две кучки по 9 конфет. Каждый из двух играющих должен сначала переложить одну конфету из одной кучки в другую, а потом съесть две конфеты из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать своего очередного хода.*

4. *На столе лежат две кучки очищенных орехов, в одной — 7, а в другой — 6 орехов. Двое играющих ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает орехи в одной из кучек, а другую делит на две части (любые). Если он не сможет разделить эту кучку на две части из-за того, что в ней — один орех, то он его съедает и выигрывает.*

Задачи наших читателей

«Квант» получает много писем с новыми задачами. Часть из них мы помещаем в постоянных разделах "Задачник «Кванта»" и "«Квант» для младших школьников"; немало интересных по формулировке отдельных задач публикуется под рубриками «Задачи наших читателей» и «Задачи для исследования». Иногда это — забавные задачи-головоломки, ребусы, но нередко — и такие, над решением которых придется серьезно потрудиться; кроме школьной программы, могут понадобиться дополнительные сведения (из статей «Кванта», факультативных курсов и дополнительной литературы).

Решения этих задач обычно помещаются в следующем номере журнала.

В этом номере мы предлагаем вам несколько трудных задач по алгебре и арифметике целых чисел.

1. Докажите, что число, составленное из 1980 двоек, делится на 1982. Указание. Используйте Малую теорему Ферма: *если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p* («Квант», 1978, № 10, с. 7 или 1972, № 10, с. 2).

С. Манукян

2*. Докажите, что если $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ делится на p^r и p — простое число, то $p^r < m$. Для каких m может достигаться равенство?

В. Лев

3. Про многочлен $8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ известно, что для всех x из промежутка $[-1;\ 1]$ его значения по модулю не превосходят единицы. Докажите, что это — многочлен Чебышева $T_4(x)$ (см. таблицу 1 из статьи Н. Васильева и А. Зелевинского на с. 12). Указание. Рассмотрите значения этого многочлена при $x=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1$.

О. Астахов

Двенадцать лет издается «Квант» — и все двенадцать лет на его страницах неизменно появляется рубрика «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с учащимися и педагогами, присылаемые в редакцию читательские анкеты показывают, что этот раздел вызывает большой интерес у многих юных читателей журнала.

В «Практикуме абитуриента» читатели найдут статьи, посвященные подробному разъяснению наиболее важных и сложных вопросов программ вступительных экзаменов по математике и физике, разбору типичных задач, главным образом взятых непосредственно из вариантов приемных экзаменов в вузы, анализу характерных, особенно часто встречающихся ошибок абитуриентов.

Познакомившись с публикациями «Практикума абитуриента», читатели смогут легко убедиться, что для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно просто еще раз прочесть школьные учебники, — необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Этого можно достичь лишь настойчивым, упорным трудом, систематическими, планомерными занятиями в течение всего оставшегося до экзаменов времени.

Статьи «Практикума абитуриента» не могут (да и не ставят цели) заменить собой школьные учебники. Они написаны в расчете на то, что читатель уже усвоил школьные курсы математики и физики и хотел бы найти дополнительные пояснения и задачи для самостоятельного решения. Кроме материалов, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в следующих номерах журнала, при подготовке к вступительным экзаменам полезно было бы познакомиться и с некоторыми статьями «Кванта», публиковавшимися в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен ниже; в списке указаны год, номер журнала и страница, где статья начинается. (Следует иметь в виду, что в статьях, опубликованных до 1977 года, иногда встречаются термины и обозначения, отличающиеся от принятых в школе сейчас; мы надеемся, что внимательный читатель легко преодолеет это затруднение.)

Математика

Текстовые задачи: 1973 — № 1, с. 35.
Модуль: 1972 — № 9, с. 45.
Радикалы: 1970 — № 3, с. 53.
Степень: 1981 — № 2, с. 36.
Прогрессии: 1971 — № 2, с. 37; 1973 — № 4, с. 57.
Функции: 1971 — № 9, с. 41; 1972 — № 3, с. 50; № 5, с. 36; 1973 — № 5, с. 38; 1976 — № 12, с. 34; 1977 — № 1, с. 43; № 4, с. 38; 1978 — № 2, с. 49.
Предел: 1974 — № 11, с. 54; 1978 — № 9, с. 53; № 10, с. 54; № 10, с. 62; 1980 — № 6, с. 33; № 10, с. 40.
Графики: 1975 — № 2, с. 43; 1981 — № 9, с. 36.
Экстремум: 1976 — № 10, с. 41; 1979 — № 10, с. 44.
Производная: 1977 — № 2, с. 35; № 12, с. 40; 1978 — № 5, с. 44; № 6, с. 60; 1979 — № 2, с. 40; № 6, с. 24; № 10, с. 36; 1981 — № 1, с. 37.
Интеграл: 1977 — № 5, с. 30.
Уравнения, системы, неравенства: 1970 — № 4, с. 41; № 5, с. 48; № 9, с. 19; № 10, с. 53; № 12, с. 46; 1971 — № 1, с. 41; № 3, с. 40; № 4, с. 43; № 5, с. 40; № 6, с. 46; № 10, с. 45, 1972 — № 1, с. 46; № 12, с. 49; № 12, с. 51; 1973 — № 2, с. 58; 1975 — № 9, с. 49; 1976 — № 3, с. 51; 1977 — № 9, с. 53; 1979 — № 2, с. 48; № 3, с. 51; № 9, с. 29; № 12, с. 34; 1980 — № 1, с. 48; 1981 — № 1, с. 40; № 2, с. 40.
Векторы: 1978 — № 1, с. 47; 1979 — № 1, с. 45; 1980 — № 12, с. 40.
Координатный метод: 1977 — № 11, с. 82; 1978 — № 11, с. 42.
Планиметрия: 1971 — № 6, с. 52; № 12, с. 41; 1972 — № 10, с. 47; 1973 — № 11, с. 52; 1975 — № 10, с. 48; № 11, с. 45; № 12, с. 46; 1976 — № 2, с. 46; № 5, с. 57; № 9, с. 56; № 10, с. 47; № 12, с. 50; 1977 — № 10, с. 48; 1978 — № 2, с. 36; № 4, с. 36; 1979 — № 9, с. 38.
Стереометрия: 1970 — № 11, с. 54; 1972 — № 2, с. 60; № 4, с. 54; № 7, с. 40; № 11, с. 52; 1974 — № 5, с. 58; № 10, с. 32; № 12, с. 55; 1975 — № 3, с. 61; 1976 — № 1, с. 60; 1977 — № 2, с. 47; № 3, с. 38; № 12, с. 48; 1978 — № 3, с. 48; 1979 — № 1, с. 36; № 6, с. 33; 1980 — № 2, с. 46; № 4, с. 40; 1981 — № 10, с. 44.
Планиметрия и стереометрия: 1974 — № 2, с. 46; 1975 — № 1, с. 55; 1976 — № 6, с. 49; 1979 — № 5, с. 34; № 11, с. 41; 1981 — № 9, с. 46.
Анализ и алгебра: 1978 — № 6, с. 53.
Статьи для самопроверки: 1977 — № 1, с. 36; № 9, с. 44; 1978 — № 1, с. 36; № 2, с. 34; № 7, с. 44; № 12, с. 34; 1979 — № 7, с. 37; 1980 — № 9, с. 47.

Физика

Механика: 1970 — № 6, с. 39; 1971 — № 2, с. 44; № 5, с. 50; № 9, с. 47; № 11, с. 54; 1972 — № 3, с. 58; № 9, с. 51; 1973 — № 9, с. 68; № 11, с. 57; 1974 — № 3, с. 52; № 11, с. 60; 1975 — № 1, с. 60; 1976 — № 12, с. 40; 1977 — № 2, с. 50; № 3, с. 46; № 11, с. 77; № 12, с. 52; 1978 — № 3, с. 54; № 11, с. 48; № 12, с. 42; 1979 — № 10, с. 49; 1980 — № 3, с. 41; № 11, с. 38; № 12, с. 45; 1981 — № 1, с. 43; № 10, с. 47.

Жидкости и газы: 1972 — № 12, с. 53.

Молекулярная физика, тепловые явления: 1972 — № 5, с. 45; 1973 — № 1, с. 43; 1974 — № 1, с. 60; 1976 — № 3, с. 58; 1977 — № 6, с. 67; 1978 — № 1, с. 42; 1979 — № 1, с. 50; 1981 — № 2, с. 44; № 11, с. 36; № 12, с. 42.

Основы электродинамики: 1972 — № 2, с. 54; № 4, с. 62; № 6, с. 55; № 6, с. 59; № 7, с. 48; № 7, с. 51; 1973 — № 3, с. 50; № 7, с. 35; 1974 — № 5, с. 64; 1975 — № 4, с. 41; № 12, с. 51; 1978 — № 4, с. 42; № 5 с. 38; 1979 — № 2, с. 52; № 3, с. 45; № 4, с. 43; 1980 — № 6, с. 36; 1981 — № 7, с. 39.

Колебания и волны: 1974 — № 6, с. 31; 1976 — № 2, с. 51; 1981 — № 3, с. 46.

Оптика: 1971 — № 7, с. 41; 1977 — № 4, с. 50; 1979 — № 5, с. 39; № 6, с. 30; 1980 — № 4, с. 44; 1981 — № 5, с. 37; № 6, с. 45.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970 — № 12, с. 50; 1972 — № 6. с. 62; № 10, с. 52; 1973 — № 4, с. 52; № 5, с. 43; № 7, с. 30; 1975 — № 5, с. 60; № 11, с. 50; 1978 — № 6, с. 65; 1979 — № 7, с. 41; 1981 — № 4, с. 40; № 9, с. 42.

В. Тугушев

Электрические цепи с нелинейными элементами

При расчете любой электрической цепи основная задача состоит в определении токов и напряжений на всех участках цепи. Связь между током и напряжением на каждом участке называется вольтамперной характеристикой участка. Она обусловлена, с одной стороны, физическими процессами, происходящими при движении зарядов в веществе под действием электрического поля, а с другой — конструкцией самой цепи (то есть соединением ее элементов).

Простейшая линейная вольтамперная характеристика имеет место, например, для металлического проводника:

$$U = IR,$$

где R — коэффициент пропорциональности между напряжением и током, называемый сопротивлением. Сопротивление определяется материалом, размерами и температурой проводника.

Существуют, однако, многочисленные устройства и элементы, физические и конструктивные особенности которых приводят к нелинейной зависимости между током и напряжением. Вольтамперная характеристика таких так называемых нелинейных элементов задается обычно графически или аналитически в возможно более близкой к истинной форме. Оба способа будут использованы при решении предлагаемых ниже задач.

Задача 1. *Нелинейный элемент, вольтамперная характеристика которого приведена на рисунке 1, а (синяя линия), включен в цепь постоянного тока, содержащую источник с ЭДС $\mathscr{E} = 200$ В и два резистора сопротивлением $R = 10$ кОм каждый (рис. 1, б). Найдите ток, текущий через нелинейный элемент.*

Обозначим через I_1, I_2 и I токи на отдельных участках цепи; их направления показаны на рисунке 1, *б*. Поскольку токи в цепи постоянные, заряд, поступающий в точку разветвления (точки A и B) в единицу времени, равен заряду, уходящему из этой точки за то же время, то есть

$$I = I_1 + I_2.$$

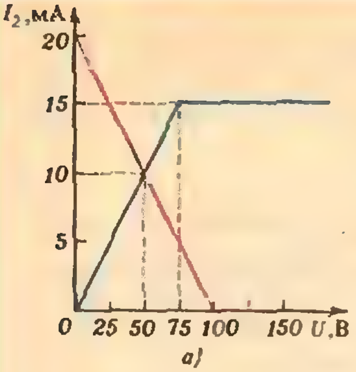
Участки AaB, AbB и AcB — параллельные; следовательно, напряжения на них одни и те же:

$$I_1R = U,$$
$$U = \mathscr{E} - IR,$$

где U — напряжение на нелинейном элементе. Из полученных трех уравнений найдем I_2:

$$I_2 = \frac{\mathscr{E} - 2U}{R}. \qquad (*)$$

С другой стороны, величины I_2 и U связаны между собой зависимостью, изображенной на рисунке



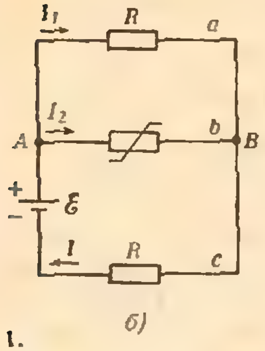
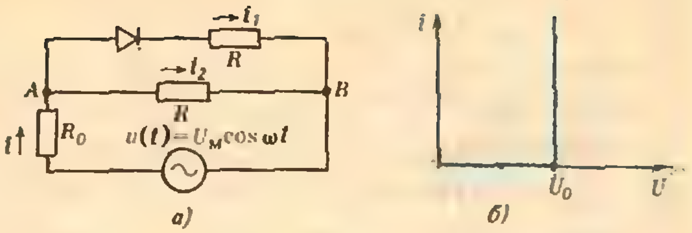


Рис. 1.



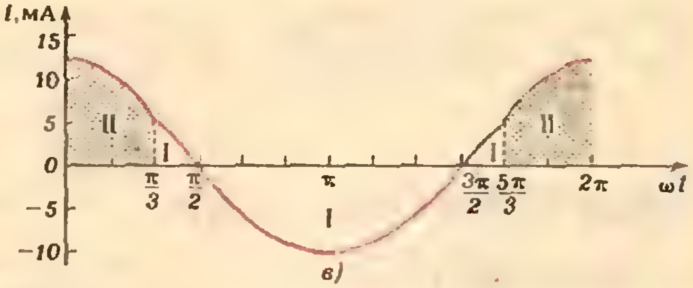


Рис. 2.

1, *а*. Изобразим на этом же рисунке прямую (красная линия), задаваемую уравнением (*). Очевидно, что существует только одна точка пересечения этой прямой с вольтамперной характеристикой нелинейного элемента, ей соответствует ток

$$I_2 = 10 \text{ мА}.$$

Задача 2. *Найдите ток через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рисунке 2, а. Вольтамперная характеристика диода (нелинейного элемента) приведена на рисунке 2, б.*

Очевидно, что схема может работать в двух режимах: когда диод заперт и когда диод открыт.

Если диод заперт, ток течет только через последовательную цепочку резисторов с сопротивлениями R_0 и R, и он равен

$$i_1 = \frac{u(t)}{R_0+R}.$$

Во втором случае, когда диод открыт и напряжение на нем равно U_0 и не меняется со временем, ток i_{II} разветвляется в точках A и B так, что (см. рис. 2, *а*)

$$i_{II} = i_1 + i_2.$$

Кроме того, для различных участков схемы между точками A и B выполняются равенства

$$U_0 + i_1 R = i_2 R,$$
$$i_2 R = u(t) - i_{II} R_0.$$

Из последних трех уравнений найдем i_{II}:

$$i_{II} = \frac{2u(t) - U_0}{R + 2R_0}.$$

Теперь выясним, при каких условиях реализуются режимы I и II. Ясно, что в моменты отпирания и запирания диода напряжение на участке AB должно быть равно U_0, то есть

$$i_1 R = U_0, \text{ или } \frac{u(t)R}{R_0+R} = U_0.$$

Отсюда следует, что при напряжениях

$$u(t) = U_0 \frac{R_0+R}{R}$$

будет происходить смена режимов I и II. В частности, первая смена режимов произойдет в момент, когда

$$\cos \omega t = \frac{U_0}{U_м} = \frac{R_0+R}{R} \left(U_м > U_0 \frac{R_0+R}{R} \right).$$

График зависимости искомого тока от времени для $U_м = 300$ В, $U_0 = 100$ В, $R_0 = 10$ кОм и $R = 20$ кОм представлен на рисунке 2, *в*.

Задача 3. *Ток I двухэлектродной лампы в определенном диапазоне* *напряжений может быть связан с разностью потенциалов U между электродами соотношением $I=aU+bU^2$ при $U>0$ $(a,\ b>0)$ и $I=0$ при $U<0$. Две такие лампы включены в цепь, как показано на рисунке 3. Параметры a и b для обеих ламп равны соответственно $a_1=0{,}06$ мА/В, $b_1=0{,}008$ мА/В^2 и $a_2=0{,}04$ мА/В, $b_2=0{,}002$ мА/В^2. Считая $\mathcal{E}=200$ В и $R=10$ кОм, вычислите мощность, потребляемую лампами.*

Искомую мощность $P_{\text{ламп}}$ можно найти из закона сохранения энергии

$$P_{\text{ламп}}+P_R=P_{\mathcal{E}}.$$

Здесь $P_R=I_0^2R$ — мощность, расходуемая в резисторе (I_0 — ток, текущий через резистор и батарею), а $P_{\mathcal{E}}=\mathcal{E}\,I_0$ — мощность, отдаваемая батареей.

Согласно закону Ома,

$$I_0=\frac{\mathcal{E}-U}{R}.$$

Кроме того (см. рис. 3),

$$I_0=I_1+I_2,$$

где I_1 и I_2 — токи в первой и во второй лампах соответственно.

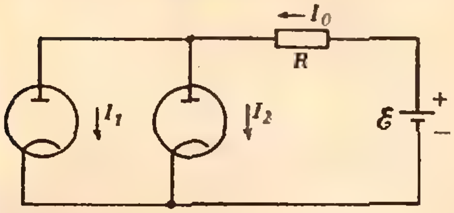


Рис. 3.

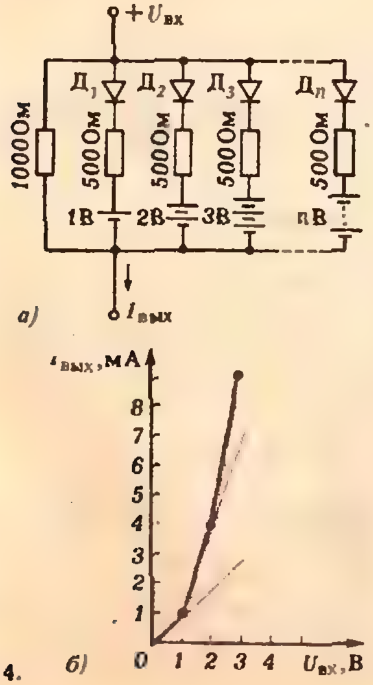


Рис. 4.

Из последних двух уравнений, используя связь между токами в лампах и напряжением на них, получим квадратное относительно U уравнение

$$(a_1+a_2)U+(b_1+b_2)U^2=\frac{\mathcal{E}-U}{R},$$

из которого найдем U:

$$U=\frac{-(a_1+a_2+1/R)}{2(b_1+b_2)}+$$
$$+\frac{((a_1+a_2+1/R)^2+4\mathcal{E}(b_1+b_2)/R)^{1/2}}{2(b_1+b_2)}\approx$$
$$\approx 35{,}8\ \text{В}.$$

Отрицательный корень квадратного уравнения отбрасываем, поскольку он не соответствует физическому смыслу задачи: при $U<0$ лампы заперты и тока не проводят.

Теперь из закона сохранения энергии найдем искомую мощность $P_{\text{ламп}}$, потребляемую лампами:

$$P_{\text{ламп}}=P_{\mathcal{E}}-P_R=\frac{(\mathcal{E}-U)U}{R}\approx 0{,}6\ \text{Вт}.$$

Задача 4. *Нарисуйте график зависимости тока в нагрузке $I_{\text{вых}}$ от входного напряжения $U_{\text{вх}}$ в схеме, представленной на рисунке 4, а. Все диоды (Д$_1$, Д$_2$, ..., Д$_n$) — идеальные, то есть их сопротивление в одном направлении неограниченно велико, а в другом — бесконечно мало.*

Обозначим через R ($R=1000$ Ом) сопротивление крайнего левого резистора (см. рис. 4, *а*), через $R/2$ ($R/2=500$ Ом) — сопротивления всех остальных резисторов и через $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}=1$ В) — ЭДС источника, включенного последовательно с первым диодом.

Пока напряжение на входе не превышает 1 В, все диоды заперты, и ток течет только по крайней левой ветви схемы:

$$I_{\text{вых}\,0}=\frac{U_{\text{вх}}}{R}\quad (U_{\text{вх}}<1\ \text{В})$$

— по мере роста напряжения ток линейно нарастает.

Как только входное напряжение достигнет 1В, откроется первый диод, и через него пойдет ток, равный $\frac{U_{\text{вх}}-\mathcal{E}}{R/2}$. При этом зависимость выходного тока от напряжения на входе будет иметь вид

$$I_{\text{вых }1}=I_{\text{вых }0}+\frac{U_{\text{вх}}-\mathscr{E}}{R/2}=$$
$$=\frac{3U_{\text{вх}}}{R}-\frac{2\mathscr{E}}{R}\ (1\ \text{В}<U_{\text{вх}}<2\ \text{В}).$$

При дальнейшем росте напряжения на входе будут открываться диоды Д$_1$, Д$_2$ и т. д. График зависимости тока $I_{\text{вых}}$ от напряжения $U_{\text{вх}}$ изображен на рисунке 4, *б*.

Посмотрите внимательно на этот график, и вы увидите, что здесь по отрезкам прямых воспроизведена парабола. Так на примере данной задачи вы познакомились с работой своеобразного электронного устройства — функционального преобразователя (квадратора). С помощью системы диодов, резисторов и источников тока он моделирует операцию возведения функции в квадрат. Подобные устройства применяются при электронном моделировании различных сложных физических процессов.

Задача 5. *Найдите связь между током и напряжением для металлического проводника с учетом зависимости его сопротивления от температуры. Скорость теплоотдачи в окружающую среду считать пропорциональной разности температур проводника и среды.*

Обычная связь между током и напряжением $U=IR$ предполагает, что сопротивление R, зависящее от температуры, берется при температуре T проводника. Но эта температура, вообще говоря, отличается от температуры T_0 окружающей среды. В результате между проводником и средой происходит теплообмен, причем при небольшой разности температур $T-T_0$ количество теплоты $\Delta Q_{\text{пер}}$, переданное среде за время Δt, дается соотношением

$$\frac{\Delta Q_{\text{пер}}}{\Delta t}=C(T-T_0),$$

где C — постоянный коэффициент пропорциональности.

Во время протекания тока проводник нагревается. (С микроскопической точки зрения это обусловлено столкновениями электронов, движущихся в проводнике под действием электрического поля, с колеблющимися ионами кристаллической решетки, с различными дефектами и неоднородностями.) Количество теплоты $\Delta Q_{\text{выд}}$, выделяемое в проводнике за время Δt, связано с током I в проводнике, с сопротивлением R проводника и с напряжением U на нем:

$$\frac{\Delta Q_{\text{выд}}}{\Delta t}=I^2R=\frac{U^2}{R}=\frac{U^2}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}.$$

Здесь R_0 — сопротивление при температуре проводника T_0, α — температурный коэффициент сопротивления. (Если температура T_0 близка к 0° C и разность $T-T_0$ мала, то зависимость сопротивления от температуры действительно можно представить в виде $R=R_0(1+\alpha(T-T_0))$.)

Нагрев проводника будет происходить до тех пор, пока скорость выделения тепла в проводнике не сравняется со скоростью теплоотвода в окружающую среду:

$$\frac{\Delta Q_{\text{выд}}}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_{\text{пер}}}{\Delta t},$$

или

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}=C(T-T_0).$$

Отсюда разность температур

$$T-T_0=\frac{-R_0C+(R_0^2C^2+4U^2\alpha R_0C)^{1/2}}{2\alpha R_0C},$$

и связь между током и напряжением имеет вид

$$I=\frac{U}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}=$$
$$=\frac{U}{R_0\left(1+\dfrac{(R_0^2C^2+4U^2\alpha R_0C)^{1/2}-R_0C}{2R_0C}\right)}$$

(отрицательное значение $T-T_0$ отбрасываем, так как оно не имеет физического смысла).

Проанализируем полученный результат. Нетрудно видеть, что при $U^2\ll R_0C/(4\alpha)$ зависимость тока от напряжения упрощается:

$$I=\frac{U}{R_0(1+U^2\alpha/(R_0C))}$$

(мы воспользовались известной формулой: при $x\ll 1$ $(1+x)^{1/2}=1+x/2$). Отметим, что условие $U^2\ll R_0C/(4\alpha)$ выполняется практически всегда, поскольку всегда мала поправка к сопротивлению, вызванная нагреванием проводника ($\alpha(T-T_0)\ll 1$). Чем меньше тепловая мощность U^2/R, выделяемая в проводнике, и температурный коэффициент сопротивления α и чем больше интенсивность теплоотвода C, тем при более высоких напряжениях будет выполняться закон Ома, то есть будет сохраняться прямая пропорциональность между током и напряжением.

В заключение решите самостоятельно несколько задач:

Упражнения

1. В цепь параллельно включены резистор сопротивлением R и нелинейный элемент, сопротивление которого зависит от напряжения U на нем по закону $r=r_0+\alpha U$. Найдите ток в цепи, если на нее подано напряжение U.

2. Решите предыдущую задачу при последовательном соединении нелинейного элемента и резистора.

3. На рисунке 5 изображена схема двухтактного выпрямителя переменного тока. Считая, что генератор вырабатывает переменное напряжение с амплитудой $\mathcal{E}_м=100$ В, а характеристики диодов те же, что и в задаче 2 в статье, найдите зависимость тока в резисторе сопротивлением $R=100$ Ом от времени при $U_0=25$ В.

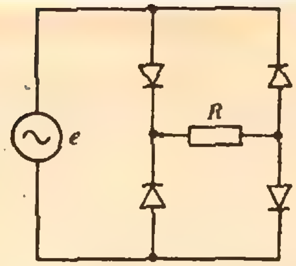


Рис. 5.

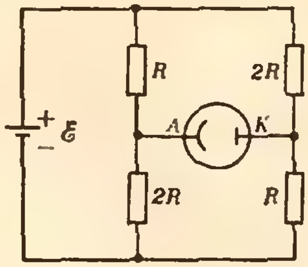


Рис. 6.

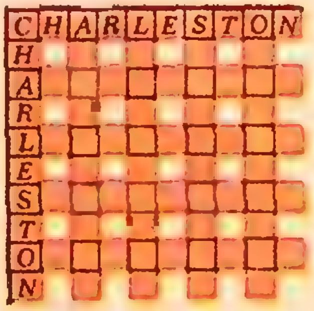
4. В схеме, изображенной на рисунке 6, через фотоэлемент протекает ток I, если потенциал анода A больше потенциала катода K. В противном случае ток через элемент не идет. Найдите напряжение на фотоэлементе при $\mathcal{E}=10$ мВ, $I=100$ мкА и $R=10$ Ом.

Две головоломки

1. **Sapienti sat: «Мудрому достаточно» (*лат.*)** В этом примере на деление цифры заменены буквами и звездочками. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные; звездочки могут быть любыми цифрами. Восстановите пример.

```
_SAPIENTI | SAT
  ***     |*****,***
  ---
 _****
   ***
   ---
   _***
     ***
     ---
     _***
       ***
       ---
       _****
         ***
         ---
         _***
           ***
           ---
           _***
             ***
             ---
             _***
               ***
               ---
```

2. Десятизначное число *CHARLESTON*, записанное в верхней горизонтали и в левой вертикали изображенной на рисунке фигуры, обладает двумя свойствами: все его цифры различны и оно является квадратом целого числа. Заполните клетки этой фигуры (в том числе, и те, в которых записаны буквы) цифрами так, чтобы каждое из десяти: пяти горизонтальных и пяти вертикальных — десятизначных чисел обладало теми же двумя свойствами. Известно, что числа, записанные по горизонталям, равны соответствующим числам, записанным по вертикалям; что $L=2$; $CHARLESTON=EERRN^2$, следующее за ним число (то, которое начинается с A) равно $SEARC^2$, следующее — $RENLR^2$, затем $THORR^2$ и, наконец, — $CECCA^2$.



Э. Рекстин

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x).$$

2. В треугольнике с углом 120° длины сторон образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найдите длины сторон треугольника.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6\\ \sqrt{x+y}-y+x=2.\end{cases}$$

4. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $|BM|=6$, $|BN|=5$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC, одно боковое ребро проходит через вершину B, другое — через точку D, а третье пересекает ребро CC_1. Найдите отношение объема пирамиды к объему призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}x\cdot\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\log_4(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\frac{x}{y}-2\right)\\ 5+\log_2\frac{y}{x}=\frac{6}{\log_2\frac{x}{y}}.\end{cases}$$

3. На продолжении стороны AB ромба $ABCD$ за точку B взята точка M, причем $|MD|=|MC|$ и $\widehat{MDC}=\operatorname{arctg}\frac{8}{5}$. Найдите отношение длин отрезков MA и MB.

4. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BC и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми A_1E, DF, AD_1. Найдите

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}6x+y^2-z^2=6\\ x^2-y-4z=-4\\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2.\end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{x}}=\frac{5}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$4x+\log_2 9>\log_2(9\cdot 2^{2x+1}-5).$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC длины 2 см проведены медианы AM и CN. Около четырехугольника $ANMC$ можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 2y+\frac{1}{2}=\left(\cos y-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x)\\ \sin y\cdot(\operatorname{tg}^3x+\operatorname{ctg}^3x)=3\operatorname{ctg}y.\end{cases}$$

5. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковым ребром длины 8 лежит трапеция с основаниями $|AD|=12$, $|BC|=7$; $\widehat{B_1BC}=60°$. Отрезок, соединяющий вершину B с центром O грани AA_1D_1D, перпендикулярен ей; $|BO|=9$. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри призмы, с основанием в грани BB_1C_1C. Найдите

а) наибольшее значение объема таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объема среди всех рассматриваемых цилиндров.

Физика

Вариант 1

1. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова должна быть минимальная кинетическая энергия налетающего атома, чтобы в результате столкновения мог излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_и=13{,}6$ эВ. Частоты излучения атома водорода определяются формулой $\nu=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$, где R — постоянная, n и m — целые числа.

2. Одинаковые по массе количества водорода ($\mu_{H_2}=2$ г/моль) и гелия ($\mu_{He}=4$ г/моль) поместили в сосуд объемом V_1, который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите V_2/V_1. Температура постоянна.

3. В плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов, вводится диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$. Во сколько раз изменится сила

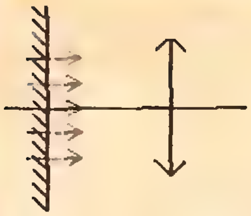


Рис. 1.

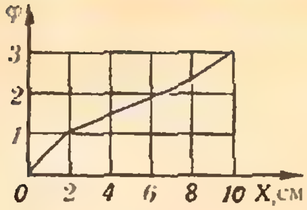


Рис. 3.

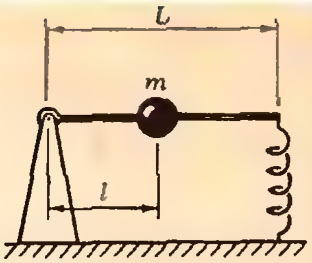


Рис. 5.

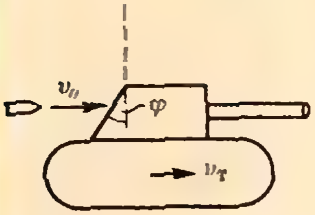


Рис. 2.

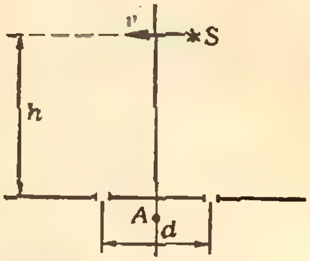


Рис. 4.

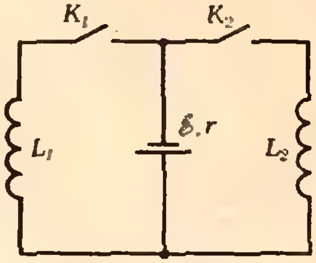


Рис. 6.

электростатического взаимодействия между пластинами конденсатора? Толщина диэлектрической пластины составляет половину расстояния между пластинами конденсатора.

4. Собирающая линза диаметром $D=2$ см и фокусным расстоянием $F=20$ см освещается широким параллельным пучком света (рис. 1). За линзой стоит идеальное плоское зеркало так, что 25% светового потока, прошедшего через линзу и отразившегося от зеркала, снова попадает на линзу. Найдите расстояние между линзой и зеркалом.

Вариант 2

1. В заднюю стенку башни танка, идущего со скоростью $v_т=72$ км/ч, ударяется горизонтально летящая со скоростью $v_0=750$ м/с пуля и упруго отскакивает от нее (рис. 2). С какой скоростью полетит отскочившая пуля? Стенка наклонена к вертикали под углом $\varphi=30°$.

2. Герметичный шар-зонд, изготовленный из нерастягивающегося материала, должен поднять аппаратуру массой $M=10$ кг на высоту около 5,5 км, где плотность воздуха ($\mu_в=29$ г/моль) вдвое меньше, чем у поверхности Земли. Шар наполняют гелием ($\mu_{He}=4$ г/моль) при внешних условиях (температура $T=300$ К, давление $p=1$ атм). Объем шара $V=100$ м^3. Определите массу квадратного метра материала оболочки шара. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

3. Определите разность потенциалов между электродами газоразрядной трубки, заполненной гелием, при которой начинается процесс ионизации атомов электронным ударом. Известно, что распределение потенциала (в относительных единицах) по длине трубки в этот момент имеет вид, изображенный на рисунке 3; длина свободного пробега электронов $l=10^{-4}$ м; потенциал ионизации атомов гелия $\varphi_и=24{,}5$ В.

4. Точечный источник света S равномерно движется параллельно экрану, в котором имеются два маленьких отверстия на расстоянии d друг от друга; расстояние от источника до экрана равно h (рис. 4). Приемник света A, расположенный на оси системы, регистрирует периодически изменяющуюся освещенность. Определите скорость движения источника v, если частота колебаний интенсивности $f=15$ Гц; длина волны света $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м; $d=2$ мм; $h=1$ м. Во время измерений источник движется вблизи оси системы.

Вариант 3

1. Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткостью k (рис. 5). Определите период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней груза массой m.

2. С какой максимальной силой прижимается к телу человека банка (применяемая в медицинской практике для лечения), если диаметр ее отверстия $D=4$ см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t=80°$C, а температура окружающего воздуха $t_0=20°$C. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

3. Две катушки самоиндукции с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 6). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. После того как ключ K_1 замкнули и ток через катушку L_1 достиг некоторого значения I_0, замыкают ключ K_2. Определите установившиеся значения токов через катушки после замыкания ключа K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

4. Положение звезды, видимое с Земли, немного отличается от истинного из-за преломления лучей атмосферой. Определите ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\alpha=45°$ к вертикали. Среднее значение показателя преломления лучей атмосферой считать равным $n=1{,}0003$.

Публикацию подготовили А. Болибрух,
А. Шеронов

Московский электротехнический институт связи

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos^2 2x+\left|\sin\left(2x-\frac{3}{2}\pi\right)\right|+\frac{1}{4}}=\cos\frac{20}{12}\pi.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{9x-15}{19}<\int\limits_0^x\frac{dy}{(y+1)^2}-1.$$

4. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найдите скорости поездов.

5. При переносе $\vec{m}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что если A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA и AB, то прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{8}\sqrt{x\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}-\frac{10}{13}\sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x^{11}}}\right)'=56.$$

2. Решите уравнение

$$\left|\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{\cos^2 2x}-1.$$

3. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

4. Найдите целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,3}(\sqrt{x+5}-x+1)>0.$$

5. Если пассажир выедет из A в B на поезде, то он прибудет в B через 20 часов. Если же он дождется самолета, а ждать более 5 часов, то он будет в пункте B через 10 часов. Самолет догоняет поезд через $\frac{8}{9}$ часа с момента отлета. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Какую начальную скорость нужно сообщить сигнальной ракете, выпущенной под углом $\alpha=45°$ к горизонту, чтобы она вспыхнула в наивысшей точке своей траектории, если время горения запала ракеты $\tau=6$ с?

2. В чашечный ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При давлении $p_1=768$ мм рт. ст. он показывает $h_1=748$ мм, причем длина пустой части трубки равна $l=80$ мм. Каково атмосферное давление p_2, если ртуть в этом барометре стоит на высоте $h_2=734$ мм? Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

3. В поле горизонтально расположенного конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=2$ см, влетает электрон со скоростью $v_0=10^7$ м/с, направленной параллельно пластинам. Найдите разность потенциалов между пластинами, если отклонение электрона на пути $l=5$ см вдоль пластин составило $h=2{,}5$ мм. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. Имеются 25-ваттная и 100-ваттная лампочки, соединенные последовательно и включенные в сеть с напряжением, на которое рассчитана каждая лампочка в отдельности. В какой из них выделится больше тепла? Во сколько раз?

5. Емкость переменного конденсатора меняется от $C_1=56$ пФ до $C_2=667$ пФ. Какой комплект катушек индуктивности нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции в диапазоне длин волн от $\lambda_1=40$ м до $\lambda_2=2600$ м?

6. На дне сосуда с водой глубиной $h=10$ см помещен точечный источник света. Каков должен быть минимальный радиус непрозрачного диска, плавающего на воде, чтобы ни один луч не вышел из воды? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

7. Изображение предмета, удаленного от собирающей линзы на расстояние $d=0{,}4$ м, больше предмета в $\Gamma=5$ раз. Найдите возможные значения оптической силы линзы.

Публикацию подготовили В. Рассушин, В. Славов, О. Шварцман, Р. Шишкалова

А как вы думаете

Как-то раз я предложил знакомому такую задачу: «Найди на плоскости ограниченную фигуру α*), которую некоторый поворот R (на ненулевой угол) и некоторый параллельный перенос F (отличный от тождественного) переводят в одну и ту же фигуру: $R(\alpha)=F(\alpha)$. «Это невозможно,— сразу же ответил знакомый.— Сколько раз ни поворачивай ограниченную фигуру вокруг заданного центра, она не выйдет за пределы некоторого круга. А при повторных переносах это случится непременно».

А вы как думаете?

Н. Михайленко

) Определение см. в «Геометрии 6—8», задача 17.

В разделе «Искусство программирования» мы продолжаем публиковать уроки Заочной школы программирования и статьи по информатике, языкам программирования и вычислительной технике. Уроки Заочной школы, которая в первых номерах этого года закончит свой третий, заключительный курс, вряд ли будут доступны новым читателям журнала. Остальные статьи, мы надеемся, приоткроют завесу таинственности, которой иногда еще окружены ЭВМ, и объяснят, почему освоение вычислительной техники порой называют «второй грамотностью».

Заочная школа программирования.

Урок 17: Массивы и записи в языке Паскаль

Дальнейшие возможности Паскаля связаны с наличием в нем структурных типов, а именно типов для массивов, записей и файлов. Начнем с массивов и записей.

Массивы

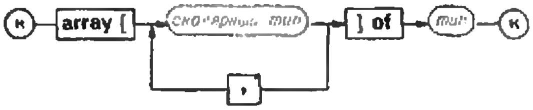
Массив — это набор некоторого определенного числа элементов; все эти элементы должны иметь один и тот же тип. При этом следует представлять себе, что элементы массива расположены некоторым регулярным образом: как строки, как прямоугольная таблица, как прямоугольная пространственная решетка и т. д. Этим разным случаям соответствуют массивы разных размерностей: одномерные (или *векторы*), двумерные (или *матрицы*), трехмерные и т. д.

Чтобы указать элемент массива, имеющего размерность *n*, надо задать *n* координат, определяющих место этого элемента в массиве; эти координаты будем называть *индексами*. Например, элемент матрицы определяется двумя индексами, один из которых обозначает строку матрицы, а другой — элемент в строке (то есть, по существу, столбец матрицы).

Значения, которые принимает индекс (например, значения, обозначающие строки нашей матрицы или ее столбцы), составляют некоторый скалярный тип (то есть, как мы видели раньше, упорядоченное множество значений). Этот скалярный тип может быть любым, кроме *real*, но наиболее естественно употреблять в этом качестве отрезок типа *integer* и понимать тогда индексы просто как номера.

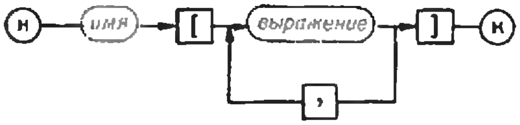
Пусть, например, в матрице строки занумерованы числами от 1 до 5, а столбцы — числами от 0 до 19. Тогда тип первого индекса есть 1..5, а второго — 0..19.

Тип массива задается следующей синтаксической диаграммой:



В этой диаграмме «скалярные типы» — это последовательно типы первого, второго и т. д. индексов, а число их, естественно, равно размерности массива. Поле *тип* содержит тип элементов массива (единый для всех элементов).

Отдельный элемент массива представляется в программе в виде переменной с индексами. Синтаксическая диаграмма ее такова:



«Имя» здесь — имя соответствующего массива. Число выражений должно быть равно числу индексов массива, а типы выражений должны совпадать с типами соответствующих индексов.

Перейдем к примерам. Пусть в программе раздел описания типов имеет вид

```
type вектор1 = array [1..10] of real;
     вектор2 = array [—9..0] of real;
     матрица = array [1..5, 0..19] of char;
     цвет = (красный, оранжевый, желтый,
            зеленый, голубой, синий, фиолетовый);
     волны = array [цвет] of real;
     буква = 'a'..'z';
     сочетания = array [буква,буква]
                  of integer;
```

(обратите внимание на то, что тип *буква* мы определили как отрезок типа *char*; при этом мы считали, что латинские буквы в *char* расположены подряд и упорядочены по алфавиту.)

Пусть также в раздел описания переменных входят следующие описания:

```
x : вектор1; y : вектор2; z : матрица;
u : волны; v : сочетания;
i : integer; b : boolean;
```

Тогда в этой программе *x* и *y* — векторы, состоящие каждый из десяти вещественных чисел. Но типы у этих векторов разные. Элементы *x* нумеруются целыми числами начиная с 1, а элементы *y* — с — 9. Матрица *z* состоит из пяти строк, пронумерованных целыми числами от 1 до 5. Каждая строка содержит по двадцать литер, пронумерованных числами от —9 до 10.

В программе могут встретиться такие, например, операторы:

```
x[1]:=3.14; y[—5]:=x[1]/2;
z[2,1]:='+'; z[1,2]:=z[2,1];
```

Но более типичным случаем является использование переменных с индексами в операторах цикла. Следующий оператор заполняет *x* величинами, обратными числам первого десятка:

```
for i:=1to 10 do x[i]:=1/i;
```

Задание 17.1. *Занесите во все элементы вектора y квадраты соответствующих (то есть одинаково расположенных относительно начала вектора) элементов вектора x.*

Задание 17.2. *Присвойте переменной b значение* **true**, *если среди элементов матрицы z имеется хоть одна литера '*', и значение* **false** *в противном случае.*

Вектор *u* состоит из семи вещественных чисел, причем в качестве индексов выступают уже не числа, а константы — названия цветов спектра. Каждый элемент этого вектора имеет, таким образом, не безликий номер, а свое, и к тому же яркое, имя. Следующее задание покажет, что такая индексация может оказаться осмысленной.

Задание 17.3. *Пусть вектор u заполнен числами, определяющими частоты колебаний для волн, соответствующих данным цветам спектра. Напишите процедуру, параметр которой имеет тип* **цвет** *и которая печатает «частоту своего параметра». Напишите оператор, обращающийся к этой процедуре и печатающий последовательно частоты рассматриваемых волн.*

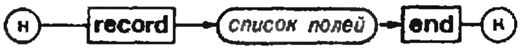
Матрицу *v* мы используем в задаче, относящейся уже не к физике, а к полезному искусству дешифровки.

Задание 17.4. *Перехвачен весьма длинный зашифрованный текст, состоящий из латинских букв и заканчивающийся литерой '*'. Чтобы найти какие-то подходы к расшифровке текста, надо определить сколько раз встречается в нем каждое возможное двухбуквенное сочетание. Вводя текст литера за литерой, поместите в каждый элемент матрицы v число встреченных в тексте сочетаний подряд идущих букв, первая из которых совпадает с первым, а вторая — со вторым индексом этого элемента. (Если, например, в тексте 28 раз встретилось сочетание букв qu, то в строке матрицы с индексом 'q' элемент ее с индексом 'u' должен в конце работы программы содержать число 28. Пробелы в тексте следует игнорировать, а символы, разделенные пробелами, считать соседними.)*

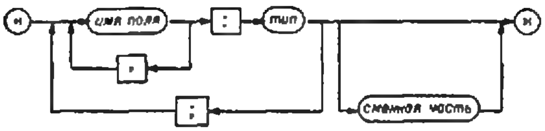
Записи

Запись — это набор некоторого определенного числа элементов; эти элементы могут иметь разные типы. Записи состоят из полей, каждое из которых определяется своим типом и некоторым именем. С помощью имени поля (а не с помощью индексов, как в случае массивов) указывается нужный элемент записи.

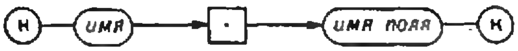
Тип записи задается следующей синтаксической диаграммой:



Список полей, в свою очередь, задается диаграммой



Мы пока будем рассматривать типы записей без сменной части. Элемент записи представляется в программе в виде *выборки поля*, синтаксическая диаграмма которого такова:



«Имя» здесь есть имя соответствующей записи.

Записи удобно использовать для хранения и обработки разнородной информации о каких-то объектах. В следующем примере записи содержат сведения о различных странах мира. Пусть в программе раздел описания типов имеет вид

```
type дата=record
            год, месяц, день: integer
          end;
     вузы=record
            университеты, технические,
            прочие: integer
          end;
     страна=record
              площадь, население:real;
              устройство:boolean;
              вступление:дата;
              образование:вузы
            end;
```

Заметим, что типы *дата* и *вузы* различны: хотя оба они задают тройку целых чисел, но имена их полей разные.

Пусть далее в разделе описания переменных программа имеет описание

австралия, австрия, албания, ..., япония:страна;

Под многоточием здесь спрятано перечисление всех стран, входящих в ООН. Сведения о каждой из них, хранящиеся в соответствующих полях, таковы: площадь (в тыс. кв. км.), количество населения (в млн. человек), конституционное устройство (республика — *true*, монархия — *false*), дата вступления в ООН, количество различных высших учебных заведений.

Задание 17.5 *В нашем примере у некоторых полей типы излишне «обширны». Измените описания так, чтобы диапазоны изменения индексов стали насколько возможно малы.*

Допустим, что все поля во всех записях уже заполнены. Тогда, например, оператор

writeln(*украина.население*/*украина.площадь*);

напечатает плотность населения на Украине.

Расширение понятия переменной

Пусть в нашей программе описана переменная *университеты* типа *integer*.

Это допустимо: одно и то же имя (в нашем примере *университеты*) в одной и той же программе можно употреблять для переменной и для поля записи (а также и для полей разных типов записей).

Мы хотим присвоить этой переменной общее число университетов на Пиренейском полуострове, для чего пишем оператор присваивания

```
университеты:=испания.образование.
        университеты+португалия.
        образование.университеты;
```

Каждое из слагаемых есть выборка, но не из обычной переменной, а из другой выборки.

Так, из переменной *испания* (типа *страна*) извлечено поле *образование* (типа *вузы*), а из него уже поле *университеты* (типа *integer*).

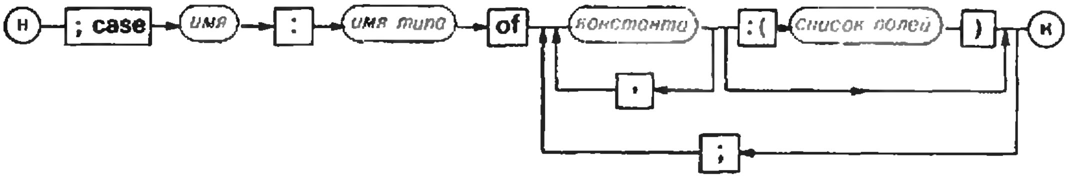
Чтобы узаконить такие конструкции, нам следовало бы внести изменения в некоторые синтаксические диаграммы. Но мы не будем это делать, а просто условимся, что понятие переменной охватывает не только обычные переменные, но также переменные с индексами и выборки полей. Условимся также, что любое действие, совершаемое в программе над переменной в прежнем смысле слова (в том числе и извлечение поля), может совершаться и над переменной в расширенном смысле.

Задание 17.6. *Напишите процедуру* ***справка*** *с параметром типа* ***страна***, *печатающую для соответствующей страны а) республика она или монархия, б) сколько жителей приходится в ней на одно высшее учебное заведение.*

Записи с вариантами

Мы считали до сих пор, что записи, принадлежащие к одному и тому же типу, организованы совершенно одинаково. Паскаль дает, однако, возможность ослабить это ограничение. Применяя в описании типа записи «сменную часть» (см. синтаксическую диаграмму этого описания), программист может определять *записи с вариантами.*

Сменная часть имеет следующую синтаксическую диаграмму*)



Пара «имя — имя типа», стоящая после **case**, задает особое поле записи: *поле признака.* Значение этого поля будем называть *признаком.* Признаком (в каждый данный момент выполнения программы) должна быть одна из стоящих далее констант. Константа, служащая признаком, задает вариант записи, то есть определяет, каковы дальнейшие поля записи: это как раз те поля, список которых стоит в скобках после данной константы.

Пусть требуется рассмотреть совокупность всевозможных треугольников, параллелограммов и кругов, расположенных на плоскости (и свободно перемещающихся по ней). Такая совокупность задается типом *фигура*, имеющим следующее описание:

```
фигура =
   recordx:real;
     caseф:форма of
       треугольник(y, угол:real);
                       обход: boolean;
       параллелограмм:  (y1,угол1:real);
       круг:()
end
```

Тип *форма* описывается при этом как

форма = (*треугольник* ,
параллелограмм, *круг*);

Поле *x* — общее у всех трех фигур: у треугольника и параллелограмма это — одна из сторон, у круга — радиус. Для треугольника и параллелограмма надо определить еще вторую, смежную сторону и угол между ними (вычисляемый в радианах: 180° = π радиан). Для треугольника укажем также, совершается ли обход от *x* к *y* по часовой стрелке или против (в поле *обход* будет соответственно *true* или *false*). Для круга дополнительных полей не требуется.

Пусть далее описана переменная *f* типа *фигура*, и пусть она с некоторого момента должна представлять прямоугольный треугольник, катеты которого, рассматриваемые при обходе прямого угла против часовой стрелки, имеют длины 10.5 и 2.3. Прежде всего, зададим для *f* вариант, связанный с нужным признаком:

f • Ф:=треугольник;

Затем придадим значения остальным полям:

f.x:=10.5; *f.y*:=2.3; *f.обход*:=false;
f.угол:=*pi*/2;

(Здесь и в дальнейшем считается, что в разделе описания констант программы было дано описание для числа π:*pi*=3.14159265358.)

Обработка записей с вариантами опирается, как правило, на оператор выборки, проверяющий поле признака. Напишем описание функции, которая вычисляет площадь фигуры:

```
function площадь(z:фигура):real;
  begin case z.ф of
    треугольник : площадь:=
    z.x*z.y*sin (z.угол)/2;
    параллелограмм : площадь:=
    z.x*z.y1*sin(z.угол1);
    круг : площадь:=pi*z.x*z.x
    end
  end
```

Словарь

array — массив
record — запись

А. Рар

---

*) По техническим причинам не удалось исправить опечатку в этой диаграмме: обходная стрелка должна охватывать только одно поле *список полей,* а не три поля :(,*список полей,*).

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов и учащиеся ПТУ, за исключением проживающих в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах.

Занятия начнутся 1 сентября 1982 г. Обучение бесплатное. Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать пособия, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Изучив материал пособия, учащиеся ВЗМШ присылают на проверку контрольные работы, которые тщательно рецензируются преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов страны. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики.

Срок обучения — три года. Все, кто успешно выполнит контрольные задания, получат удостоверения об окончании ВЗМШ.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны прислать решения этих задач *не позднее 25 марта*. После проверки работ (примерно в июле) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе решение Приемной комиссии. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Необоснованный ответ может быть не засчитан; если в задаче возможны несколько ответов, надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Обратно она не высылается и рецензии на нее не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с полным почтовым адресом поступающего (этот листок будет наклеен на конверт с извещением Приемной комиссии о результатах проверки вступительной работы).

На обложку тетради надо наклеить листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа не будет отдана на проверку):

Область	*Московская*
Фамилия и имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1968*
Класс и школа	*7 класс «А» школы № 2 г. Клина*
Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1,* *мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

Результаты проверки
(заполняется проверяющим)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11	12			
									а	б		а	б	в	г

ВЗМШ имеет около 40 отделений и филиалов при университетах и педагогических институтах различных городов СССР. Учащиеся, проживающие на Северо-западе РСФСР и в Прибалтике, должны присылать работы по адресу: 199178, Ленинград, Васильевский остров, 10-я линия, 33, С.-з. ЗМШ, на конкурс. Учащиеся, проживающие на территории, относящейся к какому-либо филиалу ВЗМШ, посылают свои работы в соответствующий филиал; в случае поступления они занимаются по той же программе, что и остальные школьники, принятые в ВЗМШ. Адреса филиалов можно найти в «Кванте», 1979, № 2, с. 59. Учащиеся, проживающие на остальной части СССР, присылают свои работы в ВЗМШ по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, проживающие в общей зоне действия ВЗМШ и ее филиалов с МММФ — отделением ВЗМШ при механико-математическом факультете МГУ (см. ниже), выбирают одну из этих школ по своему усмотрению.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ или в ее филиалы, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя математики по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится до 20 сентября 1982 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1982 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в ВЗМШ без вступительной контрольной работы. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вступительная контрольная работа

1. Найдите четырехзначное число вида $\overline{a19b}$ (с цифрами по порядку a, 1, 9, b), делящееся на 82.

2. На листе бумаги ввели прямоугольную систему координат XOY, перегнули лист бумаги по одной оси координат, затем — по другой, и сложенный таким образом вчетверо лист разрезали ножницами по ломаной с вершинами в точках $(0; 1)$, $(1; 4)$, $(2; 2)$, $(4; 1)$, $(1; 0)$. Нарисуйте образовавшуюся при разворачивании листа «снежинку» и найдите ее площадь.

3. Известно, что $x+y+z=0$, а $xyz\neq 0$. Вычислите

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}.$$

4. На сторонах BC, CA и BA равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C}=90°$) взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. При этом $|BA_1|:|A_1C|=|CB_1|:|B_1A|=|AC_1|:|C_1B|=2:1$. Докажите, что отрезки C_1C и B_1A_1 равны по длине и перпендикулярны.

5. Имеется три сплава. Первый содержит 40% меди и 60% никеля, второй — 60% меди и 40% кобальта, третий — 60% кобальта и 40% никеля. Из них необходимо изготовить новый сплав массой 1 кг, содержащий 40% кобальта. Какое наименьшее содержание меди может быть в этом новом сплаве?

6. Можно ли вырезать из треугольника два прямоугольника так, чтобы сумма их площадей равнялась двум третям площади треугольника?

7. Про три числа известно, что если каждое из них складывать с квадратом суммы двух других, то каждый раз будет получаться 1/2. Какими могут быть эти числа?

8. Квадрат со стороной длины 1 разрезают на 4 прямоугольника. Какие значения может принимать сумма их периметров?

9. Существует ли такое натуральное число n, что произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ всех целых чисел от 1 до n кончается ровно 30 нулями?

10. Десять чисел записаны в ряд (среди них могут быть одинаковые). Затем под каждым числом пишем, сколько в этом ряду чисел, меньших него, и таким образом получаем новый ряд из десяти чисел. Может ли при этом получиться ряд: а) 9 0 0 2 5 3 6 3 6 6, б) 5 6 1 1 4 8 5 8 0 1?

11. Дома Андрея и Коли соединены прямой дорогой. Андрей ходит в полтора раза быстрее, чем Коля. Каждый из них ездит на велосипеде вдвое быстрее, чем ходит, при этом Андрей может пройти от своего дома до Колиного за 1 час. В 12 часов дня они оба отправляются от своих домов навстречу друг другу, и у одного из них есть велосипед (который разрешается оставлять без присмотра). Когда, самое раннее, будет так, что каждый из них уже пришел в дом другого?

12. Имеется много одинаковых круглых монет. Можно ли разложить на плоскости: а) 1980, б) 1981, в) 1982 из них так, чтобы каждая касалась трех других? г) Можно ли разложить на плоскости некоторое (конечное) число одинаковых круглых монет так, чтобы каждая касалась четырех других? (Во всех пунктах а) — г) монеты нельзя класть одну на другую и ставить на ребро.)

Новый прием на Малый мехмат

Для учащихся седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР (кроме Северо-западных областей), в Белоруссии и в Казахстане, объявляется прием в Малый механико-математический факультет (МММФ) — заочную математическую школу при механико-математическом факультете МГУ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и развитие у школьников навыков самостоятельных занятий математикой, составлена под руководством профессоров факультета. Эта программа учитывает особенности вступительных экзаменов на механико-математический факультет МГУ.

Занятия начнутся 1 сентября 1982 года. Обучение бесплатное. Срок обучения — три года. Лица, успешно обучающиеся на Малом мехмате, могут быть приглашены на устный вступительный экзамен с целью поступления в школу-интернат № 18 при МГУ (см. «Квант», 1979, № 1). Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получат удостоверение об окончании ММФ.

Желающие поступить на Малый мехмат должны *не позднее 15 апреля* выслать решение по возможности большего числа задач вступительной контрольной работы МММФ, которая публикуется ниже.

Семиклассники, проживающие в Белорусской ССР, в Астраханской, Белгородской, Брянской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской и Ярославской областях, в Башкирской, Дагестанской, Кабардино-Балкарской, Калмыцкой, Мордовской, Северо-Осетинской, Татарской, Удмуртской, Чечено-Ингушской и Чувашской АССР, в Краснодарском и Ставропольском краях, присылают работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мехмат, МММФ. Школьники из Казахстана обслуживаются Казахским филиалом МММФ МГУ и присылают работы по адресу: 480012, Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи 47/39, Казахский университет, математический факультет, Казахский филиал МММФ МГУ.

Вступительная контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. На обложку тетради наклеивается лист бумаги со следующими данными:

---

1. Область (край, республика)	*Белорусская ССР, Минская обл.*
2. Фамилия и имя учащегося	*Иванов Петр*
3. Класс и школа (полное название)	*7 класс «А» школы № 13 г. Молодечно*
4. Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
5. Полный почтовый адрес	*220456, БССР, Минская обл., г. Молодечно, ул. Строителей, д. 27, кв. 171*
6. Сведения о родителях:	
отец — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Иванов Василий Григорьевич, шофер автокомбината № 1*
мать — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Иванова Мария Николаевна, медсестра поликлиники № 10*

Результаты проверки

1	2		3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б								

В работу вкладывается листок 14 см × 6 см, на котором пишется домашний адрес.

Участники областных олимпиад по математике могут быть приняты на Малый мехмат на основании заявления (содержащего данные 1—6) и документа, подтверждающего участие в олимпиаде.

Для московских школьников 7—10 классов на механико-математическом факультете МГУ работает Школа юного математика (справки по телефону 139-39-43).

Задачи вступительной контрольной работы на МММФ в 1982 году

1. Решить неравенство

$$\frac{x^2}{x-1} \geqslant 0.$$

2. Можно ли на окружности расставить числа 1, 2, 3, ..., 11, 12 таким образом, чтобы любые два соседних числа отличались друг от друга

а) не более, чем на единицу;

б) не более, чем на два?

3. Сколькими нулями оканчивается число $25! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 24 \cdot 25$?

4. За 16 лимонов нужно заплатить столько рублей, сколько можно купить лимонов на один рубль. Сколько стоит один лимон?

5. Доказать, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника всегда меньше периметра этого четырехугольника.

6. Семеро гномов решили, что каждый из них подарит Белоснежке на день рождения не менее семи подснежников. Когда все цветы были вручены, Белоснежка сказала, что их число не превосходит 50. Услышав это, самый маленький из гномов сразу же заявил, что может точно назвать число подаренных подснежников. Какое количество цветов подарил Белоснежке каждый из гномов?

7. Найти сумму всех коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок в выражении

$$(x+2)(x+3)(x-5)(x-1)+4.$$

8. Расколотый арбуз весом 10 кг содержал 99% воды. После того, как он пролежал некоторое время на солнце, часть воды испарилась и ее содержание в арбузе снизилось до 98%. Сколько стал весить арбуз?

9. Площадь выпуклого четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях этого четырехугольника (то есть параллелограмма, стороны которого параллельны и конгруэнтны указанным диагоналям).

10. Среди четырех монет имеется одна фальшивая, отличающаяся от подлинной лишь весом (но неизвестно, легче она или тяжелее подлинной монеты). Имея в распоряжении весы с двумя чашками без гирь, необходимо двумя взвешиваниями выявить фальшивую монету. Как это сделать?

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1982/83 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых впоследствии становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ. Занятия проходят в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике. Собеседование обычно проводится во второй половине сентября (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте тетрадь в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Челябинская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гайнетдинов Павел Иванович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*поселок Роза, с. ш. № 19*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*шахтер*
мать	*библиотекарь*
6. Подробный домашний адрес	*456550, Челябинская обл., п. Роза, пер. Кооперативный, д. 2.*

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1982 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1982 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ;

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительного задания по физике и математике. По физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2—8 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов. По математике задачи 1—5 предназначены для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

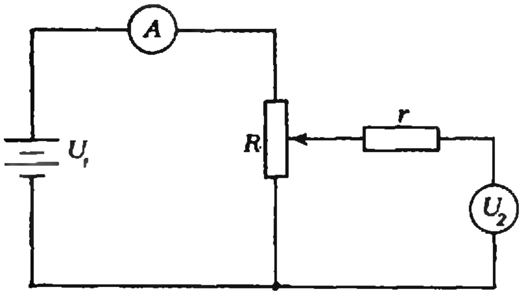
1. Эскалатор метро спускает бегущего по нему вниз человека за $t_1=1$ мин. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе, если вверх по эскалатору, идущему вниз, он взбегает за $t_2=4$ мин?

2. Сколько балласта должен выбросить аэростат объемом $V=300$ м³, чтобы подняться на высоту 1 км? У поверхности Земли плотность воздуха $\rho=1{,}29$ кг/м³, давление $p=0{,}1$ МПа. При решении задачи считайте, что плотность воздуха пропорциональна давлению.

3. Льдина площадью $S=2$ м² и толщиной $h=30$ см плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

4. Найдите расход бензина автомобиля «Жигули» при скорости $v=100$ км/ч. Мощность мотора $N=60$ л. с., коэффициент полезного действия мотора $\eta=30\%$. Теплота сгорания бензина $q=45\cdot10^6$ Дж/кг. Расход бензина принято относить к пути $l=100$ км.

5. Электрическая цепь состоит из двух батарей с напряжениями $U_1=6$ В и $U_2=12$ В, реостата со скользящим контактом, полное сопротивление которого $R=1800$ Ом, проводника сопротивлением $r=200$ Ом и амперметра, включенных как указано на рисунке. С каким полюсом второй батареи надо соединить скользящий контакт и какое положение он должен занимать на реостате, чтобы ток через амперметр был равен нулю?



6. За последнюю секунду свободно падающее тело прошло 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

7. По экватору внутренней поверхности сферической оболочки массой $M=10$ кг движется шарик массой $m=2$ кг, совершая полный оборот за время $T=2$ с. Считая, что внешних сил нет и трение отсутствует, определите, с какой силой шарик давит на сферу. Расстояние между центрами тяжести шарика и оболочки $a=2$ м.

8. Футболист бьет по мячу со средней силой $F=5\cdot10^2$Н. Мяч после удара улетает под углом $\alpha=45°$ к горизонту и приземляется на расстоянии $L=40$ м. Определите время удара по мячу. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Масса мяча $m=0{,}5$ кг.

9. Сосуд, заполненный смесью водорода ($\mu_{H_2}=2$ г/моль) и гелия ($\mu_{He}=4$ г/моль), отделен от равного ему по объему пустого сосуда полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы гелия и не пропускающей молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде упало на 10%. Определите отношение масс гелия и водорода. Температура поддерживалась постоянной.

10. При одинаковом изменении температуры, один раз при постоянном давлении, а другой раз при постоянном объеме, подведенное к одной и той же порции идеального газа количество теплоты отличается на $\Delta Q=7$ Дж. Определите изменение внутренней энергии газа в этих процессах. Коэффициент пропорциональности между температурой и внутренней энергией для данного газа $C_V=20{,}75$ Дж/(моль · К).

11. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнили жидкостью с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$ и удельным сопротивлением $\rho=52$ Ом · мм²/м. Найдите силу электрического взаимодействия между пластинами, когда через конденсатор течет ток силой $I=1$ А. Площадь пластин конденсатора $S=1$ см².

12. Конденсатор емкостью $C=1$ мкФ, заряженный до напряжения $U=10$ В, подключают к батарее ЭДС $\mathcal{E}=2$ В. Какое количество теплоты выделится в цепи при подключении конденсатора?

Математика

1. В классе 37 учеников; из них 25 учеников сдали нормы ГТО, 8 учеников имеют спортивные разряды и 9 учеников не сдали норм ГТО и не имеют спортивных разрядов. Сколько учеников в классе имеют спортивные разряды, но не сдали норм ГТО?

2. На плоскости даны три точки. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в этих точках?

3. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для того чтобы число n^2-2 делилось на 7 ($n>3$), достаточно, чтобы число $n-3$ было кратным 7;

б) для того чтобы число n^2-2 делилось на 7 ($n>3$), необходимо, чтобы число $n-3$ было кратным 7.

4. В треугольнике ABC точка D лежит на отрезке AB. Докажите, что если $\widehat{BCD}=\widehat{ACD}$, то $\widehat{CDB}=90°+\frac{1}{2}(\widehat{CAD}-\widehat{CBD})$. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

5. Существуют ли такие целые значения m, при которых дробь $\frac{12m+3}{18m+4}$ сократима?

6. Даны векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}$, $\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{OB}$, причем $|\vec{OB}|=|\vec{OC}|=|\vec{OD}|$. Найдите величину угла AOB.

7. Определите все значения параметра a, при которых промежуток $[-1;\ 3]$ содержится в множестве решений неравенства

$$x^2-2ax+a+1>0.$$

8. Даны два утверждения:

а) система

$$\begin{cases} ax+(1+a)y=a \\ 3x+(5+a)y=2+a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений;

б) прямые, заданные уравнениями $4x+5y=6$ и $6x+(1+a)y=10$, пересекаются в области $x>0$, $y<0$.

При каких значениях a одно из этих утверждений ложно, а другое — истинно?

9. Докажите, что если стороны a, b, c треугольника ABC связаны зависимостью

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c},$$

то угол B равен 60°. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

10. Спортсмены Иванов и Петров преодолевают одну и ту же дистанцию. Петров первую половину всего времени пребывания на дистанции шел, а вторую половину времени — бежал. Иванов первую половину дистанции шел, а вторую половину — бежал. Один из них преодолел все расстояние за 16 мин, другой — за 18 мин, причем у них были одинаковы скорости ходьбы и бега. Сколько минут Иванов потратил на ходьбу и сколько на бег?

11. Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы сумма расстояний между серединами противоположных сторон была равна его полупериметру. Докажите.

12. Докажите, что для произвольных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c).$$

Выясните, когда достигается знак равенства.

13. Найдите функцию $f(x)$, определенную при $x\neq0$ и удовлетворяющую при всех $x\neq0$ условию

$$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x.$$

Рецензии, библиография

Что умеет микрокалькулятор

Карманная электронная вычислительная машинка (микрокалькулятор) за последние годы все больше проникает во все отрасли человеческой деятельности, в том числе и в школу. С помощью микрокалькулятора делаются доступными такие расчеты, о которых раньше трудно было мечтать. Практически микрокалькулятор решает вычислительную задачу с той же скоростью, с которой мы ему эту задачу ставим. Однако возможности микрокалькуляторов выше, чем это следует из заводских инструкций, обычно чрезмерно кратких. Помочь неспециалистам овладеть всеми «тайнами» этого изумительного достижения последнего десятилетия призвана рецензируемая книга Г. Кройля*). Автор хорошо справился с поставленной задачей. Многочисленные примеры и задачи, решения которых приводятся в тексте, позволяют читателю научиться считать на микрокалькуляторе. Отказавшись от малореальной попытки популярно объяснить физические принципы и механизм работы карманной счетной машинки, автор подробно описывает, как наиболее экономно производить те или иные вычисления, какой класс микрокалькулятора следует выбрать для конкретной работы — инженерной, бухгалтерской, научной или учебных расчетов. Достаточно внимания уделено приемам проверки точности и правильности работы микрокалькуляторов.

В Советском Союзе выпускаются все основные модели микрокалькуляторов, от самых простых и дешевых арифметических, предназначенных в основном для школьников и домохозяек (например, Б3—23), до таких, как С3-15, и более дорогих, необходимых инженеру или научному работнику. Наши микрокалькуляторы, разумеется, отличаются системой обозначений, расположением клавиш и другими деталями от аналогичных приборов зарубежных фирм. И, хотя принципы работы и устройства всех микрокалькуляторов одинаковы, обучаться обращению с ними следует на тех моделях, с которыми придется работать.

К сожалению, издательство пошло по наиболее простому пути — перевело книгу дословно, сохранив в ней немецкие «Кройлетроны» в качестве единственных примеров микрокалькуляторов и английские обозначения на клавиатуре. Между тем, сравнительно ограниченное число отечественных моделей позволяет все их привести в тексте, соответственно видоизменив, где это необходимо, решения упражнений, данных в книге. Вероятно, было бы целесообразно подготовить второе, измененное в соответствии с этими пожеланиями издание и выпустить книгу тиражом, достаточным для того, чтобы придавать ее в дополнение к инструкции ко всем продаваемым микрокалькуляторам.

А. Зайдель

---

*) Г. Кройль. «Что умеет мой микрокалькулятор?» Перевод с немецкого (М., «Мир», 1981)

Камушки и шахматная доска (воспоминания о летних каникулах)

1. Выигрывает второй: если первый игрок берет из какой-нибудь кучки несколько камней, то второй берет столько же камней из другой кучки. В результате в кучках снова получается одинаковое количество камней.
2. Выигрывает первый: вначале он берет один камень из любой кучки, а потом оставляет противнику в одной кучке — нечетное число камней, а в другой — на единицу больше.
3. При любой игре выигрывает первый игрок.
4. Выигрывает первый игрок: вначале он съедает кучку с семью орехами и делит кучку с шестью орехами на две кучки по 3 ореха; противник вынужден съесть орехи в одной из одинаковых кучек и разделить кучку в 3 ореха на кучки в 1 и 2 ореха, после этого начинающий съедает кучку в 2 ореха, а затем — последний орех. Попробуйте исследовать эту игру для другого количества орехов в кучках.

Электрические цепи с нелинейными элементами

1. $I=U\left(\frac{1}{r_0+\alpha U}+\frac{1}{R}\right)$.
2. $I=\frac{1}{2R\alpha}\left((\alpha U+R+r_0)\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{(\alpha U+R+r_0)^2-4R\alpha U}\right)$
3. $i(t)=(|\mathscr{E}_м\cos\omega t|-2U_0)/R=$ $=|\cos\omega t|-0{,}5$ (A).
4. $U=(\mathscr{E}-4IR)/3=2$ мВ. Указание. Потенциал анода выше потенциала катода, и через фотоэлемент идет ток I.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\{-4\}$. Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\log_2(4-x)=4-\log_2(-2-x)$$
$$\log_2(4-x)+\log_2(-2-x)=4. \qquad (1)$$

Поскольку тождество $\log_a(uv)=\log_a u+\log_a v$ справедливо только при $u>0$ и $v>0$, при переходе от суммы логарифмов в левой части уравнения (1) к логарифму произведения нужно дописать «условия» $4-x>0$, $-2-x>0$. Впрочем, достаточно дописать одно (любое) из этих неравенств (почему?). Таким образом, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2[(4-x)(-2-x)]=4\\ 4-x>0.\end{cases}$$

Уравнение $\log_2[(4-x)(-2-x)]=4$ равносильно уравнениям

$$(4-x)(-2-x)=16$$
$$x^2-2x-24=0$$

Один из его корней является решением неравенства $4-x>0$, другой — не является.

2. $\frac{3}{2}$ см, $\frac{5}{2}$ см, $\frac{7}{2}$ см. Решение. Если длину наименьшей стороны обозначить через x, то против угла 120° будет лежать сторона длины $x+2$. По теореме косинусов

$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2-2x(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Это уравнение имеет корни $\frac{3}{2}$ и -1, из которых второй не может быть длиной.

3. $\{(2;2)\}$. Решение. Из данной системы выводными являются системы

$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}=4+(x-y)\\ \sqrt{x+y}=2-(x-y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x+y=[4+(x-y)]^2\\ x+y=[2-(x-y)]^2\end{cases} \qquad (1)$$

и, далее, уравнения

$$\begin{matrix}6x=6[2+2(x-y)]\\ x=2y-2.\end{matrix} \qquad (2)$$

Подстановка во второе уравнение системы (1) дает квадратное уравнение с корнями 2 и 9. Из (2) получаем пары (2; 2) и (16; 9). Проверка (поскольку, в частности при возведении в квадрат, мы переходили к выводным системам и уравнениям, проверку делать обязательно) показывает, что вторая пара не является решением данной системы.

4. $|AB|=|AC|=|BC|=8$. Указание. Если K и L — точки касания соответственно первой и второй окружности с $[BD]$, а P и Q — их точки касания с $[AC]$, то

$$|DQ|=|DL|=|DK|+|KL|=$$
$$=|DP|+|KL|=|DP|+1.$$

Если O_1, O_2 — центры соответственно первой и второй окружности, то $\widehat{O_1DO_2}=\frac{1}{2}(\widehat{ADB}+\widehat{CDB})=90°$, $\widehat{O_1DP}=\widehat{DO_2Q}$ (задача 487 из пособия «Геометрия 6—8»), $\frac{|O_1P|}{|DP|}=\frac{|DQ|}{|O_2Q|}$. Найдя $|DP|$, воспользуйтесь далее формулой Герона и задачей 1192 из того же пособия.

5. $\frac{16}{21}$. Решение. Поскольку плоскость основания пирамиды совпадает с (ABC) и ее боковое ребро проходит через B, B является одной из вершин основания пирамиды. Обозначим остальные вершины основания пирамиды через P и Q, вершину пирамиды — через S, точку пересечения $[SQ]$ с $[C_1C]$ через K. Спроектируем ортогонально призму и пирамиду на (ABC). Обозначим проекцию точки D через D', проекцию вершины S — через O. Очевидно, $|AD'|=|D'C|$ и $[OQ]$ проходит через C (рис. 1, *а*, *б*). Так как O — центр

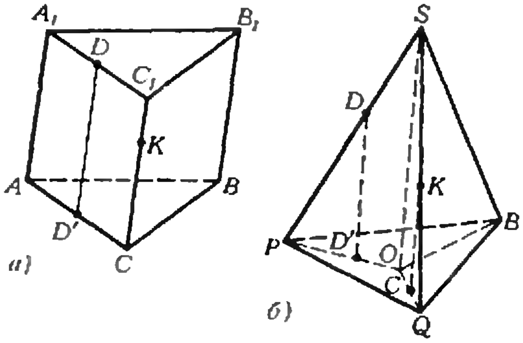


Рис. 1.

равностороннего треугольника PBQ.

$$\widehat{D'OB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD'}=\frac{2\pi}{3}$$

Положим $|BC|=a$, $|OB|=x$, $|OC|=y$, $|OD'|=z$, $\widehat{OD'C}=\varphi$. Тогда (рис. 2) $\widehat{D'CO}=\frac{\pi}{3}-\varphi$, $\widehat{OCB}=\frac{\pi}{3}-\widehat{D'CO}=\varphi$. $\widehat{OBC}=\frac{\pi}{3}-\varphi$. По теореме синусов из $\triangle D'OC$

$$\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{z}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad (1)$$

из $\triangle BOC$

$$\frac{x}{\sin\varphi}=\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{2a}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $x=2y$, $y=2z$. Тогда из (2)

$$\frac{2}{\sin\varphi}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)} \qquad (3)$$

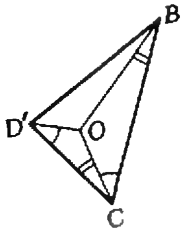


Рис. 2.

Из (3) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\sqrt{\frac{3}{7}}$. Значит, $x=\frac{2a}{\sqrt{7}}$, $y=\frac{a}{\sqrt{7}}$, $z=\frac{a}{2\sqrt{7}}$. $|BQ|=|OB|\sqrt{3}=2a\sqrt{\frac{3}{7}}$. Из подобия треугольников PDD' и PSO

$$\frac{|PD'|}{|PO|}=\frac{|DD'|}{|SO|}.$$

Поскольку

$$\frac{|PD'|}{|PO|}=\frac{|PO|-|D'O|}{|PO|}=\frac{x-z}{x}=\frac{3}{4},$$

$$|DD'|=\frac{3}{4}|SO|.$$

Дальше решение очевидно.

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

2. $\{(4;1),\ (16;2)\}$. **Указание.** Сделайте во втором уравнении подстановку $\frac{x}{y}=t$.

3. 11:1. **Указание.** Опустите из M перпендикуляр $[MP]$ на $[CD]$, из D — перпендикуляр $[DQ]$ на $[AB]$. Выразите через $|AB|=a$ последовательно $|QM|=|PD|$, $|DQ|=|PM|$, $|AQ|$, $|MA|=|AQ|+|QM|$, $|MB|$.

4. а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{7}{32}a^2$. **Решение.** Введем систему координат с началом в A и с осями, направленными по $[AD)$, $[AB)$, $[AA_1)$. Рассмотрим плоскость $z=t$. Обозначим через P, Q, R точки ее пересечения, соответственно, с (DF), (AD_1), (A_1E). Тогда $\vec{AQ}=t\vec{i}+t\vec{k}$, $\vec{AP}=a\vec{i}+2t\vec{j}+t\vec{k}$, $\vec{AR}=\vec{AE}+\vec{ER}=\vec{AE}+\frac{t}{a}\vec{EA_1}=$

$$=\vec{AE}+\frac{t}{a}(\vec{AA_1}-\vec{AE})=\left(1-\frac{t}{a}\right)\vec{AE}+\frac{t}{a}\vec{AA_1}=\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(\frac{a}{2}\vec{i}+a\vec{j}\right)+\frac{t}{a}\cdot a\vec{k}=$$

$$=\frac{a-t}{2}\vec{i}+(a-t)\vec{j}+t\vec{k},\quad \vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}=(a-t)\vec{i}+2t\vec{j},\quad \vec{QR}=\frac{a-3t}{2}\vec{i}+(a-t)\vec{j},$$

$$\vec{QP}\cdot\vec{QR}=(a-t)\cdot\frac{a-3t}{2}+2t(a-t)=\frac{a^2-t^2}{2},\quad |\vec{QP}|^2=(a-t)^2+4t^2,\quad |\vec{QR}|^2=\frac{(a-3t)^2}{4}+(a-t)^2.$$

Обозначим через φ угол между $\vec{QP}$ и $\vec{QR}$. Тогда

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|\vec{QR}|\cdot\sin\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|\vec{QR}|\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|QR|\sqrt{1-\frac{(\vec{QP}\cdot\vec{QR})^2}{|\vec{QP}|^2\cdot|\vec{QR}|^2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{QP}|^2\cdot|\vec{QR}|^2-(\vec{QP}\cdot\vec{QR})^2}.$$

Оказывается, для векторов $\vec{QP}$, $\vec{QR}$, параллельных плоскости xy (как в нашем случае!), подкоренное выражение всегда является «полным квадратом»: если $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ 0)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ 0)$, то

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2y_2^2-2x_1y_1x_2y_2+x_2^2y_1^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

В нашем случае

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}|(a-t)^2-t(a-3t)|=$$
$$=\frac{1}{2}|4t^2-3at+a^2|=\frac{(4t^2-3at+a^2)}{2}.$$

Дальше решение очевидно.

5. $\left\{(1;\ 1;\ 1),\ \left(\frac{-5\pm\sqrt{11}}{2};\ \frac{10\mp\sqrt{11}}{2};\ \frac{4\mp\sqrt{11}}{2}\right)\right\}$. **Указание.** Прибавьте к третьему уравнению первое, умноженное на 2, и второе, умноженное на 3.

Вариант 3

1. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **Указание.** Сделайте подстановку $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$.

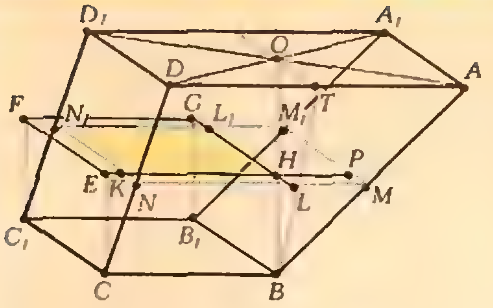


Рис. 3.

2. $\left]\log_4 \frac{5}{18};\ \log_4 \frac{1}{3}\right[\cup \left]\log_4 \frac{5}{3};\ +\infty\right[$.

3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. Указание. $ANMC$ — равнобедренная трапеция; $\frac{|AM|}{2} = R\cdot\sin\widehat{ANM}$ (R — искомый радиус).

4. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\right),\ \left((-1)^m\times\times\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}m;\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+ +2\pi n\right),\ \left((-1)^{p+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}p;\ \pm\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi q\right)\right\}$ ($k, l, m, n, p, q \in \mathbf{Z}$). Указание. $\cos 2y+\frac{1}{2}= =2\left(\cos y-\frac{1}{2}\right)\left(\cos y+\frac{1}{2}\right)$.

5. а)

$$V(h)=\begin{cases}\frac{3}{16}\pi h\left(7-\frac{h}{9}\right)^2, & \text{если } 0<h\leqslant 3\\ 3\pi h\left(2-\frac{h}{9}\right)^2, & \text{если } 3<h\leqslant 9\end{cases}$$

б) $\max\limits_{[0;\,9]} V(h)=V(6)=32\pi$.

Решение. Рассмотрим сечение данной призмы плоскостью, находящейся на расстоянии h от грани BCC_1B_1 (на рисунке 3 призма «положена» на эту — боковую! — грань). В сечении получится «синий» параллелограмм MNN_1M_1; если $H=[BO]\cap(MNN_1M_1)$, то $|BH|=h$. Цилиндры высоты h, о которых говорится в условии, помещаются внутри призмы $MBCNM_1B_1C_1N_1$.

Спроектируем ортогонально нижнее основание этой призмы на верхнее. Точка B спроектируется, очевидно, в точку H. Обозначим проекции точек C, C_1, B_1 через, соответственно, E, F, G. Пусть $K=(EH)\cap[NN_1]$, $P=(EH)\cap\cap[MM_1]$, $L=(GH)\cap]MN]$, $L_1=(GH)\cap\cap[M_1N_1]$, $T=(BL)\cap[AD]$. Прямые OT и GL_1HL параллельны как линии пересечения параллельных плоскостей MNN_1M_1 и ADD_1A_1 плоскостью BOT. Но $(GL)\parallel(BB_1)\parallel(AA_1)$. Следовательно, $(OT)\parallel(AA_1)$. Значит, $|DT|= =|TA|$. Из $|BC|=7>6=|DT|$ следует $|BC|>|NL|>|DT|$. Значит, $|KH|=|NL|< <|BC|=|EH|$. Поэтому точка E находится вне отрезка KH. С другой стороны, $|GH|= =|BB_1|=|MM_1|=|LL_1|>|L_1H|$. Поэтому точка G находится вне отрезка L_1H.

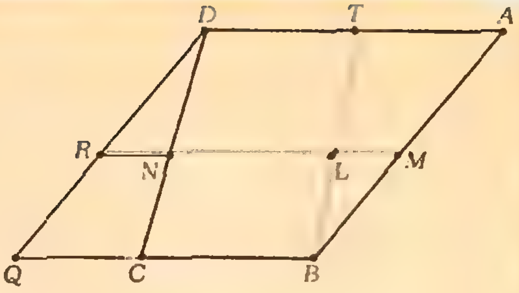


Рис. 4.

Основания рассматриваемых цилиндров лежат в пересечении «синего» параллелограмма MNN_1M_1 и параллелограмма-проекции $HEFG$, то есть в «желтом» параллелограмме HKN_1L_1 (см. рис. 3).

Легко доказать, что диаметр наибольшего круга, который можно поместить в данный параллелограмм, равен наименьшей высоте этого параллелограмма. Таким образом, нам надо найти наименьшую высоту параллелограмма HKN_1L_1.

Найдем сначала его стороны. Проведем через точку D прямую, параллельную (AB). Обозначим точки пересечения этой прямой с (MN) и (BC) через, соответственно, R и Q (рис. 4). Из подобия соответствующих треугольников

$$\frac{|BM|}{|BA|}=\frac{|BL|}{|BT|}=\frac{|BH|}{|BO|}=\frac{h}{9}$$

$$\frac{|RN|}{|QC|}=\frac{|RD|}{|QD|}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|AB|-|BM|}{|AB|}= =1-\frac{|BM|}{|AB|}=1-\frac{h}{9}$$

$$|RN|=\left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot|QC|= =\left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot(|BQ|-|BC|)= =\left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot(|AD|-|BC|)=5\left(1-\frac{h}{9}\right)$$

$$|MN|=|MR|-|RN|=|AD|-|RN|=7+\frac{5}{9}h$$

$$\frac{|LM|}{|TA|}=\frac{|BL|}{|BT|}=\frac{|BH|}{|BO|}=\frac{h}{9}$$

$$|LM|=\frac{h}{9}\cdot|TA|=\frac{2}{3}h$$

$$|KH|=|KP|-|HP|=|MN|-|LM|=7-\frac{1}{9}h$$

$$\frac{|LH|}{|TO|}=\frac{|BH|}{|BO|}=\frac{h}{9}$$

$$|LH|=\frac{h}{9}\cdot|TO|=\frac{4}{9}h$$

$$|HL_1|=|LL_1|-|LH|=|AA_1|-|LH|=8-\frac{4}{9}h.$$

При $0<h<3$

$$7-\frac{1}{9}h<8-\frac{4}{9}h$$

$$|KH|<|HL_1|.$$

При $3<h<9$

$$|KH|>|HL_1|$$

Закончить решение предоставляем читателю.

Физика

Вариант I

1. Известно, что при соударениях двух тел максимальные потери кинетической энергии их движения происходят при абсолютно неупругом ударе, когда тела после столкновения двигаются с одинаковыми скоростями. Эта часть кинетической энергии может превращаться в другие виды энергии, в частности — пойти на возбуждение одного из сталкивающихся атомов. В дальнейшем, при переходе атома из возбужденного состояния в основное, может излучиться фотон. Минимальная энергия возбуждения $E_{\min}$ атома, находящегося в основном состоянии, достигается при переходе электрона с первого энергетического уровня на второй ($n=1$, $m=2$). Напротив, энергия ионизации атома, необходимая для отрыва электрона от него, соответствует переходу с первого уровня на бесконечно удаленный ($n=1$, $m\to\infty$). Поэтому из условия задачи следует, что константа R в формуле для частот излучения равна энергии ионизации $E_и$, деленной на постоянную Планка h, а минимальная энергия возбуждения атома равна

$$E_{\min}=hR\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}E_и.$$

Теперь из законов сохранения энергии и импульса можно получить минимальную кинетическую энергию $mv_0^2/2$ налетающего атома водорода:

$$\frac{mv_0^2}{2}=2\frac{mv^2}{2}+E_{\min},$$

$$mv_0=2mv,$$

откуда

$$\frac{mv_0^2}{2}=2E_{\min}=\frac{3}{2}E_и=20,4 \text{ эВ}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты сделали характерную ошибку, связанную с непониманием физического смысла энергии ионизации атома, которую они считали минимальной энергией возбуждения атома. Другие абитуриенты, правильно найдя минимальную величину энергии возбуждения, не учитывали закон сохранения импульса, считая, что вся кинетическая энергия налетающего атома при столкновении превращается в энергию возбуждения и затем излучается.

2. Условием равновесия является равенство парциальных давлений водорода в первом и втором сосудах. Пусть p — начальное давление в первом сосуде. Оно складывается из парциальных давлений гелия и водорода. Так как массы и температуры газов одинаковы, отношение давлений гелия и водорода обратно отношению их молярных масс. Таким образом,

$$p_{He}+p_{H_2}=p,$$

$$\frac{p_{He}}{p_{H_2}}=\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{He}}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$p_{He}=\frac{p}{3},\ p_{H_2}=\frac{2p}{3}.$$

Чтобы суммарное давление гелия и оставшейся части водорода в первом сосуде было вдвое меньше начального, парциальное давление водорода должно уменьшиться до величины $p'_{H_2}=p/6$. Поскольку давление водорода обратно пропорционально объему, который он занимает, получаем

$$\frac{p_{H_2}}{p'_{H_2}}=\frac{V_1+V_2}{V_1},\text{ и }\frac{V_2}{V_1}=3.$$

Характерная ошибка многих абитуриентов состояла в том, что условием равновесия они считали равенство давлений водорода во втором и водорода и гелия в первом сосудах.

3. Сила взаимодействия между пластинами конденсатора в обоих случаях определяется произведением напряженности поля одной из пластин на заряд другой.

В отсутствие диэлектрика поле в конденсаторе $E_1=U/d$, а заряд на его пластинах $q_1=\varepsilon_0US/d$, где d — расстояние между пластинами, S — площадь пластин, ε_0 — электрическая постоянная. С учетом того, что поле одной пластины вдвое меньше поля в конденсаторе, для силы взаимодействия между пластинами получаем

$$F_1=\frac{q_1E_1}{2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d^2}.$$

После внесения диэлектрика образовавшийся конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком с проницаемостью ε, а расстояния между пластинами у обоих равны $d/2$. Так как напряжение остается постоянным, изменение емкости приводит к изменению заряда на пластинах, что, в свою очередь, меняет и поле в конденсаторе. Емкость образовавшегося конденсатора $C_2=2\varepsilon\varepsilon_0S/d\ (1+\varepsilon)$ (это получается из равенства $1/C_2=d/2\ \varepsilon_0S+d/2\varepsilon\varepsilon_0S$); заряд на конденсаторе $q_2=UC_2=2\varepsilon\varepsilon_0SU/d\ (1+\varepsilon)$; поле $E_2=q_2/S\varepsilon_0=2\varepsilon U/d\ (1+\varepsilon)$; сила взаимодействия

$$F_2=\frac{Q_2E_2}{2}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon^2SU^2}{d^2(1+\varepsilon)^2}.$$

Отношение сил

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}=2,25.$$

Многие абитуриенты ошибочно рассчитывали взаимодействие пластин как взаимодействие двух точечных зарядов. Некоторые также считали, что поле вблизи пластин при внесении диэлектрика не меняется.

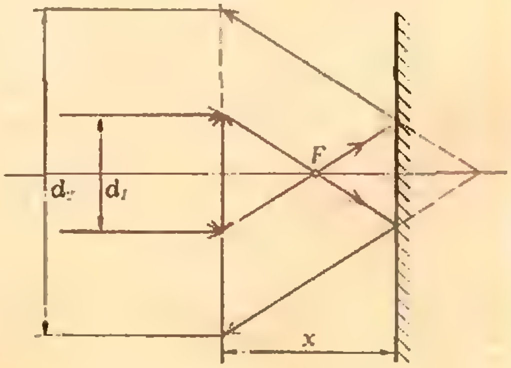


Рис. 5.

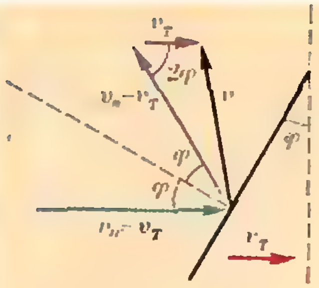


Рис. 6

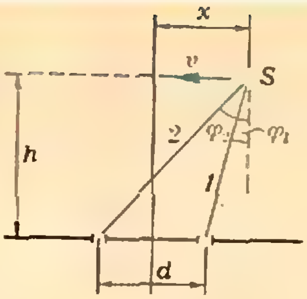


Рис. 7.

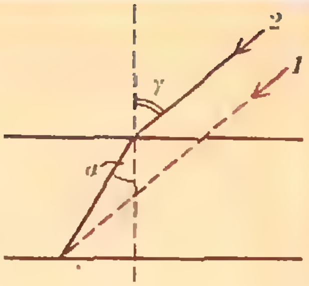


Рис. 8

4. Ход лучей, прошедших линзу и отразившихся от зеркала, показан на рисунке 5. Так как поток пропорционален квадрату линейных размеров, диаметр освещенного пятна d_2 вдвое больше диаметра линзы d_1. Если x — расстояние от линзы до зеркала, то из подобных треугольников находим

$$\frac{x+(x-F)}{F}=\frac{d_2}{d_1}=2,$$

откуда

$$x=\frac{3}{2}F=30 \text{ см}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты ошиблись, считая поток пропорциональным линейным размерам изображения.

Вариант 2

1. Задачу удобно сначала решить в системе координат, связанной с танком, и затем перейти в неподвижную систему координат (рис. 6). Тогда по теореме косинусов скорость пули $v=((v_0-v_т)^2+v_т^2-2v_т(v_0-v_т)\cos 2\varphi)^{1/2}\approx$ ≈ 720 м/с.

2. $m=\dfrac{((1/2\mu_{в}-\mu_{He})pV/RT-M)}{4\pi(3V/4\pi)^{2/3}}\approx 0{,}3$ кг/м².

3. $U>14{,}7$ кВ. Указание. Процесс ионизации начинается на участке трубки с максимальной напряженностью поля, когда на длине свободного пробега электрон набирает энергию бо́льшую, чем энергия ионизации.

4. Отверстия в экране являются источниками вторичных волн, регистрируемых приемником. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний этих источников зависит от скорости v движения первичного источника, находящегося на расстоянии x от оси системы. Действительно (рис. 7), разность фаз

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi h}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos\varphi_2}-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right).$$

По условию $d\ll h$ и $x\ll h$; следовательно, углы φ_1 и φ_2 малы. Тогда

$$\cos\varphi_1=1-\varphi_1^2/2=1-(d/2-x)^2/2h^2,$$
$$\cos\varphi_2=1-\varphi_2^2/2=1-(d/2+x)^2/2h^2,$$
$$\Delta\varphi=2\pi dx/\lambda h.$$

За период колебаний $1/f$ разность фаз меняется на 2π, а источник проходит расстояние до оси $x=v/f$, то есть

$$2\pi=2\pi dv/\lambda hf.$$

Отсюда находим скорость источника:

$$v=\lambda hf/d=4{,}5\cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Вариант 3

1. $T=2\pi\dfrac{l}{L}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Указание. При малых колебаниях отношение вертикальных смещений конца пружины и груза равно отношению их расстояний до шарнира.

2. $F_{max}=\pi D^2\Delta T p_0/4T_0\approx 26$ Н.

3. $I_1=(L_1I_0+L_2\mathcal{E}/r)(L_1+L_2)$;
$I_2=(\mathcal{E}L_1/r-L_1I_0)(L_1+L_2)$.

Указание. В любой момент времени $L_1\Delta I_1/\Delta t=L_2\Delta I_2/\Delta t$, откуда $L_1I_1-L_2I_2=\text{const}=$ $=L_1I_0$. Это — закон сохранения магнитного потока. Кроме того, $I_1+I_2=\mathcal{E}/r$.

4. Ход луча *1* в отсутствие атмосферы и луча *2* при наличии ее показан на рисунке 8. Если средний показатель преломления атмосферы записать в виде $n=1+\Delta n$, где $\Delta n=3\cdot 10^{-4}$, то по закону преломления имеем

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=1+\Delta n=\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Отсюда ошибка $\Delta\alpha$ в определении углового положения звезды равна

$$\Delta\alpha=\Delta n\,\mathrm{tg}\,\alpha=\Delta n=3\cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Московский электротехнический институт связи

Математика

Вариант 1

1. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\ (k\in Z)$.

2. $\{(1;8),\ (8;1)\}$. Указание. Используйте разложения для суммы кубов и для куба суммы.

3. $]-\infty;\ -1[$.

4. Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, скорого — 100 км/ч.

5. Указание. $\dfrac{|OA_0|}{|OA_1|}=\dfrac{1}{2}$ (O — точка пересечения прямой A_0A_1 и любой из прямых B_0B_1, C_0C_1).

Вариант 2

1. $\{2^{10}\}$.

2. $x_1=\dfrac{\pi}{2}k,\ x_2=\pm\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}l\ (k, l\in Z)$.

3. 3 см.

4. $\{3\}$.

5. В 10 раз. Указание. Не бойтесь составить систему, например, трех уравнений с четырьмя неизвестными, поскольку найти надо не скорости, а их отношение.

Физика

1. $v_0 \approx g\tau/\sin\alpha \approx 84$ м/с.

2. $$p_2 = (p_1 - \varrho g h_1)\frac{l}{h_1 + l - h_2} + \varrho g h_2 \approx$$ ≈ 751 мм рт. ст.

3. $$U = \frac{2mdhv_0^2}{el^2} \approx 22{,}7 \text{ В}.$$

4. В 25-ваттной лампочке тепла выделится в 4 раза больше, чем в 100-ваттной.

5. Нужно иметь две катушки, индуктивности которых

$$L_1 = \frac{\lambda_1^2}{4\pi^2c^2C_1} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

и $L_2 = \dfrac{\lambda_2^2}{4\pi^2c^2C_2} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ Гн (здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

6. $$R_{\min} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 11{,}5 \text{ см}.$$

7. $$D_1 = \frac{\Gamma+1}{\Gamma d} = 3 \text{ дптр}; \quad D_2 = \frac{\Gamma-1}{\Gamma d} = 2 \text{ дптр}.$$

Шахматный конкурс

(см. «Квант», 1981, № 11)

1. Этот непростой этюд Г. Надареишвили решила программа «Пионер», разрабатываемая под руководством М. Ботвинника. Основной вариант решения состоит из 13 ходов: **1. g6 Крf6 2. g7 Сh7 3. e4!** (3. Кр:h7 Кf3 4. g8Ф Кg5+ с вечным шахом) 3...Кf3 4. e5+ **К:e5 5. Кр:h7 Кf7 6. g8Ф Кg5+ 7. Ф:g5+ Кр:g5 8. h6 c4 9. Крg7 c3 10. h7 c2 11. h8Ф c1Ф 12. Фh6+ Крf5 13. Ф:c1** и т. д.

2. Эта позиция, обнаруженная ЭВМ, является рекордной по длительности игры в эндшпиле типа «ладья против слона». При точной игре обеих сторон белые выигрывают только на 18-м ходу: **1. Крa5! Крb7 2. Лb3+ Крa7 3. Лf3! Сe2** (3...Сc4 4. Лc3 и на отступление слона следует 5. Лc7+ Крb8 6. Крb6 — элементарно выигранное теоретическое окончание; на 3...Сb7 решает 4. Лf7 Крb8 5. Крb6) **4. Лf7+ Крb8 5. Крb6 Крc8 6. Крc6 Крd8** (если бы ладья не контролировала поле f3, сейчас мог последовать шах слоном, и король отгонялся) **7. Крd6 Крc8** (7...Крe8 8. Лe7+ проигрывает слона) **8. Лc7+ Крb8** (после 8...Крd8 к победе ведет 9. Лc2 Сd3 10. Лd2! Сg6 11. Лg2! Сf7 12. Лh2 Крc8 13. Лh8+ Крb7 14. Лh7+) **9. Крc6 Сc4 10. Крb6 Сb3** (дальше все просто) **11. Лc3 Сa2 12. Лc2 Сb3 13. Лb2 Сe6** (на 13...Сa4 или Сe4 следует соответственно 14. Крa5 или Крc5 и потеря слона) **14. Лe2 Сd7 15. Лf2 Сe6 16. Лf8+ Сc8 17. Лh8 Крa8 18. Л:c8×.**

Главный редактор — *академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — *академик* А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, В. М. Глушков, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихaнович

Номер оформили:
В. Герман, Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Черкова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
Физматлит, «Квант», тел. 232-49-25
Сдано в набор 19.11.81 Подписано в печать 29.12.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,11 Т-27800
Цена 40 коп. Заказ 2805 Тираж 179 054 экз.

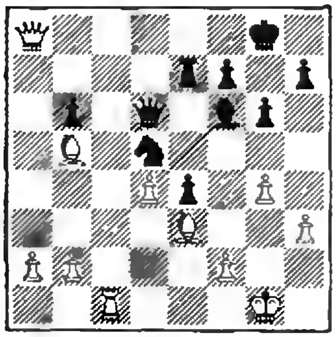
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ИГРАЮТ КОМПЬЮТЕРЫ

На страницах «Кванта» уже рассказывалось о принципах, заложенных в современные шахматные программы для ЭВМ, и о том, как компьютеры анализируют шахматный эндшпиль. Здесь мы расскажем о двух партиях, сыгранных ЭВМ в чемпионатах мира по шахматам.

Напомним, что уже состоялось три таких чемпионата. В 1974 году в Стокгольме первой чемпионкой мира стала советская программа «Каисса». Во втором чемпионате, состоявшемся через три года в Канаде, она уступила свое звание американской программе «Чесс». Необычный случай произошел в первом туре.



«Дачесс» — «Каисса»

Белые только что дали шах ферзем на а8. Неожиданно «Каисса» отдает целую ладью — **34...Ле8.** Комментаторы были в недоумении и смущенно объясняли зрителям, что шахматные программы пока еще далеки от совершенства и от них можно ожидать чего угодно. Каково же было всеобщее изумление, когда «Каисса» объяснила свой «зевок» следующим вариантом: 34...Крg7 35.Фf8+!! Кр:f8 36.Сh6+ и 37.Лс8+ с неизбежным матом! Ни один, как писал английский шахматный журнал, «белковый шахматист», присутствовавший на чемпионате, не обнаружил этой эффектной жертвы ферзя. Неизвестно, видела ли эту комбинацию «Дачесс» или нет, но из сугубо практических соображений в данной позиции следовало избрать ход 34...Крg7, так как игра без ладьи абсолютно бесперспективна, а ход 35. Фf8+ может найти далеко не каждая программа (и не каждый мастер!). Если белые собирались в ответ на 34...Крg7 выиграть фигуру ходом 35.g5, то они сами проигрывали (35...К:е3 36.gf+ Ф:f6 37.fe Фg5+ и Ф:b5 с решающим перевесом у черных). Таким образом, «Каисса» пала жертвой собственной тактической зоркости. Надо сказать, что вытекающие отсюда практические соображения допускают несложную программную реализацию.

В партии последовало **35.Ф:е8+ Крg7 36.g5 Сd8** и через несколько ходов черные сдались.

Третий чемпионат мира среди ЭВМ был разыгран в конце 1980 года в Австрии. Первыми на финише оказались две американские программы «Белл» и «Хаос». Дополнительная партия между ними принесла победу и звание чемпиона программе «Белл». Вот этот решающий поединок.

«Белл» — «Хаос»

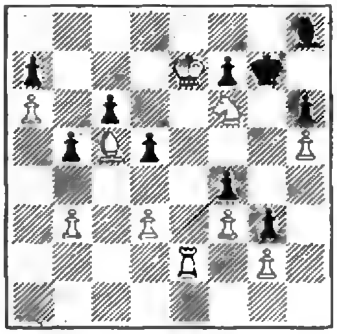
Защита Алехина

1.е4 Кf6 2.е5 Кd5 3.d4 d6 4.Кf3 de 5.К:е5 g6 6.g3 Сf5 7.с4 Кb4 8.Фа4+ К4с6 9.d5. Кажется, что черные теряют фигуру, однако они находят остроумную защиту. **9...Сс2 10.Фb5 Фd6** (лучше 10...Сg7) **11.К:с6 К:с6 12.Кс3** (12.Ф:b7 Фb4+, спасая фигуру) **12...Сg7 13.Ф:b7 0—0 14.Ф:с6** (14.dc С:с3+ 15.bc Фd1×) **14...Фb4 15.Крd2.** Белые выиграли коня, но противник вынудил их короля остаться в центре и продолжает упорное сопротивление. **15...Се4 16.Лg1 Лfb8 17. Сh3 Сh6+ 18. f4 Фа5 19.Ле1 f5 20.Фе6+ Крf8 21.b3 Сg7** (черные упускают возможность тактического удара — 21...Л:b3!) **22.Сb2 Сd4 23. g4 Лb6 24.Фd7 Лd6 25.Фа4 Фb6 26.Са3 С:с3+ 27.Кр:с3 Лdd8 28.Лаd1 Фf2 29.gf Фс2+ 30.Крd4 gf 31.Фс6 Фf2+ 32.Кре5.** Белый король скрылся от преследования черного ферзя в самом центре доски, теперь все кончено. **32...Крg8 33.Лg1+ Крh8 34.С:е7** с неизбежным матом.

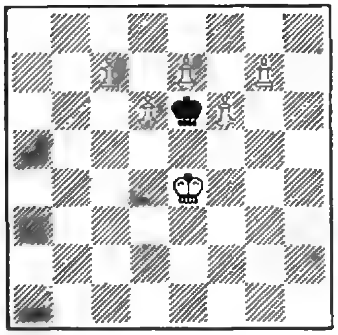
Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем наш новый шахматный конкурс, который пройдет в течение всего года. Победители его, как и раньше, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку. Итоги шахматного конкурса 1981 года будут подведены в «Кванте», 1982, № 5.

Предлагаемая ниже задача 1 в свое время была опубликована в одной из московских газет. Интересно, что ни один из читателей не справился с ней, а программа «Каисса» ее решила. Задача 2 — одна из первых, решенных ЭВМ еще на заре шахматного программирования.

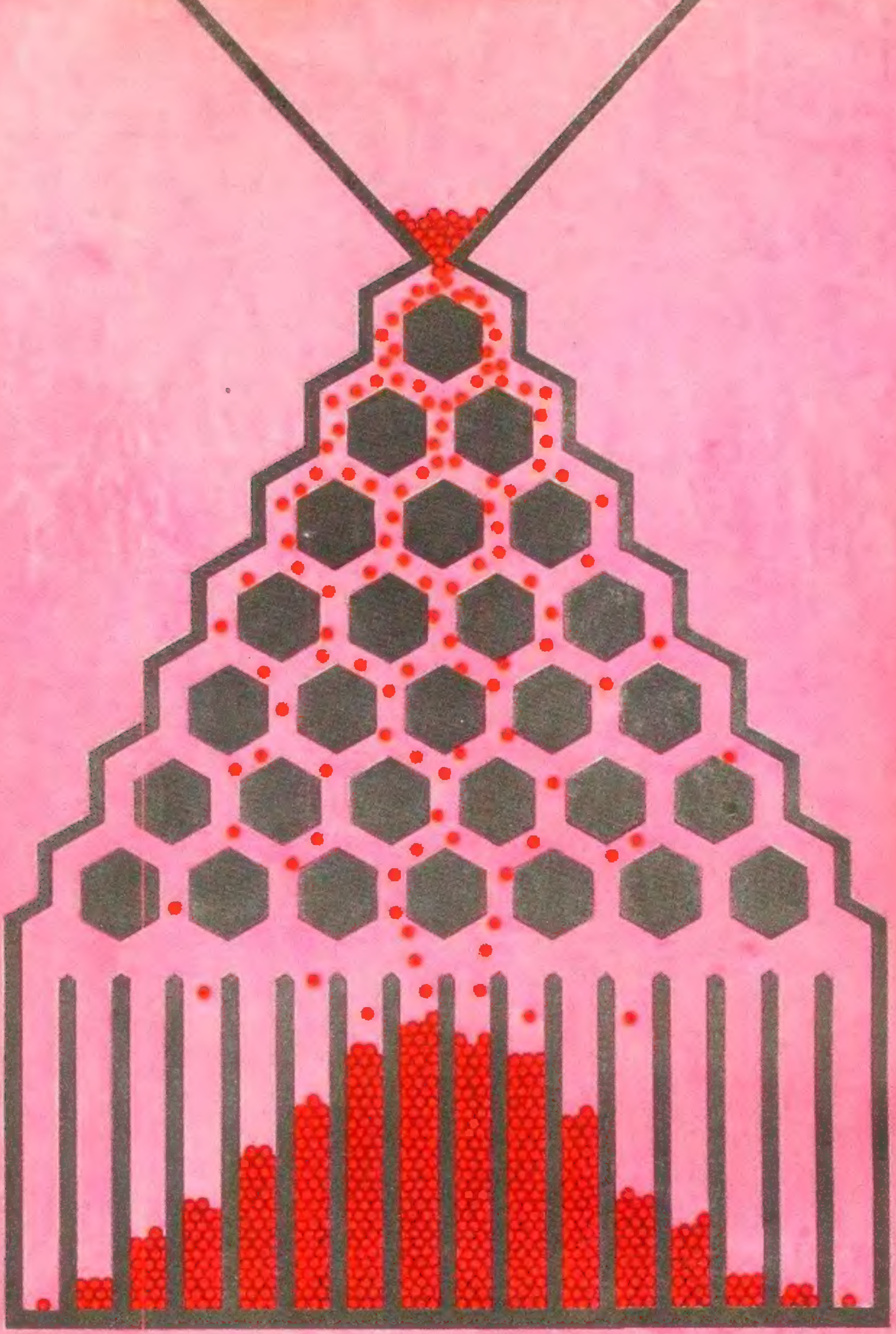


1. Мат в 4 хода.



2. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 10 марта 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2»).

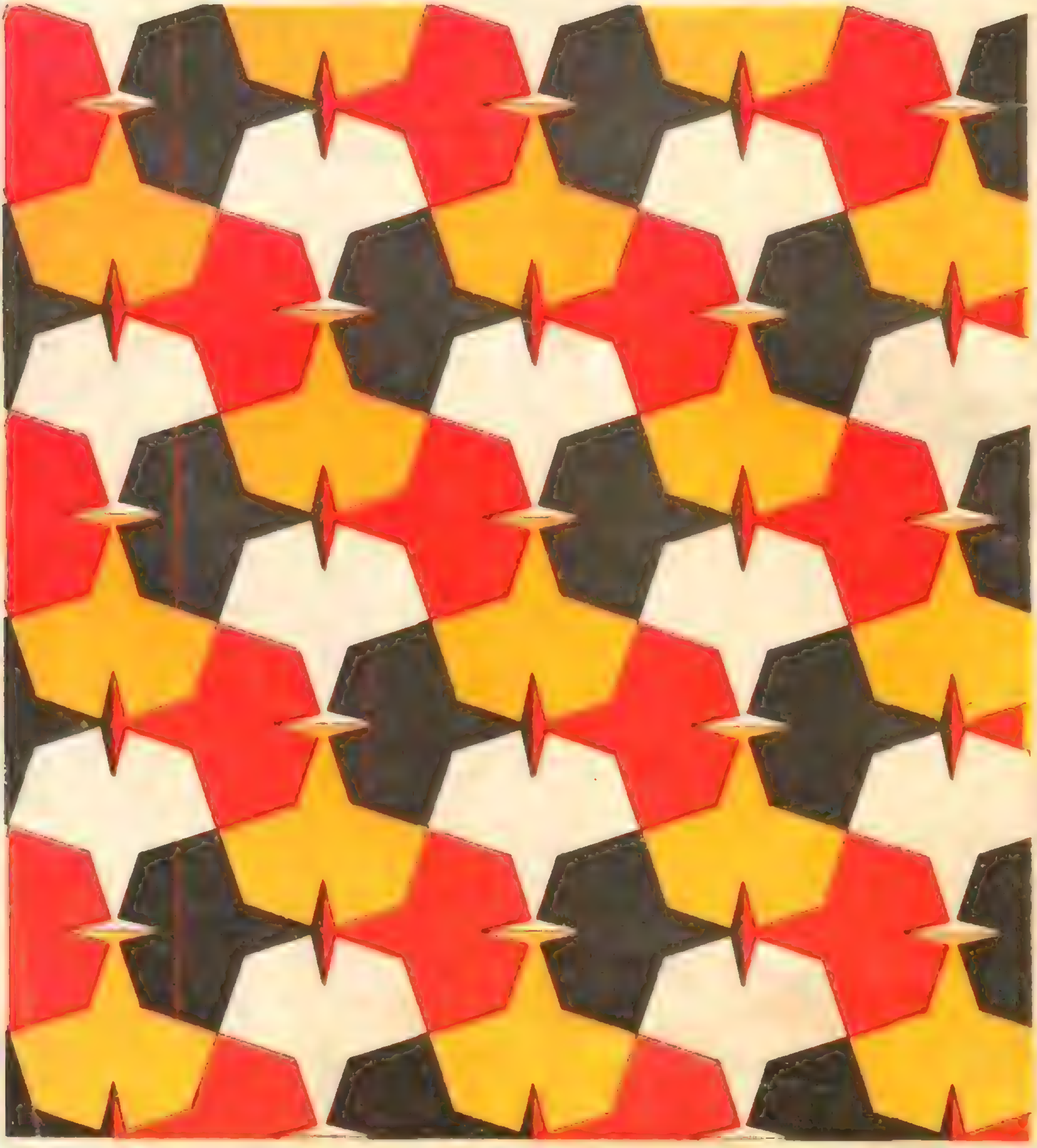


Красные шарики из резервуара вверху скатываясь вниз образуют кривую, которая называется *нормальной* или *гауссовой* (ее уравнение $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$). Эта кривая характеризует распределение мужчин и женщин по росту, горошин по размеру, новорожденных по весу, частиц газа по скоростям движения и множество других явлений и свойств физического и биологического миров.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Нарисованный здесь узор получен следующим образом. Плоскость разбита параллельными прямыми на одинаковые квадраты. Каждый квадрат разбит на два конгруэнтных прямоугольника, причем направления «длинных» сторон чередуются: если в данном квадрате прямоугольники вертикальны, то в четырех соседних квадратах они горизонтальны, и наоборот. Из полученной сети прямоугольников строится покрытие плоскости восьмиугольниками с помощью следующей общей конструкции. Центр каждого прямоугольника соединяется с центрами семи соседей отрезками — их середины образуют вершины семиугольников и треугольников, которые объединяются, образуя восьмиугольники. Найдите эти семиугольники, треугольники и восьмиугольники на нашем узоре. На рисунке в декоративных целях добавлены ромбовидные «скрепки». Подумайте, какие получатся фигуры, если начинать от другой сети прямоугольников.

А. Сапич, В. Чваков



НОМЕР
2

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Основан в 1970 году

Квант

2
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

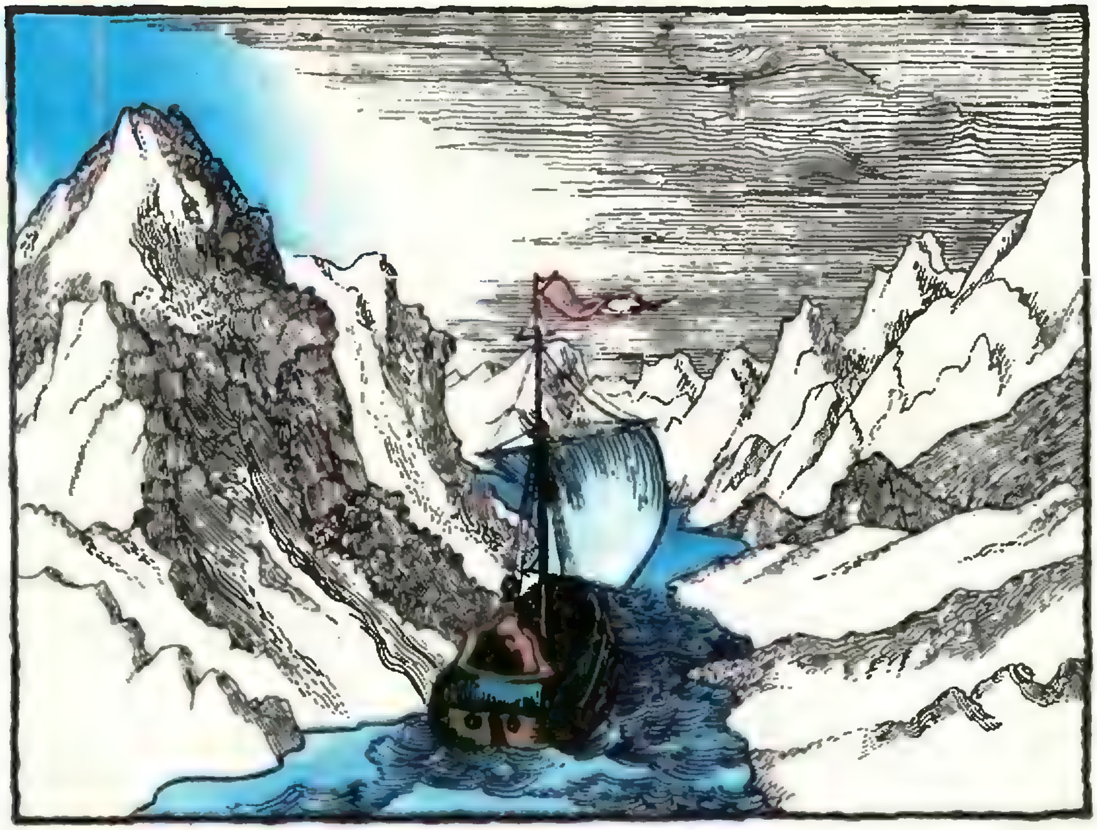
ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

А. Эфрос. Что такое теория протекания	2	*A. Efros.* What is the theory of percolation
А. Тоом. Долго ли палке упасть?	10	*A. Toom.* How long does a stick take to fall?
Б. Геллер, Ю. Брук. Симеон Дени Пуассон	14	*B. Geller, Yu. Bruk.* Siméon Denis Poisson
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
С. Шишков. Водоворот	21	*S. Shishkov.* Whirlpools
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М726 — М730; Ф738 — Ф742	25	Problems M726—M730; P738—P742
Решение задач М686 — М690; Ф698 — Ф702	28	Solutions M686—M690; P698—P702
С. Кротов. О теореме единственности в электростатике	32	*S. Krotov.* On the uniqueness theorem in electrostatics
«Квант» для младших школьников		**Kwant for younger school children**
Задачи	35	Problems
Ф. Бартенев, А. Савин. Метод перебора	36	*F. Barteniev, A. Savin.* The resetting method
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
В. Скороваров. Переменный электрический ток	39	*V. Skorovarov.* Alternating current
Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1981 году		**College entrance exams in 1981**
Московский институт электронного машиностроения	43	Moscow Institute of Electronic Machine-building
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	44	Moscow Lenin Pedagogical Institute
Московский энергетический институт	45	Moscow Energetics Institute
Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина	46	Krasnoyarsk Kalinin Institute of Non-ferrous Metals
Искусство программирования		**The art of programming**
Заочная школа программирования. Урок 18	48	Computer programming correspondence school. Lesson 18
Информация		**Information**
Е. Юносов. III Московский турнир юных физиков	55	*E. Yunosov.* The third Moscow contest for the young physicist
Рецензии, библиография		**Book reviews**
В. Гутенмахер. Пособие по математике для поступающих в вузы	58	*V. Gutenmakher.* A manual for college entrance exams
Ответы, указания, решения	59	**Answers, hints, solutions**
Смесь*(34, 47, 54)*		**Miscellaneous** *(34, 47, 54)*
Наша обложка	54	**Our cover page**
Шахматная страничка		**The chess page**
Машина угадывает счет *(3-я с. обложки)*		Computer guesses scores *(third cover page)*

Рисунок на первой странице обложки нарисован ЭВМ с помощью «случайных чисел». Подробнее см. с. 54

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982



А. Эфрос

Что такое теория протекания

Два ученых мужа кромсают экранную сетку

Не так уж часто в современных научных журналах появляются отчеты об экспериментах, объектом которых является кусок обыкновенной экранной сетки*), купленный с несколько необычной целью в ближайшем магазине скобяных изделий. И хотя статья американских физиков Ватсона и Лиса, появившаяся в журнале «Физикл Ревью» («Физическое обозрение») в 1974 году, была далеко не первой работой в области теории протекания, наш рассказ начнется именно с нее.

Кусок сетки, с которым работали Ватсон и Лис, имел квадратную форму и содержал $137\times137=18769$ узлов с расстоянием $^1/_4$ дюйма (6,35 мм) между соседними узлами. Ученые припаяли к двум противоположным сторонам квадрата медные электроды и включили сетку в электрическую цепь (рис. 1, *а*), чтобы измерить ее электропроводность (напомним, что электропроводность — величина, обратная сопротивлению). Затем они стали вырезать узлы из этой сетки (рис. 1, *б*) и изучать электропроводность в зависимости от доли вырезанных узлов.

Каждый новый узел, который нужно вырезать, выбирался среди невырезанных ранее узлов случайно. В принципе для этого можно было бы написать координаты каждого узла на отдельной бумажке, положить все бумажки в шапку, хорошенько перемешать и вынимать по одной. Однако при большом количестве узлов такая процедура (как и другие механические способы жеребьевки) крайне неудобна, и потому ученые пользовались случайной последовательностью координат, составленной ЭВМ.

---

*) Прямое назначение экранной сетки состоит в том, чтобы защищать различную радиоаппаратуру от электрических помех.

Ясно, что по мере увеличения числа вырезанных узлов электропроводность сетки уменьшалась. Более того, если отношение числа невырезанных узлов к полному числу узлов (137^2) обозначить x, то при некотором значении x, которое в дальнейшем мы будем называть пороговым значением и обозначать x_c, электропроводность обращалась в нуль. Это происходило, когда перерезался последний путь, связывающий левый и правый электроды. Определение величины x_c и являлось одной из задач эксперимента Ватсона и Лиса. Они нашли, что $x_c = 0{,}59$.

Естественно возникает вопрос: является ли величина x_c случайной и невоспроизводимой от опыта к опыту, или она вполне определенная?

Казалось бы, повторив эксперимент с другим куском экранной сетки и воспользовавшись другой случайной последовательностью вырезаемых узлов, мы получим иное значение x_c. Этот ответ подсказывает здравый смысл: поскольку на каждом этапе вся конфигурация вырезанных и «уцелевших» узлов во втором эксперименте нисколько не похожа на то, что было в первом, разрыв последнего пути, соединяющего электроды, тоже должен произойти при другом значении x, и соответственно x_c будет иное. Но как сильно будут отличаться друг от друга значения x_c, полученные в разных экспериментах?

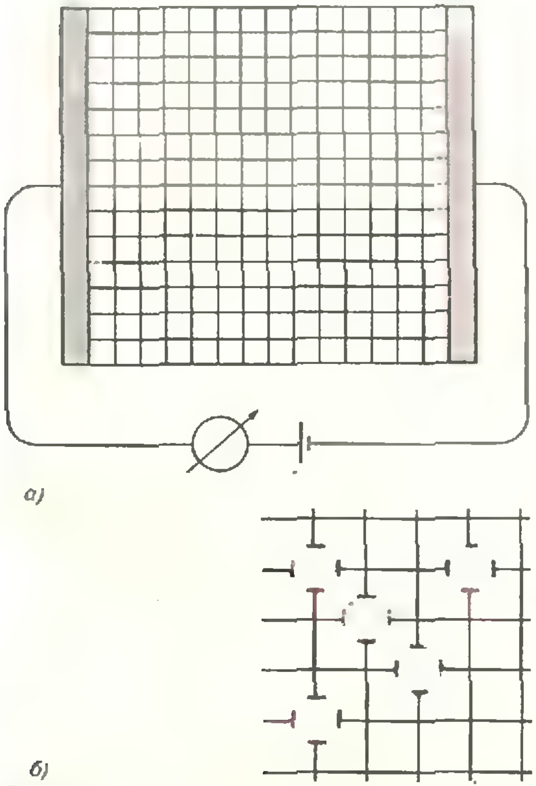


Рис. 1.

Допустим, что мы взяли много кусков экранной сетки, содержащих одно и то же число узлов, и для каждого из них определили значение x_c. Это позволяет нам определить среднее значение величины x_c. Обозначим его $\overline{x_c}\,(N)$ (в знак того, что оно зависит от исходного числа узлов N). Если число кусков было Q, то, очевидно,

$$\overline{x_c}(N) = \frac{x_{c1} + x_{c2} + \ldots + x_{cQ}}{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{Q} x_{ci}}{Q}.$$

Для того чтобы определить, насколько в среднем отличаются значения x_{ci}, полученные в разных экспериментах, от $\overline{x_c}\,(N)$, сделаем следующее. Найдем сумму выражений вида $(x_{ci}-\overline{x_c}\,(N))^2$ (то есть сумму квадратов отклонений x_{ci} от $\overline{x_c}\,(N)$) и поделим эту сумму на Q. Величина

$$\delta(N) = \frac{\sum_{i=1}^{Q} (x_{ci}-\overline{x_c}\,(N))^2}{Q}$$

представляет собой среднее значение квадрата отклонения x_{ci} от $\overline{x_c}\,(N)$ при заданном N. Эту величину называют дисперсией. Величина же $\sqrt{\delta(N)}$ и характеризует разброс значений x_{ci}, полученных в серии экспериментов с сетками, содержащими N узлов. (Заметим, что если бы мы стали складывать не квадраты отклонений, а первые степени, то есть выражения вида $x_{ci}-\overline{x_c}(N)$, то для среднего значения отклонения мы получили бы нуль, поскольку $x_{ci}-\overline{x_c}(N)$ имеют как положительные, так и отрицательные значения.)

Итак, для того чтобы оценить «степень случайности» величины x_c, надо проследить за поведением величины $\delta(N)$.

Расчеты показывают, что с увеличением числа узлов сетки N величина $\delta(N)$ резко (по степенному закону) уменьшается. Это значит, что для сеток с большим числом узлов результаты отдельных экспериментов будут мало отличаться друг от друга. Более того, при неограниченном увеличении N величина $\overline{x_c}(N)$ стремится к определенному пределу.

Дело в том, что в достаточно большой сетке встречаются всевозможные сочетания целых и вырезанных узлов, так что роль случайности становится малой. Поэтому предельное значение x_c, соответствующее бесконечно большой сетке, является вполне определенной величиной. Именно это предельное значение и называется, на самом деле, порогом протекания. Ради него и ставился эксперимент. А иначе зачем было брать сетку, содержащую почти 19000 узлов? Можно было бы взять сетку 2×2!

Кстати, для сетки 2×2 задача просто решается и без эксперимента. Расчет показывает, что для сетки с четырьмя узлами среднее значение $\overline{x_c}(4)$ порога протекания равно 5/12, что довольно сильно отличается от результата обсуждавшегося выше эксперимента (0,59).

Возможно, у кого-нибудь из вас хватит терпения найти $\overline{x_c}(9)$. Но я думаю, что с $\overline{x_c}(16)$ не справится никто. А ведь это всего лишь сетка 4×4

Точное значение x_c, соответствующее бесконечной сетке, до сих пор неизвестно. Задачу эту решают при больших (но конечных!) значениях N с помощью ЭВМ или с помощью экспериментов, похожих на описанный выше (их техника может быть весьма разнообразной). По изменению $\overline{x_c}(N)$ с изменением N можно оценить, насколько близок полученный результат к искомому предельному значению x_c.

Сопоставление результатов, полученных разными методами, позволяет думать, что с точностью до второго знака после запятой $x_c=0{,}59$, то есть равно тому значению, которое было получено для сетки с $N=137^2$ (хотя заранее совсем не очевидно, что это значение N «достаточно большое»). Разумеется, x_c можно бесконечно уточнять за счет следующих знаков после запятой.

Задача, сформулированная в этом разделе, называется задачей узлов (в знак того, что именно узлы играют роль случайных элементов). К ней сводится целый ряд научных проблем, одну из которых мы рассмотрим в следующем разделе.

Ферромагнетик с примесями

Вероятно, многие из вас знают, как устроены постоянные магниты (такие, например, как сталь), чем объясняются их магнитные свойства. Атомы таких веществ обладают магнитными моментами, так же как контур с током или магнитная стрелка. Согласно представлениям классической физики, магнитный момент контура с током равен произведению силы тока на площадь, ограниченную контуром; вектор магнитного момента перпендикулярен плоскости контура, а его направление определяется правилом буравчика.

Если про частицу или тело говорят, что они обладают магнитным моментом, то это значит, что частица или тело создают вокруг себя магнитное поле, силовые линии которого на расстояниях, больших по сравнению с геометрическими размерами тела, имеют такую же форму, как силовые линии магнитного поля петли с током или стрелки компаса.

Магнитный момент атома частично связан с элементарным электрическим током, возникающим при движении электронов по орбитам (орбитальный магнитный момент). Кроме того, квантовая механика приписывает каждому электрону в атоме собственный магнитный момент, величина которого не зависит от характера движения электрона (его называют спиновым магнитным моментом).

В твердом теле магнитные моменты соседних атомов взаимодействуют друг с другом. В некоторых веществах это взаимодействие таково, что магнитные моменты стремятся ориентироваться параллельно друг другу. Такие вещества называют ферромагнитными.

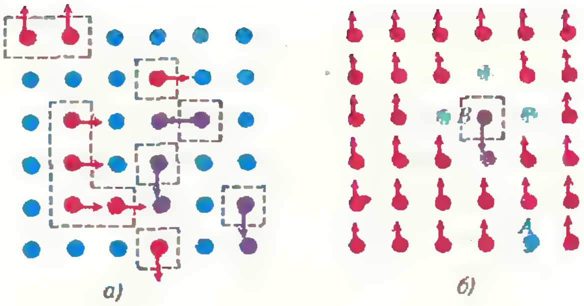
При низких температурах «желание» магнитных моментов выстроиться параллельно друг другу удовлетворяется, вследствие чего возникает суммарный магнитный момент $M=\mu N$, где N — число атомов в образце, а μ — магнитный момент одного атома. Важно, что магнитный момент, отнесенный к единице объема, не зависит от объема и равен $M=\mu/v_0$, где v_0 — объем, приходящийся на один атом. Величина M называется спонтанной намагниченностью (слово «спонтанная» означает «самопроизвольная», то есть возникающая не под действием внешнего поля, а сама по себе).

Тепловое движение разрушает магнитный порядок, и потому существует критическая температура, называемая температурой Кюри, выше которой спонтанная намагниченность равна нулю. Для железа, например, температура Кюри составляет 770°C. При более высоких температурах железо не может быть ферромагнитным.

Рассмотрим теперь вещество, представляющее твердый раствор (смесь) магнитных и немагнитных (не имеющих магнитного момента) атомов. Это кристалл, в узлах которого располагаются магнитные или немагнитные атомы, причем их расположение оказывается не упорядоченным, а совершенно случайным. Обозначим x относительную концентрацию (долю) магнитных атомов и выясним, при всех ли значениях x существует спонтанная намагниченность, то есть вещество является ферромагнетиком.

Допустим, что взаимодействие между магнитными моментами атомов убывает с расстоянием так быстро, что учитывать нужно лишь взаимодействие ближайших, непосредственных, соседей. Это значит, что если два магнитных атома стоят рядом, то их моменты обязательно параллельны, но если между ними оказался хотя бы один немагнитный атом, то моменты могут быть направлены произвольно: они уже «ничего не знают» друг о друге.

Введем некоторые определения. Будем называть два магнитных атома связанными друг с другом либо если они стоят рядом, либо если они соединены друг с другом цепочкой из стоящих рядом магнитных атомов (рис. 2, a). Совокупность связанных атомов принято называть кластером (от английского слова «cluster», что в переводе означает «гроздь», «кисть»).



а) б)

Рис. 2. Магнитные атомы обозначены красными кружочками, немагнитные — синими. Штриховые линии — границы кластеров.

Предположим, теперь, что магнитных атомов очень мало ($x \ll 1$). Естественно, что при этом они, в основном, располагаются по одиночке. Кластер из двух магнитных атомов представляет собой редкое событие, из трех атомов — еще более редкое и т. д.

Благодаря магнитному взаимодействию магнитные моменты связанных атомов ориентированы в одну сторону. Таким образом, каждый кластер обладает результирующим магнитным моментом, пропорциональным числу атомов в кластере. С другой стороны, мы договорились, что магнитные атомы, не являющиеся ближайшими соседями, не взаимодействуют друг с другом. Поэтому не взаимодействуют друг с другом атомы, принадлежащие разным кластерам. Вследствие этого ориентация магнитных моментов, принадлежащих разным кластерам, оказывается произвольной (см. рис. 2, a), так что средний момент всех кластеров равен нулю.

Итак, мы получили, что при малой концентрации магнитных атомов спонтанная намагниченность отсутствует.

Теперь рассмотрим случай, когда почти все атомы — магнитные. Очевидно, что небольшая примесь немагнитных атомов не уничтожает спонтанной намагниченности, а только несколько уменьшает ее. Обсудим этот вопрос на языке кластеров. При $x=1$ все N атомов принадлежат одному кластеру. Если x немного отличается от единицы, то часть атомов выпадает из этого кластера. Это происходит потому, что, во-первых, некоторые атомы замещаются немагнитными (атом A на рисунке 2, *б*), а во-вторых, некоторые магнитные атомы образуют изолированные кластеры со своим направлением магнитного момента (атом B на рисунке 2, *б*). Тем не менее при значениях x, близких к единице, сохраняется единый кластер, пронизывающий всю решетку, сколь бы велика она ни была. Этот кластер принято называть бесконечным кластером.

Разумеется, понятие «бесконечный кластер» (в дальнейшем мы будем для краткости писать б. к.) приобретает строгий смысл лишь для бесконечной системы. Для системы с конечным числом атомов понятие б. к. имеет следующий смысл. Возьмем серию образцов с одним и тем же полным числом атомов N и со случайно расположенными магнитными и немагнитными атомами. Пусть доля магнитных атомов во всех образцах равна x. Выберем в каждом из образцов кластер, в котором число магнитных атомов максимально. Усредним это число по всем образцам серии и обозначим полученное среднее значение числа магнитных атомов в максимальном кластере $N_{\text{к. max}}$. Это число зависит от N, однако при безграничном увеличении N отношение $N_{\text{к. max}}/N$ стремится к определенному пределу:

$$\lim_{N\to\infty} (N_{\text{к. max}}/N) = P(x).$$

При достаточно большом числе атомов N доля атомов, принадлежащих самому большому кластеру, то есть величина $P(x)$, не зависит от N и определяется только относительной концентрацией магнитных атомов x. Если при данном x величина $P(x)$ отлична от нуля, то это означает, что при безграничном увеличении числа атомов в системе число атомов в самом большом кластере безгранично растет. Поэтому и говорят о существовании в системе при данном x бесконечно большого кластера.

Отсутствие б. к. проявляется в том, что при заданном x значение $P(x)$ равно нулю.

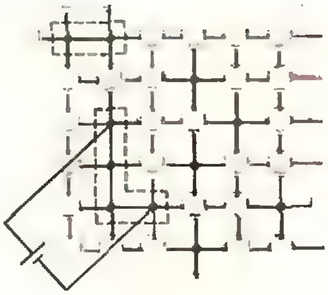


Рис. 3.

Итак, мы получили, что в системе с большим числом атомов при достаточной относительной концентрации магнитных атомов x определенная доля этих атомов принадлежит одному кластеру и имеет определенное направление магнитных моментов. Это означает, что существует спонтанная намагниченность, равная $M \cdot P(x)$.

Если вспомнить, что при малой относительной концентрации x есть только кластеры, состоящие из малого числа атомов (имеющие разные направления магнитных моментов), то мы придем к выводу, что существует критическая относительная концентрация x_c, при которой возникает б. к., причем $0 < x_c < 1$. При этой же концентрации появляется спонтанная намагниченность. А теперь вернемся к задаче об электропроводности. Ее также легко сформулировать на языке кластеров. Нужно только во всех определениях произвести формальную замену

«магнитный атом» ⟶ «невырезанный узел»

Кластер из невырезанных узлов обладает тем свойством, что если к любой паре узлов, из которых он состоит, приложить разность потенциалов, то потечет электрический ток (рис. 3). Если $x < x_c$, то в системе есть только кластеры из конечного числа узлов, и потому при увеличении размеров системы ток через боковые электроды рано или поздно обязательно прервется. Если же $x > x_c$, то в очень большой системе на боковых гранях обязательно окажутся узлы, принадлежащие б. к. Этот б. к. и обеспечит отличную от нуля и не зависящую от размеров системы электропроводность $\sigma(x)$.

Задача об электропроводности формулировалась нами для плоской сетки; однако ясно, что ее легко поставить и для куба, к двум противоположным граням которого припаяны электроды. В задаче о ферромагнетике наши рассуждения относились в равной мере и к сетке, и к кубу. Таким образом, с точки зрения критической концентрации x_c задача об электропроводности сетки и задача о примесном ферромагнетике — это одна и та же задача. Ее называют задачей узлов.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что основные понятия теории протекания, такие как порог протекания, бесконечный кластер и т. д., приобретают четкий характер лишь в применении к бесконечно большой системе. В любой конечной системе порог протекания «размыт»; при повторении эксперимента результаты воспроизводятся лишь с определенной точностью, само определение порога становится неоднозначным. Например, в эксперименте с проводящей сеткой мы могли бы назвать порогом протекания то значение x, при котором возникает протекание сверху вниз, а не слева направо, или минимальное значение x, при котором существует протекание и сверху вниз, и слева направо. В достаточно большой системе разница между всеми этими определениями стирается, и порог протекания становится вполне определенной величиной.

Заметим, что повышенная чувствительность к размерам системы есть общее свойство всех так называемых критических явлений. Так, температура Кюри, при которой исчезает ферромагнетизм, в конечной системе всегда немного «размазана» по тем же причинам, что и порог протекания. Следует, однако, иметь в виду, что фактически размер системы важен, только если мы пытаемся искусственно моделировать критическое явление (например, с помощью экранной сетки). Реальную же макроскопическую систему практически всегда можно считать бесконечной. Ведь один кубический сантиметр вещества содержит примерно 10^{22} атомов!

Другие решеточные задачи

В предыдущих разделах рассматривалась решеточная задача узлов. Теперь мы объясним, в чем состоит задача связей. Представьте себе, что в эксперименте с экранной сеткой мы не будем трогать узлы, а будем разрезать проволочки (связи), которыми эти узлы соединены (рис. 4). Обозначим через x долю неразрезанных проволочек. Тогда снова можно поставить вопрос о критической доле x_c, при которой прерывается ток в очень большой сетке с металлическими контактами на боках. Эту задачу можно сформулировать и на кластерном языке, считая, что узлы связаны друг с другом, если они соединены цепочкой из неразрезанных проволочек.

Задача узлов и задача связей кажутся очень похожими. Однако они не тождественны. Эти задачи могут быть сформулированы и для решеток более сложных, чем квадратная и кубическая. При этом предполагается, что каждый узел решетки может быть связан со всеми узлами, которые являются его ближайшими соседями. Число ближайших соседей зависит от типа решетки, и потому пороги протекания меняются от решетки к решетке. Но на любой решетке порог протекания в задаче связей не больше порога протекания в задаче узлов.

Задача связей на простой квадратной решетке решается точно; порог протекания $x_c = 1/2$ (он меньше порогового значения $x_c = 0.59$ в задаче узлов на такой же решетке). Точные решения существуют и для некоторых других двумерных (плоских) решеток. Для трехмерных (объемных) решеток пока не найдено ни одного точного решения. Такие трех-

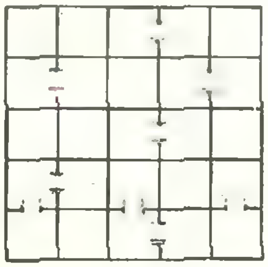


Рис. 4.

Тип решетки		Порог протекания (x_c)	
		для задачи связей	для задачи узлов
двумерная	простая квадратная (рис. 5, *а*)	0,5	0,593±0,002
	треугольная (рис. 5, *б*)	0,3473	0,5
трехмерная	простая кубическая (рис. 5, *в*)	0,247±0,05	0,312±0,02
	объемноцентрированная (рис. 5, *г*)	0,178±0,05	0,248±0,003
	гранецентрированная кубическая (рис. 5, *д*)	0,119±0,002	0,198±0,003

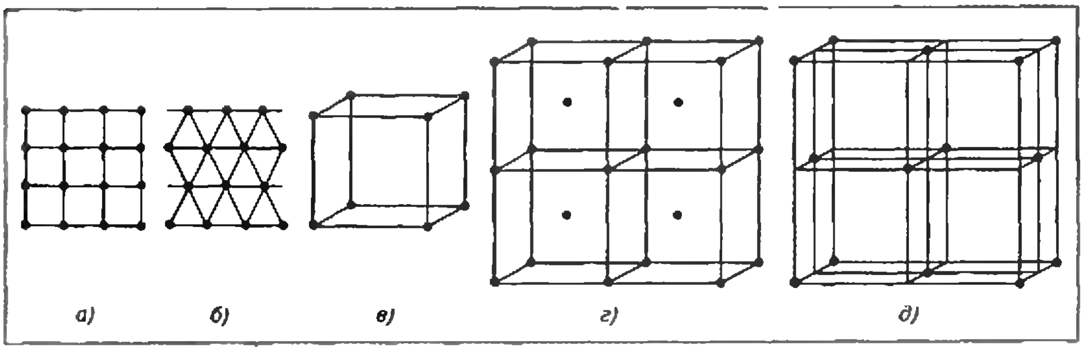


Рис. 5.

мерные задачи решают приближенными методами (вроде описанного в первом разделе) и моделированием на ЭВМ.

Пороговые значения для разных типов решеток приведены в таблице. Точные значения подчеркнуты. Остальные результаты получены приближенными методами. Естественно, приближенные результаты, полученные разными методами, несколько отличаются друг от друга. В таблице приведены результаты, наиболее надежные с точки зрения автора.

Различные применения теории протекания

Теория протекания — очень молодая математическая дисциплина. Ее основные идеи были сформулированы в 1957 году в работе английских математиков Бродбента и Хаммерсли. В этой же работе было дано и название теории. (По-английски она называется «percolation theory». В точном переводе «percolation» означает «просачивание», «фильтрация»; в русской литературе вместо термина «протекание» можно встретить слово «перколяция».)

Несмотря на молодость теории, область ее применений чрезвычайно широка. Мы разобрали в этой статье лишь так называемые решеточные задачи, но они далеко не исчерпывают всей области и играют сравнительно малую роль в приложениях.

Для того чтобы сформулировать еще одну задачу теории протекания, вспомним древнюю легенду о Ноевом ковчеге. В этой легенде говорится, что некогда на Земле произошло грандиозное наводнение. Спаслась от него лишь небольшая группа людей, заранее построивших большой корабль (ковчег). Корабль этот, видимо, курсировал где-то в районе Кавказа, так как первым местом, куда он причалил, когда стала спадать вода, оказалсь вершина горы Арарат... А теперь представим себе, что путешественники решили пересечь Кавказский хребет с юга на север по воде. При каком минимальном уровне воды это путешествие еще будет возможным? Иными словами, до какой высоты должен опуститься уровень воды, чтобы исчез водный путь, пересекающий Кавказский хребет с юга на север? (Разумеется, кораблю разрешается лавировать между выступающими из воды вершинами.)

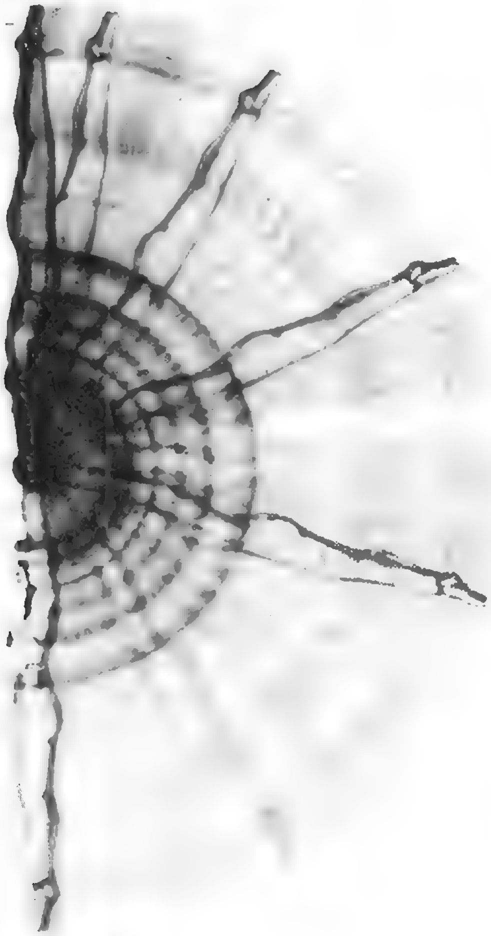
Эта задача (при условии, что горная система имеет достаточно большую протяженность во всех направлениях) также является задачей теории протекания, только сформулированной не на решетке, а в непрерывном пространстве. Искомый уровень воды называется уровнем протекания.

С помощью представлений об уровне протекания описывается, например, переход диэлектрик — металл, происходящий в полупроводниках с примесями при увеличении концентрации электронов. Дело в том, что примеси в полупроводниках расположены случайно и могут быть заряженными. Вследствие этого в некоторых областях преобладает положительный заряд, в некоторых — отрицательный. Добавляемые в систему электроны собираются в областях с положительным зарядом, образуя там нечто вроде озер или капель. Области, где возникают электронные капли, обладают высокой электропроводностью. Однако если концентрация электронов в системе мала, то эти капли не связаны друг с другом. Между ними находятся области с очень низкой электропроводностью, так что результирующая электропроводность полупроводника оказывается ничтожно малой. Положение резко меняется, когда концентрация электронов увеличивается настолько, что электронные капли, расширяясь, начинают соприкасаться друг с другом или соединяться посредством узких электронных каналов. При некоторой критической концентрации появляется возможность пересечь весь полупроводник, двигаясь только по областям, заполненным электронами. Тогда электропроводность резко возрастает. Это явление и называют переходом диэлектрик — металл. Для определения критической концентрации нужно решить задачу теории протекания, аналогичную задаче о водном пути через горную систему.

Можно перечислить самые разнообразные применение теории протекания: проникновения жидкости в пористое тело (каждая пора имеет свой диаметр, и из-за капиллярности жидкость проходит ее лишь при определенном давлении; нужно найти критическое давление, при котором жидкость протекает на очень большое расстояние по системе случайных пор), разрушение горных пород (от старости или от нагрузки образуются микротрещины, которые, сливаясь, раскалывают камень), различные модели перехода металл — диэлектрик, объяснение аномальных свойств переохлажденной воды и т. д.

Попытаемся теперь сформулировать, что общего между всеми этими задачами и что, собственно, является предметом теории протекания. Это сделать довольно сложно. Я бы сказал, что теория протекания занимается связностью очень большого (макроскопического) числа элементов при условии, что связь каждого элемента со своими соседями является величиной случайной, но полученной определенным способом (например, с помощью бросания монетки). Важно, что выработанный с помощью этого способа набор связей должен быть зафиксирован и не может меняться в процессе решения задачи.

Следует еще заметить, что теория протекания занимается не только отысканием пороговых значений, но и (в гораздо большей степени) законами, определяющими поведение различных величин вблизи порога. Если пороговые значения являются специфическими для каждой задачи, то законы, по которым обращаются в нуль такие функции как $P(x)$ в задаче о примесном ферромагнетике или электропроводность в задаче о сетке, оказываются универсальными для всех задач теории протекания. Это, пожалуй, самый интересный круг вопросов теории протекания, но рассказ о нем должен быть длинным, и он выходит за рамки этой статьи.



А. Тоом

Долго ли палке упасть?

От редакции. **Решая реальную физическую задачу, мы обычно выбираем ее идеализированную модель, позволяющую применить математические методы для ее решения. Разумеется, важно суметь правильно осуществить этот выбор. Неожиданные трудности, которые при этом могут возникнуть, обсуждаются в публикуемой ниже статье с точки зрения математика.**

Проделайте следующий физический эксперимент. Установите на полу вертикально палку (можно щетку, скалку, линейку и т. п.) и, плавно, без толчка отняв руку, отпустите ее. Палка упадет. Конечно, если палка толстая (например, полено) и нижний конец ее достаточно ровный, то она так и останется стоять, но мы этот случай не рассматриваем. Тонкие палки с заостренным нижним концом, поставленные вертикально на пол, всегда падают, если их ничто не поддерживает, — это экспериментальный факт.

Попытаемся теперь сопоставить этому факту теоретический расчет.

Как это постоянно делается при решении физических задач, идеализируем объект рассмотрения: вместо палки рассмотрим *стержень, не имеющий толщины, установленный вертикально на горизонтальной поверхности; стержень находится в поле тяжести, а среда не оказывает сопротивления движению; долго ли он будет падать?*

При некоторой внимательности можно заметить, что нижний конец палки неподвижен лишь в начальной стадии ее падения; позже он едет по полу. В какую сторону он едет — зависит от коэффициента трения палки об пол*). Чтобы не связываться с этими сложностями, предположим, что *нижний конец нашего идеального стержня закреплен в шарнире; трение отсутствует.*

Обозначим через l расстояние от центра масс стержня до его нижнего конца, через m — массу стержня. Рассмотрим момент времени, когда стержень образует с вертикалью угол α, $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ (рис. 1). К этому моменту центр масс опустится на $l(1-\cos\alpha)$. Значит, потенциальная энергия уменьшилась на $mgl(1-\cos\alpha)$. Она перешла в кинетическую энергию, которую мы запишем в виде $K=I\frac{\omega^2}{2}$, так как она пропорциональна квадрату угловой скорости ω (здесь I — постоянная**), а ω зависит от α).

Действительно, если массу стержня считать сосредоточенной в его центре масс, то

$$K=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(l\omega)^2=(ml^2)\frac{\omega^2}{2}. \qquad (0)$$

Если же стержень считать однородным, то

---

*) См., например, задачи 196, 197 в задачнике Б. Б. Буховцева и др. *«Сборник задач по элементарной физике»* (М., «Наука», 1974).

**) I называется *моментом инерции;* определение этого понятия можно прочитать в предыдущем номере «Кванта» на с. 6, но оно нам не потребуется.

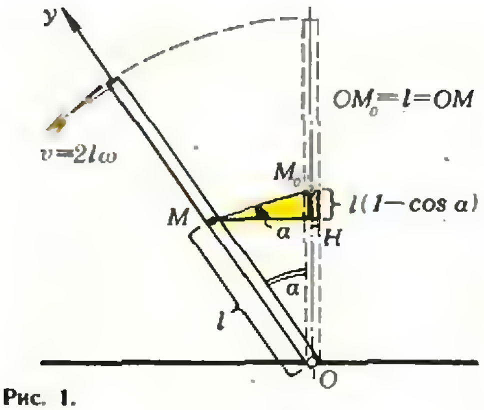


Рис. 1.

$$K=\int\limits_0^{2l}\frac{m(v(y))^2}{2l\cdot 2}\,dy=\frac{m}{2l}\int\limits_0^{2l}\frac{(\omega y)^2}{2}\,dy=\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\frac{\omega^2}{2}. \qquad (00)$$

Приравнивая потерянную потенциальную энергию и приобретенную кинетическую, получим

$$\frac{1}{2}I\omega^2=mgl(1-\cos\alpha),$$

откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{I}mgl(1-\cos\alpha)}=2\sqrt{\frac{mgl}{I}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Угловая скорость ω — это скорость изменения угла α, то есть производная α по времени:

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}.$$

Отсюда (по теореме о производной обратной функции)

$$\frac{dt}{d\alpha}=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Проинтегрировав это выражение по α от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим время T, за которое стержень упадет:

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Имеет ли смысл это выражение? В школе проходят интегралы непрерывных ограниченных функций. Здесь же под знаком интеграла стоит функция, не определенная при $\alpha=0$ и стремящаяся к бесконечности при $\alpha\to 0$. «Криволинейная трапеция», заключенная между осью α, прямыми $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и графиком этой функции, бесконечна (рис. 2). Как можно говорить о площади бесконечной фигуры? Оказывается, можно, и при разумном определении эта площадь даже иногда бывает конечной. Интеграл от неограниченной функции такого типа, как (1), называется *несобственным* и по определению полагается равным пределу обычного, «собственного» интеграла при подходящем изменении его границ*). В данном случае

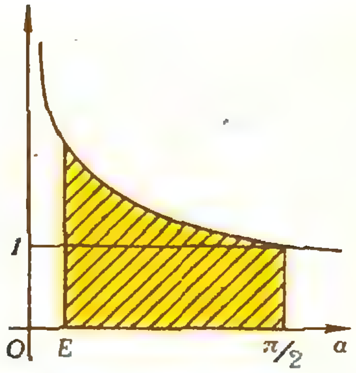


Рис. 2.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Интеграл под знаком предела, отвечающий заштрихованной площади на рисунке 2, можно сосчитать точно, но пока нам это даже не нужно.

Вспомним, что $\sin\alpha<\alpha$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}>2\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}=2\left(\ln\frac{\pi}{2}-\ln\varepsilon\right).$$

Последнее выражение при $\varepsilon\to 0$ стремится к бесконечности.

Вот те на! У нас получилось, что время падения стержня равно бесконечности! Но в эксперименте-то палка падает — значит, теория противоречит практике?

Конечно, положение не такое уж неясное. Если вначале стержень действительно стоит вертикально, то он вообще не будет падать, то есть α всегда будет равным нулю. Мы же фактически начали наш расчет с некоторого положительного α.

---

*) См., например, определение несобственного интеграла в задаче 12 параграфа 1 главы V книги Б. М. Ивлева и др. «Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов». (М., «Просвещение», 1978).

Поскольку на практике палка все-таки падает, ей и в теории надо сопоставлять стержень, который падает. С физической точки зрения естественно было бы рассмотреть один из следующих двух случаев:

1) вначале стержень вертикален и имеет маленькую, но отличную от нуля угловую скорость;

2) вначале стержень неподвижен и отклонен от вертикали на маленький, но отличный от нуля угол.

Но формулы в этих случаях придется писать заново, и они сложнее, чем те, что уже написаны. Поэтому рассмотрим случай, самый простой с математической точки зрения: стержень падает за время (см. 1))

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Физический смысл этого случая состоит в том, что вначале стержень отклонен от вертикали на маленький угол $\varepsilon>0$ и имеет начальную угловую скорость, равную

$$2\sqrt{\frac{mgl}{I}}\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь никакого парадокса нет, так как написанный интеграл имеет вполне определенную конечную величину.

Его можно даже вычислить точно. По формуле дифференцирования сложной функции вы можете убедиться, что

$$\left(2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

откуда

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Итак, время падения стержня равно

$$T=Q\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\right),\quad(2)$$

где $Q=\sqrt{\frac{I}{mgl}}$.

Если вся масса стержня сосредоточена в его центре масс, то (см. (0)) $I=ml^2$ и $Q=\sqrt{\frac{l}{g}}$. Если стержень однороден, то (см. (00))

$$I=\frac{4}{3}ml^2 \text{ и } Q=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{l}{g}}.$$

В обоих случаях время падения T не зависит от массы m и пропорционально корню квадратному из l. Этому соответствует тот наблюдаемый факт, что длинные палки падают дольше, чем короткие.

Отметим, что полученный в начале статьи парадокс не всегда замечают. Например, задача 195 упомянутого задачника Б. Б. Буховцева и др. формулируется так: *На легкий стержень насажен массивный шар* (рис. 3). *В каком случае стержень упадет быстрее: если его поставить вертикально на конец А, или на конец В? Стоящий на земле конец стержня не проскальзывает.*

В качестве решения этой задачи выводится формула угловой скорости

$$\omega=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{R}},$$

где R — расстояние от конца стержня до центра масс шара (эта формула совпадает с нашей при $l=R$, $I=mR^2$), и дальше пишется: «При данном α она тем меньше, чем больше R. Следовательно, стержень упадет скорее, если он поставлен на конец B» (с. 227). Данное рассуждение некорректно, потому что, как мы видели, интеграл написанной выше формулы бесконечен при всяком $R>0$. Есть ли какой-нибудь смысл говорить, что одна бесконечность больше другой бесконечности? Чтобы в каком-то

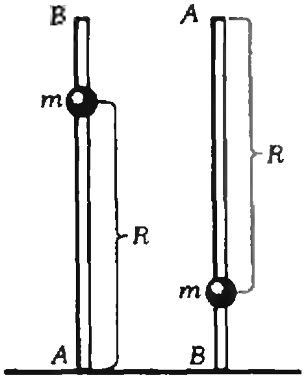


Рис. 3.

смысле решить цитированную задачу, можно, например, рассмотреть стержни, отклоненные вначале от вертикали на какой-то маленький угол, или имеющие какую-то маленькую начальную угловую скорость, или и то и другое — как сделано выше.

Кстати, мы в каком-то смысле решили и задачу № 56 из прекрасного задачника И. Ш. Слободецкого и Л. Г. Асламазова «Задачи по физике» (М., «Наука», 1980): *Почему половую щетку значительно легче удерживать на пальце, чем палку той же длины?*

В решении этой задачи, приводимом в задачнике (с. 77), читателю предлагается самостоятельно рассмотреть, как зависит время падения от длины стержня, причем не упоминается о тех трудностях, с которыми мы пытаемся здесь справиться. Аккуратное решение этой задачи действительно требует рассмотрения времени падения палки, но чтобы это время получилось конечным (а только конечные величины можно сравнивать между собой), надо рассмотреть начальное условие, как-то отличающееся от условия равновесия. Такое рассмотрение придает строгий смысл неформальным рассуждениям типа «чем выше центр масс палки, тем медленнее она наклоняется, и тем легче успеть сместить палец в эту же сторону».

В процессе обсуждения исходной задачи нам пришлось отказаться от наиболее простой ее модели (идеальный стержень на шарнире, стоящий вертикально) и рассмотреть более сложную модель, так как вертикальный идеальный стержень не падает. Однако простейшая модель вполне корректна, если обратить время, иными словами — иметь дело не с падающей, а с поднимающей палкой. Точнее, рассмотрим такую задачу: *один конец горизонтально лежащего идеального стержня длины l закреплен в шарнире, а другому концу придается скорость, направленная вверх и равная $\sqrt{8gl/3}$; как долго будет стержень подниматься?*

Правильный ответ дается интегралом (1): стержень будет подниматься бесконечно долго, стремясь к вертикальному положению, но никогда не достигая его. Так, гимнаст, поворачивающийся в верхнюю стойку на перекладине, чтобы не подниматься к точке равновесия бесконечно долго, должен за счет махового движения придать себе скорость, обеспечивающую движение дальше этой точки, и остановиться в ней за счет трения (зажимая руками перекладину).

Но вот что еще остается неясным в исходной задаче.

Предположим, что мы проделываем несколько экспериментов с одной и той же палкой. Каждый раз мы ее ставим на пол, как нам кажется, вертикально и отпускаем. Палка падает, причем можно убедиться в том, что промежутки времени, затраченные на падение, во всех случаях не сильно отличаются друг от друга. И вот это странно. Ведь каждый раз палка в действительности отклоняется от вертикали на какой-то иной ненулевой угол и имеет какую-то иную ненулевую начальную скорость. Значит, и длительности падения должны быть различными. В некоторых случаях, казалось бы, начальные угол и скорость должны случайно получаться совсем маленькими, и тогда время падения должно быть очень большим, однако этого не наблюдается. В чем же дело?

На этот вопрос нам удастся ответить только неформально. Рассмотрим формулу (2). Она содержит постоянный член $Q\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и переменный член $-Q\ln\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$. При маленьких ε (а нас такие и интересуют) $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$ близок к $\frac{\varepsilon}{4}$, и переменный член близок к

$$-Q\ln\frac{\varepsilon}{4}=Q\ln 4-Q\ln\varepsilon.$$

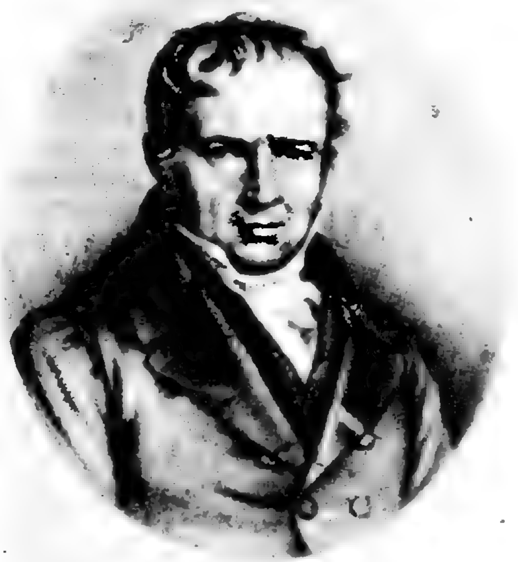
Так вот дело в том, что величина $-\ln\varepsilon$, хотя и стремится при $\varepsilon\to 0$ к бесконечности, но очень медленно.

Например, уменьшению ε в 10 раз соответствует увеличение $-\ln\varepsilon$ на постоянную величину $\ln 10\approx 2{,}3$.

(Окончание см. на с. 24)

Б. Геллер, Ю. Брук

Симеон Дени Пуассон



В 1981 году исполнилось двести лет со дня рождения Симеона Дени Пуассона — выдающегося французского ученого, которого мы по праву считаем одним из создателей современной математической физики. Имя Пуассона то и дело встречается в учебниках математического анализа и электромагнетизма, теории вероятностей и акустики, в книгах по квантовой механике и по теории упругости. В истории науки Пуассон стоит теперь в одном ряду с его выдающимися современниками — Лапласом, Лагранжем, Фурье, Коши, Ампером, Гей-Люссаком, Френелем.

Родился Пуассон 21 июня 1781 года. О родителях Пуассона известно немного. Мы знаем, что отец его поначалу был солдатом ганноверских войск, но его военная карьера не удалась. Из-за придирок и притеснений офицеров он бежал из армии и обосновался в маленьком французском городке Питивье. К моменту рождения сына он занимал скромную, но уважаемую должность нотариуса.

Мальчик рос совершенно обычным, ничем не примечательным и никаких особых надежд в раннем детстве не подавал. У родителей даже возникли сомнения по поводу его умственных способностей. Отцу, конечно, очень хотелось, чтобы его сын стал нотариусом, но семейный совет решил, что с этой работой ему не справиться и что лучше быть ему врачом. Решение семейного совета — своего рода закон. Симеона отправили в городок Фонтенебло к дяде Ланфану для обучения достойному, но, в их понимании, простому ремеслу хирурга. Однако овладеть этой профессией оказалось нелегко. Чтобы научиться, например, делать кровопускания (один из основных методов лечения в то время), необходимо было в течение долгих часов упражняться в прокалывании иголкой жилок на капустных листах. Позже Пуассон рассказывал друзьям, что даже самые крупные жилки в последний момент все же ускользали из-под его иголки. В ненавистных упражнениях прошел почти год, дядюшка был доволен племянником, но первая же доверенная ему самостоятельная прививка закончилась смертью пациента. Это событие так потрясло юношу, что он наотрез отказался дальше заниматься медициной и вернулся к родителям в Питивье.

За то время, пока Симеона не было дома, там произошли некоторые изменения. Отец стал «государственным человеком», возглавив городскую общину. Семья переехала в другой дом, более приличествующий новому положению в обществе. В новом доме жизнь стала оживленнее: приходило много людей, из Парижа стали поступать различные журналы, среди них — «Журнал Политехнической школы». Читать его оказалось очень занятным для Симеона, еще занятнее было решать предлагавшиеся в журнале математические задачи. Неожиданно решение задач оказалось делом очень легким для мальчика, который нигде никогда этому не учился; он просто «щелкал» их одну за другой. Надо отдать должное родителям Пуассона. Они быстро переменили мнение об умственных способностях своего сына и отправили его обратно в Фонтенебло, но на этот раз — в школу.

В школе Пуассон учился блестяще. Его дарование и трудолюбие позволили ему сильно «оторваться» от своих сверстников. Когда он выходил к доске, учителя уже знали, что сейчас они услышат много нового и интересного для себя, а ученики часто вообще мало что понимали. Два года спустя семнадцатилетний Симеон был принят в Политехническую школу в Париже.

Здесь уместно рассказать немного о самой Политехнической школе (Ecole Polytechnique), одном из самых старых и необычных учебных заведений Франции. Эта школа была создана в эпоху Великой французской революции по декрету Конвента от 11 марта 1794 года. Первоначально она называлась «Центральная школа общественных работ», а год спустя была переименована в Политехническую школу. Нужно сказать, что революция оказала большое влияние на развитие науки и научно-технического образования в Европе. Одной из основных задач в области образования в эти годы стала задача подготовки инженерных и офицерских кадров. Воспитанники Политехнической школы должны были занимать, в конечном счете, высшие технические государственные должности. Срок обучения в Политехнической школе был сравнительно невелик — всего два года, интенсивность же обучения была очень высокой. Как писал много лет спустя выдающийся математик и историк науки Ф. Клейн, «знания вколачивались в голову до полного овладения предметом». В значительной степени выдающаяся роль Ecole Polytechnique в развитии физико-математического образования связана с прекрасным педагогическим коллективом: среди профессоров школы в первые годы ее существования были известные ученые Монж, Лаплас, Лежандр, Лагранж, Фурье, Карно. По существу, все основные курсы и учебники математического анализа, геометрии и механики, на много лет предопределившие уровень математического образования (и не только во Франции!), были созданы именно профессорами Ecole Polytechnique. Политехническая школа и доныне сохранила свое значение одного из ведущих вузов Франции.

Вернемся, однако, к рассказу о Пуассоне. Лаплас и Лагранж гордились замечательными способностями Симеона Дени и занимались с ним особенно много. Пуассон в совершенстве знал труды многих своих предшественников, особенно подробно изучал он работы Эйлера и Даламбера. Позднее друг и биограф Пуассона, выдающийся физик и тоже воспитанник Политехнической школы Франсуа Араго писал: «Пуассон никогда не имел надобности тратить время и силы на искание того, что уже было найдено». Не случайно поэтому, что уже в двадцать лет Пуассон сделал свои первые математические работы, сразу принесшие ему известность. Было бы, впрочем, неверно думать, что в студенческие годы, да и позже тоже, Пуассону были чужды нематематические интересы. Он был общительным и жизнерадостным человеком, очень любил и часто посещал театр, знал наизусть сочинения Мольера и Корнеля, трагедии Расина.

Дальнейшая жизнь Пуассона также оказалась во многом связанной с Политехнической школой. Здесь Пуассон прошел последовательно всю «иерархическую лестницу». По окончании курса обучения он был оставлен при школе репетитором, а в 1802 году получил должность помощника профессора. В 1806 году ушел из Политехнической школы великий Фурье; его профессорское место занял 25-летний Пуассон. В 1812 году Пуассон был избран академиком Парижской Академии наук; с 1820 года он — член Совета Парижского университета. Ему поручается наблюдение за преподаванием математики во всех колледжах Франции. В Политехнической школе Пуассона назначают экзаменатором по артиллерии и экзаменатором абитуриентов. Должность экзаменатора была в определенном смысле выше обычной профессорской: принимая итоговые экзамены, он подвергал тем самым проверке и то, как усвоены знания воспитанниками Политехнической школы, и то, как и чему их научили профессора.

Все сменяющиеся в те бурные годы правительства Франции с большим вниманием относились к научным заслугам Пуассона. Он получил титул барона, был награжден орденом Почетного легиона (высшая награда во Франции), стал пэром Франции. Получил Пуассон признание и за рубежом: он был членом всех научных обществ и академий Европы и Америки, в том числе — почетным членом Петербургской Академии наук (с 1826 г.).

Пуассон, по словам Араго, «обладал еще одним достоинством, которым часто пренебрегают даже не высоко стоящие в науке: точностью исполнения своих обязанностей». Известно, например, что выпускные экзамены в Политехнической школе ежегодно отнимали у Пуассона четыре недели, в течение которых он должен был экзаменовать по девять часов в день. «Только однажды, — пишет Араго, — из приличия Пуассон отказался экзаменовать своего старшего сына, но воспитанники Политехнической школы, узнав об этом, послали к нему депутацию с объявлением, что они вполне верят его беспристрастию и просят не отказываться от экзамена». Педагогическую работу Пуассон любил, об этом говорит и его известное высказывание: «Жизнь украшается двумя вещами — занятием математикой и ее преподаванием». Лекции Пуассона отличались ясностью и глубиной.

В последние годы жизни (умер Пуассон в Париже весной 1840 года) он поставил перед собой задачу написать фундаментальный курс математической физики. До конца выполнить эту задачу Пуассон, к сожалению, не успел.

О научных трудах Пуассона рассказывать очень непросто. Бóльшая часть его работ (а всего их около 350) относится к математической физике, поэтому подробно обсудить здесь даже основные результаты этих работ мы не сможем. В то же время не упомянуть хотя бы совсем кратко о наиболее известных и важных работах Пуассона просто нельзя. Мы сделаем это ниже и, кроме того, рассмотрим несколько вопросов, смысл которых вполне можно понять на школьном уровне.

Одно из главных понятий в электростатике — это понятие об электрическом потенциале. Потенциал всегда зависит от величины и расположения зарядов в пространстве. Пуассон в 1811 году вывел дифференциальное уравнение, связывающее потенциал с плотностью распределения зарядов. Простейшие задачи в электростатике можно, конечно, решать и не пользуясь уравнением Пуассона. Но для сколько-нибудь сложных задач, когда есть много зарядов и расположены они произвольным образом, рассчитать зависимость потенциала от координат можно только с помощью этого уравнения. Уравнение Пуассона, вместе с результатами Эйлера, Гаусса, Лапласа, Грина и Остроградского, лежит теперь в основе современной теории потенциала — важного раздела математической физики.

Значительны заслуги Пуассона в теоретической механике, в механике сплошных сред, теории теплопроводности, теории упругости. Изучал Пуассон вопросы, связанные с адиабатическим изменением состояния газа, с атмосферным электричеством, с измерением горизонтальной составляющей земного магнитного поля, с природой сил поверхностного натяжения, с распространением волн в глубоком бассейне. Были у Пуассона и «артиллерийские» заслуги. Он подробно исследовал задачу об отклонении снарядов от вертикальной плоскости, проведенной через направление ствола орудия. В астрономии он занимался исследованием устойчивости движения планет Солнечной системы и рассматривал задачи о возмущении планетных орбит и о движении Земли вокруг ее центра тяжести. Ему принадлежит также много результатов в области «чистой» математики, особенно в дифференциальном и интегральном исчислении (интеграл Пуассона, формула суммирования Пуассона и др.), в теории дифференциальных и разностных уравнений.

Нельзя, наконец, не сказать о существенном вкладе Пуассона в теорию вероятностей. Вслед за Лапласом он уделял большое внимание применениям теории вероятностей в... уголовном судопроизводстве. Один из его больших трактатов так и называется «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах». Сейчас это может вызвать улыбку читателя, но нельзя забывать о том, что в этой работе решались вполне конкретные и строгие математические задачи.

В работах Пуассона очень часто видно стремление связать формальные математические рассуждения не только с естественными науками, но и с общественно важными вопросами. Таков и его трактат «О преимуществе банкира при игре в тридцать и сорок». Вряд ли нужно осуждать Пуассона за стремление «помочь обогащению банкиров», лучше вспомнить о том, что теория игр, в том числе и азартных, была очень существенной для становления и развития теории вероятностей, а сейчас и сама стала самостоятельным и жизненно необходимым разделом математической науки.

Приведем теперь три конкретных задачи. Решение их получается с помощью часто используемой в вероятностных расчетах формулы, носящей имя Пуассона. Выводить эту формулу мы не будем, но покажем как ею пользоваться.

Первая задача — об опечатках, встречающихся в книгах. Предположим, что существует постоянная вероятность того, что любая буква будет набрана наборщиком неправильно. Эта вероятность приблизительно равна среднему отношению числа ошибок, допускаемых обычно данным наборщиком на одной странице, к полному числу набираемых букв. Предполагается, что само число букв на странице очень велико, а усреднение производится тоже по достаточно большому числу страниц. Пусть условия набора остаются неизменными. Под этим мы понимаем и то, что все страницы в книге «равноценны» в том смысле, что число и расположение типографских знаков на них приблизительно одинаковы. Назовем испытанием сам факт набора каждой буквы. Среднее число испытаний есть просто среднее число букв на одной странице. Результат каждого испытания двузначен: правильно — неправильно. Зададим теперь вопрос: какова вероятность того, что на странице встретится ровно k опечаток? Ответ на этот вопрос дается формулой Пуассона — искомая вероятность приближенно равна

$$p\,(k;\,\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

Число λ в этой формуле — параметр, который в рассматриваемой задаче можно считать «характеристикой» наборщика; оно равно произведению вероятности неправильного набора одной буквы на среднее число испытаний.

«Экспериментальная» проверка результата, вычисленного по формуле Пуассона, может быть, в принципе, произведена таким образом. Мы должны внимательно прочитать набранные данным наборщиком страницы (чем больше, тем лучше!) и отыскать те, на которых встретится k опечаток. Потом число страниц с k опечатками нужно разделить на число прочитанных страниц и сравнить найденное отношение с тем, что получается при том же значении k из написанной выше формулы, которая называется также распределением Пуассона.

Вторая задача такова. Пусть нас интересует вероятность того, что в коллективе, состоящем из 1982 человек, ровно k человек родились в тот же день, что и Пуассон. Решается эта задача так. Можно утверждать, что произвольно выбранный из коллектива человек родился в один день с Пуассоном с вероятностью $\approx 1/365$, тогда параметр $\lambda = \frac{1}{365} \cdot 1982 \approx 5{,}43$ (число людей в коллективе есть в этом случае число испытаний). Теперь вы сами можете вычислить вероятность $p(k; \lambda)$ того, что k человек родились в интересующий нас день. Для этого достаточно подставить в формулу Пуассона $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Третья задача относится к физике. Известно, что процесс радиоактивного распада радия заключается в превращении ядра атома радия в ядро атома радона с испусканием альфа-частицы. Распад каждого отдельного ядра Ra происходит независимо от состояния других ядер, и вероятность такого распада в единицу времени есть величина постоянная. Обозначим эту вероятность буквой p_0. Если в образце всего N ядер Ra, то среднее число альфа-частиц, испускаемых в единицу времени, есть $\lambda = Np_0$. Для определения λ нам, казалось бы, нужно знать два числа — N и p_0. Однако в классическом опыте Резерфорда, Чедвика и Эллиса эти числа вовсе не потребовались экспериментаторам. Целью этого эксперимента был поиск закономерности, определяющей вероятность испускания радиоактивным образцом определенного числа альфа-частиц в единицу времени.

Излучаемые альфа-частицы попадали в счетчик. Наблюдения велись в течение $n = 2608$ промежутков времени, длительность каждого из них равнялась 7,5 с. Специально подсчитывалось число n_k промежутков, за каждый из которых в счетчик попадало ровно k частиц. Полное число частиц за все время опыта равнялось $\sum kn_k = 10094$. Если разделить теперь эту сумму на n, то получится среднее число альфа-частиц, испускаемых за 7,5 с. Можно считать условной единицей времени 7,5 с, тогда число $\frac{\sum kn_k}{n} = 3{,}87$ и есть параметр λ в распределении Пуассона. Вычисленные с помощью формулы Пуассона числа $p(k; \lambda) = p(k; 3{,}87)$ естественно сравнить теперь с числами $\frac{n_k}{n}$, полученными из опыта. Мы приводим здесь соответствующую таблицу из обсуждаемой нами работы. График на рисунке 1 построен по этой таблице. Красные точки обозначают числа $np(k; 3{,}87)$, синие соответствуют n_k. Кривая, проведенная через красные точки, дает наглядное представление о характере распределения Пуассона. Важной особенностью этого графика является наличие максимума. Из таблицы и графика видно, что альфа-распад хорошо описывается формулой Пуассона.

Таблица

k	n_k	$np(k; 3{,}87)$
0	57	54,399
1	203	210,523
2	383	407,361
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$k \geqslant 10$	16	17,075
Итого	2608	2608,000

С самого раннего детства Пуассон был связан с физикой колебаний. Связан, как ни удивительно это звучит, в буквальном смысле слова. Дело в том, что нянька маленького Симеона Дени, по-видимому, не отличалась особым прилежанием. Чтобы иметь с малышом поменьше хлопот, она обвязывала младенца вокруг пояса широким полотенцем и подвешивала его к большой горизон-

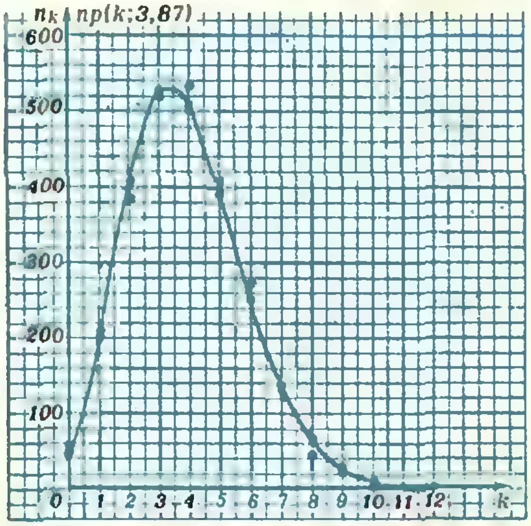


Рис. 1.

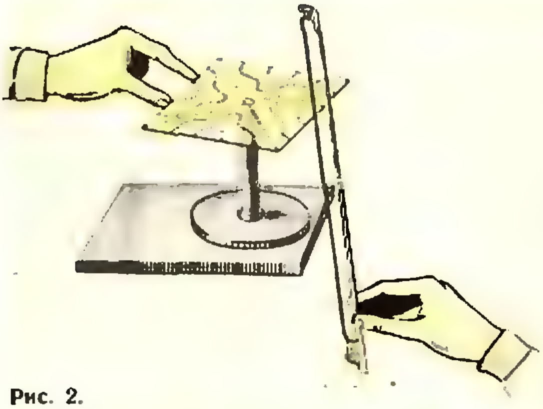


Рис. 2.

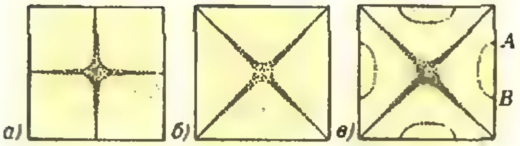


Рис. 3.

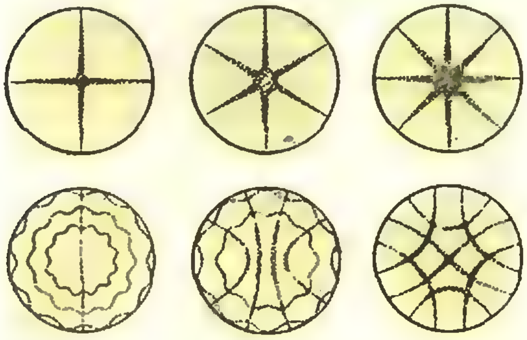


Рис. 4.

тальной балке. Так, качаясь в виде своеобразного маятника, маленький мальчик проводил много часов. Будучи взрослым, Пуассон шутил, говоря, что сам бог велел ему заниматься теорией колебаний.

Одна из решенных им в этой области задач касалась вычисления частот колебаний небольших металлических или стеклянных пластин, жестко закрепленных в одной точке. Опыты с такими пластинами проделывались немецким физиком Эрнстом Хладни, и первая информация о них относится к 1787 году. В 1809 году Хладни продемонстрировал эти опыты членам Французского Национального института (Академии наук). Все смотрели на них с изумлением, не сразу понял их смысл даже Лаплас.

Сами опыты заключались в следующем. На рисунке 2 показана закрепленная в центре пластинка, на которую сверху насыпался мелкий песок. Если слегка коснуться пластинки в той или иной точке рукой и одновременно возбудить колебания пластинки, проведя поперек нее смычком, то песок перераспределится, собираясь вдоль так называемых узловых линий. Простые картинки узловых линий на квадратной пластинке показаны на рисунке 3. В случае а) рука касалась пластинки в точке посередине одной из сторон квадрата; в случае б) — в одном из ее углов; в случае в) — в точках *A* и *B*. Характерно, что излучаемый пластинкой звук во втором случае выше, чем в первом, а в третьем — выше, чем во втором.

Не обязательно, конечно, проделывать опыты с квадратными пластинками; годятся для этой цели прямоугольные или круглые. На рисунке 4 приведены примеры песочных фигур, полученных самим Хладни на круглых пластинках (схема опыта та же самая). Наблюдаемые фигуры называются хладниевыми; они могут иметь и более сложную, но всегда достаточно симметричную конфигурацию.

По-видимому, нетрудно понять, что эти фигуры — двумерный аналог узлов и пучностей в одномерной стоячей волне. Точки, находящиеся на узловых линиях, покоятся. (Заметьте еще, что узловые линии обязательно проходят через те точки, в которых мы касаемся пластинки пальцами.) И, наверное, теперь вам уже стало ясно, что колебания, при которых получаются хладниевы фигуры, — поперечные по отношению к плоскости пластинки.

Заслуга Пуассона при объяснении хладниевых фигур состоит в том, что он установил связь частоты колебаний с числом узловых линий. Для частного случая, когда пластинка квадратная и хладниевы фигуры тоже образуют квадраты (такого типа, как на рисунке 3, *а*), квадрат частоты колебаний ω^2 пропорционален сумме $((m+1)^2+(n+1)^2)$, где m и n — числа взаимно перпендикулярных узловых линий, которыми разделяется пластинка.

В заключение рассмотрим еще один вопрос — о связи продольных и поперечных деформаций. Вспомним сначала закон Гука, с помощью которого можно рассчитать изменение длины образца под действием силы, растягивающей или сжимающей его. Если обозначить буквой ε относительное изменение длины стержня, а буквой σ — возникающее в нем напряжение, то для малых деформаций $\sigma = E\varepsilon$. Величина E называется модулем Юнга и определяется внутренней структурой материала стержня.

Другой важной характеристикой упругих свойств материала является коэффициент Пуассона, связывающий относительные изменения поперечных и продольных размеров деформируемого образца. В том, что одновременно с изменением продольных размеров меняются и поперечные, легко убедиться, если рассмотреть, например, деформацию резинового шнура или даже обыкновенного ластика. Возникает вопрос: насколько отличаются относительные деформации в разных направлениях, если к образцу приложена какая-то сила? Этот вопрос и был исследован Пуассоном. Рассмотрим цилиндрический стержень длины l и радиуса r. Представим себе, что вдоль оси стержня действует растягивающая сила. При этом в нем возникают напряжение σ_l и относительная деформация $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} > 0$. Поперечные размеры стержня тоже изменяются — радиус цилиндра уменьшается на Δr. Радиальная относительная деформация $\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$ имеет знак, противоположный знаку ε_l. Коэффициент Пуассона есть $k = \left|\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_l}\right|$.

Проанализируем, в каких пределах может изменяться k. Сначала предположим, что объем деформируемого тела не изменяется, и запишем выражающее этот факт соотношение:

$$\pi(r+\Delta r)^2(l+\Delta l) = \pi r^2 l.$$

Раскрыв скобки и пренебрегая произведениями малых величин Δr и Δl, получим

$$r\Delta l + 2l\Delta r = 0,$$

или, другими словами,

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = -2\frac{\Delta r}{r} = -2\varepsilon_r.$$

Коэффициент Пуассона в этом случае равен 1/2. На самом деле объем тела при растяжении увеличивается, и мы должны написать неравенство

$$(r+\Delta r)^2(l+\Delta l) > r^2 l.$$

Из этого неравенства вытекает, что $k < 1/2$. (Такое же неравенство справедливо и для тел нецилиндрической формы.) С другой стороны, по самому своему определению коэффициент Пуассона — число неотрицательное. Итак,

$$0 < k \leqslant 1/2.$$

Близкий к нулю коэффициент Пуассона имеет пробковое дерево: при растяжении (или сжатии) куска пробки поперечные размеры меняются мало (если, конечно, деформации не слишком большие!). Именно поэтому для закупоривания бутылок используют цилиндрические пробки из пробкового дерева. С другой стороны, цилиндрические резиновые пробки использовать для той же цели плохо — коэффициент Пуассона для резины близок к 1/2, а, значит, поперечные размеры при продольном усилии меняются довольно существенно. Если заталкивать резиновую пробку в горлышко бутылки, она может просто застрять. Чтобы эту трудность обойти, резиновые пробки обычно изготовляют конической формы. Полезно отметить, наконец, что для материалов, чаще всего использующихся в технике — металлов, камня, бетона, значения коэффициента Пуассона заключены обычно между 1/4 и 1/3.

С. Шишков

Водоворот

На страницах «Кванта» уже не раз рассказывалось о вихревом движении. Достаточно упомянуть такие статьи, как «Вихревые кольца» Р. Вуда (1970, № 12), «Основы теории вихрей» Н. Е. Жуковского (1971, № 4), «Вихри, которые делают погоду» Л. Алексеевой (1977, № 8), «Модели смерча» В. Майера (1979, № 9), «О вихревых кольцах» С. Шабанова и В. Шубина (1979, № 11). Круг явлений, связанных с вихревым движением, исключительно многообразен, и нет никакой возможности осветить его полностью в рамках одной статьи. В перечисленных статьях особое внимание уделялось вихрям в воздухе — циклонам, смерчам, вихревым кольцам. В настоящей статье речь пойдет об одном из видов вихревого движения в воде — о водовороте.

О циклонах и...карусели

На детских площадках часто можно увидеть карусель — свободно вращающуюся горизонтальную платформу диаметром метра в четыре и с радиальными перилами. Игра на этой карусели требует определенной ловкости. Участники своими силами приводят платформу в быстрое вращение и запрыгивают на нее по краям. Затем по команде все устремляются к центру платформы, перебирая с усилием руками по перилам. При этом карусель начинает вращаться все быстрее и быстрее, и замешкавшийся участник уже практически не может последовать за остальными — от него требуются большие усилия, чтобы удержаться на своем месте.

Увеличение угловой скорости вращения можно объяснить по-разному. Читатель, знакомый с законом сохранения момента импульса, сразу поймет, в чем дело. Тот, кто умеет описывать движение в неинерциальной системе отсчета, может объяснить происходящее на языке сил инерции. Но качественное объяснение доступно каждому читателю. На краю платформы линейная (касательная) скорость ее точек и находящегося там участника игры большая. Чем ближе к центру — тем меньше эта скорость, так что, переходя от края к центру, участник, чтобы не упасть, должен уменьшать свою скорость. Достигается это за счет взаимодействия с платформой. Понятно, какое это взаимодействие — трение. Но возникающая сила трения, действуя на платформу, сообщает ей дополнительное ускорение, увеличивающее линейные скорости всех ее точек, — и угловая скорость вращения растет.

Оказывается, между детской игрой на карусели и такими явлениями природы, как возникновение атмосферных циклонов, образование воронки в стоке, существует некоторая аналогия. Поэтому мы будем, наблюдая движение воды в банке, говорить о карусели и делать выводы о поведении циклонов и водоворотов на море.

Наблюдение водоворота

Вихри и водовороты всегда привлекали внимание. В 30-х годах замечательный популяризатор физики Я. И. Перельман обратился к молодежи с призывом исследовать возникновение водоворотов при вытекании воды из ванны и, в частности, направление вращения этих водоворотов. Юные естествоиспытатели, последовавшие призыву, провели огромное количество наблюдений.

Надо заметить, однако, что ванна как «экспериментальное оборудование» обладает рядом недостатков.

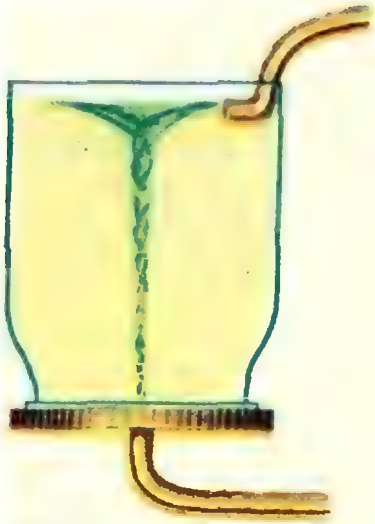


Рис. 1.

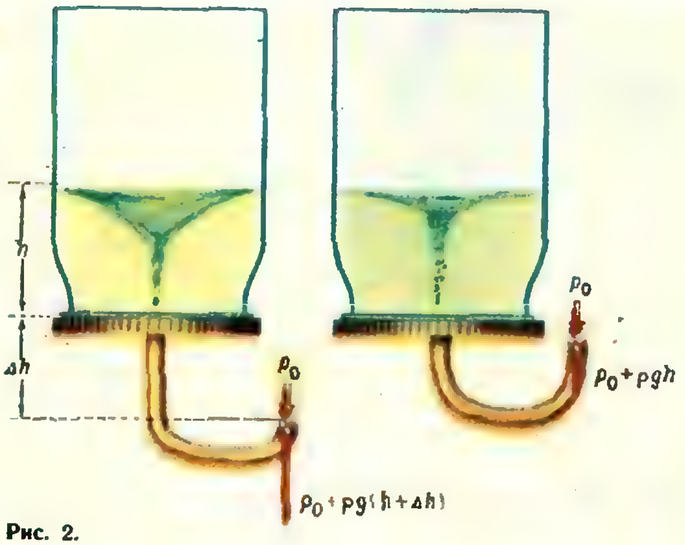


Рис. 2.

Например, она «мало» симметрична, наполнение ее каждый раз занимает много времени. Воронка образуется не сразу после начала вытекания воды, и почти совершенно невозможно управлять условиями опыта. В этом отношении более удобна цилиндрическая «малолитражная» установка из подручного материала, например такая, как на рисунке 1. Сосуд — перевернутая стеклянная банка с отрезанным дном; дно сосуда (бывшее горло) плотно закрыто (например, полиэтиленовой крышкой). В отверстие в центре дна вставлен сливной шланг; открывать и перекрывать слив можно с помощью зажима. Наливной шланг следует закрепить на внутренней стенке так, чтобы вода из него вытекала горизонтально и не вдоль радиуса сосуда; тогда при наполнении сосуда с самого начала будет возникать вращение воды.

Налейте в установку воду через наливной шланг и откройте слив. Через некоторое время станет заметен прогиб свободной поверхности воды, и, наконец, появится воронка.

Это явление отличается от детской игры на карусели лишь тем, что роль участников игры выполняют частицы жидкости; толкает их к центру перепад давления между периферией (атмосферное + гидростатическое давление) и отверстием в дне (атмосферное давление).

В равномерно вращающемся ведерке свободная поверхность воды также прогибается, но при этом все частицы жидкости (и на поверхности) вращаются с одной и той же угловой скоростью. А в воронке, которую мы только что наблюдали, угловая скорость возрастает по мере приближения к центру вращения.

Удобно исследовать установившийся водоворот; для получения такого водоворота надо при открытом сливе все время компенсировать расход воды, непрерывно добавляя воду из наливного шланга.

Водоворот можно наблюдать не только при вытекании воды, но и при наполнении сосуда (при закрытом сливе). Если в центр вращающейся жидкости (напомним, что наливной шланг крепится так, чтобы при наполнении сосуда вода вращалась) направить сильную тонкую струю, то возникает водоворот — так называемая «вторичная» воронка. Подумайте, чем отличаются условия в такой воронке от условий в водовороте, образующемся при сливе.

О расходе жидкости

Наладьте установку так, чтобы образовался установившийся водоворот. Опустите в такой водоворот вертикально кусок плотной бумаги так, чтобы он перегородил течение вращающейся воды, но не препятствовал вытеканию воды через слив. И вы увидите, что уровень воды быстро понизился на 1—2 см. Связано это с тем, что при наличии вихря расход жидкости уменьшается. В этом легко убедиться. Опустите наливной шланг так, чтобы вода втекала в сосуд вертикально. Тогда при том же напоре уровень воды будет понижаться.

Понятно, какой аналог этого явления можно продемонстрировать на детской карусели: при затрате одинаковых усилий участники игры добираются до центра вращающейся платформы гораздо медленнее, чем по неподвижной платформе.

Между водоворотом и расходом жидкости существует и обратная связь — от расхода зависит форма свободной поверхности жидкости в водовороте.

Наполните сосуд водой (при закрытом сливе) и отключите наливной шланг. Теперь откройте слив. Когда начнет формироваться воронка, поднимите свободный конец шланга, из которого вытекает вода. При этом нетрудно заметить, что прогиб свободной поверхности уменьшается с увеличением высоты конца шланга.

Поднимая конец шланга, мы уменьшаем перепад давления на выходе (рис. 2); в связи с этим уменьшается скорость истечения воды, ее расход. Почему же сглаживается воронка? Чтобы понять это, обратимся к карусели. Что произойдет, если участники игры будут передвигаться к центру вращающейся карусели очень медленно? Ясно, что из-за трения платформа остановится прежде, чем кто-нибудь доберется до центра. Сглаживание воронки происходит из-за наличия трения между слоями жидкости, дном и стенками сосуда. Чем медленнее убывает вода из сосуда, тем больше времени у сил трения на сглаживание воронки.

Осторожно — водоворот!

На речных и морских пляжах часто встречаются плакаты, разъясняющие правила поведения при купании. Имеются среди них и рекомендации на тот случай, если вдруг попадете в водоворот. Заключаются они в следующем: наберите в легкие побольше воздуха и пытайтесь удержаться на поверхности. Ценность этого совета не стоит определять, заплывая в настоящий водоворот. Некоторые сведения можно извлечь из наблюдения безопасного водоворота в банке.

С самого начала ясно, что наибольшую опасность представляет не вращение воды, а течение, засасывающее под воду. Водовороты бывают разных размеров. Исследуем сначала те из них, размеры которых сравнимы с размерами пловца. Для такого случая тело пловца, набравшего воздух, можно моделировать деревянным поплавком. Поместите поплавок на поверхность воды. Где бы он ни оказался, его неумолимо затягивает к центру, где он вращается очень быстро, но под воду все же не уходит. Однако стоит лишь слегка погрузить его грубже, как он попадает в плен мощного вертикального течения.

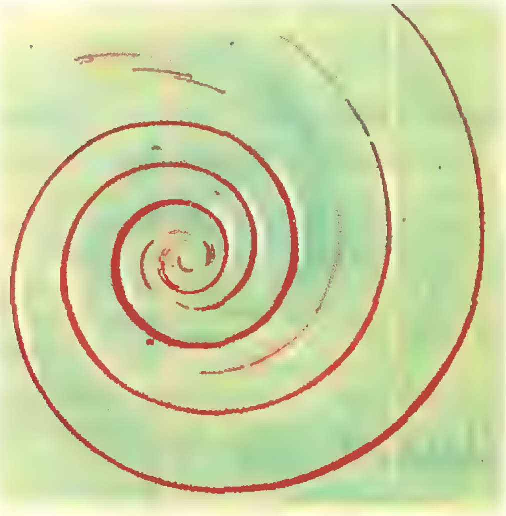


Рис. 3.

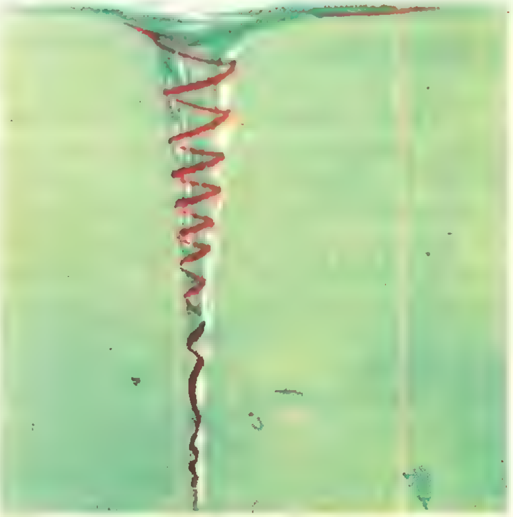


Рис. 4.

Иначе обстоит дело с большими водоворотами. Пловца теперь можно моделировать частицами краски, которые не могут перекрыть канал воронки, а двигаются по ее поверхности. Как показывают траектории движения частиц краски на фотографиях (рисунки 3 и 4 сделаны с таких фотографий), спастись из большого водоворота — задача более сложная. Один из вариантов решения этой задачи описан в известном рассказе Эдгара По «Низвержение в Мальстрем».

Таким образом, хотя пловец и не сможет покинуть водоворот самостоятельно, рекомендация содержит долю истины: попав в водоворот, не стоит тратить силы на попытки выбраться; гораздо полезнее успокоиться, набрать в легкие воздух и звать на помощь! (Но самое лучшее — «не лезть в воду, не зная броду»!)

«Усы» водоворота

Еще одно интересное явление, наблюдающееся в водовороте, — «усы». К сожалению, автору не удалось получить хорошей фотографии с «усами». Но вы увидите их отчетливо, если понаблюдаете за водоворотом в стоке ванны. Они несомненно привлекут ваше внимание своим неожиданным поведением. Первоначально «усы» воспринимаются как установившиеся линии тока. По мере вытекания воды они начинают вращаться, как бы наматываясь на невидимую ось водоворота. А в последний момент вы обнаружите, что вращение воды происходит вовсе не в сторону «наматывания усов».

Как появляются эти «усы»? В чем причина их обманчивого поведения?

Возможно, «усы» — застывшие капиллярно-гравитационные волны на поверхности воронки, подобные «гармошке» на струйке с преградой (об этой «гармошке» говорилось в статье С. Соскина «Капиллярные волны в струе» в 10-м номере «Кванта» за 1976 год). Если внести конец проволоки в воронку, то он возбуждает на поверхности 1—3 характерных «уса».

А может быть, все-таки существует какая-нибудь аналогия между «усами» водоворота и ...рукавами спиральных галактик? Ведь нередко природа поражает единством несоизмеримых по масштабам явлений.

На сегодняшний день вопрос об «усах» остается открытым. Может быть, Вы, читатель, выскажете свое мнение по этому вопросу?

Долго ли палке упасть?

(Окончание; начало см. на с. 10)

Таким образом, чтобы время падения увеличилось, скажем, на одну секунду, надо уменьшить ε в определенное количество раз. Но на практике каждый новый знак точности дается с большим трудом. В домашних условиях вообще трудно достичь больше двух знаков точности для любого физического параметра, будь то угол, скорость и т. п. Поэтому и время у нас получается колеблющемся в довольно узких пределах. Подобные ситуации в теоретической физике нередки; в таких случаях говорят о *логарифмической расходимости.*

Задачи

Во всех предложенных задачах к полу шарнирно прикреплен легкий стержень длины l с маленьким тяжелым шариком массы m на конце.

1. Покажите, что время T, определяемое формулой (2), удовлетворяет оценкам

$$c_1-c_2 \ln \varepsilon<T<c_3-c_4 \ln \varepsilon,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 не зависят от ε, $c_2>0$, $c_4>0$.

2. В начальный момент стержень вертикален, и шарику придана начальная скорость v в горизонтальном направлении. Выведите формулу времени падения стержня, содержащую интеграл. Собственный ли это интеграл (то есть ограничена ли подынтегральная функция на промежутке интегрирования)? К чему он стремится при $v \to 0$? Оцените время падения сверху и снизу выражениями вида $\text{const} - \text{const} \cdot \ln v$, где знаки const означают различные константы.

3. В начальный момент стержень неподвижен и образует с вертикалью угол β. Выведите формулу времени падения стержня, содержащую интеграл. Собственный ли это интеграл? Конечен ли он? К чему он стремится при $\beta \to 0$? Оцените время падения сверху и снизу выражениями вида $\text{const} - \text{const} \cdot \ln \beta$.

задачник кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1982 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М726, М727» или «Ф738». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Квант», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М726—М730; Ф738—Ф742

М726. Точка внутри правильного $2n$-угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных а) для $n=4$, б) для $n=3$, в) для произвольного натурального n.

В. Прасолов

М727. Докажите неравенство

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2.

И. Жаров

М728. Пусть A, B, C — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной P, а Q — вершина, противоположная P. Докажите, что а) расстояние от точек A, B, C до прямой PQ могут служить длинами сторон некоторого треугольника; б) площадь S этого треугольника, объем V параллелепипеда и длина d его диагонали PQ связаны соотношением $V=2dS$.

И. Шарыгин

М729. Найдите натуральное число, обладающее таким свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа.

Н. Васильев

М730*. Последовательность (a_n) определяется условиями

$$a_1=0,\ a_{2n+1}=a_{2n}=n-a_n.$$

(Например, $a_{10}=5-a_5=5-a_4=5-(2-a_2)=$ $=3+(1-a_1)=4.$)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите a_{1982}.

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число 2^k (при каждом $k=1, 2, 3, \ldots$)?

в) Докажите, что разность a_n-a_{n-1} равна 1, если в разложение числа n на простые множители число 2 входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае.

г) Докажите, что $a_n = n/3$ для бесконечного множества значений n.

д) Найдется ли n такое, что разность $|a_n - n/3|$ больше 1982?

е) Докажите, что $\lim a_n/n = 1/3$.

В. Шевелев

Ф738. Частицы движутся гуськом с постоянными скоростями. Скорости частиц равномерно возрастают от значения v_1 в голове колонны до значения v_2 в хвосте колонны. В некоторый момент частицы занимают отрезок длины l_0 и при этом на единицу длины приходится n_0 частиц. Сколько частиц спустя время t будет приходиться на единицу длины в хвосте колонны? в голове колонны?

И. Воробьев

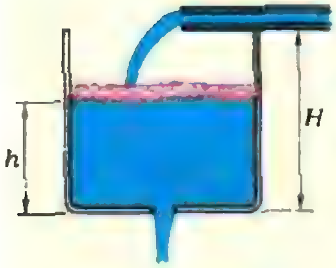


Рис. 1.

Ф739. В цилиндрический сосуд высоты H с площадью основания S из горизонтально расположенной трубы ежесекундно вливается масса воды M. В основании сосуда имеется небольшое отверстие. На поверхности воды в сосуде лежит тонкая легкая губка (рис. 1). С некоторого момента высота уровня воды в сосуде становится постоянной и равной h_0. Определить, с какой скоростью вытекает при этом вода из отверстия.

И. Омелян

Ф740. В сосуде находится смесь газов — гелия и кислорода. При температуре $t = -2°$ С и давлении $p = 0{,}9$ атм плотность этой смеси $\varrho = 0{,}44$ кг/м^3. Каким станет давление в сосуде, если из него удалить половину молекул кислорода?

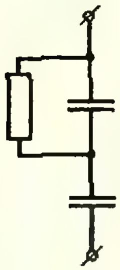


Рис. 2.

Ф741. В сеть переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц подключены последовательно два конденсатора с емкостью 1 мкФ каждый. Параллельно одному из конденсаторов включен резистор с сопротивлением $R = 100$ кОм (рис. 2). Найти тепловую мощность.

А. Зильберман

Ф742. Стеклянный сосуд прямоугольного сечения установлен между двумя собирающими линзами с фокусными расстояниями F перпендикулярно оптической оси линз (рис. 3). Точечный источник света S расположен в фокальной плоскости линзы $Л_1$. Когда сосуд пустой, изображение источника наблюдается на экране $Э$, расположенном в фокальной плоскости линзы $Л_2$. Сосуд заполняют прозрачной жидкостью, показатель преломления которой меняется с высотой по закону $n(y) = n_0 + \alpha y$. Толщина слоя жидкости равна L. На сколько сместится по вертикали изображение источника на экране? Изменение показателя преломления с глубиной сосуда считать малым в пределах диаметра светового пучка.

В. Можаев

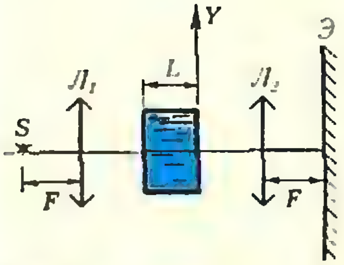


Рис. 3.

Problems M726—M730; P738—P742

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 30th to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M726. A point inside a regular polygon is joined to its $2n$ vertices, forming $2n$ triangles alternatively painted blue and red. Prove that the total area of the blue triangles equals that of the red if a) $n=4$; b) $n=3$; c) n is arbitrary.

V. Prasolov

M727. Prove the inequality

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

when a, b, c are the sides of a triangle of perimeter 2.

I. Jarov

M728. Suppose A, B, C are the three neighbouring vertices of the vertex P of a parallelepipedon, while Q is the opposite vertex. Prove that a) the distances from the points A, B, C to the line PQ can serve as the sides of a triangle b) the area S of this triangle, the volume V of the parallelepipedon and the length d of its diagonal PQ satisfy the relation $V=2Sd$.

I. Sharygin

M729. Find a natural number with the following property: if its square and cube are written in succession and the digits rewritten in reverse order, then the sixth power of the number is obtained.

N. Vasiliev

M730*. The sequence (a_n) is defined by the relations

$$a_1=0,\ a_{2n+1}=a_{2n}=n-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$(\text{e. g. } a_{10}=5-a_5=5-a_4=5-(2-a_2)=3+(1-a_1)=4).$$

a) Write out the first 200 terms of the sequence and compute a_{1982}.
b) Prove that each natural number appears in the sequence either twice or four times. How many times will each of the numbers 2^k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ occur?
c) Prove that the difference a_n-a_{n-1} equals 1 if the factor 2 appears to an odd power in the decomposition of n into prime factors and 0 in the converse case.
d) Prove that $a_n=n/3$ for an infinite set of values of n.
e) Is there an n such that the difference $|a_n-n/3|$ exceeds 1982?
f) Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n=1/3$.

V. Shevelev

P738. Particles are moving one after the other with constant velocities. At the initial moment of time the length of the column of particles is l_0, there are n_0 particles in a unit of length of the column and the velocities increase uniformly from the value v_1 at the head of the column to the value v_2 at the end of it. How many particles will there be after time t in a unit of length at the head of the column? at its end?

I. Vorobiev

P739. Water is poured in through a horizontal pipe (M units of mass flow in per second) into a cylindrical receptacle of height H and base area S. In the base of the receptacle there is a small hole. A light thin sponge covers on the water's surface (see figure Рис. 1). At a certain moment of time the water level becomes constant and equal to h_0. Determine the speed with which the water then pours out of the hole.

I. Omelian

P740. A receptacle contains a mixture of gases — helium and oxygen. At temperature $t=-2°$C and pressure $p=0.9$ atm, the mixture's density is $\varrho=0.44$ kg/m^3. What will the pressure in the receptacle be, if half the oxygen molecules are removed?

P741. An alternating current circuit of frequency 50 Hz and voltage 220 V includes two consecutive condensers of capacity 1 mcF each. A resistor of fesistance $R=100$ kOhm is installed parallel to one of the condensers (see figure Рис. 2). Find the heating power.

A. Zilberman

P742. A glass receptacle of rectangular section is placed between two convergent lenses of focal distances F, perpendicularly to the lenses' optical axis (see figure Рис. 3, p. 26). A point light source S is located in the focal plane of the lens Λ_1. When the receptacle is empty, the image of the source may be observed on the screen $Э$ located in the focal plane of the lens Λ_2. The receptacle is filled with a transparent liquid whose refraction index varies with height in accordance to the rule $n(y) = n_0 + ay$. The thickness of the layer of water is L. What will the vertical displacement of the image on the screen be? The change of the refraction index within the diameter of the light beam may be assumed negligible.

V. Mojaev

Решения задач

М686 — М690; Ф698 — Ф702

М686. *Для любого ли числа $x > 1$ верно равенство*

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]} = [\sqrt{\sqrt{x}}]\,?$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y.)

Ответ: для любого.

Пусть a — натуральное число, для которого $a^4 < x < (a+1)^4$. Тогда $a^2 < \sqrt{x} < (a+1)^2$. Отсюда, с одной стороны, $a < \sqrt{\sqrt{x}} < a+1$, $[\sqrt{\sqrt{x}}] = a$. С другой стороны, $a^2 < [\sqrt{x}] < (a+1)^2$, $a < \sqrt{[\sqrt{x}]} < a+1$, $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = a$.

Г. Гальперин

◆

М687. *а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых ребер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого окрашены в одинаковый цвет.*

б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?

а) Среди девяти боковых ребер пирамиды найдутся пять окрашенных в какой-то один цвет (например, в красный). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — концы этих ребер, занумерованные подряд. Одна из сторон пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ является диагональю основания (пусть, для определенности, это A_1A_2). Рассмотрим треугольник $A_1A_2A_4$; его стороны — диагонали основания. Если он одноцветный, то все доказано. Если нет, то одна из его сторон (диагоналей основания) — красная, и поэтому будет одноцветным треугольник, образованный этой диагональю и боковыми ребрами, соединяющими ее концы с вершиной пирамиды.

б) Ответ: неверно. Пример получается, если четыре идущих подряд ребра окрашены в красный цвет, а остальные четыре ребра — в синий, причем концы красных ребер соединены синими диагоналями, концы синих — красными. (Сообразите, как нужно раскрасить остальные диагонали.)

Н. Ненов

◆

М688. *Даны натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что $a_k < k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ и сумма $a_1 + a_2 + ... + a_n$ четна. Докажите, что одно из выражений $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n$ равно нулю.*

Докажем что утверждение индукцией по n.

Для $n = 2$ оно очевидно, так как единственный возможный набор $a_1 = a_2 = 1$.

Пусть для набора меньше чем из $n+1$ чисел, оно доказано; докажем его для $n+1$ чисел.

Возьмем произвольный набор a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} из $n+1$ чисел, удовлетворяющий условию. Если $a_n = a_{n+1}$, то сумма $a_1 + ... + a_{n-1}$ четна; учитывая предположение индукции, заключаем, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_{n-1} + a_n - a_{n+1}$ равна нулю. Если же $a_n \neq a_{n+1}$, заменим данный набор набором a_1, a_2, ..., a_{n-1}, $|a_n - a_{n+1}|$ из n чисел. Для нового набора выполнены все условия: число $|a_n - a_{n+1}|$ имеет ту же четность, что и $a_n + a_{n+1}$, поэтому сумма новых n чисел по-прежнему четна; из $a_n \neq a_{n+1}$, $1 < a_n < n$ и $1 < a_{n+1} < n+1$ вытекает $1 < |a_n - a_{n+1}| < n$. По предположению индукции одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm |a_n - a_{n+1}|$ равна нулю. Остается «раскрыть модуль». В любом случае $|a_n-a_{n+1}| = \pm(a_n-a_{n+1})$, и мы получаем, что одно из выражений $a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_n\pm a_{n+1}$ равно нулю (при этом в нашем решении перед a_{n+1} и a_n всегда стоят разные знаки).

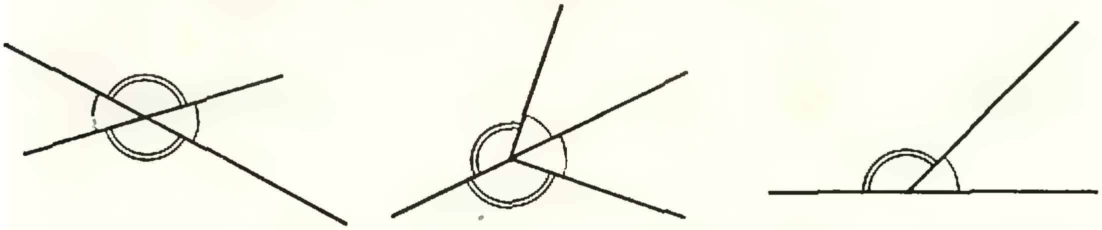
С. Ненашев

◆

М689. *Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.*

Предположим, что прямоугольник удалось составить из n трапеций. Отметим точки, в которые попадают вершины трапеций, в том числе — четыре вершины прямоугольника.

У каждой трапеции два острых угла (по 45°) и два тупых (по 135°), так что у всех n трапеций вместе одинаковое число острых и тупых углов — по $2n$.



С другой стороны, ясно, что в каждой из отмеченных точек расположено не меньше острых углов, чем тупых (если там есть один тупой угол, то есть по крайней мере один острый, а если — два тупых, то — и два острых — см. рисунок); при этом в вершинах прямоугольника могут оказаться только острые углы трапеций. Таким образом, острых углов больше, чем тупых (по крайней мере, на 8).

Полученное противоречие доказывает невозможность составления прямоугольника из трапеций.

Н. Васильев

◆

М690. а) *Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите неравенства*

$$2\frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}.$$

б) *Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.*

а) Заметим сначала, что для треугольников справедливо более сильное утверждение: $\frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}$. Это почти очевидно, так как $\frac{2S_1}{P_1}$ и $\frac{2S_2}{P_2}$ — радиусы кругов, вписанных в эти треугольники.

Для доказательства общего утверждения воспользуемся двумя фактами, которые мы докажем ниже:

1) *во всякий выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $R > \frac{S}{P}$;*

2) *для любого круга, содержащегося в данном многоугольнике, $R < \frac{2S}{P}$.*

Из 1) и 2) сразу следует утверждение а): поместим во внутренний многоугольник круг радиуса $R > \frac{S_2}{P_2}$; поскольку $R < \frac{2S_1}{P_1}$, получаем требуемое.

Докажем 1). Построим на каждой стороне (выпуклого) многоугольника прямоугольник с высотой $h = \frac{S}{P}$ (рис. 1; S — площадь, P — периметр многоугольника). Эти прямоугольники перекрываются; они могут даже «вылезать» за пределы многоугольника. Поскольку суммарная площадь прямоугольников равна S, площадь покрытой ими части многоугольника меньше S. Поэтому найдется непокрытая точка, удаленная от всех сторон на расстояние $R > h$.

Докажем 2). Пусть O — центр круга радиуса R, содержащегося в многоугольнике (рис. 2). Поскольку длины высот треугольников с вершиной O, основаниями которых служат стороны многоугольника, не меньше R, получаем

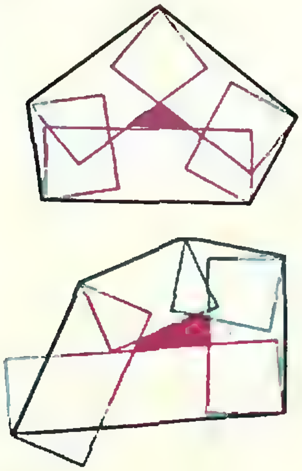


Рис. 1.

$S > \frac{1}{2}PR$. Поэтому $R < \frac{2S}{P}$. (Заметим, что если для какого-то круга, содержащегося в многоугольнике, $R = \frac{2S}{P}$, то этот круг вписан в многоугольник — докажите это!).

В пространственном случае (см. б)) можно доказать, что если *выпуклый многогранник объема* V_1 *и площади поверхности* S_1 *содержит выпуклый многогранник объема* V_2 и площади поверхности S_2, *то* $3\frac{V_1}{S_1} > \frac{V_2}{S_2}$.

Доказательство получается заменой слов: *периметр — площадь поверхности, площадь — объем, круг — шар, треугольник — пирамида, прямоугольник — призма.* Заметим, что константы 2 (для плоского случая) и 3 (для пространственного) нельзя заменить меньшими. Примеры, подтверждающие это, показаны на рисунках 3 и 4 (узкий прямоугольник внутри узкого длинного треугольника и узкая призма внутри узкой высокой пирамиды).

А. Келарев

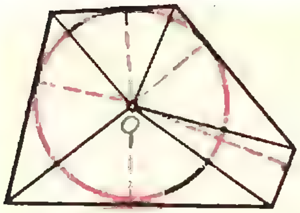


Рис. 2.

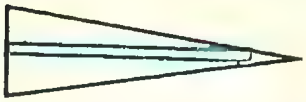


Рис. 3.

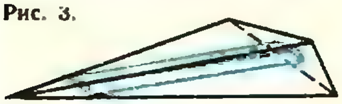


Рис. 4.

◆

Ф698. *На некотором производстве детали перемещают с помощью двух транспортеров, ленты которых движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми по абсолютной величине скоростями* v_0 *(рис. 1). При этом деталь, въезжая на транспортер II, останавливается на середине ленты. Скорость транспортера II увеличили в n раз. Как надо изменить скорость транспортера I, чтобы детали по-прежнему останавливались на середине ленты транспортера II? Размерами деталей пренебречь; считать, что переход на транспортер II происходит без удара.*

Рассмотрим движение детали в системе отсчета, связанной с лентой транспортера *II* (в этой системе лента транспортера *II* неподвижна).

Скорость детали, попадающей на транспортер *II*, равна $u = v_0\sqrt{2}$ и направлена под углом $\alpha = 45°$ к стороне ленты. Остановка детали происходит в результате действия силы трения $F = \mu mg$ (m — масса детали). Условие остановки на середине ленты (рис. 2) —

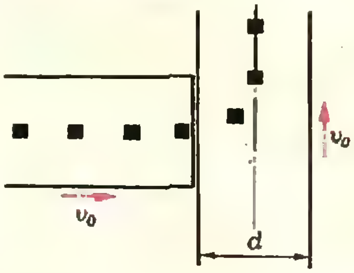


Рис. 1.

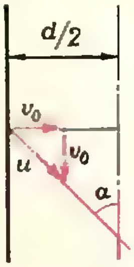


Рис. 2.

$$\frac{d}{2\sin\alpha}\mu mg = \frac{mu^2}{2} = mv_0^2. \qquad (1)$$

Если лента транспортера *II* движется со скоростью nv_0, то скорость детали, попадающей на транспортер, равна $u_1 = \sqrt{v_x^2 + n^2v_0^2}$, где v_x — скорость, с которой движется лента транспортера *I*. Угол, который составляет вектор $\vec{u}_1$ со стороной ленты транспортера, равен $\alpha_1 = \arcsin\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + n^2v_0^2}}$. Условие остановки детали на середине ленты —

$$\frac{d}{2\sin\alpha_1}\mu mg = \frac{mu_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + n^2v_0^2). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим:

$$v_x = v_0\sqrt{\sqrt{\frac{n^4}{4} + 2} - \frac{n^2}{2}}$$

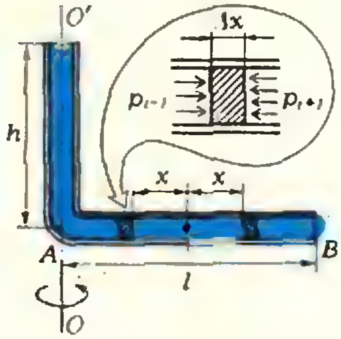
А. Омельянчук

◆

Ф699. *Изогнутый капилляр радиуса r, полностью заполненный жидкостью, вращается вокруг вертикальной оси OO′. При какой угловой*

При вращении капилляра мениск в вертикальном колене становится вогнутым, а в горизонтальном — выпуклым. Предельные формы менисков (когда вода еще не выливается) — полусферы. В этот момент давление в точке *B* (см. рисунок) равно $p_B = 2\sigma/r$, а в точке *A* — $p_A = \rho gh - 2\sigma/r$.

скорости вращения жидкость начнет выливаться из капилляра? Плотность жидкости ϱ, поверхностное натяжение σ, жидкость полностью смачивает капилляр; размеры капилляра указаны на рисунке.



Пусть ω — предельная угловая скорость вращения капилляра. Разобьем мысленно горизонтальное колено на N отрезков малой длины $\Delta x = l/N$ ($\Delta x \ll l$). Рассмотрим два малых элемента массы воды $\Delta m = \pi r^2 \varrho \cdot \Delta x$, находящихся на расстояниях x от середины колена (см. рисунок). Запишем уравнения движения этих элементов:

$$\Delta m \cdot \omega^2 \left(\frac{l}{2} - x\right) = (p_{i+1} - p_{i-1}) \pi r^2,$$

$$\Delta m \cdot \omega^2 \left(\frac{l}{2} + x\right) = (p_{q+1} - p_{q-1}) \pi r^2,$$

где p_{i-1} (p_{q-1}) и p_{i+1} (p_{q+1}) — давление на эти элементы соответственно слева и справа. Число таких пар, очевидно, равно $N/2$. Просуммировав все аналогичные уравнения, получим

$$\frac{N}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 l = (p_B - p_A) \pi r^2 \Rightarrow \frac{\varrho \omega^2 l^2}{2} = \frac{4\sigma}{r} - \varrho g h.$$

Отсюда находим ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma/r - 2\rho g h}{\rho l^2}}.$$

А. Буздин

◆

Ф701.*) *На рисунке 1 показано распределение температуры вдоль тонкого однородного теплоизолированного стержня в некоторый момент времени. Как будет меняться распределение температуры в дальнейшем? Какое распределение установится через достаточно долгое время?*

Процесс перераспределения температуры заканчивается выравниванием температуры по всей длине стержня. Поскольку стержень теплоизолирован, его внутренняя энергия останется неизменной. Нетрудно понять, что площадь под кривой распределения температур на любом промежуточном этапе будет оставаться постоянной. Следовательно, температуру t_y стержня, которая установится через достаточно долгое время (рис. 2), можно определить из условия

$$t_y \cdot 90 = 2(200 \cdot 30) + 100 \cdot 30.$$

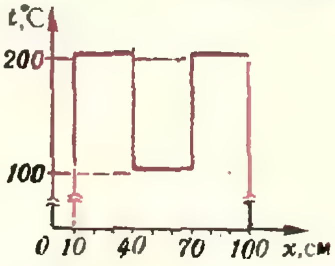


Рис. 1.

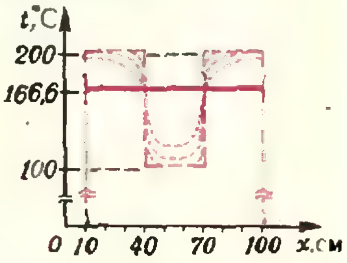


Рис. 2.

Отсюда находим

$$t_y \approx 166{,}6\,°\mathrm{C}.$$

В начале процесса выравнивания температуры наиболее заметные изменения будут на границах между областями с наибольшим различием температур. В средней части стержня (40÷70 см на рисунке 2) температура будет повышаться, приближаясь к 166,6°С, а в боковых частях (10÷40 см и 70÷100 см на рисунке) — понижаться, приближаясь к этой температуре.

О. Савченко

◆

Ф702. *Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых масс m, связанных пружинкой жесткости k, движутся по гладкой горизонтальной поверхности на-*

Через время $t_1 = L/2v_0$ произойдет столкновение масс I и I′. Поскольку соударение абсолютно упругое, сразу после удара скорость каждой из этих масс останется прежней по абсолютной величине, но поменяет направление на противоположное, а скорости масс II и II′ не изменятся (рис. 2). Следовательно, сразу после соударения в каждой системе

---

*) Решение задачи Ф700 — в заметке С. Кротова «От теореме единственности в электростатике» (с. 32).

встречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями v_0. В некоторый момент времени расстояние между системами равно L (рис. 1). Определить время, через которое расстояние между теми же массами снова будет равно L. Столкновение систем считать абсолютно упругим.

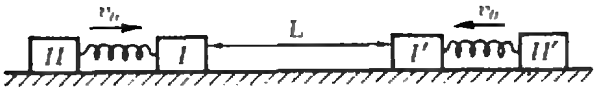


Рис. 1.

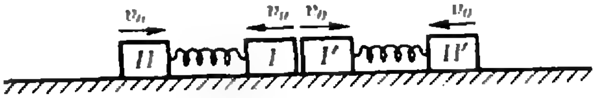


Рис. 2.

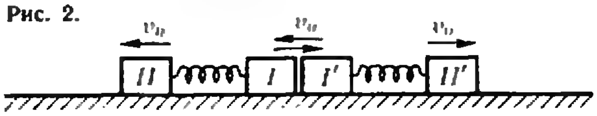


Рис. 3.

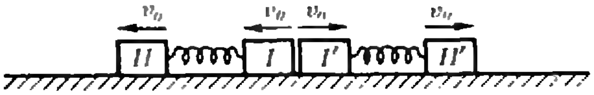


Рис. 4.

начнутся гармонические колебания. Взаимные колебания двух одинаковых масс, связанных пружинкой с жесткостью k, эквивалентны колебаниям каждой массы на пружинке в два раза меньшей длины, то есть имеющей жесткость $2k$. Период колебаний в каждой системе будет равен $T=2\pi\sqrt{m/2k}$. Через время $t_2=T/2=\pi\sqrt{m/2k}$ массы окажутся вновь в положении равновесия. При этом скорости масс I и I′ будут равны v_0 и направлены навстречу друг другу, а скорости масс II и II′ будут иметь противоположные направления (рис. 3). Произойдет упругое столкновение масс I и I′. Сразу после столкновения массы в каждой системе будут иметь равные по величине v_0 и одинаково направленные скорости (рис. 4). С этого момента системы начнут удаляться друг от друга. Через время $t_3=L/2v_0$ расстояние между массами I и I′ будет равно L.

Итак, время, через которое взаимное расположение систем будет вновь таким, как на рисунке 1, равно

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{L}{v_0}+2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

В. Можаев

С. Кротов

О теореме единственности в электростатике

Напомним некоторые условия, которые выполняются при равновесном распределении зарядов в проводнике. Наличие практически неограниченного числа свободных носителей тока (электронов) приводит к тому, что электрическое поле в толще проводника отсутствует (иначе не прекратилось бы перетекание зарядов внутри проводника). Проводник, таким образом, образует область постоянного значения потенциала. Линии электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, в частности — внешней поверхности проводника. Еще одним фактом, справедливым для проводников любой формы, является то, что весь сообщенный проводнику заряд располагается на его поверхности (в противном случае внутри проводника существовало бы поле).

Теперь рассмотрим проводник, которому сообщили положительный заряд Q. Уместно поставить вопрос: *единственным ли образом весь этот заряд сможет растечься по поверхности проводника?* Ответ на этот вопрос составляет содержание так называемой теоремы единственности в электростатике, обсуждению которой и посвящена данная заметка.

Предположим, что заряд Q может растечься по проводнику двумя способами, то есть существуют два различных распределения заряда Q на поверхности проводника. Будем обозначать эти распределения P_1 и P_2. Очевидно, что если этому же проводнику (незаряженному) сообщить отрицательный заряд $-Q$, то среди его равновесных распределений по поверхности проводника будут распределения P_1' и P_2', которые отличаются от P_1 и P_2 лишь тем, что знаки соответствующих зарядов в данном месте поверхности изменены на противоположные. Действительно, силами взаимодействия в конфигурации P_1 (P_2) являются силы взаимного отталкивания зарядов, «сидящих» на поверхности. Изменение знаков всех зарядов оставляет эти силы неизменными, поэтому каждый элементарный поверхностный заряд будет в равновесии; при этом электрическое поле в каждой точке пространства вне проводника лишь изменит направление на противоположное. Таким образом, конфигурация P_1' (P_2') также будет равновесной.

Рассмотрим далее такую ситуацию. Сообщенный проводнику заряд Q принял распределение P_1. «Заморозив» это распределение, поместим на проводник заряд $-Q$ так, чтобы он принял распределение P_2'. Если теперь суммарный заряд проводника (равный нулю) предоставить самому себе, то, согласно принципу суперпозиции, система будет находиться в равновесии и никакого перетекания заряда по поверхности проводника не произойдет. Итак, общий заряд проводника оказался равным нулю; при этом на поверхности проводника обязательно найдутся разноименно заряженные области: A_1, заряженная положительно, и B_1, заряженная отрицательно. Рассмотрим силовую линию, выходящую из области A_1. Поскольку проводник уединенный, то эта силовая линия либо кончается на нем, либо уходит на бесконечность. В первом случае точки начала и конца силовой линии (принадлежащие проводнику) должны иметь разные потенциалы (почему?), чего не может быть. Остается второй случай. Аналогично, рассмотрев одну из силовых линий, приходящих к проводнику в области B_1, мы придем к выводу, что она пришла из бесконечности. Мы считаем, что бесконечность имеет фиксированный потенциал; но тогда потенциал области A_1 выше потенциала бесконечности, а потенциал бесконечности выше потенциала области B_1, то есть различные области проводника имеют разные потенциалы. Но это противоречит условию равновесия зарядов на поверхности проводника.

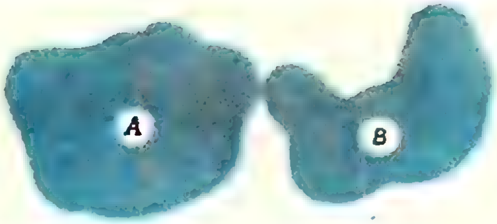
Итак, предположение о возможности двух различных равновесных распределений заряда было неверным. *Заряд на проводнике может распределиться единственным образом.* Если в конкретной задаче нам удалось угадать равновесное расположение зарядов, то это и будет ответ.

Рассмотрим в свете сказанного решение задачи Ф700. Напомним ее условие:

Ф700. *Имеются два проводника A и B произвольной формы. Первоначально на проводнике A имеется заряд Q, а проводник B не заряжен. Проводники приводят в соприкосновение (см. рисунок), и на проводник B перетекает заряд q. Соприкасающимся проводникам сообщают дополнительно некоторый заряд q_x, и в результате на проводнике A оказывается заряд q. Определить заряд q_x.*

Два соприкасающихся проводника A и B представляют собой уединенный проводник $(A+B)$. Заряд, сообщенный этому проводнику, равен Q. Рассмотрим малый элемент Δs поверхности проводника, на котором в результате равновесного распределения заряда Q по поверхности проводника $(A+B)$ установилась плотность заряда σ. Если бы проводнику $(A+B)$ (незаряженному) сообщили заряд Q', то установившаяся плотность заряда σ' на Δs удовлетворяла бы следующему соотношению:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{Q'}{Q}.$$



Действительно, сила, действующая на заряженный элемент Δs поверхности проводника $(A+B)$ со стороны других заряженных областей поверхности, определяется как сумма сил взаимодействия данного элемента поверхности со всеми остальными. Поскольку пространственное расположение проводников осталось неизменным (это важный момент), взаимные расстояния между элементарными зарядами (зарядами отдельных элементов поверхности $(A+B)$) также остались неизменными, а изменились лишь величины самих взаимодействующих зарядов. Поэтому каждая из сил попарного взаимодействия элементарных зарядов изменилась в одно и то же число раз — в $(Q'/Q)^2$ раз. Таким образом, каждая элементарная область поверхности по-прежнему будет находиться в равновесии.

Из приведенных рассуждений следует, что, какой бы заряд ни сообщался контактирующим проводникам A и B (проводнику $(A+B)$), отношение заряда q_A, распределяющемуся на проводнике A, к заряду q_B, распределяющемуся на проводнике B, остается неизменным (разумеется, при неизменном взаимном расположении контактирующих проводников).

Первоначально, когда на проводнике $(A+B)$ распределен заряд Q,

$$\frac{q_A}{q_B}=\frac{Q-q}{q}. \qquad (1)$$

При сообщении проводнику $(A+B)$ дополнительного заряда q_x

$$\frac{q_A}{q_B}=\frac{q}{Q+q_x-q}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим q_x:

$$q_x=Q\frac{2q-Q}{Q-q}.$$

Задачи республиканских олимпиад

Накануне математических олимпиад, которые будут проходить в большинстве союзных республик в дни весенних каникул, мы предлагаем нашим читателям познакомиться с некоторыми задачами, предлагавшимися на республиканских олимпиадах в прошлом году.

1. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в белый цвет, остальные — в красный. Назовем клетку особенной, если ее цвет отличен от цвета хотя бы одной из восьми окружающих ее клеток. Докажите, что всегда найдется хотя бы 9 особенных клеток.

2. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox, на которых выполняется неравенство

$$|x^2+px+q|<2,$$

не превосходит 4.

3. Всюду определенная функция f при любых x и y удовлетворяет соотношению $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$, причем $f(1)=2$. Найдите:

а) $f(m)$ для произвольного целого m;

б) $f\left(\frac{m}{n}\right)$ для произвольного рационального числа $\frac{m}{n}$.

4. На прямой даны точки A, B и C, причем B лежит между A и C. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, построены полуокружности, лежащие по одну сторону от этой прямой. Перпендикуляр к (AC), проведенный через точку B, пересекает большую полуокружность в точке D.

а) Докажите, что общая касательная двух меньших полуокружностей, отличная от (BD), параллельна касательной к большей полуокружности, проведенной через точку D.

б) Докажите, что точки B, D и точки касания меньших полуокружностей с их общей касательной являются вершинами прямоугольника.

5*. Учитель написал на доске многочлен степени 3. Один из учеников прибавил к этому многочлену его производную, либо вычел ее — по своему желанию. Полученный многочлен он написал на листке бумаги и передал его другому ученику. Тот ученик проделал с новым многочленом — опять-таки, по своему усмотрению, — одну из указанных выше двух операций (прибавление или вычитание производной) и листок с результатом передал следующему ученику, и так далее.

Через некоторое время у одного из учеников получился тот же самый многочлен, который был написан учителем не доске. Докажите, что хотя бы один из учеников ошибся.

6. По трем веткам дерева — по трем некомпланарным лучам с общим началом O — ползут три жука, A, B и C. В каждый момент времени расстояния от жуков до точки O удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{|OB|}-\frac{1}{|OA|}=1,$$
$$\frac{1}{|OC|}-\frac{1}{|OB|}=1.$$

Докажите, что существует прямая l такая, что плоскость (ABC) в любой момент времени проходит через l.

7. На двух одинаковых бумажных кругах художник нарисовал двух совершенно одинаковых драконов. На одном рисунке глаз дракона совпал с центром круга, а на втором не совпал. Докажите, что второй круг можно разрезать на части так, что из них можно сложить тот же круг с тем же драконом, у которого глаз находится в центре круга.

8. Внутри данного угла расположены две точки A и B. Постройте параллелограмм, у которого две противоположные вершины совпадают с A и B, а две другие лежат на сторонах данного угла.

9. Найти длину стороны наименьшего квадрата, в котором можно поместить без наложений три круга радиусов 1, $\sqrt{2}$, 2.

10. Докажите, что множество чисел 1,2,3,...,1413, 1414 можно разбить на группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 1981.

11. По трем параллельным дорожкам с постоянными скоростями бегут спортсмены A, B, C. В некоторый момент времени площадь треугольника ABC равнялась 2 м², а через 5 секунд стала равной 3 м². Как изменится эта площадь еще через 5 секунд?

12. Доказать, что для произвольных n различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}>$$
$$\geqslant\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}.$$

13. Докажите, что если для всех $x\in\,]-1;\,1[$ выполняется неравенство

$$|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ldots+$$
$$+a_n\sin b_nx|<|\sin x|,$$

то

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|<1.$$

14. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(19)=P(81)=1981$, а $P(1981)$ равняется 19 или 81?

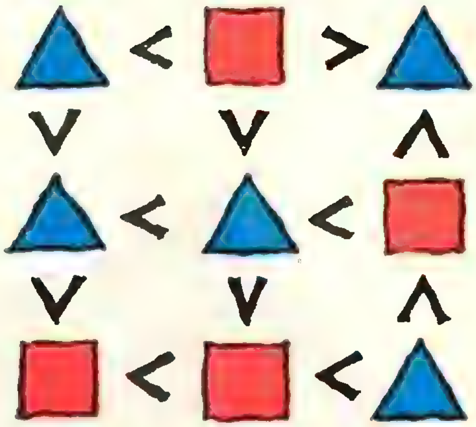
15. Докажите, что если выражение

$$2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+$$
$$+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+$$
$$+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$$

привести к общему знаменателю, то его числитель будет делиться на 13.

Квант для младших школьников

Задачи

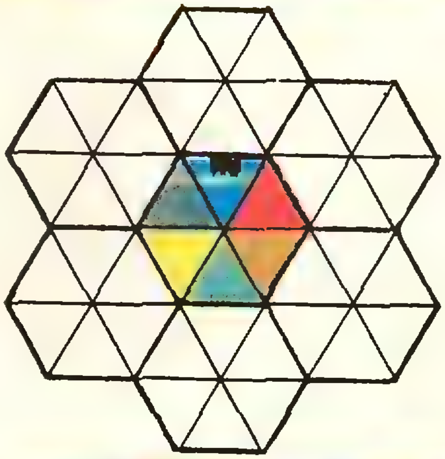


1. В треугольники и квадраты, изображенные на рисунке, впишите первые девять натуральных чисел, причем в треугольники — нечетные числа, в квадраты — четные числа так, чтобы все двенадцать соотношений «больше-меньше» были верными.

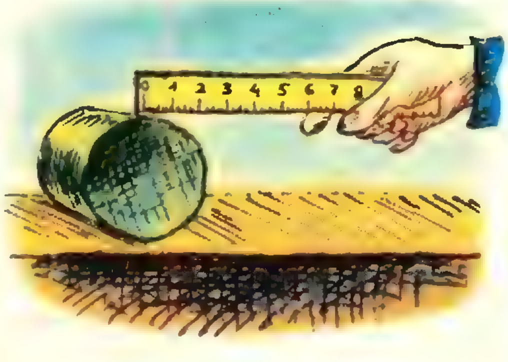
2. Можно ли из двенадцати одинаковых брусков с квадратным сечением сделать каркас куба?

3. При стрельбе по мишени спортсмен несколько раз попал в десятку, столько же раз выбил по 8 очков и несколько раз попал в пятерку. Всего он набрал 99 очков. Сколько выстрелов сделал спортсмен?

4. На доске написано несколько ненулевых чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано?



5. Из семи правильных шестиугольников один раскрашен шестью красками (см. рисунок). Раскрасьте остальные шестиугольники теми же красками так, чтобы в «цветке», изображенном на рисунке, все треугольные участки, граничащие по сторонам шестиугольников, были окрашены одинаково.



6. Двигая горизонтальную линейку, положенную ребром на цилиндр, мы перекатываем (без проскальзывания) цилиндр по столу (см. рисунок). В начальный момент нулевое деление линейки находилось над точкой касания цилиндра и стола. Где будет нулевое деление линейки после того, как цилиндр прокатится на 5 см?

Эти задачи нам предложили
Н. Авилов, С. Дворянинов, Л. Купцов, А. Савин, А. Халамайзер, А. Швецов.

Ф. Бартенев, А. Савин

Метод перебора

Рассказывают, что однажды племянник Шерлока Холмса Джек обратился к своему знаменитому дяде с просьбой помочь в решении следующей задачи*): *Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп. Сколько купили книг, если цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше, чем альбомов?*

Прочтя условия, знаменитый сыщик прошел от стола к окну, затем вернулся к столу, постоял около него, уставившись в потолок, и, наконец, сказал: «Книг было куплено 8 штук».

«Как вы это установили?» — в один голос воскликнули Джек и присутствовавший при этом мистер Уотсон.

«О, это было совсем просто! — ответил Шерлок Холмс, усаживаясь в кресло.— Посмотрев на слова «книг купили на 6 больше, чем альбомов», и тут же понял, что книг купили не меньше 7. Из того, что «цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома», я сделал вывод, что каждая книга стоит больше 1 рубля, а поскольку за них заплачено 10 руб. 56 коп., книг купили не больше 10. Таким образом, все числа, большие 10, и все числа, меньшие 7, оказались вне подозрений. Проверив каждое из чисел 7, 8, 9, 10, я установил, что искомое число может быть только 8: остальные не делят 1056».

Метод перебора, которым воспользовался здесь Шерлок Холмс, видимо, является древнейшим из методов решения задач. Долгое время его относили к методам «второго сорта», «переборные» решения считались некрасивыми. Однако в последние годы метод перебора применяется все чаще и чаще в задачах, где искомая величина принимает только целочисленные значения.

---

*) В такой формулировке задача в действительности давалась на приемных экзаменах по математике на физическом факультете МГУ (1968 г.).

Перебор ведет ЭВМ

Известно много серьезных задач, которые математики не могут решать иначе, чем методом перебора. Правда, при этом перебор производит электронная вычислительная машина, а математик лишь инструктирует ее, как этот перебор нужно сделать. Известный американский математик С. Голомб пишет по этому поводу*): «В отличие от человека машина, решая задачи, производит однообразные вычисления, которые кажутся нам столь скучными, с невообразимой быстротой. Но вместе с тем она не заметит способа упростить или улучшить решение, если этот способ не будет заранее учтен программистом, составляющим детальные инструкции для работы ЭВМ».

Тем не менее в последние годы рост быстродействия и объема памяти компьютеров, их большая доступность и дешевизна позволяют все чаще использовать их для решения переборных задач. Так, знаменитая «задача о четырех красках» (*Всякую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны одинакового цвета не имели общих участков границы?*) была решена — очень хитрым перебором — лишь при помощи ЭВМ. Недавно одна из наиболее известных задач о полимино из книги С. Голомба тоже была решена методом перебора с участием компьютера.

Турист укладывает рюкзак

К числу задач, решаемых методом перебора, относится так называемая «задача об укладке рюкзака»: *Уложить в рюкзак предметы из заданного набора так, чтобы их суммарная масса была наибольшей (и суммарный объем не превосходил объема рюкзака).*

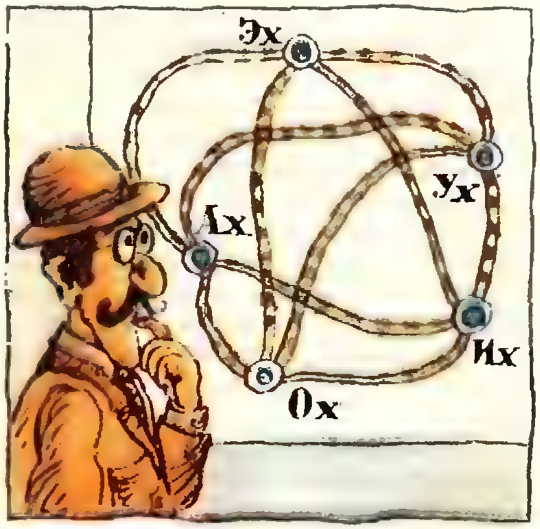
В такой постановке задача выглядит игрушечной, но замените «рюкзак» на «отсек в трюме теплохода» и вы поймете, что эта задача имеет существенное народнохозяйственное значение.

Упражнение 1. Решите задачу об укладке рюкзака для рюкзака объемом 100 дм^3 и предметов, указанных в таблице.

Предмет	Вес	Объем
Палатка	20	60
Спальн. мешок	5	55
Одеяло	8	32
Радиоприемник	2	20
Кулек с едой	10	8
Мяч	0,5	10
Топор	3	2

Коммивояжер отправляется в путь

Другой широко известной задачей, решаемой перебором вариантов, является «задача коммивояжера»*): *Как объехать несколько городов, между каждыми двумя из которых имеется железнодорожное сообщение, затратив как можно меньше времени, если задан город, в котором начинается и кончается путь?*



Уже для 5 городов количество вариантов равно 24, для 6 городов их 120, для семи — 720, для десяти — 362880. Чтобы избежать полного перебора, математики придумали различные ухищрения**). Делается это не зря — решение подобной задачи необходимо для нахождения наилучшего маршрута для фургона, развозящего журналы и газеты по киоскам, автобуса, подбирающего сельских жителей на работу, и т. п.

---

*) С. В. Голомб. «Полимино» (М., «Мир», 1975).

*) Коммивояжер — путешествующий представитель торговой фирмы.

**) См., например, «Квант», 1978, № 6, с. 11.

Упражнение 2. На рисунке показана карта местности, на которой расположены 5 городов: Ах, Ох, Эх, Ух и Их, а в таблице указаны расстояния между ними по железной дороге. Найдите кратчайший путь коммивояжера, который должен выехать из города Ух, объехать остальные города и вернуться в Ух.

	Ах	Их	Ох	Ух	Эх
Ах	0	60	40	50	20
Их	60	0	30	35	45
Ох	40	30	0	55	50
Ух	50	35	55	0	20
Эх	20	45	50	20	0

Сократим перебор

Для решения подобных задач были созданы сложные методы, сокращающие перебор вариантов. Они составляют новую математическую науку, которая носит название «целочисленное программирование».

Некоторое представление о возможностях сокращения перебора может дать решение такой задачи: *Известно, что* $\sqrt[3]{****3}$ *есть натуральное число. Найдите его.*

Первое, что приходит в голову, — это перебирать пятизначные числа, оканчивающиеся на 3, и смотреть, нет ли среди них точных кубов: 10003, 10013, 10023,... Но когда еще мы доберемся до 99993, да и как узнать, является данное число кубом или нет?

Лучше будем возводить число в куб и посмотрим, какие из них будут пятизначными и оканчивающимися на 3. Получим $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$, $10^3=1000$.

Так дело тоже не пойдет. Зачем нам нужны кубы маленьких чисел? Посмотрим, чему равно наименьшее число x, куб которого является пятизначным числом. Оно не меньше чем $\sqrt[3]{10000}=10\sqrt[3]{10}$, но $\sqrt[3]{10}$ больше 2, так как $2^3=8$; поэтому x больше 20. Оценим искомое число сверху, то есть посмотрим, какого числа оно не может превышать. Такое число, очевидно, равно $\sqrt[3]{100\,000}=10\sqrt[3]{100}$. Но $\sqrt[3]{100}$ меньше 5, так как $5^3=125$. Значит, нужно перебирать числа от 21 до 49.

Посмотрим, не поможет ли нам сократить перебор то, что число под радикалом оканчивается на 3. Изучим выписанные нами кубы первых десяти натуральных чисел. Из них на 3 оканчивается лишь 7. Если теперь немножко подумать, то нетрудно сообразить, что куб натурального числа будет оканчиваться на 3 в том и только в том случае, если само число оканчивается на 7.

Теперь нам осталось для перебора лишь три числа: 27, 37 и 47. $27^3=19683$, $37^3=50653$, $47^3=103823$, но последнее число уже шестизначное, поэтому остаются лишь числа 27 и 37.

Упражнения

3. В составлении 40 задач (для школьников) приняло участие 30 студентов (пединститута) со всех пяти курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые студенты разных курсов придумали разное число задач. Сколько студентов придумало по одной задаче?

4. Сколькими нулями может оканчиваться число 9^n+1?

5. В буфете продавались пирожки по 5 коп., бублики по 6 коп., булки по 7 коп., слойки по 8 коп., и коржики по 10 коп. Группа ребят купила на рубль 14 изделий разных видов. Если взять по одному представителю каждого купленного вида, то их суммарная цена будет равна 21 коп. Сколько и каких изделий было куплено, если дополнительно известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено поровну?

6. Найдите два целых положительных числа, разность между квадратами которых равна 455.

7. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

В. Скороваров

Переменный электрический ток

Переменный ток широко используется в промышленности (на заводах и фабриках) и в обычной осветительной сети.

Известно, что для постоянного тока выполняется закон Ома — сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна приложенному напряжению. В цепях переменного тока сила тока также зависит от напряжения источника, но уже по более сложному закону, поскольку и напряжение и ток с течением времени изменяются. Закон изменения напряжения может быть сколь угодно сложным, но наибольшее распространение и практическое применение получили источники, напряжение которых изменяется по гармоническому закону. Например, по такому:

$$u=U_{\text{м}}\cos\omega t,$$

где $U_{\text{м}}$ — амплитуда напряжения, ω — циклическая частота, $\omega t=\varphi$ — фаза колебаний. Заметим, что в нашей стране на всей ее территории принята частота $\nu=\omega/2\pi=50$ Гц.

Электрическая цепь переменного тока состоит из источника тока и различных элементов таких, как лампы накаливания, электронагревательные приборы, конденсаторы, катушки, электродвигатели, трансформаторы.

Основной задачей изучения переменного тока является расчет электрических цепей, то есть определение силы тока при заданном напряжении источника тока и заданных параметрах элементов цепи.

В общем случае ток в цепи, как и напряжение источника, изменяется со временем по гармоническому закону

$$i=I_{\text{м}}\cos(\omega t+\varphi).$$

Амплитуда тока $I_{\text{м}}$ и сдвиг фаз φ между током и напряжением зависят от параметров данной цепи.

Рассмотрим сначала простейшие электрические цепи, состоящие из источника и одного элемента — активного сопротивления, конденсатора или катушки. При подключении к источнику активного сопротивления в цепи возникает переменный ток, амплитуда которого равна амплитуде напряжения, деленной на активное сопротивление: $I_{R\text{м}}=U_{\text{м}}/R$, а фаза совпадает с фазой напряжения. В цепи с конденсатором ток по фазе опережает напряжение на $\pi/2$, а амплитуда тока $I_{C\text{м}}=U_{\text{м}}\omega C$, где C — емкость конденсатора. Ток, возникающий в катушке с индуктивностью L, отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$, а его амплитуда $I_{L\text{м}}=U_{\text{м}}/(\omega L)$.

Расчет электрических цепей удобно вести с помощью векторных диаграмм токов и напряжений. Построим векторные диаграммы для рассмотренных простейших случаев (рис. 1). Начнем с известного вектора напряжения $\vec{U}_{\text{м}}$ и расположим его горизонтально. Поскольку ток через активное сопротивление совпадает по фазе с напряжением, вектор тока $\vec{I}_{R\text{м}}$ направим так же, как и вектор $\vec{U}_{\text{м}}$. Ток в цепи с конденсатором опережает напряжение по фазе на четверть периода; следовательно, вектор тока $\vec{I}_{C\text{м}}$ следует направить вертикально вверх. Наконец, ток в катушке отстает от напряжения на

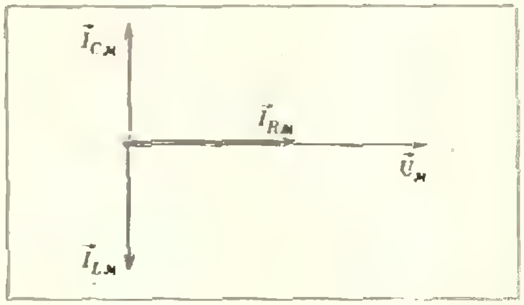


Рис. 1.

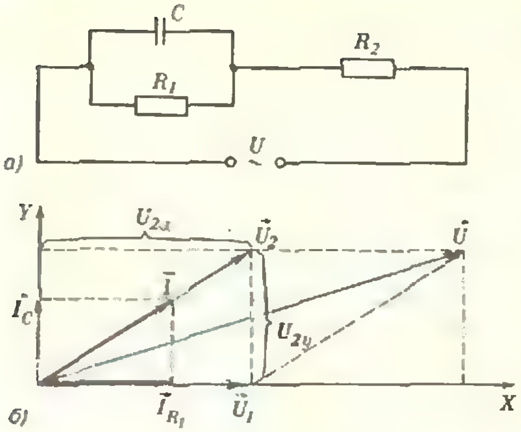


Рис. 2.

$\pi/2$, поэтому вектор тока $\vec{I}_{L_м}$ должен быть направлен вертикально вниз.

Заметим, что все соотношения, полученные для амплитуд токов и напряжений, справедливы и для их действующих значений. Векторные диаграммы можно также строить, используя действующие значения токов и напряжений.

Теперь разберем такую задачу:

Задача 1. *Определите силу тока в цепи, изображенной на рисунке 2, а. Параметры элементов цепи и напряжение источника питания считайте заданными.*

Сначала рассмотрим участок цепи, содержащий параллельно соединенные резистор сопротивлением R_1 и конденсатор емкостью C. Построим для него векторную диаграмму, считая напряжение $\vec{U}_1$ на этом участке известным (рис. 2, б). Получим, что ток в цепи равен сумме токов через первый резистор и конденсатор:

$$\vec{I}=\vec{I}_{R_1}+\vec{I}_C.$$

Амплитуда этого тока равна

$$I=\sqrt{I_{R1}^2+I_C^2}=\sqrt{\left(\frac{U_1}{R_1}\right)^2+(U_1\omega C)^2}=$$
$$=U_1\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+(\omega C)^2}. \qquad (1)$$

Такой же ток протекает и через резистор сопротивлением R_2, поэтому напряжение на нем равно

$$U_2=IR_2.$$

Очевидно, что векторная сумма $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ равна напряжению $\vec{U}$ на зажимах источника:

$$\vec{U}_1+\vec{U}_2=\vec{U}.$$

Спроектируем вектор $\vec{U}_2$ на оси координат X и Y и найдем

$$U_{2x}=U_1\frac{R_1}{R_2}, \quad U_{2y}=U_1R_1\omega C.$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U^2=(U_1+U_{2x})^2+U_{2y}^2,$$

или

$$U=U_1\sqrt{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2+(R_1\omega C)^2}. \qquad (2)$$

Окончательно из равенств (1) и (2) получим

$$I=U\sqrt{\frac{1+(R_1\omega C)^2}{(R_1+R_2)^2+(R_1R_2\omega C)^2}}.$$

* * *

Большое практическое значение имеет мощность, выделяющаяся в электрических цепях. В случае постоянного тока для любого участка цепи мощность определяется произведением напряжения на силу тока. Мощность переменного тока зависит от действующих значений тока и напряжения, а также от сдвига фаз между током и напряжением на этом участке:

$$P=UI\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ — коэффициент мощности.

Как известно, для того чтобы получить максимальную мощность от источника постоянного тока, к нему нужно подключить нагрузку, сопротивление которой равно внутреннему сопротивлению источника. Источник переменного тока тоже обладает внутренним сопротивлением, причем оно носит не только активный, но и индуктивный характер. Интересно знать, какую же нагрузку нужно подключить, чтобы получить максимальную активную мощность в цепи переменного тока. Ответ на этот вопрос дает следующая задача:

Задача 2. *Какими должны быть параметры нагрузки для того, чтобы мощность, потребляемая нагрузкой, была максимальной? Активное сопротивление источника R, его индуктивность L.*

Поскольку мощность, выделяемая на нагрузке, зависит от сдвига фаз между током и напряжением, естественно предположить, что последовательно с активным сопротивлением нагрузки должен быть включен конденсатор (чтобы скомпенсировать сдвиг фаз, создаваемый индуктивностью источника).

Обозначим через $\mathscr{E}$ электродвижущую силу источника, через $R_{\text{н}}$ — активное сопротивление нагрузки и через C — емкость конденсатора. Тогда в цепи будет течь ток

$$I=\frac{\mathscr{E}}{\sqrt{(R_{\text{н}}+R)^2+(\omega L-1/\omega C)^2}},$$

и на нагрузке будет выделяться активная мощность

$$P=U_{\text{н}}I\cos\varphi=I^2R_{\text{н}}=$$
$$=\frac{\mathscr{E}^2R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}}+R)^2+(\omega L-1/\omega C)^2}.$$

Очевидно, что при любом значении $R_{\text{н}}$ мощность будет наибольшей, если выполняется равенство

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0.$$

Значит, емкость конденсатора должна быть равна

$$C=\frac{1}{\omega^2L}.$$

При этом мощность равна

$$P=\frac{\mathscr{E}^2R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}}+R)^2}.$$

Чтобы найти максимум мощности в зависимости от сопротивления $R_{\text{н}}$, приравняем к нулю производную от P по $R_{\text{н}}$:

$$P'(R_{\text{н}})=\frac{\mathscr{E}^2((R_{\text{н}}+R)^2-2R_{\text{н}}(R_{\text{н}}+R))}{(R_{\text{н}}+R)^4}=0.$$

Отсюда

$$R_{\text{н}}=R, \quad \text{и} \quad P_{\max}=\frac{\mathscr{E}^2}{4R}.$$

Заметим, что мы получили точно такие же соотношения, что и для постоянного тока.

* * *

Особое место в цепях переменного тока занимает трансформатор. Это — устройство, которое передает электрическую энергию из одной цепи в другую и при этом преобразовывает величины токов и напряжений. Отсюда и происходит название «трансформатор», то есть «преобразователь». Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции, так что он может работать только на переменном токе.

Трансформатор состоит из замкнутого ферромагнитного сердечника, на который намотаны две (иногда и больше) катушки из медной проволоки. Катушки часто называют обмотками трансформатора. Одна из них, первичная, подключается к источнику, другая, вторичная, — к нагрузке. (Впрочем, такое разделение обмоток является условным, потому что в зависимости от режима работы подключение может быть и противоположным.) Катушки могут быть намотаны на сердечник двояко: в одну сторону или в разные стороны. В зависимости от этого напряжения на обмотках будут изменяться в одинаковых или в противоположных фазах. Для определенности условились различать начало и конец обмотки и считать, что в любой момент времени напряжения между началом и концом каждой обмотки имеют одинаковую полярность. На рисунках и чертежах начало обмотки обычно отмечают звездочкой.

Расчет электрической цепи с реальным трансформатором представляет большие трудности. Для упрощения рассмотрим так называемый идеальный трансформатор. (Заметим, что результаты расчетов идеального и реального трансформаторов практически совпадают.) Во-первых, будем считать, что обмотки не имеют активного сопротивления, поэтому падения напряжения в них равны нулю, и выполняется равенство

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2}=\frac{n_1}{n_2}=K.$$

Здесь U_1 и U_2 — напряжения, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — ЭДС индукции, n_1 и n_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках соответственно; $K=n_1/n_2$ — коэффициент трансформации. Во-вторых, не будем учитывать потерь энергии на выделение тепла не только в обмотках, но и в сердечнике трансформатора. А это означает, что мощность, которая поступает в первичную обмотку, равна мощности, которая уходит из вторичной обмотки в нагрузку, или, другими словами, сумма поступающей и уходящей мощностей равна нулю:

$$U_1I_1+U_2I_2=0,$$

где I_1 и I_2 — токи в первичной и вторичной обмотках соответственно.

Из двух равенств получаем

$$I_1n_1+I_2n_2=0.$$

Важность этой простой формулы поясняет следующая задача:

Задача 3. *Трансформатор, имеющий число витков в первичной обмотке n_1, и во вторичной n_2, подключен к источнику переменного тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $R_в$. Нагрузка с сопротивлением $R_н$ подключена так, как показано на рисунке 3. Определите напряжение на нагрузке.*

Обозначим через U_1 и U_2, I_1 и I_2 действующие значения напряжений и токов в первичной и вторичной обмотках соответственно, а через I_0 — действующее значение тока в источнике. Пусть в некоторый момент времени токи направлены так, как изображено на рисунке 3. Тогда

$$I_0R_в=\mathscr{E}-U_1,\ I_2R_н=U_1-U_2,$$
$$I_0=I_1+I_2,\ \frac{U_1}{U_2}=\frac{n_1}{n_2},\ I_1n_1+I_2n_2=0.$$

Первые три равенства ничем не отличаются от аналогичных равенств для цепей постоянного тока и записаны с учетом правила знаков для ЭДС, токов и падений напряжения. Знаки напряжений на обмотках выбираются в зависимости от положения начала и конца обмотки. Условились напряжение считать положительным, если при обходе соответствующего контура сначала встречается конец обмотки. Так, если контуры первичной и вторичной цепей данного трансформатора обходить, например, по часовой стрелке, то напряжения U_1 в первом и U_2 во втором уравнениях действительно должны быть записаны со знаком «минус». В четвертом уравнении знаки U_1 и U_2 берутся всегда положительными. Знаки токов в обмотках в пятом уравнении выбираются так: ток считается положительным, если он направлен от начала обмотки к ее концу, и отрицательным — в противоположном случае.

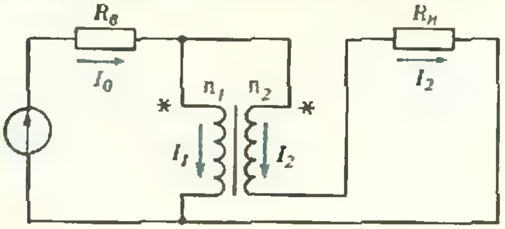


Рис. 3.

Объединив все пять уравнений в систему и решив ее, найдем ток I_2, а значит, и напряжение на нагрузке:

$$U_н=I_2R_н=\mathscr{E}\,\frac{R_нn_1(n_1-n_2)}{(n_1-n_2)^2R_в+R_нn_1^2}.$$

Упражнения

1. Определите силу тока в цепи, показанной на рисунке 4. Напряжение источника питания и параметры элементов цепи считайте заданными.

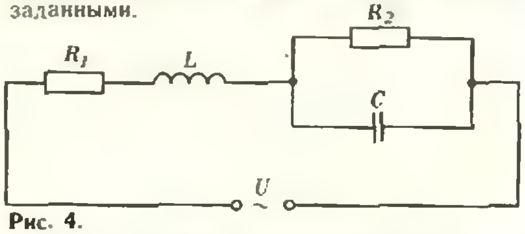


Рис. 4.

2. Цепь, состоящая из двух одинаковых резисторов сопротивлением R, катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, подключена, как показано на рисунке 5, к генератору синусоидального тока переменной частоты. Найдите соотношения между параметрами элементов цепи, при которых цепь будет вести себя как резистор, имеющий только активное сопротивление, на любой частоте

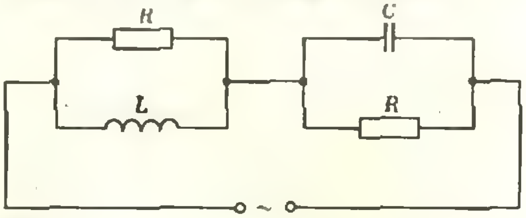


Рис. 5.

3. При передаче электрической энергии на большие расстояния индуктивность линии снижает передаваемые мощности. Считая, что генератор электростанции создает ЭДС $\mathscr{E}$, линия передачи имеет индуктивность L, а напряжение на приемной системе должно быть U, определите максимальную активную мощность, которую можно передать в этом случае.

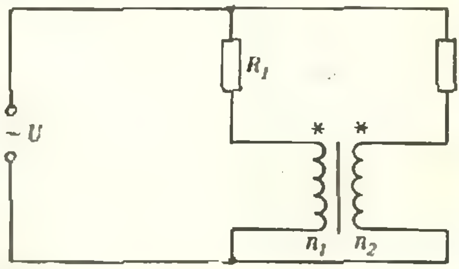


Рис. 6.

4. Трансформатор, имеющий число витков в первичной обмотке n_1, а во вторичной n_2, и два резистора с сопротивлениями R_1 и R_2 подключены к источнику переменного тока с напряжением U так, как показано на рисунке 6. Определите напряжения на обмотках трансформатора и токи через резисторы.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=(x-a)y \\ y^2-xy=9ax. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$(6x-5)|\ln(2x+2{,}3)|=8\ln(2x+2{,}3).$$

3. Решите уравнение

$$\frac{3\cos 5x-2(\cos 6x+\cos 4x)}{3\sin 5x-2(\sin 6x+\sin 4x)}=\operatorname{tg} 17x.$$

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$) с ребром длины a точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра DD_1. Найдите стороны треугольника A_1KL и определите, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

5. Изобразите на плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2y>x^2 \\ y<-2x^2+3x. \end{cases}$$

Докажите, что для всякой такой точки $(x; y)$ выполняется неравенство $x^2+y^2<2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$9^{\lg(x-a)-\lg 2}=3^{\lg(x-1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x+4\sin(x+1)}=\sqrt{4\sin x\cdot\cos 1-\sin 2x}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(3x^2-7x+7)e^x$$

на отрезке $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$) последовательно соединены середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Докажите, что полученная фигура есть правильный шестиугольник и определите его площадь по ребру куба a.

5. Для каких чисел из множества $A=\{1, 2, 3\}$ неравенство

$$2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin z-\cos x\cdot\sin y\cdot\cos z<a$$

выполняется для всех значений x, y, z?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два груза одинаковой массы $M=400$ г связаны невесомой нитью, перекинутой через блок массой $m=100$ г, и находятся на одинаковом расстоянии от блока (рис. 1). На один из грузов кладут перегрузок массой m. С какой скоростью v будет двигаться обод блока, когда расстояние между грузами будет $h=1$ м, если на каждый из грузов массой M действует одинаковая средняя сила сопротивления $F_c=0{,}17$ Н? Считать, что масса блока сосредоточена в его ободе. Силами сопротивления, действующими на блок, нить и перегрузок, пренебречь. Проскальзывание между блоком и нитью отсутствует.

2. Стержень длиной l и массой m одним концом упирается в вертикальную стену, а другой его конец удерживается с помощью нити, длина которой равна длине стержня (рис. 2). При каких углах α стержень будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стеной $\mu=0{,}3$?

3. В двух половинах цилиндра, разделенных поршнем, находятся одинаковые массы M азота при одинаковой температуре. Затем масса азота в одной из половин цилиндра увеличивается на m. На каком расстоянии d от первоначального положения будет находиться поршень после установления равновесия, если температура газа осталась неизменной? Объем каждой половины цилиндра $V=1$ л, сечение цилиндра $S=100$ см², а $m=2M$.

4. Сферическая дождевая капля радиусом $R=2$ мм падает на землю с постоянной скоростью v. На сколько повысится температура капли за время $\tau=10$ с, если все выделяющееся при движении количество теплоты идет на ее нагревание, а сила сопротивления воздуха описывается выражением $F_c=0{,}24\pi R^2v^2$ (в единицах СИ)?

5. Три точечных одноименных и одинаковых по модулю свободных электрических заряда Q находятся в вершинах равностороннего треугольника. Где нужно поместить заряд q, чтобы система из четырех зарядов находилась в равновесии? Определите модуль и знак заряда q. Будет ли равновесие устойчивым?

6. Три воздушных конденсатора емкостью $C_0=1$ мкФ каждый соединены последовательно. Конденсаторы заряжены и отключены от источника. Заряд этой батареи $Q_0=10^{-4}$ Кл. Затем пространство между обкладками одного из конденсаторов полностью заполняют ди-

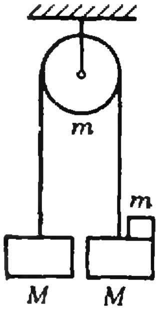


Рис. 1.

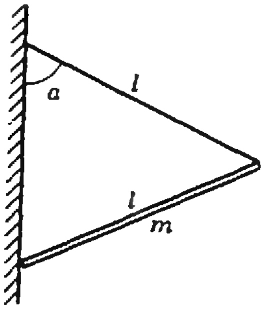


Рис. 2.

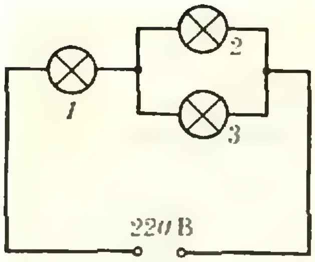


Рис. 3.

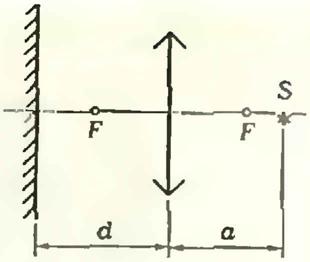


Рис. 4.

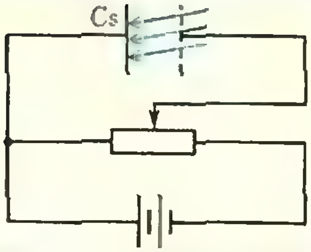


Рис. 5.

электриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Найдите энергию, запасенную в электрическом поле этих конденсаторов, и напряжение на зажимах батареи после заполнения диэлектриком.

7. Три лампочки мощностью $P_1=50$ Вт, $P_2=25$ Вт и $P_3=50$ Вт, рассчитанные на напряжение 110 В каждая, соединены, как показано на рисунке 3, и включены в сеть напряжением 220 В. Определите мощность, выделяемую в каждой лампочке.

8. Рамка площадью $S=20$ см^2, имеющая $n=1000$ витков, вращается с частотой $f=50$ Гц в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции. Какова максимальная ЭДС, индуцируемая в рамке?

9. Точечный источник света S (рис. 4) расположен на расстоянии $a=3/2F$ справа от собирающей линзы на ее главной оптической оси (F — фокусное расстояние линзы). Слева от линзы на расстоянии $d=7/4F$ расположено плоское зеркало, причем главная оптическая ось линзы перпендикулярна его плоскости. Определите расстояние x между действительным и мнимым изображениями источника.

10. Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (то есть напряжения, при котором фототок обращается в нуль) от длины волны света, освещаемого исследуемый материал, производятся по схеме, показанной на рисунке 5. При исследовании цезия были получены следующие результаты: при освещении светом с длиной волны $\lambda_1=0{,}4$ мкм напряжение отсечки составляло $U_1=1{,}19$ В, при $\lambda_2=0{,}5$ мкм — $U_2=0{,}57$ В. Определите красную границу фотоэффекта для цезия и величину постоянной Планка по результатам опыта. Заряд электрона $e=4{,}8\cdot10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

Публикацию подготовили Г. Ефашкин,
В. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\frac{1}{9}x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x+2$.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)-8\sin^2(x-9\pi)=1.$$

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $A(2;-1;1)$, $B(1;3;4)$, $D(6;0;1)$, $A_1(2;0;0)$. Найдите длину диагонали AC_1.

4. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC. Боковая грань SAB перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к основанию под углом α. Найдите угол между плоскостью основания и боковым ребром SC.

5. Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая на 35% больше, чем первая. Вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая все же закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая бригада. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?

Вариант 2

1. Исследуйте функцию

$$y=\frac{1}{3}x^3-x$$

и постройте ее график.

2. Решите неравенство

$$2^{x^2-20x}<\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 4x=\cos^4x-\sin^4x.$$

4. Докажите, что треугольник с вершинами $A(6;-1;2)$, $B(3;2;3)$, $C(3;-5;-1)$ — прямоугольный.

5. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна h.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Камень, брошенный вертикально вверх, упал обратно через $t=2$ с. Определите путь и перемещение камня за $t'=1$ с и за $t=2$ с. Какова средняя скорость камня на всем пути?

2. Шарик, привязанный к нити длиной $l=30$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Когда шарик проходит нижнее положение, нить обрывается, и через $t=1$ с шарик падает на землю на расстоянии $d=9{,}3$ м от оси вращения (по горизонтали). Какова частота вращения шарика на нити?

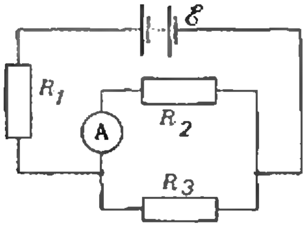
Почему нить оборвалась именно в нижнем положении?

3. С одной и той же высоты h на землю упали два тела одинаковой массы. Удар первого тела был абсолютно неупругим, а второе тело после удара поднялось на высоту 0,2 h. При каком ударе выделилось большее количество теплоты? Во сколько раз?

4. В закрытом сосуде объемом $V=10^{-1}$ м^3 находится некоторое количество воды: При температуре $t=30\,°\mathrm{C}$ вода занимает объем $V_в=10^{-3}$ м^3. Каким стало бы давление в сосуде, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

5. В цилиндре, закрытом невесомым подвижным поршнем, находится $V=1$ м^3 воздуха при нормальных условиях. Какую работу совершит воздух при его нагревании на $\Delta t=1\,°\mathrm{C}$?

6. Сколько керосина было израсходовано в примусе, КПД которого $\eta=32\%$, для того чтобы $V=4$ л воды нагреть от $t_1=10\,°\mathrm{C}$ до $t_2=100\,°\mathrm{C}$ и $k=3\%$ воды обратить в пар? Теплота сгорания керосина $q=4{,}6\cdot10^4$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $\lambda=2{,}26\cdot10^3$ кДж/кг.



7. Батарея аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}=2{,}8$ В включена в цепь, как показано на рисунке. Здесь $R_1=1{,}8$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=3$ Ом и амперметр показывает $I=0{,}48$ А. Определите внутреннее сопротивление батареи. Сопротивлением амперметра можно пренебречь.

8. Сколько ламп накаливания мощностью $P=200$ Вт каждая, рассчитанных на напряжение $U=127$ В, можно установить в помещении, если напряжение на зажимах генератора поддерживается равным $U_0=133$ В, а проводка от генератора до помещения выполнена алюминиевым проводом общей длиной $l=150$ м и сечением $S=15$ мм^2? Какова общая потребляемая мощность? Удельное сопротивление алюминия $\rho=2{,}9\cdot10^{-8}$ Ом · м.

9. На двух столбах на одной и той же высоте $h=3$ м от земли висят два фонаря. Сила света одного из них $I_1=200$ кд. Какова должна быть сила света другого фонаря, чтобы при расстоянии между столбами $l=8$ м освещенность земли посередине между ними была не менее $E=15$ лк?

10. Определите оптическую силу линзы, если известно, что изображение предмета, помещенного перед ней на расстоянии $d=50$ см, мнимое и уменьшенное в [illegible] раза. Какая это линза?

Публикацию подготовили
С. Филонович, М. Чернецов

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найдите предел

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3x^2-4x+1}{1-x}+\frac{\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x})^{-1}-1}\right)^{-2}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt[5]{4^x+8^{\frac{2}{3}(x-2)}-52-2^{2(x-1)}}.$$

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=1+3x^2-x^3$$

на отрезке $[-1;3]$ и постройте график функции на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos^4x-\sin^4x=\sin 4x,$$

лежащие в интервале $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если площадь основания призмы равна S и диагональ призмы образует с боковым ребром призмы угол α.

Вариант 2.

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{x^5+x^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4x^9}}{\sqrt{1-2x^3+x^6}-1}-2^{\log_4(x^3-1)^2-\log_2(x-\sqrt[3]{2})}\right)^{-1}.$$

2. Решите уравнение

$$(3-\lg x)^2\cdot(3+\lg x)^2=(4-\lg^2x)^2-7\lg^2x+50.$$

3. Число 10 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма половины квадрата первого слагаемого и куба второго была наименьшей.

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x\cdot\operatorname{tg}x=\cos x+\sin x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x-5}+\log_\pi 2>0$.

5. В трапеции $ABCD$ углы при большем основании $[AD]$ равны α и β, длина отрезка, соединяющего вершину A с серединой боковой стороны $[CD]$, равна m. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$, если $|AC|=|AD|$.

Физика

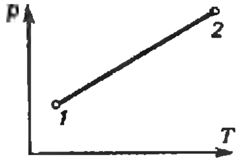
В зависимости от избранного факультета абитуриенты сдавали экзамены по физике либо письменно, либо устно.

Письменный экзамен

Вариант

1. Электромагнитная индукция. Поток магнитной индукции. Электродвижущая сила индукции. Правило Ленца.

2. В результате процесса, изображенного на рисунке в координатах давление p — абсолютная температура T, идеальный газ перешел из состояния 1 в состояние 2. В каком из этих состояний газ занимал больший объем?



3. Изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед тонкой линзой на расстоянии $d=6{,}0$ см, имеет на экране длину $L=1{,}9$ см. Определите фокусное расстояние F линзы.

4. Электрон при ускоренном движении в электростатическом поле пролетает точки 1 и 2, имея скорость, равную $v_1=10^6$ м/с и $v_2=3\cdot10^6$ м/с соответственно. Определите разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между точками 1 и 2. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

5. Человек, стоящий на абсолютно гладкой поверхности льда, бросает камень в горизонтальном направлении с высоты $H=1{,}8$ м. Камень падает на лед на расстоянии $s=9$ м от места бросания. Определите работу A, которую совершает человек при бросании камня. Масса человека $M=60$ кг, масса камня $m=3$ кг.

Задачи устного экзамена

1. Груз массой $m=5$ кг находится на наклонной плоскости, образующей угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом. К грузу приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}2$. Определите модуль F приложенной силы, если груз перемещается равномерно вниз по плоскости.

2. При нормальных физических условиях ($p_0=10^5$ Па, $T_0=273$ К) плотность воздуха $\rho_0=1{,}3$ кг/м^3. На некоторой высоте давление воздуха $p=10^4$ Па, а температура $T=220$ К. Определите плотность воздуха ρ на этой высоте.

3. Первичная обмотка силового трансформатора для накала радиолампы имеет $n_1=2200$ витков и включена в сеть с напряжением $U_1=220$ В. Какое количество витков n_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее активное сопротивление $r=0{,}5$ Ом, а напряжение накала лампы $U_н=3{,}5$ В при силе тока накала $I=1$ А?

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, В. Чудов

Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=8x-x^2$.

2. Найдите экстремумы функции $y=x^3(8-x)$.

3. Решите неравенство

$$\log_2\frac{3-2x}{1-x}>1.$$

4. Решите уравнение

$$1-\cos2x=2\sin x.$$

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=5-x^2$, $y=1$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$ на отрезке $[0;\ 4]$.

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x}<\frac{1}{16}.$$

4. Решите уравнение

$$\sin^3x-\cos^3x=0.$$

5. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол φ с основанием. Определите объем цилиндра.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите $\left(0{,}1224:1{,}2-\frac{2}{5}\right)\cdot0{,}6-0{,}6$.

2. Определите сумму всех четных чисел от 12 до 82 включительно.

3. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

4. Что больше: $\sin 2$ или $\cos 3$?

5. Определите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 24 дм и составляет с основанием угол 60°.

6. Решите уравнение

а) $(0{,}25)^{2-x}=\dfrac{1}{2^{x+3}}$;

б) $\cos x+\sin x=0$.

7. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)<0.$$

8. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1-9n^2}$.

9. Найдите производную функции $y=(2x^3-5)\cdot\operatorname{tg}x$.

Задачи устного экзамена

1. С башни высотой $h=25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0=15$ м/с. Найдите: а) сколько времени камень будет в движении? б) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю? в) с какой скоростью он упадет?

2. На легкий шкив радиусом $R=10$ см намотана нить, к концу которой прикреплен груз. Груз начинает опускаться с ускорением $a=2$ см/с^2. Чему будет равна угловая скорость шкива в тот момент, когда груз опустится на $h=100$ см?

3. В цилиндре дизельного двигателя в начале такта сжатия температура воздуха была $T_1=310$ К. Найдите температуру воздуха в конце такта сжатия, если его объем уменьшился в $a=12$ раз, а давление возросло в $b=36$ раз.

4. Найдите расход бензина автомобиля «Запорожец» на пути $s=1$ км при скорости $v=60$ км/ч. Мощность мотора $N=17$ кВт. КПД мотора $\eta=30\%$. Теплота сгорания топлива $q=45\cdot10^6$ Дж/кг.

5. По представлениям Бора электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите. Вычислите скорость движения электрона, если радиус орбиты $r=0{,}5\cdot10^{-8}$ см. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, его заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

6. Вольтметр, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E}=120$ В и внутренним сопротивлением $r=50$ Ом, показывает $U=118$ В. Каково внутреннее сопротивление вольтметра?

7. Два проводника с одинаковыми сопротивлениями R, соединенные сначала параллельно, а потом последовательно, подключаются к сети с напряжением U. В каком случае от сети потребляется бо́льшая мощность?

8. Сколько витков никелиновой проволоки надо навить на фарфоровый цилиндр диаметром $d_1=1{,}5$ см, чтобы изготовить кипятильник, в котором за $\tau=10$ мин закипает $V=1{,}2$ л воды, взятой при температуре $t=10$°C? КПД установки $\eta=60\%$; диаметр проволоки $d_2=0{,}2$ мм; напряжение сети $U=100$ В. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К); удельное сопротивление никелина $\varrho=0{,}42\cdot10^{-6}$ Ом · м.

9. Сколько электрической энергии надо израсходовать, чтобы при электролизе раствора азотнокислого серебра выделилось $m=500$ мг серебра? Напряжение на электродах $U=4$В. Электрохимический эквивалент серебра $k=1{,}08\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

10. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку с коэффициентом преломления $n=1{,}5$ под углом $\alpha=60$°. Какова толщина пластинки, если при выходе из нее луч смещается на $a=2$ см?

Публикацию подготовили
А. Клубова. Н. Козлова

Две «школьные» задачи в жизни

О вырезании бруса наибольшей прочности

Еще сравнительно недавно в качестве строительных конструкций широко использовались деревянные брусья прямоугольного сечения (колонны в деревянных домах, опоры в междуэтажных перекрытиях, стойки в деревянных мостах). Они нередко используются и в наше время, особенно в сельском строительстве.

Установлено, что чем больше площадь сечения бруса, нагружаемого центрально (то есть по центру тяжести сечения), тем он прочнее.

Следовательно, при вырезании из круглого бревна прямоугольного бруса, используемого как стойка, наибольшая прочность достигается тогда, когда площадь сечения наибольшая (заметим, что при этом одновременно достигается наименьшее количество отходов!).

Таким образом, инженерная задача о наибольшей прочности прямоугольного бруса, вырезаемого из круглого бревна, сводится к математической задаче из школьного учебника: *из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади* («Алгебра 9—10», задача 429).

Легко показать (проделайте расчет), что таким прямоугольником является квадрат.

Отметим в заключение, что сортамент любого лесопильного завода включает брусья квадратного сечения, которые используются строителями в качестве стоек.

Об изготовлении расширительного сосуда с наименьшей затратой материала.

Системы центрального отопления, обслуживающие небольшое число объектов, имеют в наивысших точках (на чердаке одного из домов) так называемые *расширительные сосуды* — емкости, в которые поступают излишки воды при нагревании.

Эти емкости часто имеют форму цилиндров со съемной крышкой (для периодической очистки сосуда) и изготовляются из листовой стали — сравнительно дорогостоящего материала. Поэтому важное значение приобретает следующая практическая задача: при заданной емкости расширительного сосуда найти такие размеры его, чтобы на его изготовление было израсходовано наименьшее количество листовой стали (расход материала на швы не учитывается, а толщина стенок, дна и крышки считается одинаковой) Эта задача сводится к математической задаче из школьного учебника: *из всех цилиндров заданного объема найдите цилиндр с наименьшей полной поверхностью* («Алгебра 9—10», задача 420).

Легко показать (проделайте расчет), что осевым сечением искомого цилиндра является квадрат.

Если учесть, что в масштабе нашего государства расширительные сосуды изготовляются в огромном количестве, то становится очевидным, что отступление от оптимальных размеров при их изготовлении неизбежно приводит к чувствительным избыточным расходам листовой стали, а следовательно, к значительным убыткам.

Я. Жак

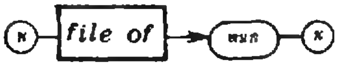
Заочная школа программирования

Урок 18: Файлы

Что такое файл?

Файл — это некоторый набор элементов одного и того же типа, число которых заранее не определено.

Тип файла описывается следующей синтаксической диаграммой:



тип есть общий тип элементов файла. Будем называть его *базовым*. Имеется стандартный (то есть существующий для любой программы и не подлежащий описанию в ней) тип файла с именем *text*. Его базовым типом является тип *char*. Файлы типа *text* называются *текстовыми файлами*.

Элементы файла считаются расположенными последовательно, то есть так же, как элементы вектора. Отличается же файл от вектора, во-первых, тем, что размеры его могут меняться, а, во-вторых, тем, что способ обращения к его элементам совсем другой: невозможно обратиться к произвольному элементу файла; элементы его просматриваются только подряд, от начала к концу, при этом каждый раз доступен только один элемент. С каждым файлом *f* связана переменная, которая обозначается *f*↑; ее тип совпадает с базовым типом файла. Она называется *буфером* этого файла или *буферной переменной*. В буфере может размещаться только один элемент файла; значение этого элемента и служит значением буфера. Буфер — это как бы окошко, через которое можно просматривать файл, выбирая элементы по одному.

Если файл просмотрен до конца (или если он вообще пуст) то будем считать его *оконченным*. Если файл окончен, то значение его буфера не определено.

Процедуры работы с файлами

Проверить, окончен ли файл *f*, можно вызовом стандартной логической функции

eof(f)

Она вырабатывает значение *true*, если *f* окончен, и *false* — в противном случае*).

Пусть необходимо просмотреть файл *f*. Для этого надо прежде всего вызвать стандартную процедуру

reset(f)

(«reset» означает «возвратить»). В результате ее выполнения значением буфера *f*↑ станет первый элемент файла (если файл не пуст).

Перейти от одного элемента файла к следующему можно с помощью вызова стандартной процедуры

get(f)

(«*get*» означает «взять»). После его выполнения в *f*↑ будет значение этого следующего элемента, если он есть. (Если же следующего элемента нет, то файл станет оконченным.) К уже оконченному файлу применять процедуру *get* нельзя.

Рассмотрим пример. Пусть *f1* и *f2* — файлы с базовым типом *real*, а *ровно* и *b* — переменные типа *boolean*. Переменной *равно* нужно присвоить значение *true*, если содержимое *f1* и *f2* одинаково (то есть эти файлы имеют одинаковую длину, быть может нулевую, а их соответственные элементы попарно равны), и *false* в противном случае.

---

*) *eof* — сокращение английских слов end of file (конец файла).

Эту задачу можно выполнить следующим образом:

```
reset(f1); reset(f2); b:=true;
while b AND NOT eof(f1)
        AND NOT eof(f2)
  do begin b:=f1↑=f2↑;
    get(f1); get(f2)
      end;
if b then равно:=eof(f1)ANDeof(f2)
    else равно:=false;
```

Если оба файла пустые, то тело цикла не выполнится ни разу и *равно* получит значение *true*. Пока очередные элементы файла попарно совпадают, *b* получает в теле цикла значение *true* и оператор цикла продолжает работу. Цикл прекратится, если очередные элементы не совпадут или хоть один из файлов будет окончен. В первом случае *b* по выходе из цикла имеет значение *false* и последний оператор присвоит это же значение переменной *равно*. Если же по выходе из цикла *b* имеет значение *true*, то это значит, что один из файлов полностью совпадает с начальным фрагментом другого файла. В этом случае последний оператор проверяет, не окончился ли одновременно и второй файл. Если да, то *равно* получает значение *true*, а если другой файл еще не окончен, то *false*.

Пусть теперь известно, что файл *f1* содержит не менее 10 элементов, и требуется первые 10 из них перенести в массив *m*, тип которого есть **array** [*1..10*] **of** *real*. Это можно сделать следующим образом (*i* — переменная типа *integer*) :

```
reset(f1);
for i:=1 to 10 do
begin m[i]:=f1↑;get(f1) end;
```

Последовательность операторов

```
v:=f↑; get(f)            (1)
```

где *v* — переменная, а *f* — файл, встречается довольно часто. Поэтому в Паскале существует стандартная процедура *read* такая, что вызов

```
read(f,v)
```

равносилен паре операторов (1). Теперь наш пример можно переписать короче:

```
        reset(f1);
fori:=    to 10 do read(f1, m[i]):
```

Итак, мы научились читать из файла. Посмотрим теперь, как его заполнять. Существует стандартная процедура *rewrite* (переписать) такая, что после вызова

```
rewrite(f)
```

файл *f* становится пустым и готовым к заполнению. Чтобы пополнить файл значением некоторого выражения *E*, надо выполнить присваивание *f*↑:=*E*, а затем — вызов стандартной процедуры *put(f)* («put» означает «поместить»). Этот вызов присоединит к концу файла значение *f*↑; файл, таким образом, удлинится на один элемент. Процедуру *put* можно применять, только если файл окончен, и после ее вызова он продолжает оставаться оконченным: нельзя записывать новые элементы в середину файла. Пара операторов

```
f↑:=E; put(f)
```

равносильна оператору

```
write(f, E)
```

где *write* — стандартная процедура.

Например, заполнить файл *fi*, базовый тип которого — *integer*, целыми числами от 1 до 100, можно так:

```
rewrite(fi);
for i:=1 to 100 do write(fi, i)
```

Задание 18.1. *Из двух текстовых файлов x и y сделайте один файл z так, чтобы в нем размещались сначала все элементы файла x, а затем — файла y.*

Особенностью текстовых файлов является то, что с помощью процедуры *write* в них можно заносить значения не только базового типа *char*, но и других простых типов, а с помощью процедуры *read* из них можно осуществлять засылку в переменные любого простого типа. Если, например, файл *ft* — текстовой, то *write(ft, 51)* автоматически преобразует число 51 в последовательность символов «5» и «1» и занесет их в файл *ft*. Если, с другой стороны, известно, что очередные элементы в файле *ft* — цифры, перед которыми могут стоять пробелы, то можно применить вызов *read(ft, i)*, где *i* — переменная типа *integer*. Этот вызов, пропустив все предшествующие первой цифре пробелы, воспримет по порядку все цифры, пока не будет обнаружен следующий за ними пробел, преобразует их в число (например, последовательность цифр «5» и «1» в число 51) и присвоит это число переменной *i*.

Задание 18.2. *Известно, что в текстовом файле f записаны вещественные числа, разделенные пробелами. Признаком конца этой последовательности служит число* 0. *Вычисли-*

те и напечатайте сумму чисел этой последовательности.

Файлы и ввод-вывод

Легко заметить, что работа с файлами очень похожа на механизм ввода и вывода. Мы сейчас покажем, какая между ними связь.

Вызов процедуры

write (x)

с параметром простого типа осуществляет выдачу значения *x* на печатающее устройство (см. урок 15). Считается, что с печатающим устройством связан стандартный текстовой файл *output*. Выдача на печать есть не что иное, как пополнение этого файла, а *write (x)* — это сокращенная запись для

write (output, x)

С читающим устройством в свою очередь связан стандартный текстовый файл *input*, а

read (x)

есть сокращение для

read (input, x)

Файл *input* нельзя пополнять и к нему нельзя применять процедуру *reset*. (Эта процедура как бы уже проработала к началу выполнения программы). Точно так же к файлу *output* неприменимы чтение и процедура *rewrite*. Эти два файла не нужно описывать в программе (на то они и стандартные), но, как известно из урока 15, их обязательно надо перечислить в заголовке программы.

Если задача требует, чтобы какая-либо информация хранилась во внешней памяти, то для этой информации нужны дополнительные внешние файлы. Их надо описать наряду со всеми остальными переменными программы и перечислить в заголовке наряду с *input* и *output*. Если же имя файла в заголовке отсутствует, то этот файл служит лишь для обмена информацией внутри программы.

Задание 18.3. *На читающее устройство подан некоторый текст. Надо его поместить в текстовой файл f, вставляя после каждого символа «*» символ « / ».*

Пример на использование внешних файлов

На прошлом уроке мы рассматривали примеры, в которых речь шла об описании и обработке сведений о различных странах мира. Эти примеры — простая иллюстрация серьезных задач, имеющих дело с информацией очень большого объема. Ясно, что такого рода информация не возникает с началом выполнения программы и не исчезает в конце ее. Наоборот, она должна храниться очень долго, может быть годами: время от времени она подвергается изменениям и в любой момент из нее могут быть извлечены нужные данные. Хранится такая информация во внешней памяти ЭВМ (на дисках и лентах), а чтение и исправление ее осуществляют специальные программы, исполняемые, когда в этом есть потребность.

Каждая такая программа рассматривает эту информацию как содержимое некоторого внешнего файла. Пусть в нашем случае это будет файл с именем *архив*. Элементы этого файла — записи типа *страна*. С файлом должна работать некоторая программа *обработка*. Ее заголовок имеет вид

program *обработка (input, output, архив);*

раздел описания переменных в ней будет содержать описание

архив: **file of**
страна;

На прошлом уроке каждая запись, относящаяся к тому или иному государству, была значением отдельной переменной, имя которой совпадало с названием соответствующего государства. Ясно, что на практике неудобно описывать и иметь в программе полторы сотни переменных. Поэтому теперь мы откажемся от переменных *австралия, ..., япония*. Название же страны будем хранить в самой записи, предусмотрев в ней еще одно поле типа **array** *[1..60]* **of** *char* (и полагая, что шестидесяти букв и пробелов достаточно для названия любой страны мира).

Описание типа *страна* будет теперь таким:

страна = **record**
    название: **array** *[1..60]* **of** *char;*

```
    площадь, население: real;
    устройство: boolean;
    вступление: дата;
    образование: вузы end;
```

Допустим, надо узнать, какая из стран самая обширная. Опишем для этого переменные

```
название: array [1..60] of char;
площадь: real; i·: integer;
```

и выполним следующие операторы:

```
площадь:=0.0; reset (архив);
while NOT eof (архив) do
   begin if архив↑. площадь>площадь
          then begin
                   площадь:=архив↑. площадь
                   название:=архив↑. название
                end;
          get (архив)
   end;
writeln (название, площадь);
```

Задание 18.4. *Напечатайте названия всех стран, население которых превышает 10 млн. человек.*

Добавление к уроку 18

А. Рар

Сортировки по текстовым ключам. Слияния

Сортировкой называют действие, которое упорядочивает совокупность данных по значениям некоторого признака. Таким образом, элементы упорядочиваемой совокупности являются по определению сложными, многокомпонентными объектами — данными структурных типов; как правило, признак — это только одна из компонент сортируемых элементов. В обширной литературе по методам сортировки те признаки, по значениям которых оценивается упорядоченность сортируемой совокупности, чаще называют *ключами*. Сортировки становятся возможными, когда на совокупности значений ключей установлено отношение порядка.

Наиболее распространенными объектами, к которым применяются сортировки, являются совокупности данных одинаковых типов. Различают две разновидности таких совокупностей: *массивы* — совокупности данных с известным, фиксированным количеством элементов и *файлы*, размеры которых, вообще говоря, неизвестны и могут изменяться в ходе выполнения программы. Соответственно, упорядочение массивов осуществляется, как правило, *внутренними* сортировками, применяемыми только к данным, расположенным в оперативной памяти ЭВМ, а для файлов чаще всего приходится пользоваться *внешними* сортировками, которые могут оперировать с данными, располагающимися на внешних запоминающих устройствах — магнитных лентах, дисках, перфокартах.

С проблемой упорядоченности информации приходится встречаться постоянно. В ведомости заработной платы ее элементы-строки могут быть упорядочены в порядке возрастания табельных номеров сотрудников. Здесь ключ — это *табельный номер*, отношение порядка — возрастание натуральных чисел. Итоговый протокол велосипедной гонки часто упорядочивают по результатам, показанным участниками соревнований. Здесь ключ — действительное*) число *результат*.

Список школьников одного класса тоже чаще всего упорядочивается. Здесь ключи *фамилия* являются текстами. Обычно тексты упорядочиваются как слова в словаре — по алфавиту, в порядке, который называют *лексикографическим*: если фиксирован порядок букв в алфавите, то из двух значений ключей *к1* и *к2* предшествующим считается тó, у которого *к1[1]⊰к2[1]* в алфавитном порядке (первая буква первого текста предшествует первой букве второго текста), а при равенстве *к1[1]=к2[1]* — то, у которого *к1[2]⊰к2[2]* и т. д. Так, *'слог'⊰'слон'*, как в словаре.

Относительный порядок двух букв или двух слов можно, таким образом, установить и даже обозначить: значок«⊰» означает «предшествует». Однако для практических целей — определения и установления лексикографического упорядочения текстов в программе, написанной, например, на Паскале — было бы полезнее иметь дело не с отношением «⊰», которое непосредственно для текстов в Паскале не может быть реализовано, а с привычным отношением «<», хорошо знакомым по операциям над числами. С этой целью в памяти машины хранится константа *алфавит*, имеющая тип **array** [*1..64*] **of** *char*. Ее значение

---

*) Важно помнить, что в программировании и в математике действительные числа определяются по-разному. В машине представимы только числа с ограниченным числом цифр. Таким образом, «действительные» числа, как их понимают программисты, это подмножество рациональных чисел.

' *абвг...я+—...!* ' (1)

С помощью этой константы каждой букве алфавита (и, более широко, каждому символу) ставится в соответствие натуральное число, представляющее собой номер символа в тексте (1). Таким образом, пробелу ставится в соответствие число 1, букве *а* — число 2,..., букве *я* — число 34. Самому «старшему» символу — восклицательному знаку *!* — поставлен в соответствие номер 64. Обратите внимание, что пробел предшествует всем символам алфавита.

Теперь сравнения двух символов легко реализовать, сравнив соответствующие им числа, при наличии такой функции *число*:

```
function число(x:char):integer;
  var i:integer;
  begin
    i:=1;
    while i(=64 do
      if x=алфавит[i]
         then begin число:=i;
         i:=65 end;
         else i:=i+1
  end
```

с помощью которой, например, упоминавшееся условие *к1[2]→к2[2]* можно свести к условию

число(к1[2])<число(к2[2]) (2)

Функция *число* понадобилась только потому, что для нас оказывалась существенной упорядоченность по алфавиту (1). Если бы мы удовлетворились стандартным алфавитом Паскаля, в котором перечисляются сначала латинские буквы от *a* до *z*, затем не совпадающие с ними по начертанию русские буквы, затем цифры и прочие символы, то тогда для целей преобразования литеры *x* в число, равное номеру этой литеры в стандартном алфавите, можно было бы воспользоваться стандартной функцией Паскаля *ord(x)*.

Используя отношения вида (2), можно определить относительный порядок любых двух текстов. Например, для *'слог'* и *'слон'* можно выполнить серии проверок

для первых букв	*число('с')=число('с')*
для вторых букв	*число('л')=число('л')*
для третьих букв	*число('о')=число('о')*

но для четвертых букв имеет место

число('г')<число('н')

откуда и следует, что *'слог'→'слон'*.

Такие серии проверок можно выполнять для любых двух заданных текстов с помощью функции *сравнение (x1, x2)*. Эта функция вырабатывает логическое значение *true*, если *x1→x2* или если тексты *x1* и *x2* совпадают. Если же *x2→x1*, то вырабатываемое этой функцией значение есть *false*. Тогда, если в программе важно установить истинность условия *x1→x2*, то можно пользоваться реализуемым в Паскале условием сравнения *(x1, x2)=true*. Если предварительно описан тип **type** *массив*=

packed array [*1...20*] **of** *char*

то функция *сравнение* описывается так:

```
function сравнение(x1,x2:массив):boolean;
  var номер:integer
  begin
   номер:=0
   while номер<=20 do
    begin
     номер:=номер+1;                                  (3)
     if число(x1[номер])<>
        число(x2[номер])
      then
        begin
         if число(x1[номер])<
             число(x2[номер])
         then сравнение:=true
         else сравнение:=false
         номер:=21
        end
        else if номер>20
             then сравнение:=true

    end
  end;
```

В том виде, как описана функция *сравнение* здесь, она работает с двадцатилитерными словами-массивами *x1* и *x2*. Длина слова выбрана такой, чтобы сделать возможным использование этой функции для сравнения фамилий: это один из наиболее часто используемых ключей во многих применениях сортировок. Ограничение в 20 литер всегда при желании можно заменить более сильным или, наоборот, более слабым ограничением. Конечно, длины сравниваемых текстов чаще всего оказываются меньше 20. Чтобы воспользоваться описанием (3), надо перед обращением к процедуре *сравнение* выполнить простую предварительную процедуру, которая пересылает каждое из сравниваемых слов-массивов в массив, составленный из 20 пробелов. Именно результат этой процедуры, описать которую читателю, по-видимому, не составит труда, и служит фактическим параметром при обращении к функции *сравнение (x1, x2)*. Впрочем, такая предварительная процедура будет не нужна, если обязать программиста, работающего с функцией *сравнение*, записывать значения ключей так, чтобы они занимали ровно 20 литер, из которых последние представляют в большинстве случаев пробелы. И еще одно замечание, касающееся описания функции *сравнение*: массивы-параметры этой функции имеют тип **packed array** (упакованный массив), а не тип **array**. Тип **packed array** используется для массивов, когда в одном машинном слове можно разместить не один элемент массива, а несколько, то есть упаковать их. Такой тип часто применяют при описании текстов-массивов, составленных из литер.

Итак, сортировки оказываются возможными и в тех случаях, когда ключи принимают текстовые значения.

Выбирая метод сортировки, важно использовать любые имеющиеся сведения об организации или упорядоченности совокупностей данных, подлежащих сортировке. В этом отношении наиболее характерным является *метод слияния*. Его применяют для упорядочения совокупности элементов, получающейся путем объединения двух или более совокупностей, уже упорядоченных по одному и тому же ключу. Такие ситуации встречаются весьма часто. Например, из упорядоченных «по алфавиту» (то есть в лексикографическом порядке) списков всех десятых классов школы надо составить общий список выпускников с сохранением лексикографического порядка. Рассмотрим программу слияния двух таких списков-файлов *ф1* и *ф2* (рис. 1). Речь идет, следовательно, о внешней сортировке. Впрочем, метод слияния и используется почти исключительно во внешних сортировках. Читатель может, разобравшись с методом слияния, выполнить в качестве самостоятельного упражнения программу слияния для внутренних сортировок — для упорядочения массивов, а не файлов.

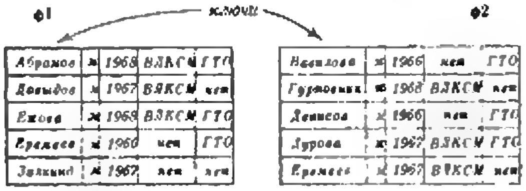


Рис. 1.

Метод требует места в памяти для еще одного файла *ф*, в котором будет помещаться результат. Можно двигаться по файлам *ф1* и *ф2*, последовательно читая их элементы. При этом на каждом шаге значения ключей в последних прочитанных элементах файлов *ф1* и *ф2* (в их буферных переменных) сравниваются, и по результату сравнения младший элемент попадает в конец файла-результата. Обратите внимание на важную деталь: перемещаясь по файлам *ф1* и *ф2*, можно добраться до конца одного из файлов тогда, когда другой еще не окончен. В этом случае следует без лишних сравнений переписать весь «хвост» непрочитанного полностью файла в результат.

Процедура, которая проверяет окончание файла *ф1* перед переходом к чтению очередной его записи, названа *запись1*. Она же при необходимости переписывает в результат «хвост» файла, не требующего дальнейших сравнений. (Аналогичная процедура для файла *ф2* полностью симметрична — описание процедуры *запись2* получается заменой единицы во всех именах процедуры *запись1* на двойку и наоборот.)

```
procedure запись1;
  begin
   get(ф1);
   if eof(ф1)
    then
     begin
      while NOT(eof(ф2)) do
       begin write(ф,ф2↑); get(ф2) end
      конец:=true
     end
  end;
```

Для того чтобы освободить программу от непринципиальных (и небольших) усложнений, предполагается, что в элементах обоих сливаемых файлов ключ стоит на первом месте. В программе, включающей процедуру *слияние*, должны присутствовать описания

```
type файл=file of запись
      запись=record
          ключ: массив;
          контекст: array [1..60] of char
                end;
```

(тип *массив* описан выше, перед (3)). Тогда процедура *слияние* имеет вид

```
procedure слияние(var ф1,ф2,ф:файл);
   var конец:boolean
   begin
    конец:false; newrite(f); neset(ф1);
    reset(ф2);
    while NOT (конец) do
     if ф1↑. ключ-ф2↑. ключ                    (4)
      then
       begin
        write(ф,ф1↑); write(ф,ф2↑);
        запись 1; запись 2
       end
      else
      if сравнение(ф1↑ ключ, ф2↑. ключ)
       then
      begin write(ф.ф1↑); запись 1 end
   else
      begin write(ф.ф2↑); запись 2 end
end;
```

В программе (4) во избежание повторений опущены описания используемых в ней процедур *запись1*, *запись2* и функций *число* и *сравнение*. Слово **var**, стоящее перед именами параметров-файлов в описании процедуры, означает, что их значения могут изменяться в ходе выполнения процедуры так, что прежние значения при этом не сохраняются. О таком использовании параметров «Квант» будет еще рассказывать подробнее.

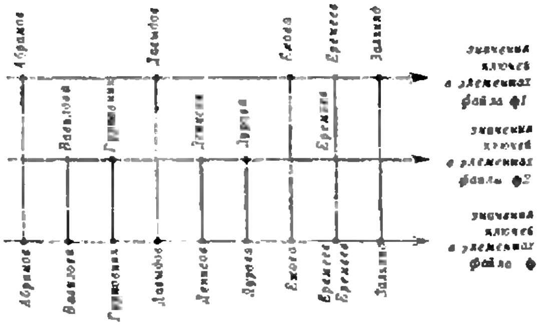


Рис. 2.

Для файлов, показанных на рис. 1, процесс и результат слияния схематически изображены на рисунке 2.

Для слияния файлов потребовалось ровно n сравнений ключей (n — число элементов упорядоченного результирующего файла). Такая оценка алгоритма слияния с точки зрения быстродействия считается очень хорошей. Это оказалось возможным в силу того, что мы воспользовались информацией об упорядоченности исходных файлов. Конечно, слияние — очень частный (хотя и весьма важный в практике) вид сортировок. С общими методами сортировок читателям предстоит знакомство в одном из ближайших номеров «Кванта».

Ю. Первин

Наша обложка

Фантазии ЭВМ

Рисунок на первой странице обложки получен с помощью ЭВМ следующим образом. Каждая замкнутая кривая строится специальной программой по пяти опорным точкам (своим — для каждой кривой). Первая опорная точка выбирается в заданном квадрате случайно. Последующие точки расположены — каждая — на случайном расстоянии от предыдущей (расстояния берутся в интервале от 0 до 30 мм); первая хорда (отрезок, соединяющий первую и вторую опорные точки) имеет произвольное направление; последующие хорды образуют углы с предыдущими хордами, выбираемые наугад в интервале от 0 до $\pi/2$. В известном смысле наугад присваивается и цвет каждому пятну (подумайте, как выбирается цвет при пересечении фигур).

В итоге полученные пятна имеют случайные размеры, расположение, форму и раскраску. Но как же ЭВМ может действовать случайно? Разве машина не выполняет вполне определенные инструкции программиста?

Оказывается, в современную ЭВМ можно заложить программу, называемую *генератором случайных чисел*. Эта программа выдает списки чисел, не подчиняющиеся никаким простым закономерностям (скажем, последовательные знаки десятичной записи числа sin 67°). Оперируя по определенным инструкциям с этими числами, ЭВМ становится «художником», чьи цветные рисунки заранее не может предугадать даже математик, написавший программу для нее.

Ю. Котов

Советуем купить!

«Алгебра и начала анализа», под ред. Г. Н. Яковлева (М., «Наука», 1981); часть I — ц. 70 к., часть II — ц. 70 к.

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов» (М., «Наука», 1980), ц. 3 р. 90 к.

Жданов Л. С., Жданов Г. Л. «Физика для средних специальных учебных заведений» (М., «Наука», 1981), ц. 1 р. 30 к.

Камке Д., Кремер К. «Физические основы единиц измерения», пер. с немецкого (М., «Мир», 1980), ц. 80 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. «Справочник по элементарной физике» (М., «Наука», 1980), ц. 75 к.

Лурье М. В., Александров Б. И. «Задачи на составление уравнений» (М., «Наука», 1980), ц. 15 к.

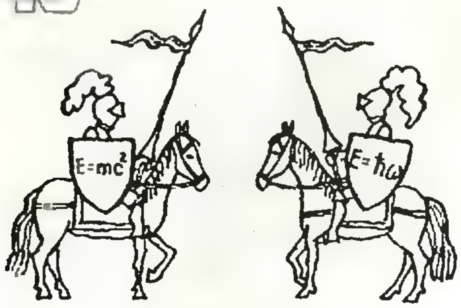
Потапов М. К. и др. «Алгебра и анализ элементарных функций» (М., «Наука», 1980), ц. 1 р. 40 к.

Фейнман Р. и др. «Фейнмановские лекции по физике»; т. 7 «Физика сплошных сред» (М., «Мир», 1977), ц. 1 р. 42 к.

Фейнман Р. и др. «Фейнмановские лекции по физике»; тт. 8,9 «Квантовая механика» (М., «Мир», 1978), ц. 2 р. 40 к.

Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру», пер. с венгерского (М., «Мир», 1979), ц. 1 р. 50 к.

Заказы направляйте по адресу: 103050, Москва, К-50, ул. Медведева, д. 2, Отдел «Книга — почтой» магазина № 8 «Техника» Москниги.



III Московский турнир юных физиков

> *...Что значит — знать?*
> *Вот в чем все затрудненья!*
> И. Гете. «Фауст»

С 23 января по 26 апреля 1981 года в Москве проводился ставший уже традиционным Турнир юных физиков (см. «Квант», 1980, № 8). В этом году он был организован физическим факультетом МГУ; председатель оргкомитета Турнира — заведующий кафедрой атомной физики и электронных явлений, вице-президент АН СССР академик Е. П. Велихов. В Турнире приняли участие старшеклассники девятнадцати школ Москвы и Московской области.

Первый тур Турнира — заочный коллективный конкурс — начался 23 января и закончился 10 марта. Всем школам-участницам были разосланы списки из 17 задач, решать которые могли все желающие. Предложенные задачи были посвящены, в основном, экспериментальному или теоретическому исследованию реальных физических явлений. Каждая такая задача — это проблема, решение которой представляет собою научное исследование. При формулировке условий задач авторы стремились кратко изложить лишь суть проблемы, предоставляя ребятам возможность самим конкретизировать задачу, сделать разумные допущения и упрощения, что, безусловно, требует проявления физической интуиции, умения подходить к проблеме с разных сторон.

Ниже мы приводим условия некоторых задач заочного конкурса с краткими комментариями к ним.

Задача «Свеча». *Свеча, сгорая, светит и греет. Измерить теплоту сгорания парафиновой свечи.*

Простота формулировки задачи и возможность проявить свои экспериментальные способности вызвали живой интерес будущих физиков, и почти все школы прислали решение этой задачи. Наиболее интересной была признана работа И. Алексеева и Д. Свириды (с. ш. № 179) *).

Задача «Колебания». *Большая нагруженная пробирка плавает в воде в вертикальном положении и может совершать колебания вверх — вниз (рис. 1). Рассчитайте период колебаний пробирки и измерьте его. Объясните расхождение между теорией и экспериментом.*

Теоретический расчет периода колебаний пробирки с учетом вязкости воды и ее движения достаточно сложен. Период оказывается существенно зависящим от соотношения площадей поперечного сечения пробирки и свободной поверхности воды в сосуде; необходим также учет процесса волнообразования. Наиболее разумные теоретические оценки наряду с хорошими экспериментальными измерениями привели в своей работе десятиклассники В. Гребенник и С. Шаварин (с. ш. № 179).

Задача «Мешалка». *Для приготовления бетона необходимо перемешать песок с цементом и другими компонентами. Практически, как правило, это делают в цилиндрических барабанах. Как долго и с какой скоростью необходимо вращать барабан (рис. 2) для получения однородной смеси? Придумайте и рассмотрите упрощающие модели процесса.*

Эта задача представляет еще не решенную на сегодняшний день серьезную физико-техническую проблему. Наиболее интересные соображения высказали в своих работах десятиклассники И. Кудрявцев (с. ш. № 2) и А. Поляков (с. ш. № 91).

Задача «Центробежный маятник». *Стержень длины r раскручивается до*

---

*) Эта работа будет опубликована в нашем журнале в Лаборатории «Кванта».

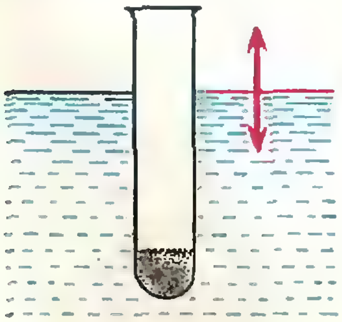


Рис. 1.

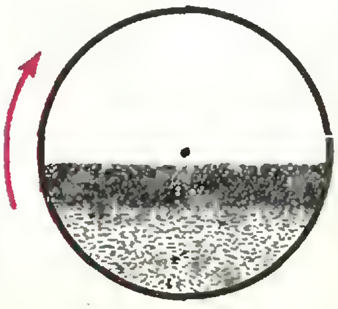


Рис. 2.

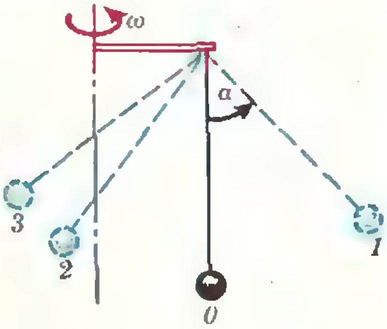


Рис. 3.

Участники финала размышляют над экспериментальными задачами физбоя.

Награды победителям вручает академик Е. П. Велихов.

Фото В. Александрова

угловой скорости ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня. К другому концу стержня на нити длины l прикреплен тяжелый шарик (рис. 3). Найти «положения равновесия» шарика и исследовать их устойчивость. Рассмотреть случаи медленного и быстрого раскручивания.

Уравнение, определяющее положения равновесия маятника,

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 (k+\sin\alpha),$$

где α — угол отклонения нити от вертикали, $k = r/l$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Решение этого уравнения легче всего найти графически. При достаточно большой длине нити возможны три положения равновесия. Вопрос об их устойчивости лучше сначала разрешить экспериментально, а потом отыскать теоретические обоснования. Устойчивыми оказываются положения *1* и *3*; при медленном раскручивании всегда устанавливается положение *1*, при быстром раскручивании чаще всего устанавливается положение *3*. При больших угловых скоростях $\omega \gg \omega_0$ положение *3* становится неустойчивым.

Задача «Шариковая ручка». *Реально ли переписать одной шариковой ручкой (35 к.) роман А. Дюма «Граф Монте-Кристо»? Или, более строго, какой длины линию можно провести обычной шариковой ручкой на обычной бумаге?*

Оказывается, обычной шариковой ручкой можно провести линию длиною 1 км (не советуем проверять это прямым экспериментом). В ходе работы над этой задачей интересный статистический анализ текста романа «Граф Монте-Кристо» провели члены команды школы № 1 из подмосковного города Фризино. Они обнаружили, что в романе 1,75 миллиона букв, 64 тысячи запятых, 26 тысяч тире, 44 тысячи точек и 5 тысяч вопросительных и восклицательных знаков. По их оценке длина такого текста, написанного средним почерком, составляет 23 километра.

В оргкомитет Турнира поступило более двухсот решений задач заочного конкурса и почти половина из них — коллективные. Первые три места на заочном конкурсе получили школы №№ 179, 91 и 151. Особо отметим дебютантов Турнира — школы №№ 842 и 315, которые заняли в заочном туре 6 и 7 места.

По результатам первого тура Турнира 13 школ были допущены к участию во втором туре — отборочных физбоях. Каждая школа была представлена командой численностью не более 15 человек.

26 марта 11 команд встретились в четырех подгруппах (в четырех школах Москвы) в четвертьфинальных физбоях, которые проводились по задачам заочного тура по системе «докладчик—оппонент—рецензент»*). По результатам четвертьфинальных физбоев в полуфинал Турнира вышли команды школ №№ 7, 18, 57, 91, 842. Право участия в полуфинале получили еще команда школы № 2 — как обладатель переходящего приза Турнира — и команда школы № 179 — как победитель коллективного заочного конкурса.

9 апреля в трех подгруппах прошли полуфинальные физбои. Они проводились по дополнительному списку задач, который ребята получили за 10 дней до полуфинала. Ниже мы приводим условия наиболее интересных задач из этого списка.

Задача «Автобус». *Известно, что в автобусе «трясет» на заднем сидении больше, чем на переднем. Почему?*

Задача «Зрительная труба». *Если смотреть в зрительную трубу сквозь оконное стекло, то изображение будет нечетким, даже если стекло чисто вымыто. Почему?*

Команды школ №№ 57, 91 и 179 одержали победу в полуфинале и вышли в финал Турнира.

Состязания второго тура прошли в острой, увлекательной форме. Ребята много спорили, отстаивая свое мнение, продемонстрировали хорошие знания физики и приобрели богатый опыт коллективного творчества. Очень хорошо организовали проведение физбоев ребята тех школ, в которых проходили состязания подгрупп; особо следует отметить команду школы № 47, в которой к физбою была даже подготовлена художественная самодеятельность.

Мы полагаем, что проведение физбоев между отдельными школами или классами возможно и полезно и вне рамок общего Турнира.

Третий тур Турнира — финал — был проведен 26 апреля на физическом факультете МГУ.

С вступительным словом перед ребятами выступил заместитель председателя оргкомитета Турнира профессор физического факультета Ю. М. Лоскутов. Он рассказал ребятам о физическом факультете МГУ и об основных направлениях научных исследований, проводимых учеными факультета. Затем председатель жюри Турнира профессор физического факультета, лауреат Ломоносовской премии по физике В. Л. Бонч-Бруевич представил жюри Турнира, и команды школ №№ 57, 91 и 179 приступили к выполнению заданий финального физбоя.

Всем участникам были продемонстрированы четыре опыта из различных областей физики. Команды должны были дать объяснения физических явлений, наблюдаемых в опытах. На это отводился час. Кроме того, всем командам были предложены четыре задачи, на решение которых отводилось 30 минут. Приводим условия этих задач.

Задача «Спектр Солнца». *Почему спектр Солнца сплошной?*

Задача «μ Солнца». *Для солнечного вещества справедливо уравнение состояния* $p = \frac{\varrho}{\mu} RT$. *Каково значение* μ *для солнечного вещества? Состав Солнца: водород — 73%, гелий — 25%, тяжелые элементы — 2%.*

Задача «Межзвездная среда». *Как характеризовать состояние вещества в межзвездном пространстве — вакуум или газ? Могут ли в межзвездной среде распространяться звуковые волны?*

Задача «Фотоэлемент». *Как согласовать классическую формулу для плотности тока* $j = env$ *с режимом насыщения фотоэлемента?*

Финальный физбой был проведен по системе докладчик—оппонент—рецензент и каждая команда дважды выступала в роли докладчика. В ходе физбоя был проведен конкурс капитанов — за короткое время им нужно было ответить на 8 вопросов. Жюри присудило победу капитану команды школы № 57 Д. Григорьеву. Болельщики тоже получили задание — им предлагалось придумать подписи к картинкам, представленным командам-финалистам, и очки за удачные подписи по желанию болельщика присуждались одной из команд. Симпатии болельщиков склонились в пользу команды школы № 179.

После подведения итогов физбоя состоялось закрытие Турнира. Председатель оргкомитета академик Е. П. Велихов вручил переходящий приз Турнира юных физиков и почетную грамоту за победу в III Московском турнире юных физиков команде школы № 179 (капитан А. Панфилов). Почетные грамоты были вручены команде школы № 91 (капитан А. Поляков) — за второе место, команде школы № 57 (капитан Д. Григорьев) — за третье место, команде школы № 842 (капитан В. Елисеев) — как лучшему дебютанту Турнира, Д. Григорьеву — победителю конкурса капитанов, Д. Свиридe — за лучшую экспериментальную работу. Еще 17 школьников жюри отметило грамотами за активное участие в Турнире и за лучшие решения отдельных задач.

Е. Юносов

---

*) О системе «докладчик — оппонент — рецензент» рассказано в информации о II Турнире юных физиков в 8-м номере «Кванта» за 1980 год.

Пособие по математике для поступающих в вузы

Так называется книга, которую в этом году большим тиражом выпустило издательство «Наука».

При подготовке к вступительным экзаменам перед абитуриентом возникает нелегкая задача: нужно повторить 103 пункта программы для поступающих в вузы и прорешать еще большее количество задач. Можно было бы снова просмотреть все школьные учебники от 5-го до 10-го классов и вспомнить решения содержащихся в них задач. Однако, на наш взгляд, такой путь по многим причинам (в том числе, и чисто психологическим) является далеко не самым лучшим. Гораздо эффективнее и естественнее другой путь — использовать при подготовке какое-либо пособие для поступающих. Рецензируемое пособие несомненно дает школьнику прекрасную возможность пойти по этому второму пути.

Книга состоит из 17 глав. Каждая глава содержит теоретический материал и задачи. Изложение теории сопровождается разбором упражнений и задач различной степени трудности.

Задачи разбиты на два раздела: задачи раздела I даны с решениями, раздела II — только с ответами. Учащийся может попытаться решить задачи раздела I самостоятельно. Если это не удается, можно изучить приведенное в книге решение, а затем на аналогичных задачах раздела II проконтролировать свою способность решать задачи данного типа. Книга содержит более 2000 упражнений и задач. Конечно, это не означает, что для успешной подготовки к экзаменам все их необходимо прорешать.

Помимо стандартных задач различной трудности в книге разбираются и такие, в которых решающий должен продемонстрировать элементарные логические навыки. Приведем два примера.

Задача 1. *Даны две точки A (0; 9), B (3; 6) и система неравенств*

$$\begin{cases} 2x-y+a<0,\\ 6x+3y+5a>0. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a решением системы будут координаты

а) хотя бы одной точки отрезка AB?

б) каждой точки отрезка AB?

Задача 2. *Ученики десятого «В» класса хвастались тем, что они выше ростом учеников десятого «А». На вопрос учителя математики «Что, собственно, означает, что вы выше ростом?» ученики десятого «В» дали следующие ответы:*

1. *Любой из нас выше любого из них.*
2. *Самый высокий из нас выше самого высокого из них.*
3. *Для любого ученика нашего класса найдется ученик класса «А» меньшего роста.*
4. *Каждый ученик класса «А» ниже хотя бы одного ученика нашего класса.*
5. *Средний рост учеников нашего класса больше среднего роста учеников класса «А».*

Есть ли среди этих ответов равносильные? Если есть, то какие?

Известно, что обучение проходит тем успешнее, чем больший интерес проявляет учащийся к изучаемому предмету. Следующие две задачи показывают, что авторы стремились включить в книгу материал, который был бы занимательным для школьника.

Задача 3. *«Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.*

— Говорит Мегрэ. Есть новости?

— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен — убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен — убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен — убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...

— Все. Спасибо. Этого достаточно.— Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ?

Задача 4. *Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.*

Но, конечно, таких задач в книге немного. Большинство задач — это обычные задачи, многие из которых предлагались на приемных экзаменах в вузы. В конце книги авторы поместили некоторые варианты письменных вступительных экзаменов, которые предлагались в вузах Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева и других городов.

Помимо основных в книге освещаются и такие темы, не входящие в школьную программу, как «Комбинаторика» и «Комплексные числа». Их изучение будет способствовать дальнейшему успешному обучению в вузах.

В книге отражен опыт работы Заочной физико-технической школы (ЗФТШ), которую хорошо знают многие учащиеся и учителя нашей страны. Задания этой школы уже помогли поступить в ведущие вузы нескольким поколениям школьников. Материалы ЗФТШ прошли длительную проверку при обучении учащихся 8—10 классов.

Не только выпускники школ, но и учителя, преподаватели техникумов и профтехучилищ, руководители математических кружков, студенты педагогических вузов найдут в книге материал, который удобно иметь под рукой.

«Пособие по математике», написанное А. Д. **Кутасовым**, Т. С. **Пиголкиной**, В. И. **Чехловым** и Т. Х. **Яковлевой** под редакцией профессора Г. Н. **Яковлева**, несомненно станет настольной книгой для всех, кто изучает или преподает школьную математику.

В. Гутенмахер

Долго ли палке упасть?

1. В рассматриваемом промежутке

$$\frac{\varepsilon}{4} < \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$Q\left[\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \ln\frac{\varepsilon}{2}\right] \leqslant T \leqslant$$

$$\leqslant Q\left[\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \ln\frac{\varepsilon}{4}\right],$$

откуда следуют требуемые оценки.

2. Время падения

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{v^2}{2gl} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Этот интеграл собственный, максимум подынтегральной функции достигается при $\alpha = 0$. При $v \to 0$ этот интеграл стремится к бесконечности, что видно из следующих преобразований, где $\frac{v^2}{2gl}$ обозначено через ε:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha} = \sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \sqrt{\varepsilon}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\left[\ln\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\varepsilon}\right) - \ln\sqrt{\varepsilon}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\ln\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\varepsilon.$$

Попутно мы получили логарифмическую оценку снизу для времени падения. Аналогичная оценка сверху может быть получена из следующих соображений:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};\ \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\right\}.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};\ \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\right\} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\varepsilon.$$

3. Время падения

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}.$$

Этот интеграл несобственный, так как подынтегральная функция стремится к бесконечности при $\alpha \to \beta$. Но он конечен, что видно из следующих оценок:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \geqslant$$

$$\geqslant 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\frac{\alpha-\beta}{4} = \frac{1}{8}(\alpha^2 - \beta^2).$$

$$\int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}} \leqslant \sqrt{8}\int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

По формуле дифференцирования сложной функции

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 - \beta^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta^2}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \beta^2} - \ln\beta \leqslant\right.$$

$$\leqslant \ln\pi - \ln\beta.$$

Итак, мы получили обещанную оценку сверху. Аналогичная оценка снизу может быть получена следующим образом:

$$\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha} = \sqrt{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} <$$

$$< \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} < \frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \alpha.$$

Поэтому

$$\int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}} \geqslant \int\limits_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln\frac{\pi}{2} - \ln\beta.$$

Метод перебора

1. Турист должен взять палатку, еду и одеяло.
2. Маршрут коммивояжера: Ух — Эх — Ах — — Ох — Их — Ух
3. 26 человек.
4. Только одним нулем.
5. 3 бублика, 6 булок и 6 слоек.
6. 24 и 11, 48 и 43, 36 и 29, 228 и 227.
7. 8 экзаменов.

Переменный электрический ток

1. $I = U\sqrt{\frac{1 + (\omega C R_2)^2}{(R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2)^2 + (\omega CR_1R_2 + \omega L)^2}}.$

Указание. Воспользуйтесь векторной диа-

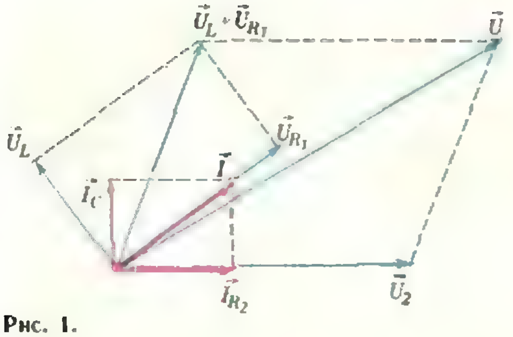


Рис. 1.

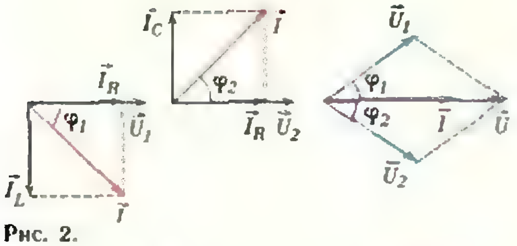


Рис. 2.

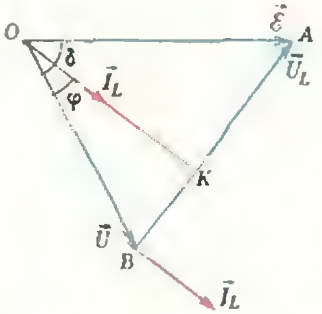


Рис. 3.

граммой токов и напряжений, приведенной на рисунке 1.

2. $R=\sqrt{L/C}$ Указание. См. рисунок 2, на котором изображены векторные диаграммы токов и напряжений для первого и второго участков цепи, а также для всей цепи. При любой частоте ток в цепи будет совпадать по фазе с приложенным напряжением, если углы φ_1 и φ_2 равны.

3. $P_{max}=\dfrac{\mathscr{E}U}{\omega L}$. Указание. На рисунке 3 изображена векторная диаграмма токов и напряжений для линии электропередачи. Здесь $\overrightarrow{OA}=\vec{\mathscr{E}}$ — ЭДС генератора; $\overrightarrow{OB}=\vec U$ — напряжение на приемной системе; δ — сдвиг фаз между ними; $\overrightarrow{BA}=\vec U_L=\vec{\mathscr{E}}-\vec U$ — напряжение на линии передачи; $\vec I_L$ — ток в линии, отстающий от $\vec U_L$ на $\pi/2$. Удобно перенести вектор $\vec I_L$ в точку O и рассмотреть треугольник AOB. Его площадь, с одной стороны, равна $S=\frac{1}{2}U\mathscr{E}\sin\delta$, а с другой — $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\times|OK|=\frac{1}{2}U_LU\cos\varphi$. Сравнивая эти два выражения, получим, что активная мощность, равная

$$P=UI_L\cos\varphi=\frac{UU_L}{\omega L}\cos\varphi,$$

максимальной будет в том случае, если $\delta=\pi/2$, и $\sin\delta=1$.

4. $$U_1=U\frac{n_1(n_1R_2+n_2R_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1};$$
$$U_2=U\frac{n_2(n_1R_2+n_2R_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1};$$
$$I_1=\frac{Un_2(n_2-n_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1};$$
$$I_2=\frac{Un_1(n_1-n_2)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1}.$$

Указание. Для данной схемы справедливы такие равенства:

$$I_1R_1=U-U_1,$$
$$I_2R_2=U-U_2,$$
$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{n_1}{n_2},$$
$$I_1n_1+I_2n_2=0.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант I

1. $\{(c;c)\}$ $(c\in\mathbf{R})$ при $a=0$, $\left\{\left(\frac{3}{2}a;\ \frac{9}{2}a\right),\ \left(\frac{3}{4}a;\ -\frac{9}{4}a\right)\right\}$ при $a\neq0$. Указание. При $a\neq0$ в любом решении $x\neq a$; выразите y из первого уравнения.

2. $\left\{\frac{13}{6},\ -\frac{13}{20}\right\}$.

3. $x=\frac{\pi}{44}+\frac{\pi}{22}k$ $(k\ \ \mathbf{Z})$. Решение. Данное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{3\cos5x-2\cdot2\cos5x\cdot\cos x}{3\sin5x-2\cdot2\sin5x\cdot\cos x}=\operatorname{tg}17x,$$

$$\frac{\cos5x(3-4\cos x)}{\sin5x(3-4\cos x)}=\operatorname{tg}17x, \qquad (1)$$

Уравнение

$$\frac{\cos5x}{\sin5x}=\operatorname{tg}17x \qquad (2)$$

равносильно уравнениям

$$\frac{\cos5x}{\sin5x}=\frac{\sin17x}{\cos17x}$$
$$\frac{\cos22x}{\sin5x\cdot\cos17x}=0$$

и, следовательно, системе

$$\begin{cases}\cos22x=0\\ \sin5x\neq0\\ \cos17x\neq0.\end{cases} \qquad (3)$$

Если $\cos22x=0$, то $\sin5x\neq0$. В противном случае для некоторых $k,\ l\in\mathbf{Z}$ $2(22l-k)=5$, что невозможно. Аналогично доказывается, что если $\cos22x=0$, то $\cos17x\neq0$. Значит, система (3) равносильна уравнению $\cos22x=0$.

Уравнения (1) и (2) также равносильны, так как если $3-4\cos x=0$, то $\cos22x\neq0$. Допустим противное: $\cos22x=0$. Из $3-4\cos x=0$ следует $x=\pm\alpha+2\pi k$, где $\alpha=\arccos\frac{3}{4}$. Из $\frac{\sqrt2}{2}<\frac{3}{4}<\frac{\sqrt3}{2}$ следует $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\frac{11}{3}\pi<22\alpha<\frac{11}{2}\pi$. Из $\cos22x=0$ следует

$\cos 22\alpha = 0$. Значит, $22\alpha = \frac{9}{2}\pi$, $\alpha = \frac{9}{44}\pi$. Тогда $\cos\frac{9}{22}\pi = \frac{1}{8}$, $\cos\frac{9}{11}\pi = -\frac{31}{32}$, $\cos\frac{2}{11}\pi = \frac{31}{32}$. С другой стороны, поскольку $\frac{2}{11}\pi > \frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{2}{11}\pi < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Противоречие.

4. $|A_1K| = |A_1L| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|KL| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$; 7:41. Указание. Продолжите (A_1L) до пересечения с (AD). Объем отсекаемой части куба равен разности объемов двух пирамид.

5. Указание. Поскольку с увеличением y сумма x^2+y^2 возрастает, свое наибольшее значение на данном множестве она принимает в точке, расположенной на «верхней» параболе.

Вариант 2

1. $\varnothing$ при $a<0$, $\{2\}$ при $a=0$, $\{a+2-2\sqrt{a}, a+2+2\sqrt{a}\}$ при $0<a<1$, $\{a+2+2\sqrt{a}\}$ при $a \geqslant 1$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-a)^2 = 4(x-1) \\ x-a>0. \end{cases}$$

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Решение. Уравнение

$$2\cos^2 x + 4\sin(x+1) = 4\sin x \cdot \cos 1 - \sin 2x \qquad (1)$$

является выводным из данного уравнения. Уравнение (1) равносильно уравнениям

$$2\cos^2 x + 4\sin x \cdot \cos 1 + 4\cos x \cdot \sin 1 = \\ = 4\sin x \cdot \cos 1 - 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos x(\sin x + \cos x + 2\sin 1) = 0. \qquad (2)$$

Поскольку $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\sqrt{2}$ и $\sin 1 > \sin\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, уравнение (2) равносильно уравнению $\cos x = 0$. Значит, данное уравнение равносильно системам

$$\begin{cases} \sqrt{2\cos^2 x + 4\sin(x+1)} = \\ = \sqrt{4\sin x \cdot \cos 1 - \sin 2x} \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4\sin x \cdot \cos 1} = \sqrt{4\sin x \cdot \cos 1} \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. $\max\limits_{\left[0;\,\frac{2}{3}\right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}$, $\min\limits_{\left[0;\,\frac{2}{3}\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 5\sqrt[3]{e}$. Указание. Неравенство $\frac{11}{3}\sqrt[3]{e^2} > 7$ равносильно неравенству $e^2 > \left(\frac{21}{11}\right)^3$; $e > 2{,}7$.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Указание. Введите естественную систему координат и составьте уравнение плоскости, проходящей через три середины; поскольку эта плоскость не проходит через начало координат, ее уравнение можно искать в виде $ax+by+cz+1=0$.

5. $\{2,3\}$. Решение. При $x = z = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ левая часть неравенства равна 2; поэтому $a=1$ не является решением. Рассмотрим теперь векторы

$$\vec{a} = (2\sin x \cdot \cos y;\ \cos x \cdot \sin y),$$
$$\vec{b} = (\sin z;\ -\cos z).$$

С одной стороны, левая часть неравенства равна $\vec{a} \cdot \vec{b}$. С другой стороны,

$$|\vec{a}|^2 = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y \leqslant \\ \leqslant 4\sin^2 x + \cos^2 x = 3\sin^2 x + 1 \leqslant 4$$

$$|\vec{a}| \leqslant 2$$
$$|\vec{b}| = 1$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant 2.$$

Значит, числа 2 и 3 являются решениями. Впрочем, с $a=3$ можно справиться и проще:

$$2\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z - \cos x \cdot \sin y \cdot \cos z \leqslant \\ \leqslant |2\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z| + \\ + |\cos x \cdot \sin y \cdot \cos z| \leqslant 2 + 1 = 3.$$

Физика

1. $v = \sqrt{\frac{(mg - 2F_c)h}{2(M+m)}} \approx 0{,}8$ м/с.

2. $\alpha \geqslant \operatorname{arctg}(3/\mu) = \operatorname{arctg} 10 \approx 84°$.

3. $d = \frac{m}{2M+m}\,\frac{V}{S} = \frac{V}{2S} = 5$ см.

4. $\Delta t = \frac{g\tau}{0{,}3c}\sqrt{\frac{\varrho g R}{2}} \approx 0{,}25°\mathrm{C}$ (здесь $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К) — удельная теплоемкость и $\varrho = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $q = -Q/3$; этот заряд нужно поместить в центре треугольника; равновесие неустойчиво.

6. $W = \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{Q_0^2}{2C_0} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ Дж;

$$U = \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{Q_0}{C_0} = 250 \text{ В}.$$

7. $P_1' = \frac{4P_1(P_2+P_3)^2}{(P_1+P_2+P_3)^2} = 72$ Вт;

$$P_2' = \frac{4P_1^2 P_2}{(P_1+P_2+P_3)^2} = 16 \text{ Вт};$$

$$P_3' = \frac{4P_1^2 P_3}{(P_1+P_2+P_3)^2} = 32 \text{ Вт}.$$

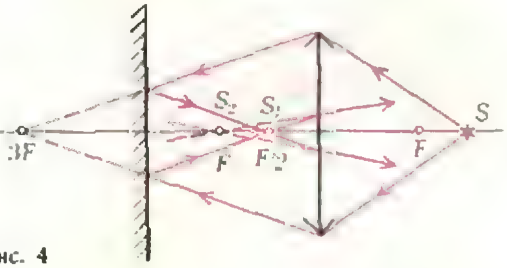


Рис. 4

8. $\mathscr{E}_м = 2\pi\nu n S B \approx 62{,}8$ В.

9. $x = F/2$. Указание. См. рис. 4, на котором S_1 — действительное изображение источника, и S_2 — мнимое изображение.

10. $h = \frac{e}{c}\,\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U_1-U_2) \approx$ $\approx 6{,}61\cdot 10^{-34}$ Дж · с;

$\lambda_{кр} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 U_1-\lambda_2 U_2}(U_1-U_2) \approx 0{,}65$ мкм.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 13,5.
2. $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k \in Z)$.
3. 7.
4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.
5. 15 га и 18 га или 24 га и 27 га.

Вариант 2

2. $[10-\sqrt{99};\ 10+\sqrt{99}]$.
3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ x_2=(-1)^l\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l\ (k, l\in Z)$.
5. $\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}}{\sin\beta}h^2$.

Физика

1. $l'=s'=gt'^2/2\approx 5$ м; $l=2l'\approx 10$ м; $s=0$; $v_{ср}=l/t=5$ м/с.
2. $n=\frac{d}{2\pi lt}\approx 4{,}9$ с$^{-1}$; в нижнем положении натяжение нити наибольшее.
3. $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{mgh}{0{,}8mgh}=1{,}25$.
4. $p=\frac{\varrho RTV_м}{\mu V}\approx 1{,}39$ МПа. Указание. При исчезновении сил притяжения между молекулами вода превратилась бы в идеальный газ.
5. $A=\frac{pV\Delta T}{T}\approx 3{,}7\cdot 10^2$ Дж (здесь $p=10^5$ Па, $\Delta T=1$ К и $T=273$ К).
6. $m=\frac{\varrho V(c(t_2-t_1)+\lambda k/100\%)}{q\eta/100\%}\approx 0{,}12$ кг (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
7. $r=\frac{\mathscr{E}}{I}\frac{R_3}{R_2+R_3}-R_1-\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=0{,}5$ Ом.
8. $n=\frac{(U_0-U)US}{P\varrho l}=13$; $P_0=\frac{nU_0P}{U}\approx 2{,}7$ кВт
9. $I_2\geqslant\frac{E(h^2+l^2/4)^{3/2}}{h}-I_1=425$ кд.
10. $D=-\frac{2}{d}=-4$ дптр; линза — рассеивающая.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 1.
2. $[3;\ +\infty[$.
3. $\min\limits_{[-1,3]} f(x)=1,\ \max\limits_{[-1,3]} f(x)=5$.
4. $\left\{\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right\}$.
5. $4\sqrt{2}\cdot S\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 2

1. При $x>\sqrt[3]{2}$ $f'(x)=1$.
2. $\{10^{-\sqrt{5}},\ 10^{\sqrt{5}}\}$.
3. $\frac{5}{3}+\frac{25}{3}$.
4. $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k=2, 3, 4, \dots)$.
5. $-\frac{4m^2\cdot\cos^2\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

2. $V_2>V_1$.
3. $F=\frac{dL/l}{L/l+1}=5{,}7$ см, где $l=1$ мм.
4. $\Delta\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\frac{v_1^2-v_2^2}{2e/m}\approx -22{,}7$ В.
5. $A=\frac{ms^2g}{4lH}\left(\frac{m}{M}+1\right)\approx 347$ Дж.

Задачи устного экзамена

1. $F=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 16$ Н.
2. $\varrho=\varrho_0\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T}\approx 0{,}16$ кг/м^3.
3. $n_2=n_1\frac{Ir+U_н}{U_1}=40$.

Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $85\frac{1}{3}$.
2. Единственная точка экстремума — точка максимума $x=6$; $y(6)=432$.
3. $]-\infty;\ 1[$.
4. $x_1=\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l\ (k,\ l\in Z)$.
5. $\frac{a^3}{24}$.

Вариант 2

1. $10\frac{2}{3}$.
2. $\max\limits_{[0,4]} f(x)=f(3)=135$, $\min\limits_{[0,4]} f(x)=f(0)=0$.
3. $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.
4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$.
5. $\frac{1}{4\pi}d^3\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$.

Задачи устного экзамена

1. $-0{,}7788$. 2. 1692. 3. $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=$

$= -\frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$. 4. $\sin 2$. 5. $144\sqrt{3}$ дм².

6. а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

7. $\left]\frac{3}{2}; 2\right[$. 8. $-\frac{1}{9}$.

Физика

1. а) $t = \sqrt{2h/g} \approx 2{,}3$ с; б) $s = v_0\sqrt{2h/g} \approx 34{,}5$ м; в) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 26{,}7$ м/с, при этом вектор $\vec{v}$ составляет с горизонтом угол $\alpha = \arccos(v_0/v) \approx 56°$.

2. $\omega = \sqrt{2ah}/R = 2$ с$^{-1}$.

3. $T_2 = T_1 b/a = 930$ K.

4. $m = \frac{Ns}{\eta q v} \approx 0{,}08$ кг (здесь $\eta = 0{,}3$).

5. $v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}} \approx 2{,}25 \cdot 10^6$ м/с (здесь $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

6. $R_в = r\frac{U}{\mathscr{E} - U} = 2950$ Ом.

7. При параллельном соединении проводников потребляется в 4 раза бо́льшая мощность, чем при последовательном соединении.

8. $n = \frac{U^2 d_2^2 \eta\tau}{4\varrho D c V d_1 (t_к - t)} \approx 13$ (здесь $D = 10^3$ кг/м³ — плотность воды, $t_к = 100°$ C — температура кипения воды).

9. $W = mU/k \approx 1{,}85 \cdot 10^3$ Дж.

10. $d = a\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha)\sin\alpha} \approx 3{,}9$ см.

Две головоломки

(см. «Квант» № 1)

1. Из первого вычитания находим $S = 1$ и $A = 0$. Поэтому первая и пятая цифры частного — девятки (см. также пятое вычитание). Обозначив остальные цифры частного через a, b, c, d, e и g, получим уравнение

$$\overline{10PIENTI} : \overline{10T} = \overline{9abc9}, \overline{deg}.$$

или

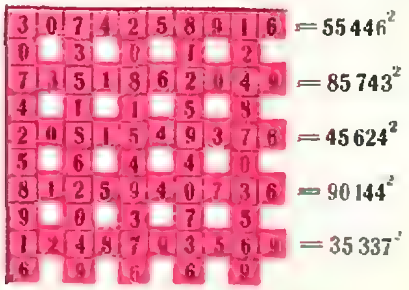
$$\overline{10PIENTI000} : \overline{10T} = \overline{9abc9deg}.$$

Здесь делитель и частное нулями не оканчиваются, а их произведение

$$\overline{10T} \cdot \overline{9abc9deg} = \overline{10PIENTI000}$$

делится на $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Значит, одно из этих чисел — нечетное, но делится на 125, а другое не делится на 5, но делится на 8. Очевидно, на 8 должно делиться $\overline{10T}$, откуда $T = 4$. Таким образом, $\overline{9abc9deg}$ делится на 125; стало быть, оно оканчивается либо на 125, либо на 375, либо на 625, либо на 875. Последовательно рассматривая эти возможности, находим, что $\overline{deg} = 875$, так что $I = 7$, $P = 2$. Замечая, что делимое делится без остатка на 13, находим E и N: $E = 9$, $N = 3$. Окончательно: 10279347:104 = 98839, 875.

2. Из того, что пятое десятизначное число равно $CECCA^2$, следует $C > 3$. Тогда $E > 5$. Первая цифра у третьего числа равна 2; так как $E > 5$, R может быть только четверкой. Тогда $N \in \{1, 5, 6\}$ (см. первое число). Возводя последовательно в квадрат 441, 445 и 446, находим, что $N = 6$. Наконец, учитывая, что сумма цифр числа $CHARLESTON$ равна 45, то есть что оно делится на 9, получаем, что число $EERRN$ делится на 3. Значит, $E \in \{5, 8\}$. Испытав эти две возможности, находим, что $CHARLESTON = 3074258916$. Чему равны остальные числа, ясно из рисунка 5.



3	0	7	4	2	5	8	9	1	6	$= 55446^2$
0		3		0		1		2		
7	3	5	1	8	6	2	0	4	9	$= 85743^2$
4		1		1		5		8		
2	0	8	1	5	4	9	3	7	6	$= 45624^2$
5		6		4		4		0		
8	1	2	5	9	4	0	7	3	6	$= 90144^2$
9		0		3		7		5		
1	2	4	8	7	0	3	5	6	9	$= 35337^2$
6		9		6		6		9		

Рис. 5.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. $A = 5$, $Б = 3$, $В = 4$, $Г = 6$, $Д = 2$, $Е = 1$. Как расположены косточки, показано на рисунке 6.

2. В 1968 году.

3. Так будет в любом невисокосном году, поскольку $365 = 7 \cdot 52 + 1$.

4. Если вы думаете, что нужно переложить по крайней мере одну спичку, то вы ошибаетесь: спички перекладывать вообще не нужно! Нужно просто посмотреть на это равенство «с другой стороны».

5. В промежутке от «первого» до «восемнадцатого» желтого света 9 раз горел красный свет и 8 раз — зеленый. Если желтый свет горит x с, то $18x + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 6x = 1020$, откуда $x = 10$ с.

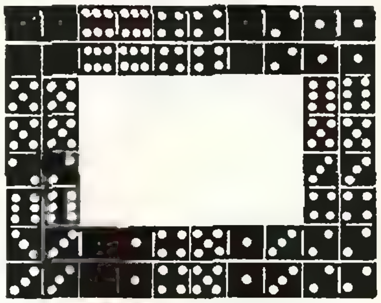


Рис. 6.

А вы как думаете?

(см. «Квант» № 1)

Знакомый, конечно, ошибся: неравенство

$$\underbrace{(R \circ R \circ \ldots \circ R)}_{n}(a) \neq \underbrace{(F \circ F \circ \ldots \circ F)}_{n}(a)$$

(при некотором n) никак не противоречит равенству

$$R(a) = F(a)$$

Искомых фигур существует сколько угодно: например, точка, две точки, отрезок, окружность, эллипс, круг (найдите для каждой из этих фигур соответствующие R и F; например, для круга с центром O можно взять $R=R_p^\alpha$, где $p\neq0$, $\alpha\neq0$ и $F=O'O$, где $O'=R_p^\alpha(O)$). Попробуйте описать все такие фигуры.

Шахматный конкурс

(см. «Квант», 1981, № 12)

1 (Р. Рети, 1928 г.). **1.Крf2!** Единственный ход, к ничьей ведет 1. Кр:g2? Крe4 2. Крf2 e1Ф+! 3. Кр:e1 Крd3 и т. д. **1...Крe4 2.Кр:e2 Крd4 3.Лg1 Крe4 4.Лe1! Крe5** (4...Крf4 или d4 5.Крf2 или d2) **5. Крe3! Крe6 6. Лg1 Крe5 7.Крd2 Крe4 8.Л:g2** и все кончено.

2 (Н. Копаев, 1949 г.). План белых заключается в переводе ладьи на e1, где она будет контролировать поле превращения черной пешки и создаст угрозу Крe7. Из двух маршрутов ладьи на поле e1 (h5—e5—e1 и h5—h1—e1) решает только первый. **1.Лe5! a2 2.Лe1 Лe2** (другие ответы проигрывают быстрее) **3.Лg1! Лg2 4.Л:g2! a1Ф 5.Крg8 Фf1 6.Лb2+ Крa6 7.f8Ф Фc4+ 8.Фf7 Фg4+ 9.Крf8 Фc8+ 10.Крg7** с выигрышем, так как следующий шах приводит к размену ферзей.

Четвертая страница обложки

(см. «Квант», 1981, № 12)

См. рис. 7.

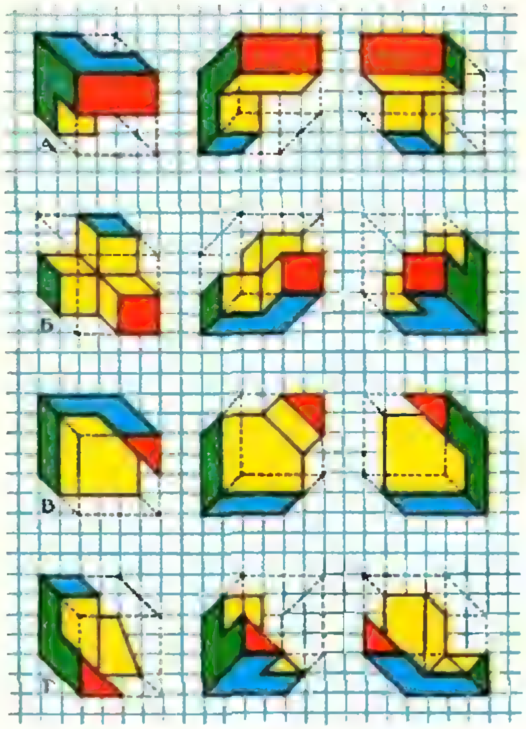


Рис. 7.

Главный редактор — *академик* И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — *академик* А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. И. Башмаков, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, В. М. Глушков, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, А. Прокофьев, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Кривенко

117071, Москва, Ленинский проспект, 15.
«Физматлит», «Квант», тел. 232-49-25
Сдано в набор 16.12.81. Подписано в печать 27.1.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,08 Т-00332
Цена 40 коп. Заказ 3132 Тираж 179 849 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

МАШИНА УГАДЫВАЕТ СЧЕТ

Перед началом 30-го, юбилейного матча на первенство мира по шахматам во всех прогнозах единодушно предсказывалась победа А. Карпова. Но счет точнее всех указал компьютер — 6:2. Однако в матчах на первенство мира легкой борьбы не бывает, и поэтому перед сражением в Мерано Карпов провел фундаментальную подготовку со своими тренерами, международными гроссмейстерами И. Зайцевым и Ю. Балашовым. Уже первая партия матча показала, что чемпион мира — в прекрасной спортивной форме.

В. Корчной — А. Карпов
Ферзевый гамбит

1. c4 e6 2. Кc3 d5 3. d4 Сe7 4. Кf3 Кf6 5. Сg5 h6 6. Сh4 0—0 7. e3 b6 8. Лc1 Сb7 9. Сe2. Так же начиналась первая партия матча в Багио. Тогда после 9...dc 10. С:c4 Кbd7 11. 0—0 c5 12. dc К:c5 шансы сторон уравнялись и вскоре последовало соглашение на ничью. На этот раз Карпов избегает быстрых упрощений. **9...Кbd7 10. cd ed 11. 0—0 c5 12. dc bc 13. Фc2 Лc8 14. Лfd1 Фb6 15. Фb1.** Белые уже испытывают затруднения. **15...Лfd8 16. Лc2 Фe6 17. Сg3 Кh5 18. Лcd2 К:g3 19. hg Кf6 20. Фc2 g6 21. Фa4 a6 22. Сd3 Крg7 23. Сb1 Фb6.** Перемещения белого ферзя и слона не производят впечатления, а ход пешкой приводит белых к катастрофе. **24. a3 d4!!** Эффектный прорыв, рассекающий доску пополам. На одной ее части — одинокий король, на другой — заблудившийся ферзь. **25. Кe2.** Равносильно капитуляции, в случае 25. ed черным еще предстояло найти несколько сильных ходов. **25...de 26. fe c4 27. Кed4 Фc7 28. Кh4 Фe5 29. Крh1 Крg8 30. Кdf3 Ф:g3 31. Л:d8+ С:d8 32. Фb4 Сe4! 33. С:e4 К:e4 34. Лd4 Кf2+ 35. Крg1 Кd3 36. Фb7 Лb8 37. Фd7 Сc7 38. Крh1 Л:b2 39. Л:d3 cd 40. Ф:d3 Фd6 41. Фe4 Фd1+ 42. Кg1 Фd6 43. Кhf3 Лb5. Белые сдались.**

После 14-й партии счет стал 5:2 в пользу чемпиона мира и чувствовалось, что дело идет к концу. Число журналистов, аккредитованных на матче, еще более возросло. Карпов не заставил их долго ждать развязки. 18-я партия оказалась последней.

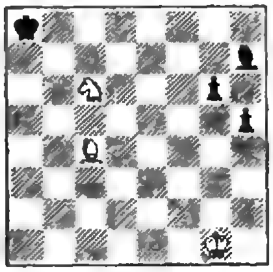
А. Карпов — В. Корчной
Испанская партия

1. e4 e5 2. Кf3 Кc6 3. Сb5 a6 4. Сa4 Кf6 5. 0—0 К:e4 6. d4 b5 7. Сb3 d5 8. de Сe6 9. Кbd2 Кc5 10. c3 d4 11. С:e6 К:e6 12. cd Кc:d4. В теории хорошо известно продолжение 13. К:d4 Ф:d4. Оно встретилось еще в 1914 году в партии Капабланка — Ласкер. Карпов применил здесь сразу две сокрушительные новинки. В 14-й партии последовало 13. **Кe4!** Претендент продумал 78 минут и после 13...Сe7 14. Сe3 К:f3+ 15. Ф:f3 0—0 16. Лfd1 Фe8 17. Кf6+! С:f6 18. ef Фc8 19. fg Лd8 20. h4 белые уверенно довели встречу до победы. В следующей «черной» партии Корчной сыграл сильнее — 14...Кf5 и спас пол-очка. И вот 18-я партия. **13. a4!!** Ответ последовал только через 50 минут, но найти достойной защиты черные не смогли. **13...Сe7 14. К:d4 К:d4 15. Кe4 Кe6 16. Сe3 0—0 17. f4 Ф:d1 18. Лf:d1 Лfb8 19. Лd7 Сf8 20. f5 Кd8 21. a5 Кc6 22. e6! fe 23. f6 Кe5 24. Л:c7 Лc8 25. Лac1 Л:c7 26. Л:c7 Лd8 27. h3 h6 28. Лa7 Кc4 29. Сb6!** Перед решающими действиями белые сгоняют ладью с активной позиции — после 29...Лd1+ 30. Крf2 Лb1 31. f7+ Крh7 32. Лa8 теряется фигура. **29...Лb8 30. Сc5 С:c5 31. К:c5 gf 32. b4 Лd8 33. Л:a6 Крf7 34. Лa7+ Крg6 35. Лd7 Лe8 36. a6 Лa8 37. Лb7 Крb5 38. Л:b5 Крe5 39. Лb7 Крd5 40. Лf7 f5 41. Лf6.**

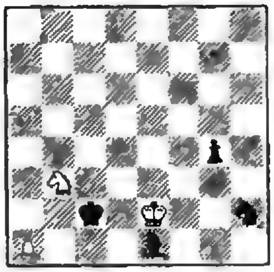
Историческая позиция — она завершила 30-й матч на первенство мира. Черные партию отложили, но потом сдали ее без доигрывания. Анатолий Карпов в третий раз взошел на шахматный Олимп!

Конкурсные задания

Скоро в свет выходит сборник «Этюды глазами гроссмейстеров». Следующие два этюда отобраны и прокомментированы для сборника А. Карповым.

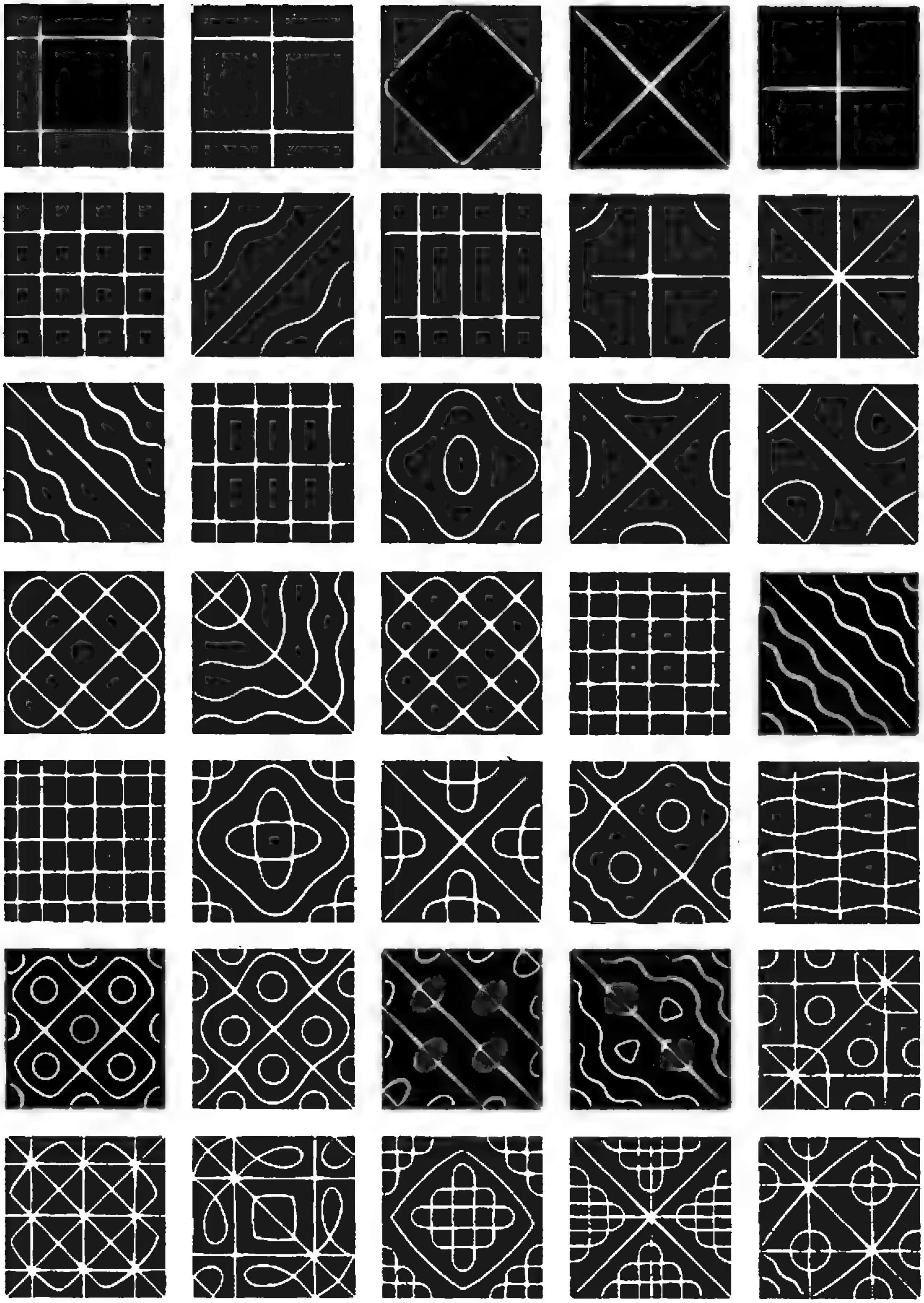


3. Ан. Кузнецов, 1964 г. Белые начинают и выигрывают.



4. М. Либуркин, 1932 г. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).



Оказывается, звуковые колебания стеклянной или металлической пластинки можно не только услышать, но и... увидеть. Это впервые продемонстрировал немецкий ученый Эрнст Хладни в 1787 году.

Если на поверхность пластинки насыпать мелкий песок и возбудить колебания пластинки, то песок перераспределится, собираясь вдоль отдельных линий. Эти линии образуют различные фигуры, которые теперь называют хладниевыми фигурами. Некоторые из них и изображены на приведенном рисунке.

Многие ученые пытались разработать математическую теорию колебаний пластин. Среди них — Симеон Дени Пуассон, о котором рассказывается в этом номере журнала.

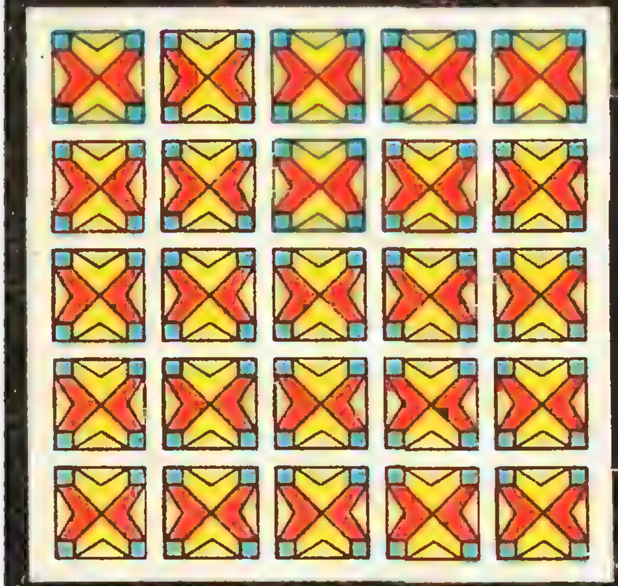
Цена 40 коп.
Индекс 70465

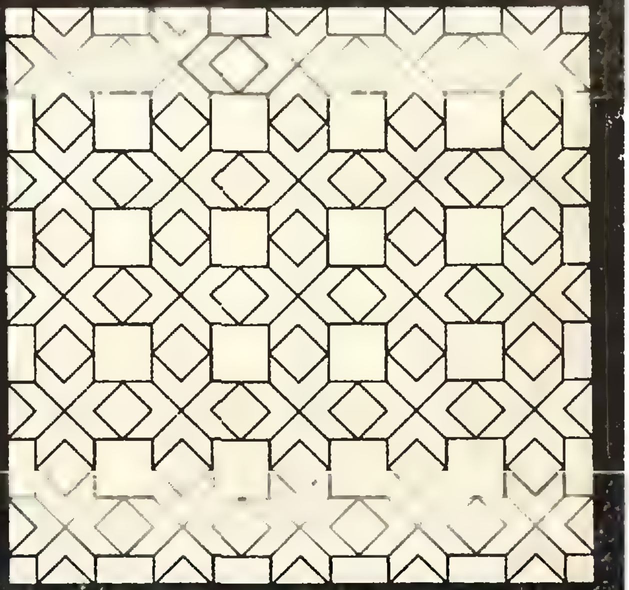
На этой странице обложки вы видите четыре машинных орнамента, созданных учащимися 4-го класса школы-интерната № 32 гор. Москвы Таней Власовой, Таней Дебрянской и Людой Барабановой с помощью системы машинной графики «Алграф».

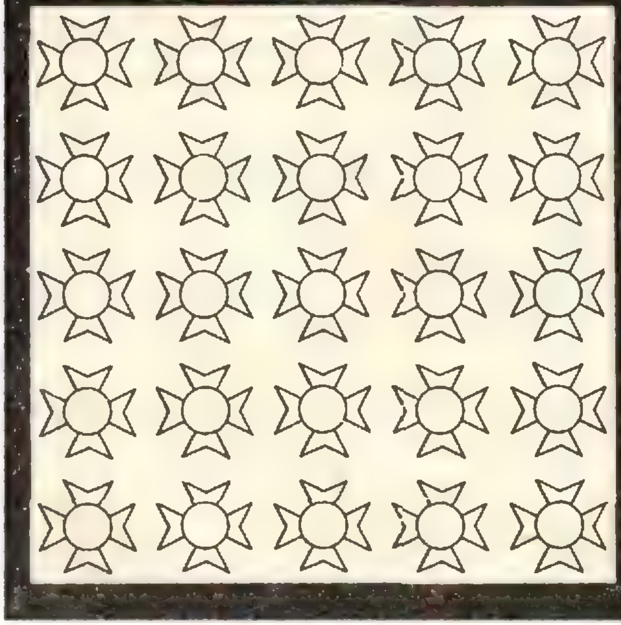
Рисунки кодировались на упрощенном языке, позволяющем различным способом задавать геометрические элементы, преобразования координат и т. д.

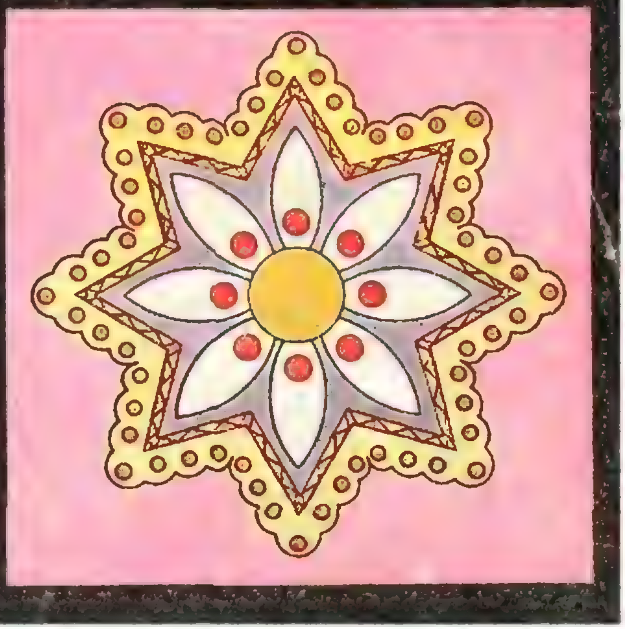
Авторы рисунков немного раньше срока освоили координатные системы, отрицательные числа, операции параллельного переноса и поворота. На экскурсиях в вычислительный центр они потренировались в подготовке перфокарт с заданиями, наблюдали за работой построителя. Тут кому-то из ребят в голову пришла идея заставить построитель чертить на стекле. Это делается в два этапа: сначала линии контура автоматически наносятся черной тушью, затем части изображения вручную закрашиваются масляной краской разных цветов. Рисунок смотрится «с обратной стороны» и получается блестящим и красивым.

Ю. Котов









НОМЕР
3

Квант 3
1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Годовщина замечательной статьи	2	Anniversary of an outstanding publication
Л. Понтрягин. Комплексные числа	3	*L. Pontriagin.* Complex numbers
В. Лишевский. Даниил Бернулли	7	*V. Lishevski.* Daniel Bernoulli
А. Варламов, А. Шапиро. В голубом просторе	10	*A. Varlamov, A. Shapiro.* In the blue yonder
Лаборатория «Кванта»		**Kwant's lab**
И. Алексеев, Д. Свирида. И светит и греет	17	*I. Alexeev, D. Svirida.* Heats as well as lights
Математический кружок		**Mathematics circle**
М. Евграфов. Механика волшебного кубика	20	*M. Evgrafov.* Mechanics of the magic cube
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Победители конкурса «Кванта»	26	Kvant contest winners
Задачи М731 — М735; Ф743 — Ф747	27	Problems M731—M735; P743—P747
Решения задач М691 — М695; Ф703 — Ф707	30	Solutions M691—M695; P703—P707
Список читателей, приславших правильные решения	37	List of readers who have sent correct solutions
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	39	Problems
Н. Иванова. Самосовмещения фигур и геометрические задачи	40	*N. Ivanowa.* Maps of sets into themselves and geometry problems
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
В. Можаев. Фотоны	42	*V. Mojaev.* Photons
Варианты вступительных экзаменов в вузы		**College entrance exams**
Московский инженерно-физический институт	46	Moscow engineering-physics institute
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	47	Leningrad state A. I. Hertsen pedagogical institute
Московский институт химического машиностроения	48	Moscow chemical machinebuilding institute
Харьковский институт радиоэлектроники	49	Kharkov radioelectronics institute
Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина	51	Moscow A. N. Kossygin textile institute
Искусство программирования		**The art of programming**
Заочная школа программирования. Урок 19	52	Computer programming correspondance school. Lesson 19
Информация		**Information**
И. Фрумин. Красноярская летняя школа	57	*I. Frumin.* The Krasnoyarsk summer school
Ответы, указания, решения	59	**Answers, hints, solutions**
Новости науки	16	**Science news**
Смесь *(19, 58)*		**Miscellaneous** *(19, 58)*
Шахматная страничка		**The chess page**
Майя остается чемпионкой *(3 с. обложки)*		Maya retains world title *(3rd cover page)*
Наша обложка	38	**Our cover page**

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982

Годовщина замечательной статьи

Шестьдесят лет назад, в марте 1922 года в журнале «Под Знаменем Марксизма» была впервые опубликована работа В. И. Ленина «О значении воинствующего материализма». В ней четко обозначено несколько очень важных задач, которые не потеряли своей актуальности и в наши дни.

Прежде всего — задача укрепления и развития союза марксистской философии и естествознания. Еще в 1909 году в книге «Материализм и эмпириокритицизм» Ленин убедительно показал, что в период величайшей революции в физике, связанной с открытием радиоактивности и сложного строения атомов, созданием специальной теории относительности и т. д., многие выдающиеся ученые оказались не в состоянии правильно оценить суть происходящих событий. Они воспринимали их как глубокий кризис физики, ликвидацию ряда основных ее понятий и законов, крах материализма и торжество идеализма в самых разнообразных формах. Научный анализ революции в физике и точный прогноз ее дальнейшего развития можно было сделать только с позиций диалектического материализма, что и было выполнено В. И. Лениным.

Борьба материализма с идеализмом приобрела в последующие годы еще большую остроту в связи с возникновением квантовой механики и общей теории относительности. И здесь победа оказалась на стороне диалектического материализма. Идеи, разработанные Лениным в его гениальной книге, блестяще выдержали испытание временем.

Для правильной оценки роли и места физики в необычайно расширившемся семействе естественных наук, в познании окружающей нас природы, совершенно недостаточно хорошего знания ее законов и умения правильно решать конкретные физические задачи. Необходимо овладеть основами марксистского научного мировоззрения. Это отчетливо должны понимать все, кто хочет стать физиками или математиками. «...без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания» — так писал В. И. Ленин в своей работе «О значении воинствующего материализма». А это означает, что и в школьные годы, успешно овладевая физикой и математикой, надо не менее упорно изучать общественные науки.

Буржуазное миросозерцание всегда было тесно связано с религией и мистикой, стремящимися примирить широкие народные массы с политическим и социальным неравенством, непрерывно растущей эксплуатацией со стороны предпринимателей, призывающими к смирению, покорности судьбе, непротивлению вопиющему злу. И чем сложнее оказывалась конкретная социальная обстановка в какой-либо капиталистической стране, тем активнее пропагандировались религиозные представления. Никогда, например, в США не было такого ажиотажа вокруг восточных религиозных культов, разнообразных, порою изуверских сект, гадалок, прорицателей, астрологов, как в наши дни.

Религиозные представления до сих пор сохраняются и в сознании некоторых наших граждан. Церковь в СССР отделена от государства, и каждый из вас имеет полную свободу в выборе того или иного мировоззрения. Но это вовсе не означает, что те, кто являются атеистами, не должны вести активную антирелигиозную пропаганду, быть, по словам Ленина, «воинствующими атеистами». Современная наука дает вам множество убедительных подтверждений несостоятельности религиозных представлений о «сотворении мира», возникновении и развитии человека и человеческого общества. Их следует широко использовать в целях антирелигиозной пропаганды. Эту пропаганду надо вести терпеливо, настойчиво, убедительно, индивидуально, не оскорбляя религиозных чувств верующих. Каждый отвоеванный нами у церкви гражданин — это реальная победа в строительстве коммунистического общества. Такова вторая задача, поставленная В. И. Лениным в этой замечательной статье.

Л. Понтрягин

Комплексные числа

Здесь я прежде всего очень кратко рассказываю о том, как возникли в математике и постепенно утвердились в ней комплексные числа. Затем даю определение комплексных чисел, действий над ними и их геометрическую интерпретацию. Попутно доказываются формулы косинуса и синуса суммы, тесно связанные с умножением комплексных чисел.

Историческая справка

Из курса математики известно, что отрицательные числа введены прежде всего для того, чтобы операция вычитания, обратная к операции сложения, была всегда возможна. По аналогичной причине в математике появились комплексные числа. Если рассматривать только действительные числа, то операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат, не всегда возможна, так как нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Этого, однако, недостаточно, чтобы заводить в математике новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречается корень квадратный из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему корень квадратный из отрицательного числа. В XVI веке Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9, с. 2). Оказалось, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается корень квадратный из отрицательного числа (там же, с. 11). Обнаружилось таким образом, что, производя вычисления с выражениями, содержащими корень квадратный из отрицательного числа, можно получить вполне понятные результаты. Поэтому эти корни стали употреблять в математике. Назвали их мнимыми числами — тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам на грани XVIII—XIX столетий дал Гаусс («Квант», 1977, № 8, с. 2), который назвал их комплексными числами, дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Определение комплексных чисел

Мы будем исходить из того, что действительные числа нам известны. Мы знаем, что для них определены два основных действия — сложение и умножение — и имеются обратные к ним действия — вычитание и деление. Для этих действий выполняются хорошо известные правила, которые обычно употребляются совершенно автоматически — поэтому я их не буду здесь формулировать. Множество объектов, для которых определены действия сложения и умножения и обратные к ним действия вычитания и деления, причем выполнены обычные правила, имеющие место для действительных чисел, называется в современной абстрактной алгебре *полем.*

Таким образом, с точки зрения современной абстрактной алгебры множество **R** всех действительных чисел представляет собой поле.

Академик Л. С. Понтрягин написал статью «Комплексные числа и основная теорема алгебры» специально для «Кванта». Ввиду большого объема вторая часть статьи будет опубликована в следующем номере.

Поставим теперь перед собой задачу расширить понятие числа или, как говорят в абстрактной алгебре, расширить поле $\mathbb{R}$ до поля K таким образом, чтобы в этом новом поле K уравнение

$$z^2+1=0 \qquad (1)$$

имело решение. Элемент поля K, который удовлетворяет уравнению (1), мы обозначим через i. Таким образом, для i имеем

$$i^2=-1. \qquad (2)$$

Так как поле K содержит все действительные числа и элемент i и так как в нем возможны действия сложения и умножения, в поле K должны содержаться всевозможные многочлены относительно i с действительными коэффициентами, в частности — все многочлены первой степени, то есть выражения вида

$$z=x+yi=x+iy,$$

где x и y — действительные числа. Эти выражения и называются *комплексными числами*. Действия над ними мы определим как действия над многочленами, учитывая при этом условие (2). Комплексные числа вида

$$z=x+0i=x$$

являются действительными числами. Комплексные числа вида

$$z=0+yi=yi$$

называются *чисто мнимыми числами*.

Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ — два комплексных числа. Согласно высказанному правилу сумма и произведение этих комплексных чисел определяются равенствами

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i >= \\ =(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i; \qquad (3)$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\ (x_2+y_2i)= \\ =x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)i+y_1y_2i^2= \\ =(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i. \qquad (4)$$

При получении последнего равенства мы использовали условие (2).

В случае, если число $z_1=x_1$ — действительное, получаем

$$x_1z_2=x_1x_2+x_1y_2i. \qquad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что сумма и произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число.

Для того чтобы убедиться, что действие вычитания, обратное действию сложения, существует, достаточно найти число $-z$, противоположное числу z, а для того чтобы убедиться, что возможно деление, достаточно для $z\neq0$ указать число z^{-1}, обратное числу $z=x+yi$. Числа эти, как легко видеть, задаются формулами

$$-z=-x-yi,$$

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Таким образом, величина z^{-1}, обратная к z, существует всегда, когда $z\neq0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат (рис. 1). Комплексное число $z=x+yi$ мы поместим в точку $z=(x;\ y)$ с координатами x, y. Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z. Таким образом, буква z обозначает у нас одновременно комплексное число, точку z, изображающую это комплексное число, и вектор z, соответствующий этому комплексному числу. При этом изображении действительные числа попадают на ось абсцисс — поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного, а чисто мнимые числа попадают на ось ординат — поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного. Нуль попадает в начало координат.

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z=$

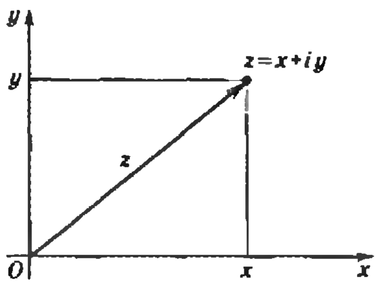


Рис. 1.

$=x+yi$ и обозначается $|z|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|=1$, составляют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На этой окружности лежит число 1. Из точки 1 отложим по окружности дугу заданной длины φ в направлении против часовой стрелки. Конец этой дуги обозначим через (φ). Если φ — отрицательное число, то для получения (φ) нужно отложить от точки 1 длину дуги $|\varphi|$ по часовой стрелке. Как известно, абсцисса точки (φ) называется $\cos\varphi$, а ее ордината $\sin\varphi$. Таким образом, комплексное число (φ) задается формулой

$$(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Итак, всякое комплексное число z, по модулю равное 1, записывается в виде (6). Если z — произвольное комплексное число, модуль которого $|z|=\varrho$ отличен от 0, то число z/ϱ является комплексным числом, по модулю равным 1, и потому записывается в виде (6). Из равенства

$$\frac{z}{\varrho}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

мы получаем

$$z=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (7)$$

Запись (7) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ называется *аргументом* комплексного числа. Если модуль ρ комплексного числа z отличен от нуля, то аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — целое число. Если же модуль ρ комплексного числа равен 0, то формула (7) также имеет место, однако в этом случае аргумент комплексного числа вовсе не определен.

Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки z.

Дадим теперь геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

Из формул (3) и (5) следует, что комплексные числа складываются и умножаются на действительные числа, как векторы.

Геометрический смысл сложения комплексных чисел очевиден: вектор z_1+z_2 — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2. Отсюда вытекает важное неравенство

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (8)$$

Для того чтобы дать геометрическое истолкование умножения комплексных чисел, нужно употребить операцию поворота вектора или, что то же самое, комплексного числа. Повернув вектор z против часовой стрелки на угол α, мы получим некоторый новый вектор, который обозначим через $R_\alpha(z)$. Геометрически ясно, что операция поворота R_α имеет следующее свойство: если a — действительное число, то

$$R_\alpha(az)=aR_\alpha(z),$$
$$R_\alpha(z_1+z_2)=R_\alpha(z_1)+R_\alpha(z_2).$$

Из этих двух формул следует, что если a_1 и a_2 — два действительных числа, то имеет место соотношение

$$R_\alpha(a_1z_1+a_2z_2)=a_1R_\alpha(z_1)+a_2R_\alpha(z_2). \qquad (9)$$

Непосредственно ясно также, что

$$R_\alpha(1)=\cos\alpha+i\sin\alpha. \qquad (10)$$

Докажем теперь, что поворот комплексного числа $z=x+yi$ на угол α равносилен умножению его на комплексное число $\cos\alpha+i\sin\alpha$, то есть что

$$R_\alpha(z)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z. \qquad (11)$$

Для этого рассмотрим сначала отдельно поворот на угол $d=\frac{\pi}{2}$. В этом случае $\cos d+i\sin d=i$, и равенство (11) принимает вид $R_dz=iz$. С одной стороны, геометрически очевидно, что $R_d(1)=i$, $R_d(i)=-1$. С другой стороны, $i\cdot 1=i$, $i\cdot i=-1$. Таким образом,

$$R_d(1)=i\cdot 1,\ R_d(i)=i\cdot i.$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$iz=i\cdot(x+iy)=x\cdot i+y(-1)=$$
$$=xR_d(1)+yR_d(i)=R_d(x\cdot 1+y\cdot 1)=$$
$$=R_d(x+iy)=R_d(z).$$

Таким образом, формула (11) доказана для $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ получаем

$$z\cdot i=iz=R_d(z)=R_d(\cos\alpha+i\sin\alpha)=$$
$$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=R_d\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=R_d(i).\quad(12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z=i$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (11) для произвольного комплексного числа

$$z=x+iy.$$

В силу формул (9), (10), (12) имеем

$$R_\alpha(z)=R_\alpha(x+iy)=xR_\alpha(1)+yR_\alpha(i)=$$
$$=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)+$$
$$+y(\cos\alpha+i\sin\alpha)i=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ (x+iy)=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z.$$

Таким образом, формула (11) полностью доказана.

Применяя формулу (11) к комплексному числу $z=\cos\beta+i\sin\beta$, получаем

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ (\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=R_\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)=R_\alpha(R_\beta(1))=$$
$$=R_{\alpha+\beta}(1)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$$

Таким образом,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ (\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$$

Производя перемножение комплексных чисел, стоящих в левой части, по формуле (4), мы получим

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ (\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+$$
$$+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\ i.$$

Значит, мы получили формулы для косинуса и синуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Для произвольных комплексных чисел, которые мы запишем в виде $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $s(\cos\beta+i\sin\beta)$, получаем

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=rs(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)).\quad(13)$$

Таким образом, *при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Формулу (13) очевидным образом можно распространить на произвольное число сомножителей. Если все эти сомножители равны между собой и равны комплексному числу $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, то мы получаем

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=$$
$$=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Эта формула очень интересна. Она дает возможность извлечь корень n-й степени из произвольного комплексного числа $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Именно, оказывается, что число корней n-й степени из числа $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq0$ равно n, причем корни эти расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\varrho}$ с центром в начале координат и составляют вершины правильного n-угольника. Это утверждение я предоставляю для доказательства читателям.

В частности, корень n-й степени из единицы имеет n значений, которые являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг, причем одна из его вершин есть единица (рис. 2). В виде формулы эти корни записываются следующим образом:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

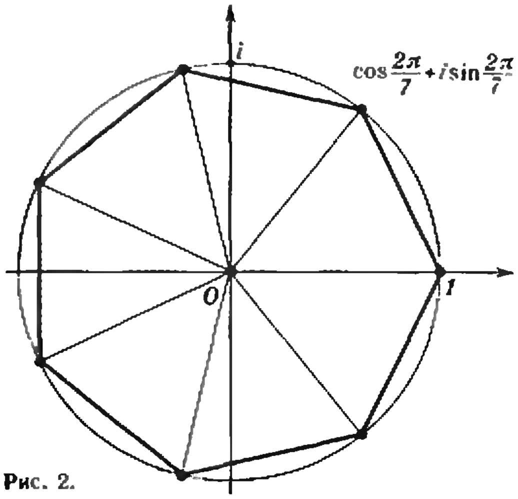
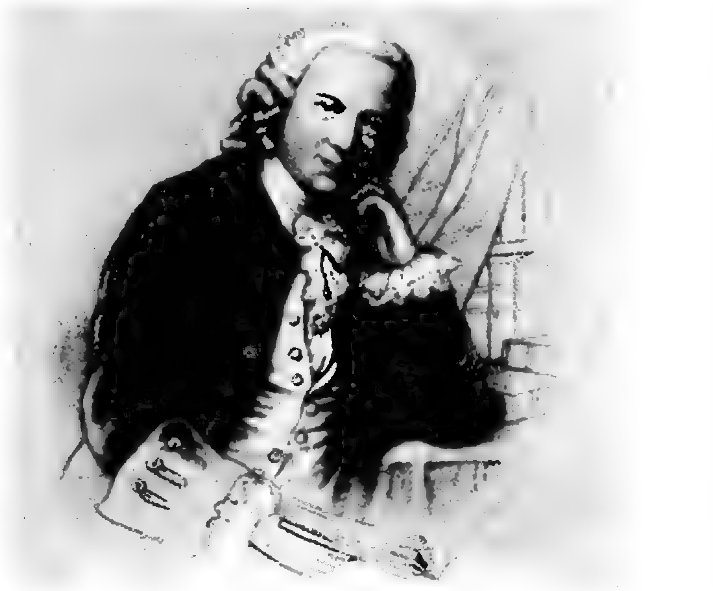


Рис. 2.



В. Лишевский

Даниил Бернулли

> *... для меня истинное удовольствие всю жизнь состоять в русской императорской службе...*
>
> *Д. Бернулли*

Говорят, что природа, создав гения, затем отдыхает, творя его потомков. И это, в основном, верно. Но не бывает правил без исключения, и одно из них — семья Бернулли. На протяжении ста лет род Бернулли дал человечеству десятки выдающихся деятелей науки — математиков, физиков, врачей, юристов, риториков... Многие из них были членами различных академий, пятеро — академиками Петербургской академии наук.

Наиболее известны братья Якоб (1654—1705) и Иоганн (1667—1748) Бернулли и сын Иоганна Даниил.

Даниил Бернулли родился 29 января 1700 года в Гронингене (Голландия), где его отец преподавал математику в университете. В 1705 году семья переехала в город Базель (Швейцария), где Иоганн Бернулли «унаследовал» место профессора математики после смерти своего старшего брата Якоба.

Даниил учился в Базельской гимназии. После окончания гимназии в 1713 году его отправили во Францию совершенствовать знание французского языка. После возвращения на родину в 1716 году он получил звание магистра философии.

По настоянию отца Даниил занялся изучением медицины. Он учился в Гейдельберге, в Страсбурге и после защиты диссертации «О дыхании» в 1720 году становится лиценциатом медицины. Но сердце Даниила не лежало к врачебной деятельности. «...Пример членов его семьи, а именно его отца и старшего брата Николая, а также наклонности его собственной души влекли его к математическим наукам и к изучению природы»,— так писал о себе в третьем лице Даниил Бернулли в «Автобиографии», сохранившейся в архиве Академии наук СССР.

В 1724 году выходит в свет первый научный трактат Даниила Бернулли «Математические упражнения». В этом же году он получает предложение возглавить академию в Генуе. Пока Даниил раздумывал, пришло приглашение из России поступить на службу в только что созданную Петром I Петербургскую академию.

Предложение было заманчивым, но Даниилу не хотелось расставаться с братом Николаем, с которым его связывала трогательная дружба. Затруднение разрешилось очень просто. Тогдашний президент Петербургской академии Л. Л. Блюментрост пригласил обоих Бернулли, и в октябре 1725 года братья прибыли в Петербург. Даниил получил кафедру физиологии, Николай — кафедру математики.

Братья активно включились в работу академии. В протоколе заседания от 14 января 1726 года записано: «Даниил Бернулли, физиологии профессор, начала математические к Теории медической потребныя, да приличиость их к физиологии научит: перед обедом от часа 7 до 8. Николай Бернулли, математики профессор, о тех частях математики, которые к физике привязаны, в особливо о механике читать будет с 8 до 9».

Деятельность Николая Бернулли в Петербургской академии наук продолжалась недолго. Климат северной столицы оказался для него слишком суровым. Через восемь месяцев после приезда в Петербург Николай Бернулли умер.

Даниил Бернулли оставался в Петербурге до лета 1733 года, а затем вернулся в Базель. Здесь он получил кафедру медицины в университете, но занимался, в основном, экспериментальной физикой. В 1750 году он возглавил кафедру физики, которую и занимал до последних дней жизни.

После отъезда из России Даниил Бернулли поддерживал тесную связь с Петербургской академией наук, почетным членом которой он остался. Он переписывался с петербургскими учеными, посылал свои труды для публикации. Из 75 научных работ Даниила Бернулли 47 опубликованы в трудах Петербургской академии наук.

Вклад Даниила Бернулли в науку трудно переоценить. Он занимался уравнением Рикатти $y' = ax^n + by^2$, колебаниями струн и стержней, теорией вероятностей, рядами, пределом выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$... Вместе с М. В. Ломоносовым он стоял у истоков кинетической теории газов. В его трудах можно найти предвосхищение законов Гей-Люссака, Клапейрона и Шарля...

Даниил Бернулли был первым, кто высказал суждение о том, что давление газа обусловлено тепловым движением молекул. В своей «Гидродинамике», принесшей ему мировую славу, он пишет:

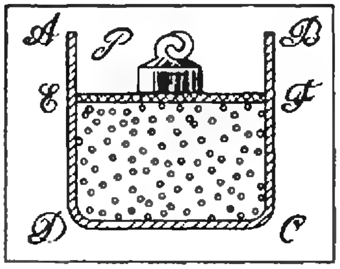


Рис. 1.

«Представьте себе вертикально поставленный цилиндрический сосуд *ADCB* (рис. 1) и в нем подвижную крышку *EF*, поверх которой лежит груз *P*. Пусть в пространстве *EDCF* содержатся мельчайшие частицы, движущиеся чрезвычайно быстро в различных направлениях; таким образом частицы, ударяясь о крышку и поддерживая ее своими непрерывно повторяющимися ударами, образуют упругую жидкость, которая при удалении или уменьшении тяжести *P* расширяется, а при увеличении сжимается...»

«Гидродинамика» была написана в Петербурге и издана в Страсбурге в 1738 году. В предисловии к ней Даниил Бернулли пишет: «...Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук... Настоящая моя работа преследует единственную цель: принести пользу Академии, все усилия которой направлены к тому, чтобы содействовать росту и общественной пользе благих наук».

Даниил Бернулли неоднократно подчеркивал, что как ученый он сформировался в Петербургской академии наук, что свои открытия в науке он совершил благодаря тем исключительным условиям, которые были созданы в России для жизни и творчества ученых. В гидродинамике Даниил Бернулли дал уравнение установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости. Теперь это уравнение называют уравнением Бернулли.

Рассмотрим идеальную жидкость, текущую по трубе с переменным сечением (рис. 2). (Говоря «идеальная жидкость», мы имеем в виду, что в жидкости отсутствует трение.) Через сечение s_2 жидкость течет с большей скоростью, чем через сечение s_1. Действительно, поскольку жидкость не сжимаема, через любое сечение за одно и то же время должна пройти одна и та же масса

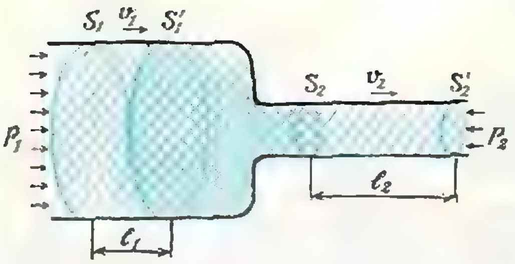


Рис. 2.

жидкости, то есть

$$\varrho v_1 s_1 t = \varrho v_2 s_2 t.$$

Из этого условия — его называют условием неразрывности для установившегося течения — следует, что $v_1 : v_2 = s_2 : s_1$ и $v_2 > v_1$ (при $s_1 > s_2$).

Представим себе, что некоторая масса жидкости, заключенная между сечениями s_1 и s_2, за время Δt переместилась так, что сечение s_1 перешло в сечение s_1', а сечение s_2 — в сечение s_2'. Потенциальная энергия тяготения этой массы осталась прежней, а кинетическая энергия изменилась на величину

$$\Delta T = \frac{\Delta m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m_1 \cdot v_1^2}{2},$$

где Δm_1 — масса жидкости между сечениями s_1 и s_1', а Δm_2 — масса жидкости между сечениями s_2 и s_2'. Это изменение кинетической энергии равно работе внешних сил за время Δt. Внешними по отношению к выбранному объему жидкости силами являются силы давления $F_1 = p_1 s_1$ и $F_2 = p_2 s_2$. Следовательно,

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} = p_1 s_1 l_1 - p_2 s_2 l_2. \qquad (*)$$

Из условия неразрывности следует, что $s_1 l_1 = s_2 l_2$ и $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \varrho s_1 l_1 = \varrho s_2 l_2$ (ведь жидкость несжимаема). Учитывая эти соотношения, из (*) мы получаем следующее:

$$\varrho v_2^2 \frac{s_1 l_1}{2} - \varrho v_1^2 \frac{s_1 l_1}{2} = (p_1 - p_2) s_1 l_1,$$

откуда

$$\frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2 = \text{const}.$$

Это и есть уравнение Бернулли для жидкости, текущей по горизонтальной трубе. Если в своем течении жидкость перемещается и по вертикали, необходимо учитывать потенциальную энергию тяготения. В общем виде уравнение Бернулли записывается так:

$$\frac{\varrho v^2}{2} + p + \varrho g h = \text{const}.$$

Это же уравнение справедливо и для газов, текущих со сравнительно небольшими скоростями.

Уравнение Бернулли имеет большое значение в теоретической и практической гидромеханике. Оно используется при расчете различных трубопроводов, насосов и расходомеров, исследовании процессов фильтрации и т. п. Вместе с некоторыми другими уравнениями уравнение Бернулли, записанное для среды с переменной плотностью ϱ, составляет основу газовой динамики. Даниилу Бернулли совместно с Леонардом Эйлером принадлежит главная заслуга в разработке механики жидких тел.

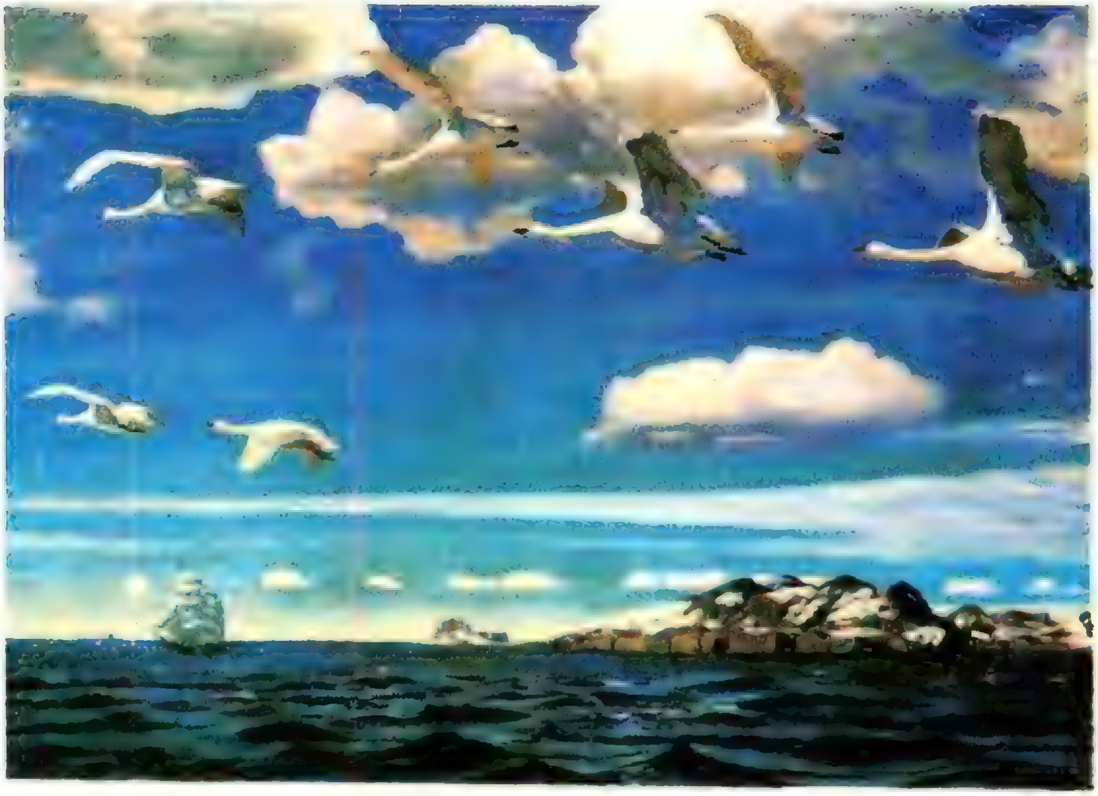
Можно без преувеличения сказать, что наука была единственной страстью Даниила Бернулли. Из-за занятий наукой у него были натянутые отношения с отцом, с которым они все время вели споры о приоритете. Отец и сын независимо занимались одними и теми же проблемами и занимались успешно. Об этом ярко свидетельствует следующий факт. В 1732 году Парижская академия наук объявила конкурс на тему «О взаимном наклонении планет». Две работы из поступивших на конкурс были признаны лучшими, и премию было решено разделить между их авторами. Когда вскрыли конверты с девизами, то оказалось, что эти авторы — отец и сын Бернулли. «Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли и хранит наследственный блеск фамилии», — писал Лейбниц Иоганну Бернулли.

Даниил Бернулли неоднократно получал премии Парижской академии наук. Ими были отмечены его работы «О лучшем способе устройства якорей» (1738), «О морском приливе и отливе» (1740), «О наилучшем способе устройства магнитных стрелок наклонения» (1743), «О лучшем способе определения времени в море» (1745—1746), «Теория магнита» (1742, 1744, 1746)...

Научный авторитет Даниила Бернулли был очень высок. Свидетельством этого было избрание его членом многих иностранных Академий наук (помимо Петербургской) — Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского Королевского общества (1750).

До последних дней жизни он занимался научной деятельностью. 17 марта 1782 года слуга нашел его в кресле заснувшим навсегда.

(Окончание см. на с. 15)



А. Варламов, А. Шапиро

В голубом просторе

Оглядываясь вокруг, мы, чаще всего, видим лишь то, с чем уже знакомы, к чему привыкли. Между тем процесс познания почти всегда начинается с новых наблюдений.

Острой, профессиональной наблюдательностью отличаются художники, поэтому мир, отраженный глазами художников-реалистов в их пейзажах, особенно ярок и многокрасочен, а отдельные явления природы проступают явственнее. И при этом даже очень хорошему художнику нет нужды понимать подчас весьма сложную сущность происходящих в природе явлений, которые он реалистически отображает на своих полотнах. Но вот изучать окружающий мир по картинам хорошего художника-пейзажиста можно даже лучше, чем в натуре, ибо в пейзаже автор как бы останавливает мгновенье, интуитивно усиливая существенное и опуская лишнее, случайное.

Всмотритесь в картину Аркадия Александровича Рылова «В голубом просторе». «Белые птицы, как и облака, легко парят, купаясь в голубой лазури. И так же плавно, как белая птица, по спокойно колышащимся синим волнам океана скользит покрытый парусами корабль»,— так описывает эту картину известный искусствовед А. Федоров-Давыдов. Любуясь в Третьяковской галерее этим замечательным полотном, забываешь, что стоишь в зале музея, и ощущаешь себя участником этого праздника природы.

А теперь отвлечемся от живописи и оглядимся вокруг глазами исследователя. Где же мы оказались?

На этот вопрос ответить несложно — виднеющийся невдалеке скалистый остров покрыт снегом, в море совсем не зимнее, так что мы находимся, вероятно, в полярных широтах.

А откуда художник писал пейзаж — со скалистого уступа берега? или с борта корабля?

Скорее всего, он был на корабле, так как на переднем плане картины не видно прибоя, распределение волн симметрично и не искажено близким присутствием берега.

Давайте теперь попытаемся оценить скорость ветра, который раздувает паруса корабля, скользящего вдали. Мы не первые, кто задается вопросом оценки скорости ветра по величине волн или по другим проявлениям в окружающей нас природе. Еще в 1806 году английский адмирал Ф. Бофорт разработал двенадцатибалльную шкалу для приближенной оценки скорости ветра по его действию на наземные предметы и по волнению в открытом море. Эта шкала принята Всемирной метеорологической организацией, ею пользуются и поныне.

Взглянув на картину, видим, что, согласно таблице Бофорта, ветер «слабый» со скоростью 5 м/с, волнение на воде легкое, изредка образуются маленькие белые барашки. А кстати, почему они белые и так сильно отличаются по цвету от сине-зеленого моря?

Цвет моря определяется многими факторами, среди которых важнейшими являются положение Солнца, цвет неба, рельеф поверхности моря, глубина моря; если глубина невелика, то важным фактором является наличие или отсутствие в воде водорослей и содержание в ней взвешенных твердых частиц. Все эти факторы влияют на отражение света от поверхности моря, на поглощение и рассеяние света в глубине. Поэтому однозначное объяснение видимого цвета моря просто невозможно. Но кое в чем разобраться можно. Так,

Шкала Бофорта

Баллы Бофорта	Словесное определение силы ветра	Средняя скорость ветра (м/с) на высоте 10 м	Действие ветра
0	Штиль	0÷0,2	Зеркально гладкое море
1	Тихий	0,3÷1,5	На море легкая рябь; пены на гребнях нет. Высота волн до 0,1 м
2	Легкий	1,6÷3,3	На море короткие волны с максимальной высотой до 0,3 м
3	Слабый	3,4÷5,4	Легкое волнение на воде; изредка образуются маленькие барашки. Высота волн до 0,6 м
4	Умеренный	5,5÷7,9	Белые барашки на море видны во многих местах. Максимальная высота волн до 1,5 м
5	Свежий	8,0÷10,7	Повсюду видны белые барашки. Средняя высота волн 2 м
6	Сильный	10,8÷13,8	Белые пенистые гребни занимают значительные площади, образуется водяная пыль. Максимальная высота волн до 4 м
7	Крепкий	13,9÷17,1	Гребни волн срываются ветром. Максимальная высота волн до 5,5 м
8	Очень крепкий	17,2÷20,7	Сильное волнение на море. Максимальная высота волн до 7,5 м
9	Шторм	20,8÷24,4	Очень сильное волнение на море. Максимальная высота волн до 10 м
10	Сильный шторм	24,5÷28,4	Поверхность моря белая от пены. Сильный грохот волн подобен ударам. Очень высокие волны — до 12,5 м
11	Жестокий шторм	28,5÷32,6	На море исключительно высокие волны — до 16 м. Небольшие суда временно скрываются из виду.
12	Ураган	>32,7	—

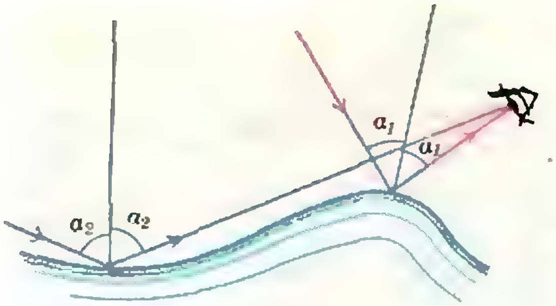


Рис. 1.

например, можно понять, почему цвет ближайших к художнику волн гораздо темнее общего фона моря, а к горизонту море становится светлее.

Степень отражения световой волны при падении на границу раздела двух сред с разными оптическими плотностями определяется углом падения α и относительным показателем преломления сред n. Количественно ее характеризуют коэффициентом отражения R, который равен отношению интенсивностей отраженного и падающего света*). Коэффициент отражения зависит от угла падения. Чтобы обнаружить эту зависимость, понаблюдайте, как отражаются лучи дневного света от поверхности полированного стола. Здесь оптически более плотной средой служит прозрачный слой лака. Вы увидите, что при скользящих лучах ($\alpha \to \pi/2$) отражается практически весь световой поток ($R \to 1$), а с уменьшением угла падения все большая часть светового потока проникает в среду с большей оптической плотностью и все меньшая отражается от поверхности раздела. Коэффициент отражения убывает с уменьшением угла падения.

Обратимся теперь к схематическому изображению волны, показанному на рисунке 1. Из рисунка видно, что углы падения α_1 и α_2 лучей, попадающих в глаз наблюдателя от «фронта» волны и от «спины», разные и $\alpha_2 > \alpha_1$. Поэтому от удаленных областей моря в глаз наблюдателя попадает больше отраженного света, и передний фронт волны виден более темным, чем ровная поверхность моря сзади. В случае многих волн на поверхности моря угол α, вообще говоря, меняется в зависимости от того, смотрим мы на гребень волны или на впадину вдалеке от фронта волны. Однако с удалением от переднего фронта угловой размер темных гребней быстро уменьшается, а угол α_2 все равно остается большим угла α_1. По мере удаления к горизонту картина волн как бы усредняется, наблюдатель уже не видит долин между волнами, и постепенно темные склоны волн исчезают совсем.

Поэтому на картине области моря вблизи горизонта кажутся более светлыми, чем на переднем плане.

Теперь мы можем объяснить, почему барашки на гребнях волн белые. Бурлящая вода в барашках содержит множество пузырьков воздуха, которые непрерывно движутся, лопаются, меняют форму. Углы отражения меняются от точки к точке и во времени. Поэтому в пене барашка солнечные лучи почти полностью отражаются, и барашки воспринимаются белыми.

На цвет моря в большой степени влияет цвет неба над ним. И если первый, как мы уже говорили, предсказать практически невозможно, то цвет неба можно понять на основании физических законов. Ясно, что цвет неба определяется рассеянием солнечных лучей в земной атмосфере. Но почему рассеяние лучей Солнца, спектр которого сплошной, то есть содержит все длины волн, приводит к синему, голубому небу, а само Солнце мы видим желтым? Разобраться в этом вопросе нам поможет закон Рэлея для рассеяния света.

В 1898 году английский физик лорд Рэлей создал теорию рассеяния света на частицах, размеры которых значительно меньше длины волны рассеиваемого света ($d \ll \lambda$). Найденный им закон гласит: *интенсивность рассеянного света пропорциональна четвертой степени частоты световой волны, или обратно пропорциональна четвертой степени длины*

---

*) Интенсивностью света называют среднее (по времени) значение светового потока через единицу поверхности площадки, перпендикулярной к направлению распространения света.

волны. Рэлей применил этот закон к рассеянию света в атмосфере, считая, что рассеяние солнечных лучей происходит на молекулах газов, входящих в состав воздуха (поэтому иногда сформулированный выше закон называют «законом синего неба».)

Отношение длины волны красного света к длине волны синего света составляет 6500Å/4500Å≈1,44. Возводя это число в четвертую степень, получаем 4,3. Таким образом, согласно закону Рэлея интенсивность рассеянного синего света в четыре раза превышает интенсивность рассеянного красного света, и слой воздуха толщиной в десятки километров приобретает окраску с заметным преобладанием синих и голубых цветов. А видимый солнечный свет, который дошел до нас сквозь «заслон» атмосферы, в большой степени лишен коротковолновой части своего спектра. Поэтому Солнце, которое мы видим в прошедших сквозь атмосферу лучах, принимает слабый желтый оттенок. Он может становиться сильнее, оранжевее и краснее по мере захода Солнца, когда солнечным лучам приходится преодолевать больший путь в атмосфере (при восходе Солнца, естественно, смена цветов происходит в обратном порядке).

Заметим, что в законе Рэлея предполагается, что $\lambda \gg d$, однако сама величина d в выражение для интенсивности не входит. Этот факт привел к тому, что заблуждение относительно природы рассеивателей солнечного света в атмосфере, с легкой руки Рэлея, просуществовало вплоть до середины двадцатого века. И только в 1940 году советский физик академик Л. И. Мандельштам показал, что в действительности рассеяние света в атмосфере происходит не на молекулах газов, входящих в состав воздуха, а на весьма неожиданных объектах — неоднородностях плотности воздуха. Но откуда же берутся эти неоднородности? Ведь воздух находится в состоянии термодинамического равновесия, и если даже дует ветер, то связанные с ним неоднородности имеют размеры, превышающие длину волны света в гигантское число раз, и на рассеянии света сказываться никак не могут.

Для понимания природы неоднородностей показателя преломления света давайте более детально разберемся с понятием термодинамического равновесия. Для простоты рассмотрим некоторый макроскопический объем газа, находящийся в замкнутом сосуде.

Физика рассматривает системы, состоящие из гигантского числа частиц, поэтому единственно возможный путь описания свойств таких систем — статистический. Статистический подход означает, что мы следим не за состоянием каждой молекулы в отдельности, а вычисляем средние значения соответствующих физических величин для всей системы в целом. При этом вовсе не обязательно, чтобы для всех молекул значение рассматриваемой физической величины равнялось соответствующему среднему. При рассмотрении нашего макроскопического объема газа наиболее вероятным будет состояние, в котором молекулы газа распределены равномерно по всему объему сосуда. Однако, благодаря тепловому движению молекул, всегда имеется отличная от нуля вероятность того, что концентрация молекул в некоторой области сосуда на некоторое время превысит среднюю концентрацию молекул в рассматриваемом объеме (при этом, естественно, в другой области рассматриваемого объема концентрация молекул на это время понизится). Теоретически возможно даже такое состояние, когда все молекулы газа соберутся в одной половине объема рассматриваемого сосуда, а вторая окажется абсолютно пустой. Но вероятность такого события выражается столь малым числом, что нет никакой надежды на его реализацию даже в пределах времени существования Вселенной, которое по современным представлениям составляет 10^{13} лет.

Однако небольшие отклонения физических величин от их средних значений возможны и не только возможны, но и постоянно происходят благодаря тепловому движению молекул. Эти отклонения называются флуктуациями (от латинского слова fluctuari — колебаться). Именно они и приводят к тому, что в некоторых областях плотность газа возрастает, а в других убывает, что сказывается на величине коэффициента преломления света в данных областях.

Если мы теперь вернемся к рассмотрению рассеяния света в атмосфере, то все рассуждения, проведенные для ограниченного объема газа, останутся справедливыми. Кроме того, так как воздух является смесью различных газов, различие в тепловом движении молекул разных газов приводит к дополнительным возможностям появления локальной неоднородности коэффициента преломления света, связанной с флуктуациями.

Характерный размер областей неоднородности коэффициента преломления света (неоднородности плотности), возникающих рассмотренным флуктуационным путем, зависит от температуры. Для слоев атмосферы, в которых происходит основное рассеяние солнечного света, размеры таких неоднородностей оказываются много меньшими длины волны видимого света, но значительно превышающими размеры молекул газов, входящих в состав воздуха. Поэтому рассеяние света происходит именно на них, а не на молекулах, как это предполагал Рэлей.

И все же небо мы видим синим, а не фиолетовым, хотя закон Рэлея предсказывает преобладание фиолетового цвета. Оказывается, что это расхождение обусловлено двумя причинами. Во-первых, в спектре сол-

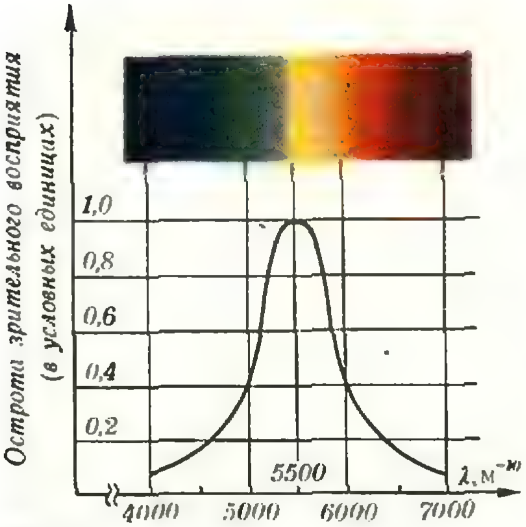


Рис. 2.

нечного света гораздо меньше фиолетовых лучей, чем синих. Вторым виновником кажущегося расхождения теории и практики является наш «регистрирующий прибор» — глаз человека с нормальным зрением. Дело в том, что острота зрительного восприятия человеческого глаза существенно зависит от длины волны света. На рисунке 2 приведена экспериментально построенная кривая, характеризующая эту зависимость. Из рисунка видно, что на фиолетовые лучи глаз реагирует гораздо слабее, чем на сине-зеленые. Именно поэтому воспринимаемые человеческим глазом рассеянные солнечные лучи практически не имеют фиолетовой компоненты.

А почему же на голубом небе мы ясно видим белые облака? Разве при рассеянии света на составляющих их частицах не справедливы выводы из закона Рэлея?

Дело в том, что облака состоят из мельчайших капель воды или кристалликов льда, размеры которых, однако, значительно превышают длины волн видимого света. Поэтому при рассеянии солнечного света на частицах, составляющих облака, закон Рэлея неприменим — рассеяние света всех длин волн происходит приблизительно с одинаковой интенсивностью, и облака воспринимаются белыми. Что мы и видим на картине.

Всмотритесь теперь в форму облаков. Верх облаков на картине — рыхлый и клубящийся, а вот нижняя их граница резко очерчена. С чем это может быть связано? Ответы на этот вопрос могут быть разные, и мы предложим объяснение, представляющееся нам наиболее простым и красивым.

Капельки воды, из которых состоит облако, возникают в результате конденсации водяного пара, содержащегося в воздухе. По мере подъема над уровнем моря давление и температура падают. Очевидно, нижняя граница облака определяется той высотой над уровнем моря, на которой атмосферные условия (давление воздуха и температура) соответствуют условиям конденсации водяного пара.

На рисунке 3 приведена зависимость давления насыщенного пара от температуры. Если на некоторой высоте в атмосфере давление и температура окажутся соответствующими точке на p—T-диаграмме насыщенного пара, начнется конденсация.

Из соображений симметрии понятно, что для высот, много меньших радиуса Земли и расстояния до ближайшего берега, поверхности с постоянной температурой и давлением представляют собой плоскости, параллельные поверхности моря. Вблизи поверхности моря падение температуры происходит достаточно быстро — примерно один градус на сотню метров (вообще говоря, зависимость температуры воздуха от высоты далеко не линейна, но по порядку величины до высот в не-

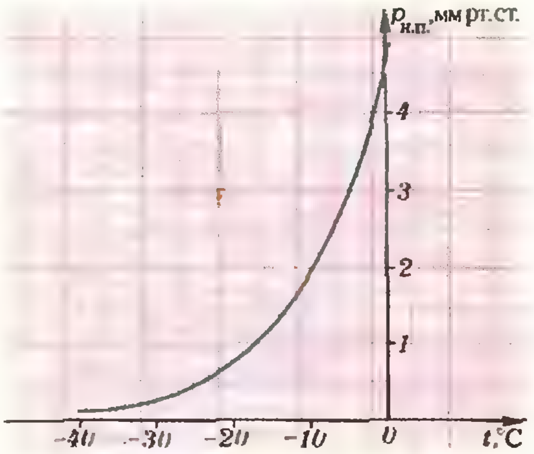


Рис. 3.

сколько километров приведенные данные верны). Если учесть, что размеры облака по горизонтали составляют сотни и тысячи метров, станет понятным, что предлагаемое объяснение приводит к достаточно четко очерченной нижней границе облака, так как разброс высот, на которых будет начинаться конденсация водяного пара,— порядка нескольких десятков метров, что гораздо меньше горизонтальных размеров облака. На заднем плане картины мы видим целый ряд облаков с плоскими нижними границами, которые висят на одном уровне над морем. Подумайте, справедливы ли приведенные соображения в случае, когда облако находится над сушей. Какие требования при этом нужно наложить на рельеф?

На переднем плане картины клином летит стая белых птиц. Впереди — сильный вожак стаи. Оказывается, что форма клина в целом для стаи является более выгодной — птицы, летящие вслед за вожаком, затрачивают меньше усилий, чем если бы они летели «вразброд». Для того чтобы понять, почему это так, давайте рассмотрим, за счет чего птице удается поддерживать себя в воздухе. Будем считать, что ветра нет и воздух неподвижен относительно Земли. Вниз на птицу действует сила тяжести mg. Для того чтобы удержаться на заданной высоте, птица, работая крыльями, создает потоки воздуха, направленные вниз, передавая воздуху в среднем за время Δt такой импульс Δp, что $\frac{\Delta p}{\Delta t}=mg$. Это и есть условие равновесия для птицы в вертикальном направлении. Кроме основных создаваемых потоков воздуха, направленных вниз, при подъеме крыльев для очередного взмаха птица создает более слабые восходящие потоки воздуха. Поэтому летящая вслед за вожаком птица может частично парить на таких восходящих потоках и, таким образом, прикладывать меньшие усилия для поддержания необходимой высоты. Аналогично поступают и последующие птицы в клине. Как установлено орнитологами, при дальних перелетах в некоторых стаях вожака временами подменяют другие сильные птицы стаи.

Подумайте, как должны быть смещены по фазе взмахи крыльев у птиц, последовательно летящих в клине (это смещение видно на картине).

* * *

Мы далеко не исчерпали всех тех вопросов и ответов, которые можно найти в картине «В голубом просторе». Пытливому и наблюдательному зрителю в этой картине могут открыться и другие, может быть, более интересные явления. Да и нет надобности ограничиваться картиной — интересные вопросы и задачи можно найти везде в окружающем нас повседневном мире.

Даниил Бернулли

(Начало см. на с. 7)

На заседании Парижской академии наук, посвященном памяти Даниила Бернулли, известный ученый-энциклопедист М. Кондорсе говорил: «...вкусы влекли его преимущественно к исследованию вопросов, которые представляют больше трудностей в приведении их к математическому аппарату, чем в решении, когда это приведение уже сделано. В задачах, которыми он занимался, он старался в самой их природе найти средства к их упрощению, к их приведению к простейшей форме, оставляя за вычислениями только то, что от них не может быть отнято. Он имел склонность пользоваться теорией для того, чтобы проникнуть глубже в познание природы, прилагая математику не только к умозрительной механике, к абстрактным законам тел, но также и к физике, к явлениям природы в ее реальном состоянии и к тем явлениям, которые нам доставляют наблюдения. Никто лучше его не умел находить в анализе средства для того, чтобы подвергнуть вычислениям все детали явления; никто лучше его не мог поставить опыт так, чтобы он мог дать подтверждение результатов теории или чтобы он мог служить основой вычислений. В полной мере он и философ, и физик...»

Самый тяжелый изотоп 107-го элемента

Известно, что тяжелые элементы периодической таблицы с порядковым номером больше ста получают искусственно, бомбардируя мишень, сделанную из другого тяжелого элемента, пучком ускоренных «тяжелых» ионов*). Летящее со скоростью, близкой к десятой доли скорости света, ядро-снаряд преодолевает электрические силы отталкивания ядра-мишени и сливается с ним.

Образовавшееся составное ядро, получив большой запас энергии, «нагревается». Нагретое ядро неустойчиво, и обычно за время порядка 10^{-20} с оно делится на два «осколка» — ядра атомов средней части периодической системы элементов.

В редких случаях составное ядро, не успев поделиться, «охлаждается», потеряв энергию на «испарение» четырех-пяти нейтронов. В итоге рождается новый тяжелый элемент с порядковым номером, равным сумме порядковых номеров наряда и мишени.

Однако вероятность такого процесса очень мала. Нейтроны вылетают из нагретого ядра последовательно, один за другим, и на каждой ступени «выживает» только сотая часть атомных ядер — остальные ядра делятся. Так, после испарения четырех нейтронов лишь стомиллионная доля начальных ядер превращается в новые устойчивые ядра. Чем тяжелее ядро, тем труднее ему избежать деления. Особенно велики потери на деление в процессе синтеза элементов с порядковым номером больше ста пяти.

Выход был найден учеными Дубны. Они показали, что ядра-мишени и ядра-снаряды можно специально подобрать так, что при их слиянии образуются «холодные» составные ядра — ядра с небольшим избытком энергии. Например, при бомбардировке висмута хромом составная система охлаждается уже после вылета одного или двух нейтронов.

«Холодный» способ дал возможность ученым Дубны в 1974 году получить атомы 106-го элемента, а в 1976 году в Дубне же был открыт 107-й элемент (изотоп $^{261}107$).

По тому же пути пошли и немецкие физики. Недавно в Лаборатории тяжелых ионов в городе Дармштадте в реакции

$$^{209}_{83}\mathrm{Bi} + ^{54}_{24}\mathrm{Cr} \rightarrow ^{262}107 + ^{1}_{0}n$$

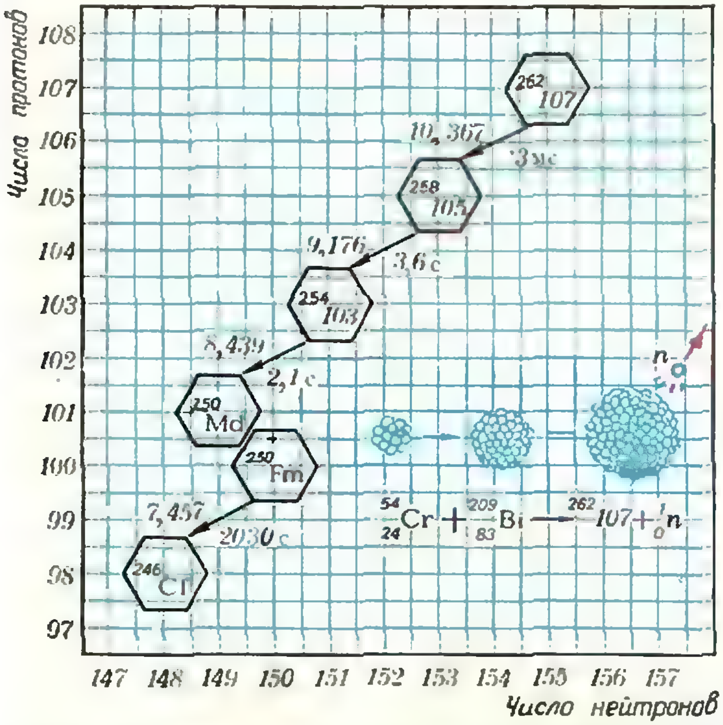
был получен ранее неизвестный изотоп 107-го элемента с атомной массой 262.

Ядра этого элемента, продукты слияния ядер висмута и хрома (энергия ядер хрома была равна 262 МэВ), вылетают из тонкой висмутовой мишени и попадают на полупроводниковый детектор. Прежде всего детектор регистрирует кинетическую энергию ядра и его координаты. Затем начинается регистрация ядерных превращений.

Ядро $^{262}107$ (см. рисунок) испускает альфа-частицу, при этом масса ядра уменьшается на 4 единицы, его заряд — на 2 единицы, и получается изотоп $^{258}105$. Детектор дает сведения о величине интервала времени с момента прибытия ядра до его распада и об энергии альфа-частицы. Ядра $^{258}105$ и $^{254}103$ тоже последовательно испускают альфа-частицы, в результате чего образуется ядро менделевия $^{250}_{101}\mathrm{Md}$. Оно испытывает уже другой вид превращений — захватывает орбитальный электрон и переходит в изотоп фермия $^{250}_{100}\mathrm{Fm}$, который в свою очередь испускает альфа-частицу и превращается в устойчивое ядро калифорния $^{246}_{98}\mathrm{Cf}$. Энергия излучаемой фермием альфа-частицы и его период полураспада хорошо известны; именно по этим данным ученые и сумели восстановить всю цепь превращений, достигнув вершины — изотопа $^{262}107$.

Ученые получили всего шесть атомов нового изотопа 107-го элемента, но основные характеристики его уже известны: энергия альфа-распада равна 10,367 МэВ и период полураспада — 4,2 мс.

В. Кузнецов



Цепь альфа-распада нового изотопа 107-го элемента с атомной массой 262. Цифры слева от стрелок обозначают энергию альфа-частицы (измеренную в МэВ), справа от стрелок — время между радиоактивными распадами.

---

*) «Тяжелым» называют ион атома с порядковым номером больше двух.

И. Алексеев, Д. Свирида

И светит и греет

В заочном конкурсе III Московского турнира юных физиков была такая задача:

> Свеча при горении светит и греет. Определите теплотворную способность парафиновой свечи.

Много различных решений представили жюри участники конкурса. Одни решения базировались на непосредственном нагревании свечой какого-либо тела с известной теплоемкостью. Главный недостаток этого метода в том, что свеча нагревает не только выбранное тело, но и окружающую среду, а учесть это практически невозможно. Другие решения основывались на явлении конвекции, но до конца доведены не были из-за сложности математических расчетов. Были и такие предложения: окружить свечу металлической оболочкой какой-нибудь простой формы и рассчитать тепловой поток через нее при установившихся температурах внутри и снаружи. Недостаток этого метода — в необходимости подачи кислорода для горения свечи, что связано с дополнительными потерями тепла.

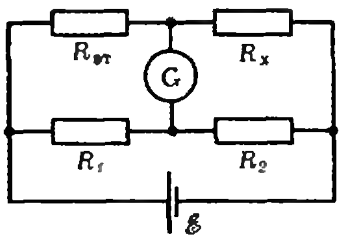


Рис. 1.

Наиболее рациональным для решения данной задачи жюри признало так называемый компенсационный, или сравнительный, метод. Вообще говоря, это один из важнейших методов экспериментальной физики. Он позволяет находить значения физических величин не непосредственно (что часто невозможно сделать достаточно точно), а сравнивая их с эталонными значениями. Классическим примером применения этого метода является измерение неизвестных сопротивлений с помощью мостика Уитстона (рис. 1). Если ток через гальванометр G не течет, выполняется соотношение (проверьте самостоятельно)

$$\frac{R_{эт}}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ или } R_x = R_{эт}\frac{R_2}{R_1}.$$

Здесь неизвестное сопротивление R_x сравнивается с эталонным сопротивлением $R_{эт}$ (отношение R_2/R_1 легко измерить, например — с помощью реохорда). Такой метод и был применен нами для определения тепловой мощности свечи.

Представим себе свечу, помещенную в трубу, через которую пропускается воздух. Тепло, излучаемое свечой, выходит частично вместе с воздухом, а частично — через стенки трубы. Теперь заменим свечу каким-нибудь другим излучателем, похожим по форме и размерам на свечу, но мощность которого известна и притом может изменяться. Например — электрическим нагревателем. Меняя мощность нагревателя, добьемся равенства потоков тепла, уносимых воздухом в обоих случаях. Так как условия опытов не меняются, тепловые потоки, выходящие через стенки трубы, тоже одинаковы. Следовательно, одинаковы и суммарные мощности свечи и нагревателя. Определив мощность электрического нагревателя, как произведение тока на напряжение, найдем тепловую мощность свечи.

Заметим, что важным преимуществом данного метода является исследование стационарного процесса, когда вся энергия сгорания свечи выделяется в виде тепла.

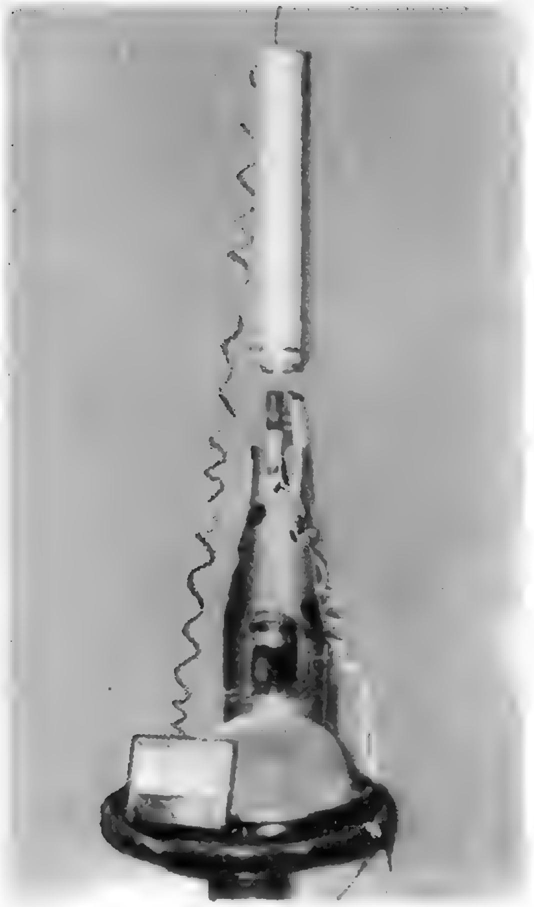


Рис. 2.

На рисунке 2 приведена фотография установки, с которой мы проводили опыты, и на рисунке 3 — схема этой установки. Воздух в трубу *1* подается с помощью вентилятора *2*, который позволяет регулировать скорость воздушного потока, чтобы добиться более полного сгорания топлива и стационарности потока. На выходе трубы установлен термодатчик *3*; он позволяет с большой точностью контролировать равенство температур выходящего воздуха в различных опытах. На решетку *4* ставится блюдце *5* для сбора стекающего парафина. Пламя свечи *6*, установленной на блюдце, окружается длинным закопченным металлическим цилиндром *7*. Через его верхнее отверстие (достаточно удаленное от пламени свечи) выходит пренебрежимо мало света. (В наших опытах световой поток, выходящий через отверстие, составлял около 4% от всей световой мощности, излучаемой свечой). Практически весь свет поглощается цилиндром и, превращаясь в тепло, отдается воздуху.

В качестве электрического нагревателя мы использовали проволочный реостат (залитый керамикой) сопротивлением 550 Ом и номинальной мощностью 20 Вт (в опытах мощность значительно превышала номинальную и достигала ~50—120 Вт).

Для определения теплоты сгорания свечи, кроме ее тепловой мощности, надо знать еще расход парафина в единицу времени. Это можно сделать, взвесив собранный на блюдце парафин и измерив время горения свечи (~3—4 минуты). При этом надо иметь в виду, что сначала процесс горения не будет стационарным. Однако момент установления стационарного режима легко определить с помощью термодатчика —

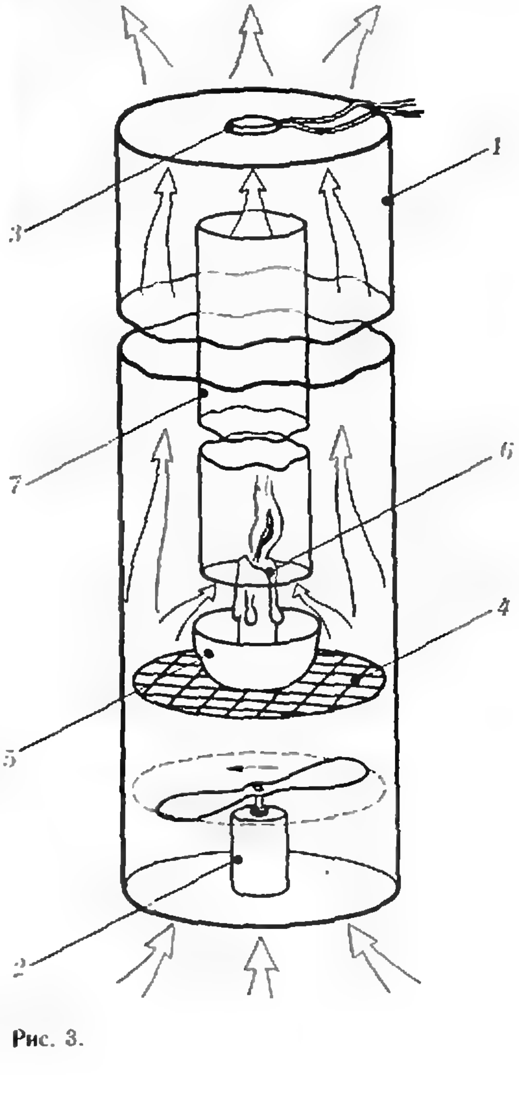


Рис. 3.

нужно заметить, когда температура выходящего воздуха перестанет изменяться. Измерив массу сгоревшего к этому моменту парафина, надо будет учесть ее при определении расхода парафина в установившемся процессе.

Предлагаемую нами установку нетрудно собрать в школьных условиях.

В заключение — немного о погрешностях измерений в наших опытах. При горении свечи происходит изменение химического состава, а значит, и объема газа. Оценим соответствующую ошибку. Запишем уравнение реакции горения свечи:

$$2C_nH_{2n} + 3nO_2 \rightarrow 2nCO_2 + 2nH_2O,$$

где C_nH_{2n} — приближенная формула вещества, составляющего свечу. В реакцию вступает $3n$ молей кислорода, а выходит $4n$ молей газа. Кислород берется из воздуха, где он составляет примерно пятую часть. Следовательно, если в воздухе сгорают все $3n$ молей кислорода, то на вошедшие $15n$ молей воздуха приходится $16n$ молей вышедшего газа. Этому соответствует изменение объема на 6—7%. На самом деле сгорает не весь кислород, а всего лишь несколько процентов, поэтому изменением объема газа при горении можно пренебречь.

Ошибки в измерении массы сгоревшего парафина и мощности нагревателя обусловлены точностью соответствующих измерительных приборов. В наших опытах ошибка в определении массы составляла около 3%, а в определении мощности — около 2%. Таким образом, общая ошибка в измерении теплоты сгорания свечи в наших опытах составляла приблизительно 5%.

Все врут календари?

И какой же читатель не любит «Клуб 12 стульев», что широко распахнул дверь в «Литературной газете»? Здесь всегда в широком ассортименте смех, да и не только... В общем, как говорится, клуб заслуженно пользуется заслуженным.

Разные подручные средства используют авторы для поддержания в клубе атмосферы сатиры и юмора. Нет-нет, но вспоминают они даже про физику с математикой. То любимейший людовед и душелюб Евг. Сазонов выступит в новом (для себя) жанре стихотворных «Математизмов». То в качестве неназойливого теста для проверки интеллекта на художественной заставке появятся уравнения Максвелла с ошибкой.

А в номере от 1 января 1981 г. стенгазета клуба «Рога и копыта» в специальном новогоднем выпуске разгласила результаты совершенно уникальный «расчетов века».

Если с 1 января начать ежедневно откладывать в копилку по 1 коп и завещать это занятие своим потомкам, то ровно через миллион лет у вас наберется 3 652 500 рублей.

Как нам сообщили в авторитетных неинформированных сферах и в заслуживающих доверия некомпетентных кругах, подсчет был проведен в «Рогах и копытах» по приватной просьбе самого Евг. Сазонова.

Спешим предупредить как самого душелюба, так и всех вместе с ним заинтересовавшихся посетителей клуба: вас обсчитали! Обещаемая сумма явно, хотя и не слишком сильно, завышена. Причина тому, по нашему постороннему мнению, довольно проста: в «Рогах и копытах» врут календари. Не все, конечно, но, например, на 2100, 2200, 2300, 2500 и др. годы, ошибочно показывая эти годы как високосные.

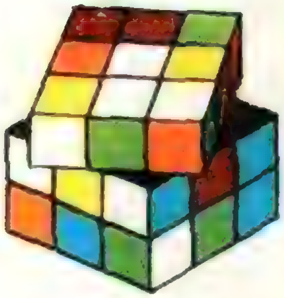
Жаль, что Евг. Сазонов сразу не обратился со своими финансовыми задумками к читателям нашего журнала — он мог бы получить ответ с семью верными знаками и со знаком качества. Но и сейчас еще не все потеряно. Задачник «Кванта», бесспорно, украсит оригинальная задача, автором которой по справедливости следует считать людоведа и душелюба:

Выясните, на сколько меня обсчитали в «Рогах и копытах».

Конечно, предполагается, что существующий календарь продержится в его сегодняшнем виде ближайшие 1 000 000 лет, начиная с 1 января 1981 года н. э.

Редакция «Кванта» решила воспользоваться случаем, чтобы рассказать о Евг. Сазонове чуть подробнее. Возможно, наши читатели с ним не знакомы. Не знакома с ним и редакция. Но знатоки знают, что это вполне современный, в вовсе не выдуманный писатель. Его действительно мало кто видел, поскольку он, неусыпно заботясь о покое (все же конечного) множества горячих почитателей своего бесконечногранного таланта, встречается исключительно с администрацией «Клуба 12 стульев». Евг. Сазонов написал «Бурный поток», который вся грамотная общественность единогласно (голосом самого автора) обозвала «романом века» (неясно только, к сожалению, которого, ибо шедевр полностью не опубликован и частично — тоже). Помимо этого широчайшего полотна, его пером созданы и многочисленные маломерные куски.

(Окончание см. на с. 45)



М. Евграфов

Механика волшебного кубика

В ответ на многочисленные просьбы читателей мы публикуем статью об устройстве «венгерского шарнирного кубика» («Квант», 1980, № 12). В статье подробно рассказывается, как «венгерский кубик» можно изготовить в школьной мастерской. К математической стороне дела мы вернемся в одном из следующих номеров, когда изготовленный вами кубик будет у вас в руках.

Внешне «волшебный кубик» венгерского архитектора Э. Рубика представляет из себя куб, как бы разрезанный на 27 равных маленьких кубиков (видны, конечно, только 26 из них). Маленькие кубики сцеплены таким образом, что любой слой из 9 кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, можно свободно вращать вокруг его оси (см. рисунок выше). Поразительно, что вся система в целом при этом не распадается, ни один из маленьких кубиков пошевелить отдельно не удастся. Внешние грани маленьких кубиков снабжены наклейками шести разных цветов (по девять наклеек каждого цвета); требуется с помощью поворотов слоев переставить маленькие кубики так, чтобы каждая грань большого куба оказалась окрашенной в один цвет.

О том, как это сделать, напечатано немало статей (например, «Квант», 1980, № 12 и «Наука и жизнь», 1981, № 3). Устройство «венгерского кубика» в этих статьях подробно не обсуждалось, что вполне естественно. Имея кубик, его нетрудно разобрать и увидеть, как он устроен. Моя статья написана для тех, кто не имеет возможности решить задачу столь простым путем. Я сам был именно в таком положении, но мне повезло: я выпросил у одного из своих знакомых сломанный «венгерский кубик», починил его и вернул хозяину. С полученными знаниями мне уже нетрудно было сделать свой кубик.

Как же он крутится?

«Венгерский кубик» составлен из 27 основных деталей (не считая цветных наклеек, пружинок и других мелочей). Эти детали — трехмерный крест, скрытый внутри, и 26 «кубиков», выходящих наружу.

«Кубики» — отнюдь не кубики. Они бывают трех различных видов в зависимости от расположения на гранях большого куба: *центральные кубики* (их 6 штук, расположены они в центре каждой грани), *средние кубики* (их 12 штук, расположены они в середине каждого ребра) и *угловые кубики* (их 8 штук, они расположены в вершинах большого куба).

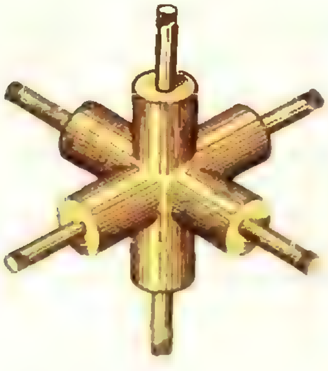


Рис. 1. Крест.

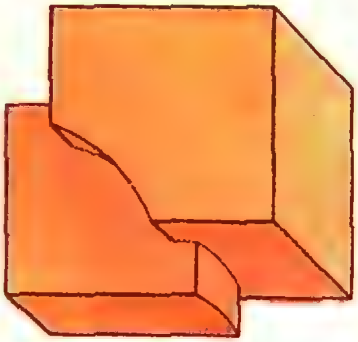


Рис. 2. Боковой кубик.

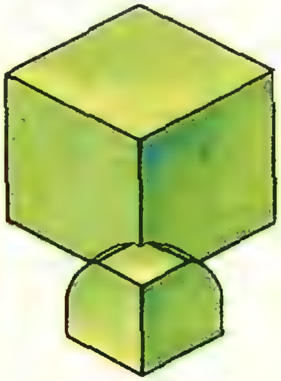


Рис. 3. Угловой кубик.

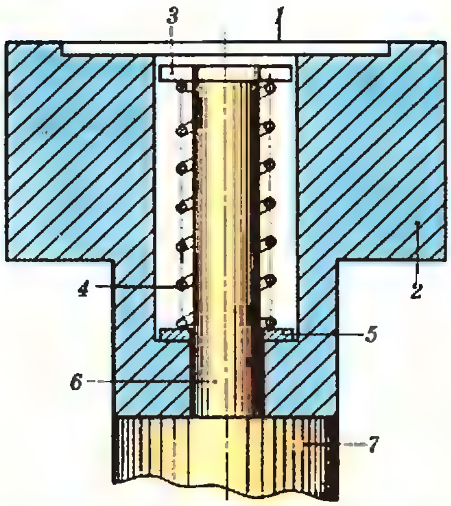


Рис. 4. Центральный кубик на кресте (1 — крышечка; 2 — центральный кубик; 3 — гайка; 4 — пружинка; 5 — шайба; 6 — тонкая ось креста; 7 — толстое плечо креста).

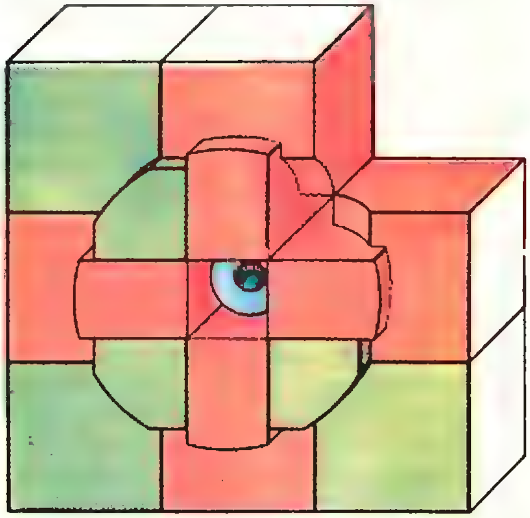


***Рис. 5. Внутренняя сторона грани куба, снятой* с креста (один угловой кубик также снят).**

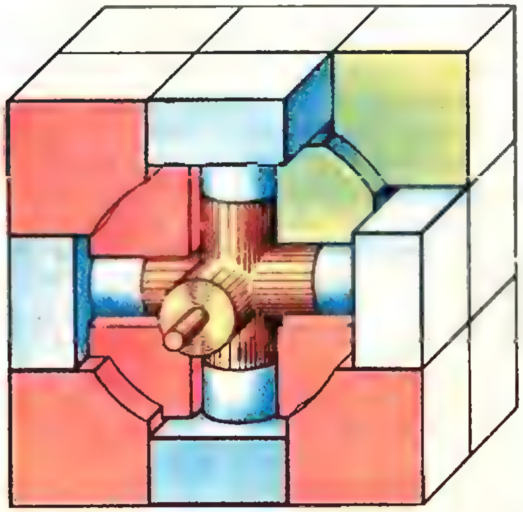


Рис. 6. Вид куба, с которого сняты одна грань и один средний кубик.

На рисунках 1, 2 и 3 изображены соответственно внутренний крест, средний кубик и угловой кубик. На рисунке 4 изображено крепление центрального кубика на внутреннем кресте.

Рисунок 5 изображает внутреннюю сторону грани, снятой с креста.

Рисунок 6 изображает «волшебный кубик», с которого сняты одна грань и один из средних кубиков.

Для большей наглядности на рисунках 5 и 6 центральные кубики, средние кубики, угловые кубики и внутренний крест окрашены в разные цвета. Эта окраска не имеет отношения к цветным наклейкам на внешних гранях кубиков.

На рисунках 5 и 6 видно, как выступы на средних и угловых кубиках складываются в почти цилиндрический выступ с внутренней стороны грани большого куба, а на среднем слое образуется цилиндрическое кольцеобразное углубление. Поворот слоя (грани) отвечает повороту цилиндрического выступа в цилиндрическом углублении.

Вот в сущности и весь секрет устройства головоломки Э. Рубика!

Роль пружинки 4 (см. рис. 4) — в том, чтобы иметь возможность слегка оттягивать при поворотах поворачиваемый слой.

Из рисунка 4 видно, в частности, как разбирать «волшебный кубик». Для этого нужно снять цветную наклейку с какого-либо одного центрального кубика, вытащить крышечку 1, подцепив ее за край иголкой или ножом, и освободить пружинку 4. После этого центральный кубик снимется с оси креста, и головоломка легко разберется.

* * *

Перейдем ко второй теме статьи — как смастерить самодельный «волшебный кубик». Речь пойдет не о каком-либо неполноценном подражании промышленному экземпляру. Самодельная головоломка должна быть и красивее, и надежнее промышленной. Как говорит одна мудрая пословица, если дело стоит делать хоть как-нибудь, то его стоит делать как следует.

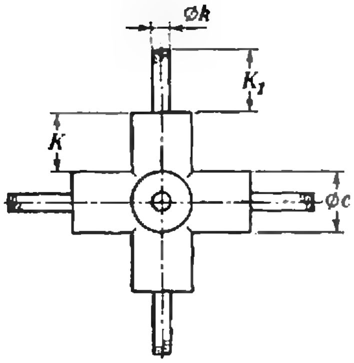


Рис. 7.

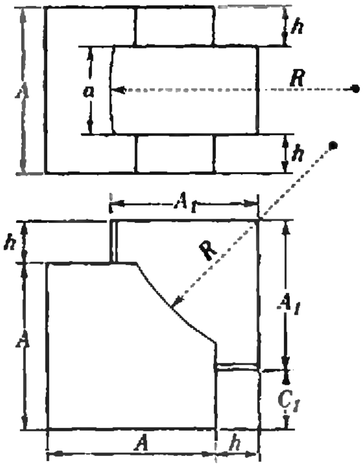


Рис. 8.

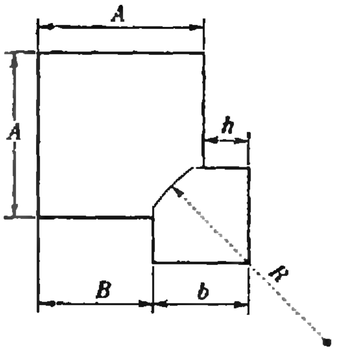


Рис. 9.

Выбор материала

Для изготовления кубика наиболее подходят сравнительно мягкие сорта пластмасс. Почти идеален фторопласт, хорош винипласт, неплохи полиэтилен и полипропилен. К сожалению, я не могу предложить регулярных способов отыскания достаточно толстых кусков таких пластмасс.

Наиболее доступны сравнительно тонкие листы более твердых (и более хрупких) пластмасс — плексиглас и гетинакс. Они тоже могут быть использованы для изготовления кубика, но придется прибегать к склеиванию. И плексиглас, и гетинакс склеиваются соответствующими клеями намертво, правда, клеи для плексигласа обладают очень сильным запахом (и даже немного ядовиты). Гетинакс прекрасно склеивается эпоксидным клеем. Кроме того, гетинакс прочно окрашивается масляными красками и нитрокрасками.

Выбор размеров

На рисунках 7, 8, 9 и 10 приведены чертежи основных деталей головоломки. Размеры обозначены буквами; одинаковые буквы означают один и тот же размер. Между размерами должны выполняться соотношения $a+2h=A$, $B+b=A+h$, $A_1=K+C_2$,

$R=A_1+\frac{1}{2}c$, $2C_1+2C_2+2K+c=3A$.

В остальном размеры можно менять в зависимости от имеющегося материала. При использовании мягких пластмасс размер h не следует брать слишком малым, а при использовании хрупких пластмасс не следует брать слишком малым размер $A-B$. В первом случае нарушение условия может привести к частому рассыпанию головоломки, а во втором случае могут сломаться угловые кубики.

Для промышленного «венгерского кубика»

$A=19$ мм, $h=5$ мм, $c=9$ мм,

а у сделанного мною кубика

$A=15$ мм, $h=4$ мм, $c=7$ мм

Необходимый инструмент

Из измерительных инструментов необходимы простейший штангенциркуль и слесарный угольник (чертежные угольники не годятся). Нужны также тиски, ножовка по металлу, свежие бархатные напильники (плоский, квадратный, треугольный, полукруглый) и надфили. В качестве ножей очень удобно использовать медицинские скальпели — они делаются из хорошей стали. Если их не удастся достать, то лучше всего сделать самодельные штихели — ножички с различной формой лезвий. Их затачивают на точиле из обломков ножовочных полотен. Еще понадобятся сверла различных диаметров, а также метчик и плашка (для нарезания внутренней и наружной резьбы) М2,5 или М3. Желательно иметь под рукой набор наждачной бумаги с разной величиной зерна (не очень крупного).

Изготовление креста

Толстая часть креста может быть изготовлена (как и в промышленном

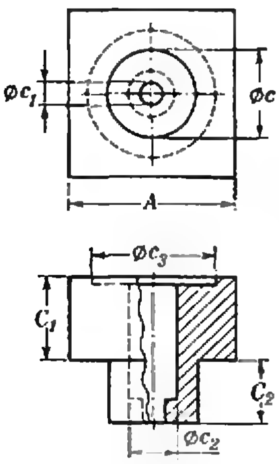


Рис. 10.

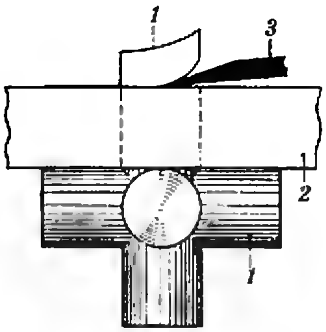


Рис. 11. 1 — крест; 2 — металлическая или плексигласовая планка с отверстием; 3 — нож.

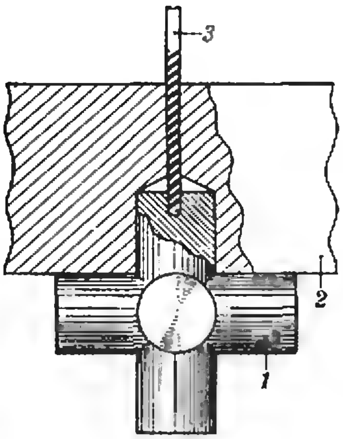


Рис. 12. 1 — крест; 2 — кондуктор — планка с просверленным в ней заранее ступенчатым отверстием; 3 — сверло.

«венгерском кубике») из куска капрона. Кусок капрона нужной величины можно получить, расплавив старые чулки, обрывки рыболовной лески и т. п. при температуре 120° в алюминиевой или жестяной баночке. Капрон легко режется ножом, и грубую заготовку креста сделать легко. Для придания каждому плечу креста точной цилиндрической формы удобно следующее приспособление: в металлической пластине сверлятся 4—5 отверстий; самое узкое — желаемого диаметра, каждое следующее на 0,2—0,3 мм шире. Когда мы продавливаем капроновое плечо креста через отверстие, острый край отверстия срезает с капрона стружку. После продавливания через все отверстия по очереди мы получим плечо почти идеальной цилиндрической формы. При обработке каждого следующего плеча нужно следить, чтобы оно получилось строго перпендикулярным к тем уже обработанным плечам, к которым оно должно быть перпендикулярно, и соосно с противоположным плечом. Перпендикулярность проверяется угольником на просвет. Нарушения подправляются ножом. Соосность проверяется на глаз и подправляется ножом.

Тонкие оси креста лучше всего делать из стальных вязальных спиц диаметра 2,5 мм, нарезанных на кусочки нужной длины. Толстые плечи креста подрезаются по размеру (рис. 11), а затем в них высверливаются осевые отверстия диаметра 2 мм (рис. 12). Концы тонких осей (~7 мм) грубо зазубриваются напильником. Эти концы нагревают и вдавливают в высверленные отверстия. Чтобы не испортить крест, эту операцию лучше проводить, вставив оперируемое плечо в отверстие, которое использовалось для подрезания по размеру. На оставшемся конце тонкой оси нарезается резьба. Поскольку начало резьбы всегда бывает не очень точным, лучше сделать тонкую ось немного длиннее. Когда на резьбу будет навернута гайка, лишний кусочек спиливается напильником.

Для завинчивания гайки на ней нужно сделать прорезь (рис. 13: на том же рисунке изображен конец отвертки для завинчивания такой гайки).

Окончательная подгонка креста проводится при сборке головоломки, так что крест не следует сразу доводить до совершенства.

На токарном станке можно сделать очень хороший крест из металла (материал — твердый дюралюминий или латунь). Однако эта работа требует сравнительно высокого уровня токарного мастерства. Обработку де-

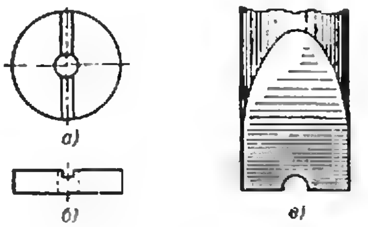


Рис. 13. а, б — гайка; в — отвертка.

тали (толстая часть креста) следует вести в центрах, причем для разных стадий обработки придется изготовить 2 или 3 различных хомутика (приспособления для вращения детали). С разметкой центровых отверстий для второй и третьей пары плеч креста тоже придется потрудиться. Не так просто снять и острые выступы в середине готового креста. Тонкая ось в этом случае сажается в толстую часть креста на резьбе, а затем запаивается (или приклеивается эпоксидным клеем, если крест сделан из дюралюминия).

Изготовление средних и угловых кубиков

После того как заготовки для кубиков грубо нарезаны (с точностью 1—1,5 мм для мягких пластмасс и 0,5—1 мм для твердых пластмасс), их обработку можно условно разделить на две стадии: грубую и точную подгонку по размерам. Грубая подгонка ведется по шаблонам на глаз, точная — по угольнику и штангенциркулю. При грубой подгонке мягкие пластмассы подрезаются ножом и выравниваются крупнозернистой шкуркой, а твердые — опиливаются бархатным напильником (шкурку и напильники следует время от времени мыть щеткой с водой). При точной подгонке любые пластмассы подскабливаются ножом и выравниваются мелкозернистой шкуркой.

Процесс точной подгонки таков:

Поверочным инструментом с небольшим нажимом проводят по обрабатываемой поверхности. От нажима выпуклые места начинают блестеть, а впадины остаются матовыми. Заблестевшие места подскребаются ножом, и процесс повторяют. Время от времени поверхность выравнивают шкуркой. В качестве поверочного инструмента при подгонке первой плоскости используют любую плоскую плитку, при подгонке перпендикулярной плоскости — угольник, а при подгонке параллельной плоскости — штангенциркуль.

Последовательность операций при изготовлении кубиков из мягких пластмасс такова:

Сначала производится точная подгонка трех взаимно перпендикулярных плоскостей болванки, затем — точная подгонка параллельных им плоскостей. Получается параллелепипед (или куб). Затем производится грубая и точная подгонка вырезов на одной грани, потом на другой и т. д. Для грубой подгонки вырезов на гранях стоит сделать державку для заготовки, изображенную на рисунке 14, и приспособления для пропиливания (рис. 15). Материалом для обоих приспособлений может служить плексиглас. В качестве пилки удобнее всего взять запасные полотна для ножовки-шлицовки (они продаются в хозяйственных магазинах). Лучше сделать столько приспособлений для пропиливания, сколько различных (по высоте и глубине) вырезов.

Для криволинейных вырезов также стоит сделать специальный инструмент — нечто вроде полукруглой стамески. Его нетрудно изготовить на точиле из обычной стамески. Радиус закругления при заточке проверяется по шаблону.

При изготовлении кубиков из твердой пластмассы делать сложные вырезы не нужно. Еще одно упрощение — у твердых листовых пластмасс с самого начала имеются точно подогнанные параллельные плоскости. Однако эти упрощения с лихвой компенсируются трудностями, связанными со склейкой. Основная трудность — сдвиги деталей, зажатых для затвердения клея. Лучший способ преодоления этой трудности — соединение деталей винтами.

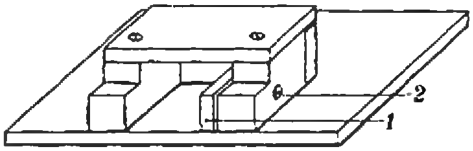


Рис. 14. 1 — съемная прокладка (такую же можно подкладывать и под крышку); 2 — зажимный винт.

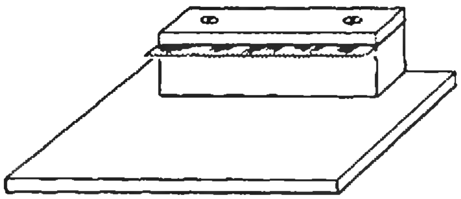


Рис. 15.

Чтобы винты не приклеились, их следует покрыть тонким слоем машинного масла или вазелина. После затвердения клея винты вывинчиваются, отверстия промываются и заделываются эпоксидным клеем, смешанным с опилками пластмассы. Вместо винтов в просверленные отверстия можно вставлять плотно сидящие гвозди. Их можно и не удалять после склеивания. Винты немного удобнее, так как с ними не нужны специальные приспособления для зажима деталей на время затвердения клея.

Центральные кубики

Если есть возможность поработать на токарном станке, то центральные кубики лучше делать составными — квадратная шляпка из пластмассы, круглая ножка из металла (предпочтительно из латуни). Чертеж шляпки и ножки дан на рисунке 16. Токарная работа не требует особой квалификации.

Цветные наклейки

В этом вопросе нельзя использовать то решение, которое выбрано в промышленном образце. Липких лент стольких цветов не найти. Для кубиков из гетинакса простейшее решение — окраска (масляными красками или нитрокрасками). Для кубиков из мягких пластмасс — инкрустация. Инкрустируемые кусочки можно нарезать из наборов лекал. Кусочки проще делать круглыми. Их легко вырубать с помощью стальной трубки с остро заточенными краями. Углубления в кубиках можно сделать с помощью перки (перовое сверло, используемое для сверления отверстий в дереве коловоротом). Профиль перки (а если необходимо, то и ее диаметр) можно немного изменить подточкой на точиле.

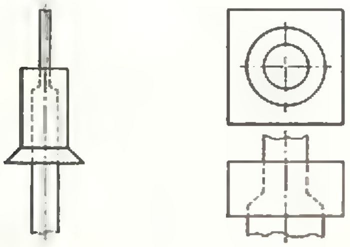


Рис. 16.

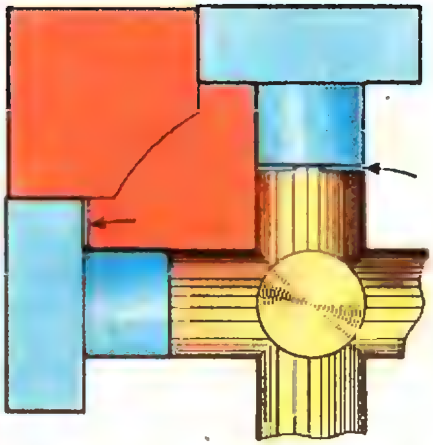


Рис. 17. Стрелки показывают на возможные зазоры.

У центальных кубиков инкрустируемые кусочки заодно будут исполнять обязанности крышечек.

Сборка волшебного кубика

Тщательная отделка боковых и угловых кубиков необходима, так как «по роду службы» они должны хорошо сидеть в любых допустимых местах. При окончательной подгонке можно подправлять лишь крест и положение центральных кубиков на нем. Проверка положения центральных кубиков проводится с помощью боковых кубиков (рис. 17). Сначала просветы выравниваются легким подгибом тонких осей креста, а затем сводятся на нет подпиливанием конца ножки центрального кубика. Если боковой кубик плохо входит, то немного подпиливается и сам крест. На этой стадии острые углы кубиков, упирающиеся в центр креста и в соединение ножки центрального кубика с его шляпкой, стоит немного скруглить.

После ликвидации просветов проверяется движение собранной головоломки. Если «волшебный кубик» слишком часто застревает на поворотах, можно немного ослабить пружинки (укоротив их). Может помочь и небольшое скругление всех острых углов.

При окончательной сборке на каждую гайку следует капнуть каплю лака для ногтей. Это предупредит отвинчивание гайки во время работы.

Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1981 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1982 года.

Математика

М. АЛЕКСЕЕВ — Москва, с. ш. № 2, 8 кл.
А. АСЛАНЯН — ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
Ю. БЕСПАЛОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
И. БИНУС — Пенза, с. ш. № 20, 10 кл.
А. ГОХБЕРГ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
О. ГРИНИВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
О. ДРАНКО — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ДУБИЦКАС — Таураге, с. ш. № 1, 11 кл.
М. ЕЛИСЕЕВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
О. ЕРОШКИН — Днепропетровск, с. ш. № 15, 9 кл.
И. ЖУКОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
П. ЗУСМАНОВИЧ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. ИТЕНБЕРГ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
Ю. КАКУЛОВ — Цалка, с. ш. № 3, 9 кл.
Д. КАМУНТАВИЧЮС — Вильнюс, с. ш. им. А. Венуолиса, 11 кл.
А. КИСЕЛЕВ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
В. КИСИЛЬ — Одесса, с. ш. № 33, 10 кл.
Д. КОРОТКИН — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. КОРСУКОВ — ФМШ при НГУ, 10 кл.
Л. ЛЕЙЦИН — Черингов, с. ш. № 10, 9 кл.
С. МАМЕДОВ — Баку, с. ш. № 70, 10 кл.
Ю. НИКОЛАЕВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 131, 10 кл.
А. НИКОНОВ — Кировград, с. ш. № 2, 10 кл.
М. ОВЕЦКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Г. ПЕРЕЛЬМАН — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. САВКИН — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 10 кл.
Г. ТРУНОВ — Москаа, с. ш. № 2, 10 кл.
Е. ТЮРИН — Вильнюс, с. ш. № 4, 9 кл.
Р. УГРИНОВСКИЙ — Хмельник, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ХОХЛОВ — Москва, с. ш. № 36, 10 кл.
П. ЦВЕТКОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
О. ЧАЛЫХ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Л. ЭПРЕМИДЗЕ — Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
Ф. ЭФЕНДИЕВ — Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
В. ЯРОШ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.

Физика

М. АРАМЯН — ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
А. АСТАХОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. БАБАЕВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 8 кл.
Я. БАЗАЛИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Ю. БЕСПАЛОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 10 кл.
М. ЖЯКОНИС — Каунас, с. ш. № 2, 11 кл.
Г. КОСТЫШИН — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
А. КУБЫШКИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Б. МУРЗАХМЕТОВ — Джезказган, с. ш. № 22, 10 кл.
В. ПЕНТЕГОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ПИРОЖЕНКО — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. РАДИОНОВ — пос. Никольское Ленинградской обл., 10 кл.
М. РАХМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
Ю. СИНЮКОВ — ст. Селезни Тамбовской обл., 10 кл.
М. СТЕЖКО — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
С. СТРЕЛЕЦКИЙ — Львов, с. ш. № 50, 10 кл.
Ю. ТАЛДЕНКО — Сумы, с. ш. № 10, 10 кл.
А. ТЕРЕЩЕНКО — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ТИЩЕНКО — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
А. ХОДАРИН — п. Нововоронежский, с. ш. № 1, 10 кл.

задачник кванта

Задачи

М731—М735; Ф743—Ф747

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3-82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М731, М732» или «Ф743». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М731. Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9; второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9; затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т. д.; выигрывает тот, у кого впервые получится произведение больше а) тысячи, б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

В. Болтянский

М732. а) В треугольник ABC вписаны два разных прямоугольника так, что на основании AC лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах AB и BC — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника ABC и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник ABC прямоугольника, две вершины которого лежат на $[AC]$, тоже равен 10.
б)* В четырехугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон AB, BC, CD, DA лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырехугольника $ABCD$ можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников и периметр которого также равен 10

Малхази Беруашвили
(ученик 10 класса ФМШ им. Комарова г. Тбилиси)

М733. а) При каких натуральных m число 31^m-1 делится на 2^m? б)* Докажите, что для любого нечетного a и натурального m существует бесконечно много натуральных k таких, что a^k-1 делится на 2^m. в)* Докажите, что для любого нечетного a существует лишь конечное число натуральных m таких, что a^m-1 делится на 2^m.

В. Прасолов

M734. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке K. Докажите, что длина проекции отрезка AK на прямую AB (или AC) равна полусумме длин сторон AB и AC.

Р. Мазов

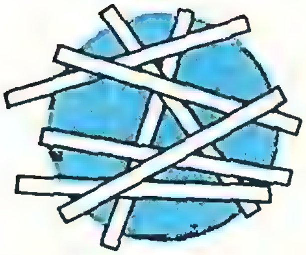


Рис. 1.

M735. а) Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосками, суммарная ширина которых меньше 1 (рис. 1).
б) Назовем *слоем толщины* h часть пространства, заключенного между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Докажите, что шар диаметра 1 нельзя покрыть несколькими слоями, суммарная толщина которых меньше 1.

Ф743. С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через стену высотой H и толщиной l, если бросать его с высоты h?

О. Савченко

Ф744. Космический аппарат представляет собой жесткую тонкостенную сферу радиуса $R=2$ м, наполненную газом. Внутри аппарата находится шар радиуса $r=R/2$, наполненный тем же газом, что и весь аппарат, но при большем давлении. Шар касается внутренней поверхности аппарата. В результате повреждения шар лопнул. Найти, во сколько раз изменилось давление внутри аппарата, если оказалось, что весь аппарат при этом сместился на расстояние $a=0{,}5$ м. Массой оболочек пренебречь; температуру считать неизменной.

А. Буздин

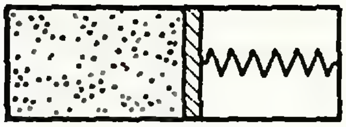


Рис. 2.

Ф745. Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплоизолированным поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда содержится 1 моль идеального одноатомного газа, в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной (рис. 2), длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Пренебрегая теплоемкостью сосуда, поршня и пружины, определить теплоемкость системы.

Б. Клячин

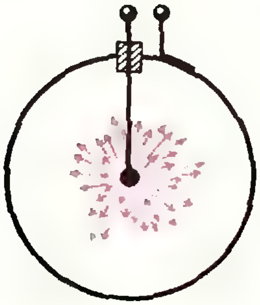


Рис. 3.

Ф746. Электрическая батарея, использующая β-радиоактивность, представляет собой металлическую сферу, внутри которой помещен изолированный от нее кусочек радиоактивного вещества (рис. 3). Ежесекундно распадаются ν атомов. Считая, что энергия электронов, образующихся при распаде, равновероятно распределена от минимального значения W_{min} до максимального W_{max}, определить ЭДС батареи. Какой наибольший ток может давать такая батарея? До каких сопротивлений нагрузки батарею можно считать генератором тока?

И. Воробьев

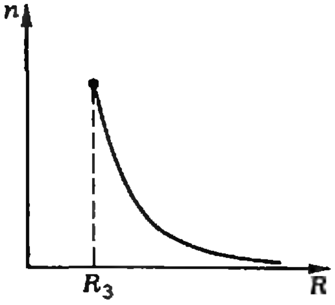


Рис. 4. R_3 — радиус Земли.

Ф747. Космонавты во время вывода космического корабля на орбиту заметили на некоторой высоте H_0 тонкий светящийся слой (полное внутреннее отражение света в атмосфере). Как по графику (рис. 4) зависимости коэффициента преломления атмосферы n от расстояния R до центра Земли определить H_0?

О. Батищев

Problems

M731—M735; Ф743—Ф747

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 31st to the following address: USSR, Moscow, 117071, МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed 'NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)'.

M731. Two players play the following game: the first calls out any natural number from 2 to 9; the second multiplies this number by any natural number from 2 to 9; then the first multiplies the result by any natural number from 2 to 9 etc.; the winner is the player who first obtains a product greater than *a*) one thousand, *b*) one million. Who wins, the first or second player, if both play without mistake?

V. Boltianski

M732. *a*) Two different rectangles are inscribed in the triangle ABC so that two vertices of each rectangle are on the side AC and one of each on sides AB and BC. The perimeter of each triangle is 10. Find the area of triangle ABC and prove that the perimeter of any rectangle inscribed (as explained above) in triangle ABC also equals 10.
b) Two rectangles with parallel sides are inscribed in the quadrilateral $ABCD$ so that one vertex of each of the rectangles lies on each of the sides AB, BC, CD, DA of the quadrilateral. The perimeter of each of the rectangles is 10. Find the area of the quadrilateral $ABCD$ and prove that for any point on any of the sides of the quadrilateral $ABCD$ there is a rectangle with vertex at this point, sides parallel to those of the given rectangles and perimeter 10.

Malhasi Beruashvili (10th grade)

M733. *a*) For what positive integers m is the number $31^m - 1$ divisible by 2^m? *b*)* Prove that for any odd a and any positive integer m there exists an infinite set of positive integers k such that $a^k - 1$ is divisible by 2^m. *c*)* Prove that for any odd a there exists only a finite set of positive integers m such that $a^m - 1$ is divisible by 2^m.

V. Prasolov

M734. The bissector of angle A of triangle ABC intersects the circumscribed circle at the point K. Prove that the length of the projection of the segment AK on the line AB (or AC) is the mean of the lengths of AB and AC.

R. Mazov

M735*. *a*) Prove that a disc of diameter 1 cannot be covered by several paper strips whose total width is less than 1 (figure Рис. 1).
b) By a layer of thickness h we mean the part of space bounded by two parallel planes whose distance is h. Prove that a ball of diameter 1 cannot be covered by several layers whose total thickness is less than 1.

P743. With what minimal velocity must a stone be thrown from height h in order to clear a wall of height H and thickness l?

O. Savchenko

P744. An apparatus in cosmic space consists of a rigid thin sphere of radius $R=2$ m, filled with gas, and also containing a sphere of radius $r=R/2$ filled with the same gas, but at higher pressure. The inner sphere is tangent to the inner surface of the apparatus. As the result of an accident, the inner sphere explodes. Find how the pressure inside the apparatus changes if the explosion displaces the apparatus by □ $=0{,}5$ m. The mass of the shells of the spheres is negligible, the temperature assumed constant.

A. Buzdin

P745. A thermoisolated receptacle is divided into two compartments by a thermoisolated piston which moves without friction. The left compartment contains 1 mole of an ideal monoatomic gas, the other is vacuum. The piston is connected to the right wall of the receptacle by a spring (see figure Рис. 2, p. 28), whose length in unstressed state is equal to the length of the receptacle. Neglecting the heat capacity of the receptacle, piston and spring, determine the heat capacity of the system.

W. Kliachin

P746. An electric battery, working on β-radioactivity, is a metallic sphere, inside which a piece of a radioactive substance, isolated from the sphere, is placed (figure Рис. 3, p. 28). Every second ν atoms are decomposed. Assuming that the energy of the electrons appearing in the process of radioactive decomposition is uniformly distributed in the range between the minimal and maximal values $W_{\min}$ and $W_{\max}$, find the electromotive force of the battery. What maximal current can such a battery yield? Up to what values of the load's resistance can this battery be considered a generator of current?

I. Vorobiev

P747. While their spaceship was rising to orbit, cosmonauts noticed a thin luminous layer (complete inner reflexion of light in atmosphere) at elevation H_0 above the earth surface. Using the graph (figure Рис. 4, p. 29) showing the dependence of the refraction coefficient n on the distance R from the centre of the earth, how can one determine H_0?

O. Batischev

Решения задач

М691—М695; Ф703—Ф707

М691. *Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1. а) Найдите K такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами (K) и (K+2). б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует.*

а) Число $2\cdot3\cdot4=24$ обладает свойствами (1) и (3). Приписав к обеим частям равенства $2\cdot3\cdot4=24$ все натуральные числа от 5 до 23, получим число

$$2\cdot3\cdot4\cdot\underbrace{5\cdot6\cdot\ldots\cdot23}_{}=\underbrace{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot23}_{}\cdot24,$$

обладающее свойствами (20) и (22). Разумеется, примеров такого типа — бесконечное множество: если $b=a(a+1)(a+2)$, то число

$$a(a+1)(a+2)\underbrace{(a+3)\cdot\ldots\cdot(b-1)}_{}=\underbrace{(a+3)\cdot\ldots\cdot(b-1)}_{}b$$

обладает свойствами $(b-a-2)$ и $(b-a)$.

Существуют примеры и другого рода: например, число

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=8\cdot9\cdot10$$

обладает свойствами (3) и (5). Приписав сюда «пропущенную» семерку, мы получим число, обладающее свойствами (4) и (6):

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\underline{7}=\underline{7}\cdot8\cdot9\cdot10.$$

И вообще, если у нас имеется число, обладающее свойствами (K) и $(K+2)$:

$$(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+K)=(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+K+2),$$

причем $n>m+K$, то число

$$(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+K)\underline{(m+K+1)\cdot\ldots\cdot n}=$$

$$=\underline{(m+K+1)\cdot\ldots\cdot n}\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+K+2)$$

обладает свойствами $n-m$ и $n-m+2$.

Можно также, наоборот, вычеркивать последовательные натуральные числа, входящие в обе части соответствующего равенства.

б) Предположим, что для некоторых m и n

$$m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3);$$

тогда

$$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2,$$

что невозможно, поскольку

$$m^2<m^2+m+1<(m+1)^2.$$

И. Клумова

◆

М692. *Точки C_1, A_1, B_1 взяты соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{1}{3}.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

а) $P_1<\frac{3}{4}P$; *б)* $P_1>\frac{1}{2}P$.

а) Рассмотрим точки C_2, A_2, B_2, лежащие соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC, такие, что (см. рис. 1)

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|}=\frac{|BA_2|}{|A_2C|}=\frac{|CB_2|}{|B_2A|}=3.$$

В силу неравенств треугольника периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Поскольку сумма длин противоположных (параллельных) сторон этого шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ длины соответствующей стороны треугольника ABC, периметр шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ равен $\frac{3}{4}P$. Поэтому $P_1<\frac{3}{4}P$.

б) В силу неравенств треугольника (см. рисунок 2)

$$|B_1C_1|+|C_1A|>|B_1A|,$$
$$|C_1A_1|+|A_1B|>|C_1B|,$$
$$|A_1B_1|+|B_1C|>|A_1C|.$$

Складывая эти неравенства, получаем $P_1+\frac{1}{4}P>\frac{3}{4}P$, то есть $P_1>\frac{1}{2}P$

Оценку $P_1>\frac{1}{2}P$ можно улучшить. Для этого заметим, что $\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C_1A_1}+2\overrightarrow{C_1B_1}$ (аналогично $\frac{7}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A_1B_1}+2\overrightarrow{A_1C_1}$, $\frac{7}{4}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{B_1C_1}+2\overrightarrow{B_1A_1}$ — проверьте это!). Из этих векторных равенств следуют неравенства для длин векторов:

$$\frac{7}{4}|AC|<|A_1C_1|+2|B_1C_1|,$$

$$\frac{7}{4}|AB|<|A_1B_1|+2|A_1C_1|,$$

$$\frac{7}{4}|BC|<|B_1C_1|+2|B_1A_1|;$$

складывая их, мы получаем $\frac{7}{4}P<3P_1$, или $P_1>\frac{7}{12}P$.

Неравенства $\frac{3}{4}P>P_1$ и $P_1>\frac{7}{12}P$ не улучшаемы.

В самом деле, если взять треугольник ABC, у которого вершина B близка к C (рис. 3), то $P\approx2|AC|$, а $P_1\approx\frac{3}{2}|AC|$, так что отношение периметров $P_1:P$ будет приблизительно равным $\frac{3}{4}$.

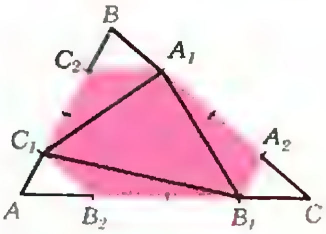


Рис. 1.

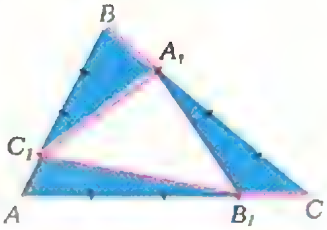


Рис. 2.

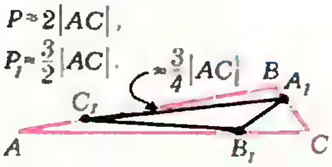


Рис. 3.

$P\approx 2|AC|$,

$P_1\approx 2|C_1'B_1|=2(|AB_1|-|AC_1'|)$.

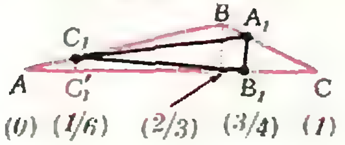


Рис. 4.

Если же взять треугольник ABC таким, чтобы его вершина B была близка к $\frac{2}{3}$ отрезка AC (рис. 4), то по-прежнему $P\approx 2|AC|$, но $P_1\approx 2|C_1'B_1|=2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)|AC|=\frac{7}{12}\cdot 2|AC|$, и отношение $P_1:P\approx\frac{7}{12}$.

В. Турчанинов

М693. *В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.*

◆

Сопоставим каждому жителю поселка некоторую точку на плоскости. Те точки, которые соответствуют знакомым между собой жителям, соединим отрезком. Получающаяся картинка называется *графом*. Выделенные точки называются *вершинами* графа, а связывающие их отрезки — *ребрами*.

Та часть условия задачи, в которой требуется, чтобы новость, сообщенная одному жителю поселка, в конце концов становилась известной всем его жителям, соответствует тому, что по ребрам нашего графа можно пройти от любой его вершины до любой другой. Такой граф называют *связным*. Последовательность ребер графа, связывающую две его вершины, в которой нет повторяющихся ребер, называют *цепью*. Если цепь начинается и кончается в одной и той же вершине, ее называют *циклом*. На рисунке 1 показана цепь, соединяющая вершины A и B, а также цикл. Связный граф, не содержащий циклов, называют *деревом*. Он действительно похож на дерево (рис. 2).

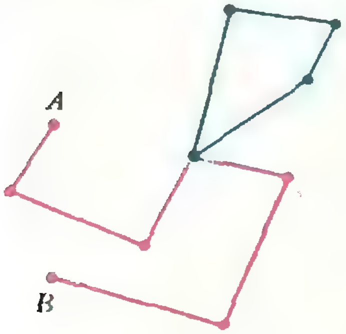


Рис. 1.

Назовем *расстоянием* между двумя вершинами графа количество ребер в самой короткой цепи, соединяющей эти вершины. Заметим, что если граф является деревом, то любую пару его вершин соединяет лишь одна цепь.)

Введенные понятия позволяют упростить запись решения задачи. В новых терминах формулировка может быть переписана так:

Доказать, что в связном графе с 1000 вершинами можно указать такое множество из 90 вершин, что для любой вершины графа найдется вершина из этого множества, расстояние до которой не больше 10.

Пусть X и Y — две вершины нашего графа, находящиеся на наибольшем расстоянии. Если это расстояние не больше 10, то расстояние от любой вершины нашего графа до любой другой не больше 10 — в этом случае 90 вершин можно выбрать произвольно.

Заметим, что достаточно решить нашу задачу лишь для случая, когда граф является деревом. Действительно, пусть наш граф — не дерево; тогда он содержит хотя бы один цикл. Если выбросить из графа какое-нибудь ребро, принадлежащее этому циклу, цикл исчезнет, а граф останется связным. Поскольку в графе — лишь конечное количество циклов, применив несколько раз эту операцию, мы превратим наш граф в дерево. Множество из 90 вершин полученного дерева, удовлетворяющее условию задачи, очевидно, будет годиться и для первоначального графа, так как прибавление новых ребер не увеличивает расстояния между вершинами.

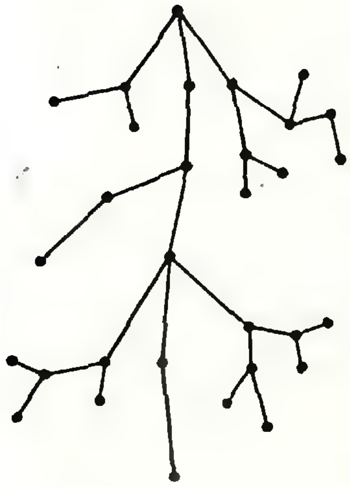


Рис. 2.

Итак, пусть у нас имеется дерево с 1000 вершинами, X и Y — две вершины, находящиеся на максимальном расстоянии, которое больше 10. Рассмотрим цепь, соединяющую вершины X и Y: $X—A_1—A_2—A_3—\ldots—A_{10}—A_{11}—\ldots—Y$. Возьмем точку A_{10} в качестве первой точки K_1 искомого множества. Если мы сотрем ребро между вершинами A_{10} и A_{11}, наше дерево разобьется на два дерева. Отметим, что часть, содержащая вершину X, содержит не менее 11 вершин.

Заметим, что расстояние от вершины A_{10} до каждой из вершин содержащей ее части не более 10 (если расстояние до некоторой вершины M будет больше 10, то расстояние от M до Y будет больше расстояния от X до Y, что противоречит тому, что вершины X и Y находятся на максимальном расстоянии).

Рассмотрим теперь ту часть графа, которая содержит вершину Y. Это — дерево, содержащее не более $1000-11=989$ вершин. Повторим с ним ту же самую операцию. В результате получим еще одну группу из не менее 11 вершин и среди них — точку K_2 искомого множества, а также дерево, содержащее не больше $1000-2\cdot 11=978$ вершин. После того как мы проделаем эту операцию 89 раз, мы получим 89 групп вершин, расстояние которых до каждой вершины своей группы не превосходит 10. Останется дерево, содержащее не более $1000-89\cdot 11=21$ вершины. Вновь рассмотрим в нем две вершины, находящиеся на максимальном расстоянии, и вновь возьмем в цепи, соединяющей эти вершины, десятую вершину. Очевидно, что эта вершина годится в качестве точки K_{90} искомого множества. Задача решена.

То, что в связном графе с 1000 вершинами нельзя выделить нужного множества, состоящего менее чем из 90 вершин, следует из того, что этого нельзя сделать уже для дерева с 991 вершиной, устроенного так: из одной его вершины исходят 90 лучей, на каждом из которых находится по 11 вершин (см. рис. 3).

А. Савин

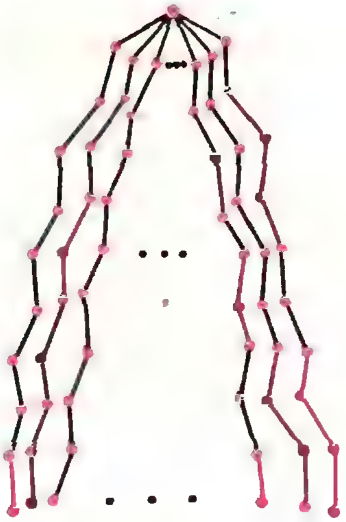


Рис. 3.

М694. *В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3?*

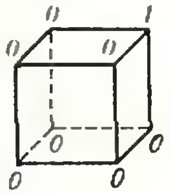


Рис. 1.

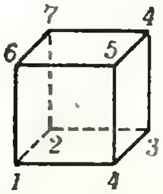


Рис. 2.

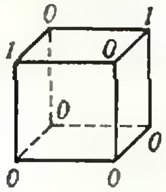


Рис. 3.

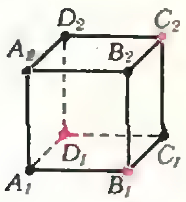


Рис. 4.

◆

Раскрасим вершины куба в синий и красный цвет таким образом, чтобы концы каждого ребра оказались окрашенными в разные цвета (рис. 4). При добавлении единицы к числам, размещенным на одном ребре, суммы чисел в синих и красных вершинах увеличиваются на 1, так что разность этих двух сумм не изменяется. Так как в кубах на рисунках 1 и 3 эта разность не равна нулю, от них нельзя прийти к кубу с равными числами в вершинах. Покажем теперь, что если в вершинах исходного куба записаны целые числа и суммы чисел в красных и синих вершинах равны, то все восемь чисел можно сделать равными между собой.

Обозначим через d разность между наибольшим и наименьшим из чисел, записанных в вершинах куба, а через n — количество чисел, равных наименьшему. (Для куба на рисунке 1 $d=1$, $n=7$, на рисунке 2 — $d=6$, $n=1$, на рисунке 3 — $d=1$, $n=6$.) Пусть наименьшее (или одно из наименьших) число, расположено в вершине A_1 (см. рис. 4). Если какое-нибудь из соседних чисел, скажем число, записанное в вершине B_1, не является наибольшим в рассматриваемом кубе, то, прибавляя по единице к числам, размещенным на ребре A_1B_1, мы уменьшим либо d, либо n (либо и d, и n). Продолжая подобным образом, мы придем либо к кубу, у которого $d=0$, то есть все восемь чисел равны между собой, либо к кубу, в котором каждое число, соседнее с наименьшим, является наибольшим. Если в вершине A_1 такого куба расположено одно из наименьших чисел, равное a, то в вершинах B_1, D_1 и A_2 записано число $a+d$ (здесь d — разность между наибольшим и наименьшим числами в новом кубе).

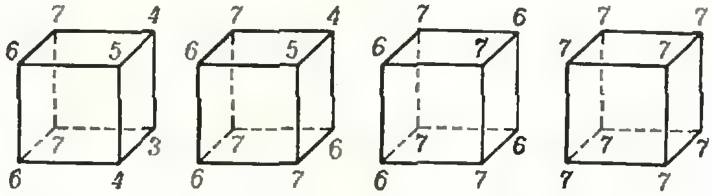


Рис. 5.

Так как сумма чисел в красных вершинах равна сумме чисел в синих вершинах, в четвертой красной вершине C_2 записано число a, а в синих вершинах C_1, B_2 и D_2 — число $a+d$. Прибавив по d единиц к концам ребра A_1B_1, затем к концам ребра C_1C_2, ребра A_1D_1, ребра C_2D_2 и, наконец, ребра A_2B_2, мы придем к кубу, все восемь чисел которого равны $a+2d$. Для куба на рисунке 2 этапы решения изображены на рисунке 5.

Ю. Ионин

М695. *Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета?*

Предположим, что требуемая раскраска возможна. Будем называть столбец *белым* или *черным* в соответствии с тем, какой цвет в нем преобладает. Аналогичные названия будут употребляться и для строк.

Пусть m_0, m_1 — количества белых и черных строк, n_0, n_1 — количества белых и черных столбцов соответственно, $m_0+m_1=m$, $n_0+n_1=n$.

Все клетки, лежащие на пересечении белых строк с черными столбцами и черных строк с белыми столбцами, отличаются по цвету либо от содержащего их столбца, либо от содержащей их строки. Число таких клеток равно $m_0n_1+m_1n_0$. Не уменьшая общности, можно считать, что более половины этого числа клеток отличается по цвету от содержащих их строк. Опять-таки, не уменьшая общности, можно считать, что $m_0 \leqslant m_1$. В черных строках содержится по условию более $\frac{3}{4}m_1n$ черных клеток. Значит, в белых строках содержится менее $\frac{mn}{2}-\frac{3}{4}m_1n$ черных клеток. Но в черных строках содержится менее $\frac{1}{4}m_1n$ белых клеток. Таким образом, число клеток, цвет которых отличается от цвета содержащих их строк, меньше

$$\frac{mn}{2}-\frac{3}{4}m_1n+\frac{1}{4}m_1n=\frac{m_0n}{2}.$$

Получаем неравенство

$$\frac{1}{2}(m_0n_1+m_1n_0)<\frac{m_0n}{2},$$

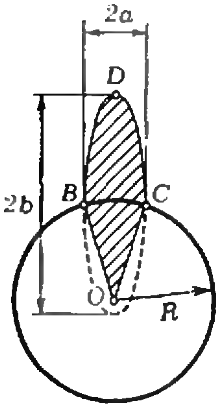
откуда $m_1<m_0$, что противоречит предположению относительно m_0 и m_1.

С. Конягин, Ю. Нестеренко

◆

Ф703. *Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R=6400$ км.*

Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b равна $S=\pi ab$.



Траектория ракеты представляет собой часть очень вытянутого эллипса, в одном из фокусов которого находится центр Земли (см. рисунок). Скорость ракеты в верхней точке D траектории почти равна нулю.

Согласно закону сохранения энергии.

$$\frac{mv_0^2}{2}-G\frac{Mm}{R}\approx -G\frac{Mm}{2b}. \qquad (*)$$

Здесь M — масса Земли, m — масса ракеты, $v_0=\sqrt{GM/R}$ — начальная скорость ракеты (первая космическая скорость); $-G\frac{Mm}{R}$ и $-G\frac{Mm}{2b}$ — потенциальная энергия ракеты у поверхности Земли (при запуске) и в верхней точке траектории. Из (*) найдем большую полуось эллипса: $b\approx R$.

Из третьего закона Кеплера (квадраты периодов обращения по эллиптическим траекториям относятся как кубы больших полуосей эллипсов) следует, что полное время $T_э$ движения ракеты по всему эллипсу было бы равно периоду T_0 обращения спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности Земли, то есть

$$T_э=T_0=\frac{2\pi R}{\sqrt{GM/R}}=2\pi\sqrt{R/g}.$$

Из второго закона Кеплера (радиус-вектор, соединяющий тело, движущееся под действием силы тяготения по замкнутой орбите, с центром притяжения, за равные промежутки времени заметает равные площади) следует, что отношение времени движения T по половине эллипса (участок BDC) к полному периоду $T_э$ равно отношению площади заштрихованной на рисунке фигуры $OBDC$ к полной площади эллипса:

$$\frac{T}{T_э}=\frac{{}^1/_2\pi ab+ab}{\pi ab}.$$

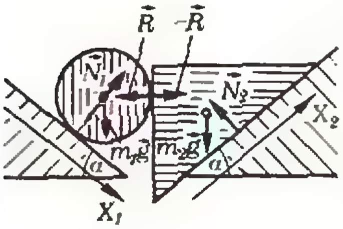
Отсюда находим время полета T:

$$T = T_{\text{э}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) = (\pi+2)\sqrt{R/g} \approx 1 \text{ ч. } 9 \text{ мин.}$$

Е. Сурков

◆

Ф704. *По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с горизонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (см. рисунок). Найти, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2. Трением между цилиндром и клином пренебречь.*



На цилиндр действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила $\vec{N}_1$ нормальной реакции со стороны левой наклонной плоскости и сила $\vec{R}$ нормальной реакции со стороны клина (сила $\vec{R}$ направлена горизонтально). Запишем уравнение движения цилиндра в проекциях на ось X_1, направленную вдоль левой наклонной плоскости (см. рисунок):

$$m_1a_1 = m_1g\sin\alpha - R\cos\alpha, \qquad (1)$$

где a_1 — проекция ускорения цилиндра на ось X_1.

На клин действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила $\vec{N}_2$ нормальной реакции со стороны правой наклонной плоскости и сила нормальной реакции со стороны цилиндра, которая, согласно третьему закону Ньютона, равна $-\vec{R}$. Запишем уравнение движения клина в проекциях на ось X_2, направленную вдоль правой наклонной плоскости:

$$m_2a_2 = -m_2g\sin\alpha + R\cos\alpha. \qquad (2)$$

В процессе движения клин соприкасается с цилиндром; поэтому, если перемещение клина вдоль оси X_2 равно Δx, то центр цилиндра (вместе с вертикальной гранью клина) сместится по горизонтали на $\Delta x\cdot\cos\alpha$. При этом вдоль левой наклонной плоскости (вдоль оси X_1) центр цилиндра сместится на Δx. Это означает, что в процессе движения клина и цилиндра выполняется соотношение

$$a_1 = a_2. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем силу $|\vec{R}|$, с которой клин давит на цилиндр:

$$R = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\,g\operatorname{tg}\alpha.$$

С. Кротов

◆

Ф705. *Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объема $V_0 = 100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество тепла $\Delta Q = 100$ Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.*

После подведения тепла ΔQ газ в левой части сосуда расширяется, совершая работу ΔA. Эта работа целиком идет на увеличение внутренней энергии газа в правой части сосуда. Таким образом,

$$\Delta Q = \Delta U_1 + \Delta A = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{3}{2}R\left(\frac{m_1}{\mu}\Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu}\Delta T_2\right). \quad (*)$$

Условие равновесия поршня до нагревания —

$$p_1 = p_2 = p,$$

уравнения состояния газа в левой и правой частях сосуда

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_1, \quad pV_2 = \frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

где $V_1 + V_2 = V_0$. После нагревания, когда поршень уже не будет двигаться, давления в левой и правой частях уравняются. Обозначим увеличение давления в сосуде Δp; тогда

$$(p+\Delta p)(V_1+\Delta V) = \frac{m_1}{\mu}R(T_1+\Delta T_1),$$

$$(p+\Delta p)(V_2-\Delta V) = \frac{m_2}{\mu}R(T_2+\Delta T_2).$$

После простых преобразований получаем

$$\Delta p(V_1+V_2) = R\left(\frac{m_1}{\mu}\Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu}\Delta T_2\right),$$

или (с учетом (*))

$$\Delta pV_0 = \frac{2}{3}\Delta Q.$$

Отсюда находим Δp:

$$\Delta p=\frac{\frac{2}{3}\Delta Q}{V_0}\approx 667\ \text{Н/м}^2.$$

Этот результат можно получить намного проще: при равновесии давление в сосуде всюду одинаково, значит, одинакова и плотность энергии (энергия единицы объема). Следовательно, увеличение плотности энергии составит $\Delta Q/V_0$; вспомнив известную формулу, связывающую плотность энергии идеального газа с давлением, сразу получим ответ.

А. Зильберман

Ф706. *Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L=20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длины $l=5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 1). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определить возможные значения ускорения тележки, при которых груз после остановки тележки в конце пути будет неподвижным.*

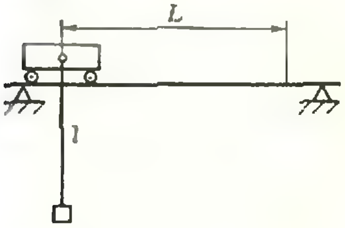


Рис. 1.

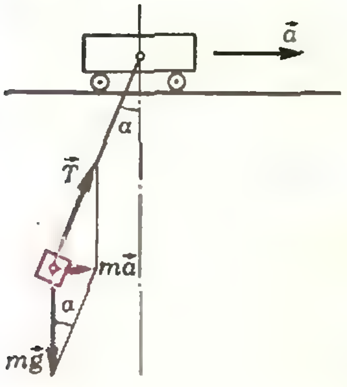


Рис. 2.

◆

Поскольку начальная и конечная скорости тележки равны нулю, а время равноускоренного движения равно времени равнозамедленного движения, абсолютные значения ускорений при равноускоренном и равнозамедленном движениях равны; следовательно, пути, пройденные при этих режимах движения, равны между собой и равны $L/2$.

Рассмотрим движение груза, когда тележка движется с некоторым постоянным ускорением $\vec{a}$. В этом случае груз будет участвовать в двух движениях: он будет двигаться с ускорением $\vec{a}$ и, кроме того, совершать гармонические колебания в системе координат, связанной с тележкой. Положение равновесия при этих колебаниях находится из условия, что груз в этом положении под действием силы натяжения троса $\vec{T}$ и силы тяжести $m\vec{g}$ движется вдоль горизонтальной оси с ускорением $\vec{a}$. Из этих условий находим, что в положении равновесия трос отклонен от вертикали на угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=|\vec{a}|/|\vec{g}|$ (рис. 2); поскольку α мало, $\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha\approx|\vec{a}|/|\vec{g}|$.

Груз будет совершать колебания около этого положения равновесия с периодом $T=2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}\approx 2\pi\sqrt{l/g}$, а угловая амплитуда колебаний груза будет равна α.

При смене знака ускорения тележки угол α, определяющий отклонение троса от вертикали в положении равновесия, также меняет знак, то есть трос отклоняется на угол α в противоположную сторону. Для того чтобы груз оставался неподвижным после остановки тележки, на середине пути (при смене знака ускорения тележки) он должен находиться в первоначальном положении равновесия, то есть α должно быть равно нулю. Из этого следует, что за время t прохождения тележкой расстояния $L/2$ груз должен совершить целое число n полных колебаний, то есть

$$t=nT,\ \text{где}\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Из условия

$$\frac{L}{2}=\frac{at^2}{2}=\frac{an^2T^2}{2}=\frac{2\pi^2n^2al}{g}$$

находим набор значений ускорения, при которых после остановки тележки груз будет оставаться неподвижным:

$$a_n=\frac{1}{n^2}\,\frac{Lg}{4\pi^2 l}=\frac{1}{n^2}\ \text{м/с}^2.$$

В. Можаев

Ф707. *Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D=250$ см и фокусное расстояние $F=160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d=200$ см и находящегося на расстоянии $L=320$ км.*

◆

1) Расстояние f от объектива до плоскости изображения спутника определяется из формулы линзы:

$$f=\frac{LF}{L-F}=\frac{F}{1-F/L}.$$

Поскольку $F\ll L$, можно приближенно записать

$$f\approx F(1+F/L).$$

Расстояние от фокуса объектива до плоскости изображения

1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка?

2. Каким будет размер изображения искусственного спутника?

3) Каков будет диаметр возможных размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии?

равно

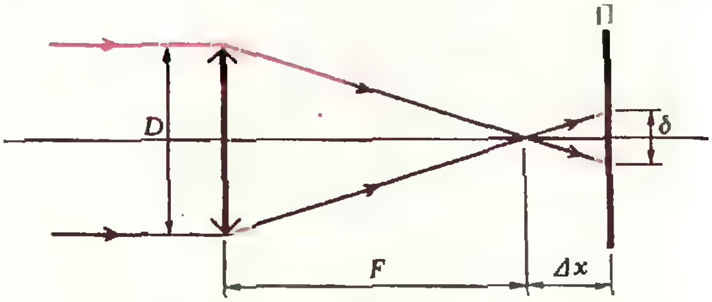
$$\Delta x = f - F = F^2/L = 8 \text{ см}.$$

На этом расстоянии от фокуса должна быть установлена фотопластинка.

2) Размер изображения спутника равен

$$l = \frac{f}{L} d \approx \frac{F}{L} d = 10^{-1} \text{ см}.$$

3) Изображения далеких звезд должны располагаться в фокальной плоскости объектива. В плоскости фотопластинки,



находящейся на расстоянии Δx от фокальной плоскости, изображения звезд окажутся размытыми (несфокусированными). Как видно из рисунка, диаметр размытого изображения звезды на фотопластинке (П) равен

$$\delta = D \frac{\Delta x}{F} = 1{,}25 \cdot 10^{-1} \text{ см}.$$

Оценим влияние дифракции. Далекие звезды вследствие дифракции должны изображаться в фокальной плоскости не точками, а дифракционными пятнами, радиус ϱ которых определяется выражением $\varrho = \frac{\lambda}{D} F$. В нашем случае порядок этой величины — 10^{-3}. Поскольку $\varrho \ll \delta$, дифракция оказывается несущественной, и размер несфокусированных изображений звезд определяется практически только геометрическим расхождением пучков.

С. Козел

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М676—М690; Ф692—Ф707 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, справились с задачами **М676, М681, М686, М687**. Остальные задачи решили: *Т. Алавидзе* (Москва) **88**; *М. Алексеев* (Москва) **78, 84, 85, 89**; *И. Альтман* (Одесса) **88**; *С. Асеев* (Николаев) **88**; *В. Барабанов* (Севастополь) **78**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **78**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **82, 85, 88**; *И. Бинус* (Пенза) **78, 85, 89**; *В. Валуев* (Тула) **78**; *Л. Гареев* (Уфа) **85**; *А. Гохберг* (Донецк) **77, 78**; *О. Гринив* (Киев) **77, 84**; *Н. Гришко* (Киев) **78, 79, 84**; *А. Дубицкас* (Таураге) **78, 82, 83, 88—90**; *М. Елисеев* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **78, 84, 85, 88—90**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **78, 83, 85, 88, 89**; *И. Жуков* (Ленинград) **78, 83—85, 89**; *М. Заславский* (Харьков) **78**; *П. Зусманович* (Алма-Ата) **90**; *И. Итенберг* (Ленинград) **78, 82—85, 88, 90**; *А. Казмерчук* (Киев) **89**; *Д. Калюжный* (Одесса) **78, 80, 89**; *В. Кисиль* (Одесса) **77—79, 82, 84, 85**; *А. Корсуков* (Ачинск) **78, 82, 83, 85**; *И. Кудряшов* (Ленинград) **77—79, 83—85, 88**; *И. Ласкин* (Алексин) **77**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **82, 84, 85, 89**; *С. Мамедов* (Баку) **78**; *Д. Миллионщиков* (Москва) **77, 78, 80**; *А. Мильман* (Одесса) **77, 78, 82, 88—90**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **78**; *А. Никонов* (Кировоград) **77, 78, 80, 84, 89**; *М. Овецкий* (Донецк) **77**; *А. Пайак* (Лодзь, ПНР) **79**; *К. Панкратов* (Куйбышев) **83**; *Г. Перельман* (Ленинград) **77—80, 82—85, 89**; *В. Поярков* (Николаев) **78, 89**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **77—80, 84, 85**; *А. Родионов* (Москва) **78**; *П. Савельев* (п. Черноголовка Московской обл.) **79, 84, 85**; *Е. Сазонов* (Москва) **79**; *А. Сикса* (Киев) **78**; *Н. Солодовникова* (Долгопрудный) **79**; *С. Спичак* (Припять) **89**; *Э. Степанян* (Баку) **89**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **82—85**; *Г. Трунов* (Москва) **85**; *Е. Тюрин* (Вильнюс) **77, 78**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **77, 79, 82, 88**; *Ю. Усачев* (Киев) **77**; *В. Фрегер* (Вольск) **82, 83, 89**; *А. Хохлов* (Москва) **78, 83—85, 88—90**; *Т. Хусейнов* (Душанбе) **78**; *П. Цветков* (Подольск) **77, 89, 90**; *Р. Цоуф* (Прага, ЧССР)

82, 83, 85; *О. Чалых* (Витебск) **77, 78, 82—85, 88, 90**; *Г. Чевардин* (Челябинск) **88**; *А. Шигарев* (Сибай) **79**; *В. Ярош* (Ленинград) **77—79, 82—85, 88—90.**

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф693**, **Ф700** и **Ф701**. Остальные задачи решили: *Е. Абедимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) **04, 05**; *М. Авдыев* (Мары) **94**; *В. Айгарс* (Рига) **05**; *И. Алексеев* (Москва) **94—96, 98, 02, 04**; *Э. Алиев* (Баку) **94, 96, 98, 99, 04**; *И. Альтман* (Одесса) **94, 98, 99, 04, 06**; *Д. Асмус* (Челябинск) **95, 96**; *А. Астахов* (Железнодорожный) **94, 96, 02, 04**; *А. Бабаев* (Баку)**94—96, 98, 99, 06**; *Э. Багдасарян* (Баку) **94, 04**; *Я. Базалий* (Донецк) **94—97, 99, 03—07**; *Д. Басалаев* (Черногорск) **05, 06**; *О. Бендер* (Запорожье) **04—07**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **94—06**; *Ю. Бобрышев* (Ворошиловград) **99, 04**; *С. Бочко* (Братск) **94, 95**; *Б. Вейцман* (Одесса) **94—07**; *С. Вознюк* (Харьков) **96, 04—07**; *С. Выгран* (Запорожье)**99, 04, 06**; *И. Гавриков* (Москва) **96, 98, 99, 05**; *Э. Гасанов* (Порт-Ильич) **96**; *Д. Гирич* (Волгоград) **95, 98, 99**; *К. Григоришин* (Запорожье) **94, 96—98, 04—07**; *И. Гурович* (Одесса) **94, 98, 99, 04**; *В. Добрецов* (Москва) **98**; *И. Доценко* (Москва) **94, 03—05**; *В. Евстратов* (Ленинград) **98, 99, 04—06**; *В. Жилин* (Уральск) **99, 04**; *М. Житомирский* (Харьков) **98, 04, 05**; *Г. Жуков* (Шумерля) **95**; *М. Жяконис* (Каунас) **96—99, 02**; *Е. Касперский* (Долгопрудный) **94, 98, 99, 04, 06**; *А. Колежук* (Киев) **94, 95, 98, 99**; *В. Комов* (Александров) **95—99, 03—07**; *В. Криман* (Винница) **04, 05**; *С. Крюковский* (Владивосток) **04—07**; *А. Кубельский* (Москва) **02**; *А. Кубышкин* (Киев) **94—96, 98, 02—06**; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **94, 95, 06, 07**; *А. Кузьменко* (Киев) **04**; *О. Кузьмин* (Ташкент) **98**; *И. Куколев* (Сызрань) **94**; *Ф. Курбанов* (п. Ленин Аз. ССР) **98, 05**; *И. Куянов* (Казань) **98, 99**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **98**; *И. Ласкин* (Алексин) **95**; *А. Латынин* (Киев) **99**; *А. Лозовой* (Ростов-на-Дону) **95, 96, 98**; *И. Маловичко* (Северодонецк) **98, 99, 06**; *М. Манцев* (Ставрополь) **98**; *Х. Матчанов* (Хорезмская обл. Уз. ССР) **05**; *А. Миленин* (Люберцы) **98, 99, 02, 04, 06, 07**; *А. Мильман* (Одесса) **94, 96, 98, 99, 02**; *В. Михайловский* (Магнитогорск) **07**; *С. Молоков* (Ставрополь) **98, 03—06**; *В. Молчанов* (Киев) **94, 98, 02, 04, 06**; *П. Морозов* (Тула) **99**; *А. Мосунов* (п. Магнитка Челябинской обл.) **94, 96**; *Ю. Мочалов* (Калининград Московской обл.) **99**; *Д. Мукушев* (с. Арнат Семипалатинской обл.) **03**; *Е. Мурзахметов* (Джезказган) **94—96, 98, 99**; *Х. Мургазиев* (Андижан) **98, 99**; *С. Некрасов* (Череповец) **94, 96**; *К. Немченко* (Донецк) **94—96, 98, 04, 05**; *П. Никитин* (Великие Луки) **03, 04**; *Д. Овечкин* (Набережные Челны) **04, 05**; *Р. Овчарек* (Щецин, ПНР) **05**; *А. Охапкин* (Львов) **95, 96**; *Е. Паганкер* (Ереван) **04**; *З. Пиличев* (Кавадарци, СФРЮ) **98**; *А. Панасюк* (Одесса) **98, 99**; *К. Панкратов* (Куйбышев) **96**; *В. Пентегов* (Киев) **96—98, 04—06**; *С. Пильтяй* (Ангарск) **04, 05**; *А. Пироженко* (Мытищи) **94, 96—99, 03—07**; *В. Погорелов* (Узловая) **94, 96, 98, 99**; *М. Половинченко* (Киев) **94, 99, 05**; *В. Потапчук* (д. Саковцы Братской обл.) **98, 99, 02**; *М. Пустильников* (Свердловск) **04**; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) **94, 96, 98, 03—07**; *М. Рахминов* (Алма-Ата) **96, 98, 99, 03—05**; *В. Родионов* (Ленинск Кзыл-Ординской обл.) **04**; *М. Розенберг* (Ленинград) **04**; *Н. Розенвайн* (Киев) **98, 99**; *В. Романов* (Тула) **94**; *Л. Ростока* (Хуст) **07**; *В. Руденко* (с. Геронимовка Черкасской обл.) **96**; *Л. Салахов* (Сумгаит) **99**; *Д. Свириди* (Москва) **94, 95, 98, 03—06**; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) **94, 99, 04**; *И. Сираков* (Асеновград, НРБ) **04, 06**; *И. Соколова* (Феодосия) **04, 07**; *И. Соколовский* (Покров) **95, 07**; *С. Соломко* (Мелеуз) **99, 02, 06**; *М. Стежко* (Брест) **95, 96, 99**; *Ю. Талденко* (Сумы) **94—96, 99, 03, 04, 07**; *А. Терещенко* (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) **04—06**; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) **94—96, 98, 99, 02**; *А. Тищенко* (Днепропетровск) **94—97, 99, 05, 06**; *О. Третьяков* (Омск) **98**; *К. Трофимов* (Владивосток) **94**; *Г. Трунов* (Москва) **94, 97—99, 07**; *Н. Федин* (Омск) **94, 95, 98, 99, 03, 06**; *Е. Федущенко* (Харьков) **05**; *В. Фельдман* (Саратов) **95, 96, 05, 06**; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) **96, 99**; *С. Фищенко* (Москва) **03—07**; *А. Хельвас* (Киев) **99, 02**; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **94, 95, 03—05, 07**; *С. Цыганков* (Киев) **02**; *А. Черныш* (Новосибирск) **94**; *Ю. Чернышев* (Москва) **03—06**; *А. Шатов* (Черкассы) **03—05**; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз. ССР) **95, 96**; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) **95, 99**; *А. Шугай* (Запорожье) **95, 99, 03, 04**; *А. Шулепов* (Каменск-Уральский) **98**; *Ю. Щедрин* (Брянск) **94, 95, 98, 99, 06**; *В. Ярош* (Ленинград) **94, 95, 97—99, 02—07**; *В. Ясинский* (Могилев-Подольский) **98.**

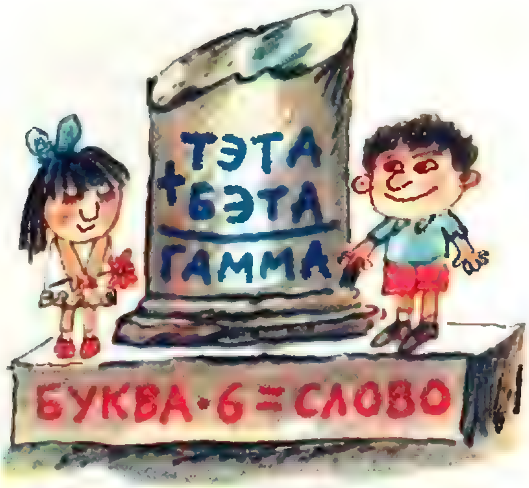
Наша обложка

На обложке показан орнамент с «переменным рисунком», демонстрирующий сочетание случайного и закономерного. Орнамент, нарисованный ЭВМ, получается многократным отражением ячейки, имеющей форму равностороннего треугольника, от ее сторон (найдите границы такой ячейки). Для четырех угловых положений ячейки заданы четыре случайных варианта рисунка в виде нескольких отрезков и ломаных, которые делят ячейку на части, окрашиваемые в различные цвета. Случайные рисунки в углах получены специальной программой, использующей «датчик случайных чисел». Для промежуточных положений ячейки рисунок рассчитывается программой так, чтобы обеспечить постепенный переход от одного варианта к другому.

Меняя параметры в программах, можно заставить «электронного художника» нарисовать неограниченное количество вариаций на заданную тему.

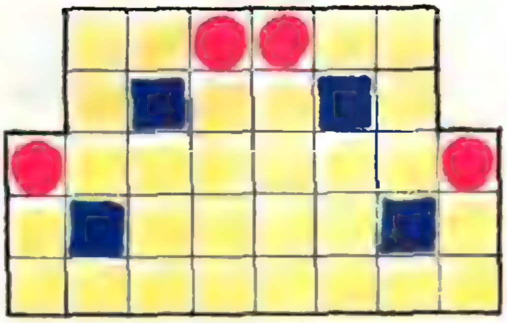
Ю. Котов

КВАНТ для младших школьников

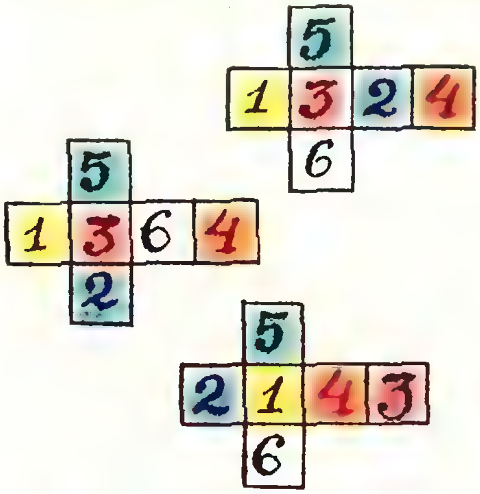


Задачи

1. На рисунке изображены два числовых ребуса. В каждом из них одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте эти ребусы.



2. Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре конгруэнтные части и сложите из них квадрат так, чтобы красные кружочки и синие квадратики оказались симметричными относительно всех осей симметрии квадрата.



3. Из трех «выкроек», изображенных на рисунке, собрали три кубика; затем из этих кубиков склеили прямоугольный параллелепипед 1×1×3. На четырех гранях параллелепипеда оказались написанными четыре трехзначных числа (положение цифры в квадрате не имеет значения). Каково наибольшее возможное значение суммы этих чисел?

4. На столе стоят семь коробочек. Средняя коробочка пустая, а в остальных шести коробочках лежит по две монеты: снизу — пятак, сверху — «двушка».

Разрешается перекладывать по одной монете в соседнюю коробочку, но нельзя пятак класть на «двушку». Кроме того, в пятой коробочке не должно оказываться более трех монет, а в остальных — более двух.

Можно ли переложить монеты так, чтобы а) в первых трех коробочках лежало по две «двушки», а в последних трех — по два пятака, б) в первых трех коробочках лежало по два пятака, а в последних трех — по две «двушки»?

Эти задачи нам предложили
Н. Антонович,
Ф. Бартенев, А. Швецов

Н. Иванова

Самосовмещения фигур и геометрические задачи

На занятии математического кружка учитель предложил ребятам *восстановить границу участка, имеющего форму квадрата, если сохранились два столба на противоположных сторонах изгороди и дерево, растущее в центре участка.*

Как решать эту задачу? Один из членов кружка сделал рисунок, считая, что задача решена (рис. 1). Стало ясно, что нужно знать положение хотя бы одной из сторон квадрата. На стороне AD известна точка N. Нельзя ли найти еще точку на этой стороне? Немного подумав, ребята догадались: «Надо повернуть квадрат вокруг центра O на 180°; при этом точка M перейдет в точку M_1, лежащую на $[AD]$, — ведь при повороте $R_O^{180^\circ}$ квадрат отображается на себя!» (рис. 2) — и ребята легко решили задачу (как?).

Тогда учитель предложил членам кружка *восстановить границу участка, имеющего форму квадрата, если сохранились два столба на смежных сторонах изгороди и дерево, растущее в центре участка.*

Немного подумав, ребята сообразили, что и здесь надо использовать одно из самосовмещений квадрата: поворот вокруг центра O на 90° (рис. 3).

«Молодцы, — сказал учитель. — Вот вам задача потруднее» — и он нарисовал на доске квадрат. Затем через его вершины он провел прямые, делящие противоположные стороны квадрата пополам, и заштриховал фигуру, образованную пересекающимися прямыми (рис. 4). «Какую фигуру я заштриховал?».

Посмотрев на рисунок, ребята сразу догадались, что это квадрат. Но как это доказать? Оказывается, и здесь можно привлечь самосовмещения квадрата. В самом деле, повернем данный квадрат вокруг центра на 90°; при этом повороте заштрихованный выпуклый четырехугольник отобразится на себя. Значит, он — квадрат (почему?).

Один из самых активных участников кружка Петя спросил: «Поче-

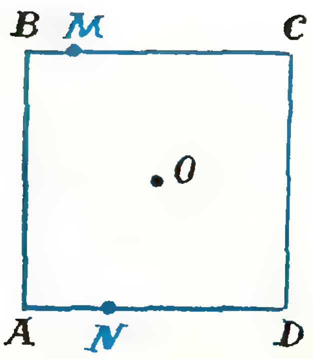


Рис. 1.

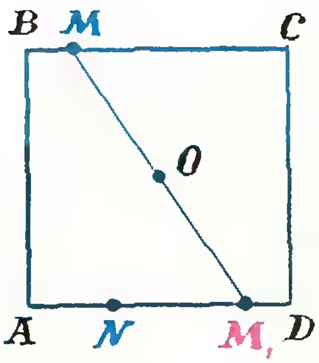


Рис. 2.

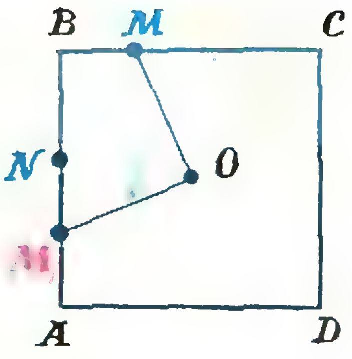


Рис. 3.

му мы все время рассматриваем квадрат?».

Вместо ответа учитель нарисовал на доске равносторонний треугольник, провел через его вершины прямые, отсекающие $\frac{1}{3}$ противоположной стороны (рис. 5), и спросил: «Какую фигуру образуют проведенные прямые?»

«Наверное, это равносторонний треугольник, — сказал Петя, — но как это доказывать, я не знаю. Может, здесь нужно использовать самосовмещения равностороннего треугольника?».

«А какие самосовмещения и сколько имеет равносторонний треугольник?» — спросил учитель.

После некоторых размышлений ребята пришли вот к чему: «При самосовмещениях равностороннего треугольника его вершины переходят в себя. Значит, у равностороннего треугольника столько самосовмещений, сколько перестановок можно сделать из трех букв. Таких перестановок шесть: значит, и самосовмещений не больше шести. Вот они: тождественное, повороты $R_O^{120°}$, $R_O^{\ 120°}$ и осевые симметрии S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3} (O — центр треугольника, l_1, l_2, l_3 — его медианы)».

Ребята сообразили, что в последней задаче надо рассмотреть поворот вокруг центра треугольника на 120°. При этом повороте заштрихованный треугольник перейдет в себя. Отсюда следует, что он — равносторонний (почему?). Задача решена.

В заключение учитель предложил ребятам самостоятельно решить дома следующие задачи:

1. Докажите, что «внутренность» правильной пятиугольной звезды (рис. 6) есть правильный пятиугольник.

2. К двум окружностям проведены две внешние и две внутренние касательные. Докажите, что точка пересечения внешних и точка пересечения внутренних касательных лежат на прямой, проходящей через центры данных окружностей.

3. Докажите, что параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником.

4. Постройте квадрат, если на каждой его стороне задано по точке.*

Он рекомендовал также прочитать в «Кванте» статью «Самосовмещения квадрата и тайнопись» (1980, № 12).

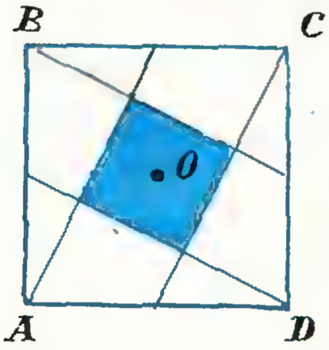


Рис. 4.

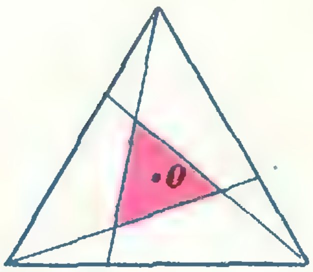


Рис. 5.

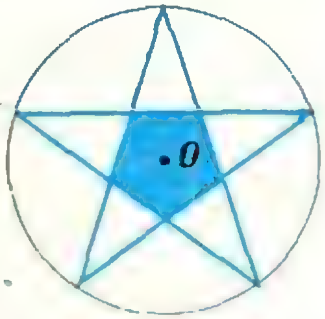


Рис. 6.

В. Можаев

Фотоны

Занимаясь анализом полученных на опыте закономерностей электромагнитного излучения нагретых тел, Планк в 1900 году выдвинул гипотезу, которая коренным образом изменила ряд фундаментальных представлений классической физики и легла в основу квантовой теории. Согласно гипотезе Планка, энергия, излучаемая микроскопическими объектами (атомами, молекулами), может принимать не любые, а только определенные, дискретные значения, кратные минимальной порции

$$E = h\nu.$$

Здесь ν — частота излучения, а h — некоторая постоянная величина, получившая название постоянной Планка.

Развивая теорию квантов, Эйнштейн высказал гипотезу о том, что само электромагнитное излучение имеет прерывистую структуру, состоит из отдельных световых частиц (корпускул) — фотонов. Энергия фотона равна $h\nu$, а его импульс $P = h\nu/c = h/\lambda$ (где c — скорость света, а λ — длина волны). На основе таких представлений о свете Эйнштейн в 1905 году построил количественную теорию фотоэлектрического эффекта.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров, в которых проявляются именно корпускулярные свойства света.

Задача 1. *На рисунке 1 приведен экспериментально полученный график зависимости задерживающей разности потенциалов $U_з$ (то есть напряжения между катодом и анодом, при котором ток в вакуумном фотоэлементе становится равным нулю) от частоты ν падающего света. С помощью этого графика найдите значение постоянной Планка, работу выхода электронов из катода и красную границу фотоэффекта.*

При освещении фотокатода светом происходит взаимодействие квантов света с электронами вещества, причем в случае фотоэффекта речь идет о слабо связанных с атомами электронах, то есть электронах проводимости. При взаимодействии фотона с одним из таких электронов энергия фотона $h\nu$ полностью передается электрону, и, если этой дополнительной энергии будет достаточно, электрон сможет покинуть поверхность фотокатода.

Максимальная кинетическая энергия $E_к$ электрона определяется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_к = h\nu - A,$$

где A — работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества в вакуум. Очевидно, что фототок станет равным нулю, то есть выбитые с поверхности катода электроны не дойдут до анода, если задерживающая разность потенциалов между

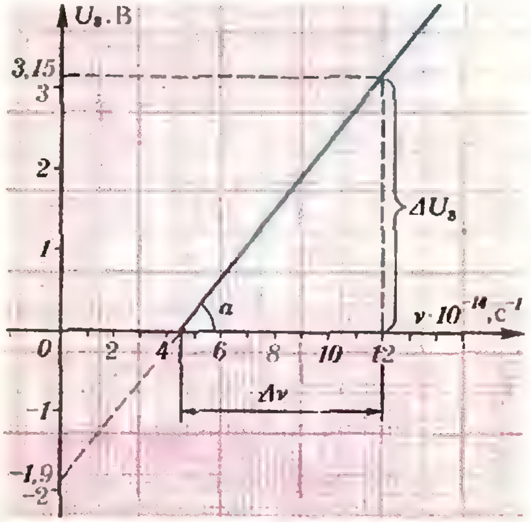


Рис. 1.

катодом и анодом будет равна

$$U_з = \frac{E_к}{e}, \text{ или } U_з e = E_к,$$

где e — заряд электрона. Подставив это выражение в основное уравнение, получим формулу, связывающую $U_з$ и частоту света ν:

$$U_з = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

Как видно из этой формулы, отношение постоянной Планка h к заряду электрона e равно тангенсу угла наклона α экспериментальной прямой (см. рис. 1); следовательно,

$$h = e\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{e\Delta U_з}{\Delta\nu} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 3{,}15\ \text{В}}{7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}} \approx$$
$$\approx 6{,}7 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}$$

Для определения работы выхода A продолжим экспериментальную прямую до пересечения с вертикальной осью. Величина отсекаемого отрезка, выраженная в электрон-вольтах, и будет равна работе выхода:

$$A = 1{,}9\ \text{эВ}.$$

Красной границей фотоэффекта называют наименьшую частоту света $\nu_к$, при которой возникает фотоэффект. Как видно из графика,

$$\nu_к = 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}.$$

Задача 2. *Свет от Солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1$ м^2 под углом $\alpha = 60°$. Найдите силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 земной поверхности, перпендикулярной к излучению, равна $P = 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2.*

Прежде всего обсудим, почему вообще существует световое давление и как его объяснить с квантовой точки зрения.

Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, при этом импульс фотонов изменяется. Это изменение обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны в момент отражения (взаимодействия с зеркалом). По третьему закону Ньютона точно такая же сила (по модулю) будет действовать на зеркало со стороны фотонов (рис. 2). Она и создает световое давление.

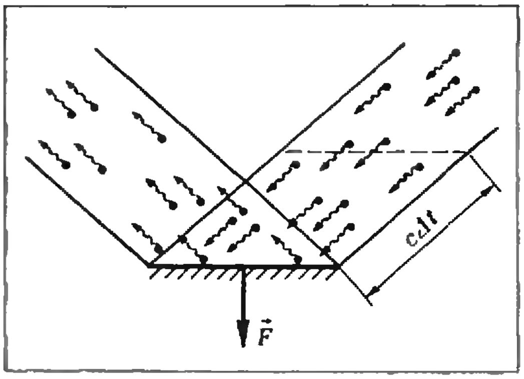


Рис. 2.

Теперь проведем расчет. Найдем сначала импульс силы, действующей на зеркало в течение промежутка времени Δt со стороны фотонов, обладающих энергией $h\nu_i$, где ν_i — некоторая фиксированная частота. Пусть концентрация таких фотонов в падающем потоке равна n_i. Тогда за время Δt на зеркало попадут $n_i c \Delta t S \cos\alpha$ фотонов (c — скорость света). Их суммарный импульс до взаимодействия с зеркалом равен

$$P_1 = (n_i c \Delta t S \cos\alpha)\, mc =$$
$$= n_i S \cos\alpha \cdot h\nu_i \Delta t.$$

После отражения импульс изменяется по направлению (угол отражения равен углу падения), а по модулю остается тем же:

$$P_2 = P_1.$$

Таким образом, изменение импульса

$$\Delta P = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1| = 2 n_i h\nu_i S \cos^2\alpha \cdot \Delta t,$$

и сила давления на зеркало со стороны фотонов данного сорта

$$F_i = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 2 n_i h\nu_i S \cos^2\alpha.$$

Суммарная сила давления со стороны всех фотонов

$$F = \sum F_i = 2S\cos^2\alpha \cdot \sum n_i h\nu_i.$$

Поскольку мощность солнечного излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению излучения, равна

$$P = c\sum n_i h\nu_i,$$

окончательное выражение для силы F будет иметь вид

$$F=2\frac{P}{c}S\cos^2\alpha\approx 2{,}3\cdot 10^{-6}\text{Н}.$$

Задача 3. *Тепловой фотоприемник представляет собой полую камеру с небольшим отверстием (рис. 3). Отношение площади внутренней поверхности камеры к площади отверстия $S/\sigma=\beta=200$. На отверстие падает монохроматический пучок фотонов; сечение пучка равно сечению входного отверстия. При зеркальной внутренней поверхности камеры отношение концентрации фотонов в полости к концентрации фотонов в пучке равно $n_1/n_0=4$. Чему будет равно аналогичное отношение, если коэффициент поглощения стенок приемника будет равен $k=0{,}01$? Излучением стенок можно пренебречь.*

В первом случае, когда внутренняя поверхность фотоприемника полностью отражает падающее на нее излучение, в стационарном состоянии (в установившемся режиме) число фотонов, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов, покидающих полость приемника. Если концентрация фотонов в падающем пучке n_0, а площадь входного отверстия приемника σ, то число фотонов, попадающих в приемник в единицу времени, равно

$$N_0=n_0c\sigma,$$

где c — скорость света. Число фотонов, покидающих приемник в единицу времени, пропорционально концентрации фотонов n_1 в приемнике, площади отверстия σ и скорости фотонов c:

$$N_1=\alpha n_1c\sigma,$$

где α — постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия стационарности $N_0=N_1$ получим

$$\alpha=n_0/n_1=1/4.$$

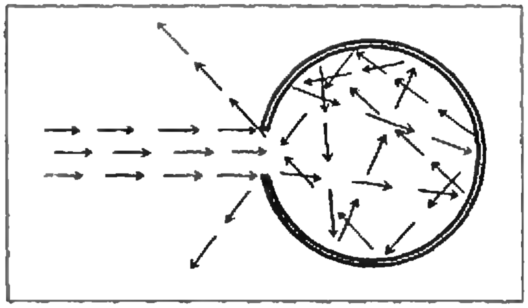


Рис. 3.

Во втором случае, когда стенки полости частично поглощают фотоны, в установившемся режиме число фотонов N_0, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов N_2, покидающих полость через входное отверстие приемника в единицу времени, плюс число фотонов N_2', поглощаемых стенками полости за это же время:

$$N_0=N_2+N_2',$$

или

$$n_0c\sigma=\alpha n_2c\sigma+k\alpha n_2cS,$$

где n_2 — новая концентрация фотонов в полости приемника, S — площадь внутренней поверхности полости. Из последнего равенства найдем

$$\frac{n_2}{n_0}=\frac{1}{\alpha(1+k\beta)}=\frac{4}{3}.$$

Задача 4. *Найдите изменение длины волны света, излучаемого атомом водорода, вследствие отдачи, которую испытывает ядро атома со стороны вылетающего кванта света.*

Запишем законы сохранения энергии и импульса для изолированной системы атом водорода — фотон.

В начальный момент, до излучения фотона, эта система представляет собой неподвижный атом водорода, находящийся в возбужденном состоянии, то есть его электрон занимает не самый низкий энергетический уровень E_1, а какой-то более высокий уровень E_k. (Возбуждение атома может быть вызвано неким внешним воздействием, например столкновением с другим атомом или свободным электроном или поглощением кванта света.) Пусть разность энергий электрона в этом случае $E_k-E_1=h\nu_0$. Тогда полная энергия атома равна сумме энергии покоя ядра (протона) m_pc^2 и энергии электрона E_k, а импульс атома равен нулю.

После излучения атомом фотона с некоторой энергией $h\nu$ изолированная система будет включать в себя фотон и атом водорода, который вследствие отдачи приобретет некоторую скорость v. Полная энергия системы в этом случае будет равна $m_pc^2+E_1+m_pv^2/2+h\nu$, а импульс системы будет равен

$$h\nu/c-m_pv.$$

Согласно законам сохранения энергии и импульса, можно записать

$$m_pc^2+E_k=m_pc^2+E_1+\frac{m_pv^2}{2}+h\nu$$

и

$$0=\frac{h\nu}{c}-m_pv.$$

Учитывая, что $E_k-E_1=h\nu_0$, получим

$$h\Delta\nu=h\nu-h\nu_0=-\frac{m_pv^2}{2}=$$

$$=-\frac{m_p(h\nu)^2}{2m_p^2c^2}=-\frac{(h\nu)^2}{2m_pc^2},$$

или

$$\Delta\nu=-\frac{h\nu^2}{2m_pc^2}=-\frac{h}{2m_p\lambda^2}.$$

При относительно малых изменениях частоты ($\Delta\nu\ll\nu$)

$$\Delta\nu=\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right)=-\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Тогда окончательно

$$\Delta\lambda=\frac{h}{2m_pc}\approx 6{,}7\cdot10^{-16}\ \text{м}.$$

Упражнения

1. Найдите среднее число n фотонов, попадающих в глаз за единицу времени, если смотреть на электрическую лампочку накаливания мощностью $P=200$ Вт с расстояния $l=10$ м. Средняя длина волны излучения лампочки $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м. Диаметр зрачка глаза примите равным $d=2$ мм. Рассеянием и поглощением света можно пренебречь.

2. До какого максимального потенциала φ_{max} зарядится уединенный медный шарик, если его облучать ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda=2\cdot10^{-7}$ м? Работа выхода электрона для меди $A=4{,}47$ эВ.

3. Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса $\tau=5\cdot10^{-4}$ с, излучает параллельный пучок света с энергией $E=1$ Дж. Определите силу F светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на шарик излучение.

4. Какую частоту ν фотона зарегистрирует неподвижный приемник, если фотон испущен движущимся атомом вдоль направления его движения? Скорость атома v ($v\ll c$, где c — скорость света). В случае неподвижного атома частота излучаемого фотона равна ν_0. Указание. Воспользуйтесь приближением: для $\alpha\ll1$ $\sqrt{1+\alpha}\approx1+\alpha/2$.

Все врут календари?

(Начало см. на с. 19)

Мы перепечатываем несколько «малых форм» Евг. Сазонова, опубликованных в разное время в «Литературной газете».

Из цикла «Математизмы»

Среди людей
привычного мне круга
(А у меня
культурные друзья)
Есть мнение,
что квадратуру круга,
Как ты ни бейся,
доказать нельзя.
Ну, и не надо!
Стоит ли тужить?
И времени,
и сил пустая трата...
Не лучше ли
усилья приложить,
Чтоб доказать округлость
у квадрата?

Из цикла «Диалоги»

— Как вы относитесь к теории относительности? — спросил Евг. Сазонова знакомый ученый.

— Относительно неплохо,— ответил людоед.

Из россыпи незацикленного

Изучает физик пи-мезоны,
И, наверно, в этом есть резон;
Я же по утрам стригу газоны,
Чтобы свежий был в саду озон!

* * *

Ты синтезируй мне, браток,
Скорей искусственный желток!

* * *

Не всяк, кто знает синхрофазотрон,
Ввинтить сумеет лампочку в патрон!

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Имеется два сплава меди и серебра, причем в первом сплаве процентное содержание меди (по весу) на 45% больше, чем во втором. Сплавив кусок первого сплава, содержащий 6 кг меди, с куском второго сплава, содержащим 12 кг меди, получили слиток, содержащий $p\%$ меди. Определите процентное содержание серебра в первом сплаве.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ $|SC|=l$ и ребро $[SC]$ составляет с плоскостью основания угол величиной α. На высоте $[SO]$ пирамиды взята точка S_1 такая, что сумма расстояний от этой точки до вершины S и до точек C_1, A_1, B_1, являющихся серединами сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ треугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет наименьшее значение. Определите объем пирамиды $S_1A_1B_1C_1$.

3. Найдите все значения $a \in \mathbf{R}$, при которых выполняется неравенство

$$\int\limits_{-1-a}^{-2a} \frac{dx}{x+a} > \log_{a^2}(2^{\log_2 e}).$$

4. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 2x}+x+0{,}25\sin 4x+\ln\frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Из одного и того же пункта, расположенного на прямолинейном пути, одновременно в одном направлении с разными, но постоянными скоростями вышли два пешехода. Через два часа расстояние между ними было равно s км. После этого пешеходы пошли быстрее и стали затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равно $3s$ км. Определите пути, пройденные пешеходами за первые 2 ч движения.

2. В прямой круговой конус с образующей l и высотой H вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат конической поверхности. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности этой призмы наибольшая из всех возможных.

3. Вычислите интегралы $I_1=\int\limits_4^8 \frac{dx}{2x}$ и

$$I_2=\int\limits_{\frac{144}{169}}^{\frac{165}{169}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

и определите знак разности I_2-I_1 (без помощи таблиц).

4. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x)=5x+\ln 2+\log_2 \sin^3\frac{x}{3}+{}$$
$$+3\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{4}{3}x-\sin\frac{2}{3}x\right).$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. К лежащему на горизонтальной поверхности бруску массой $m=12$ кг прикреплена пружина жесткостью $k=300$ Н/м (рис. 1). Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu=0{,}4$. Вначале пружина не деформирована. Затем, приложив к свободному концу пружины силу $\vec{F}$, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту, медленно переместили брусок на расстояние $s=0{,}4$ м. Какая работа была при этом совершена?

2. Два маленьких тела с массами $m_1=2$ кг и $m_2=6$ кг соединили нитью и положили на гладкую цилиндрическую поверхность так, как показано на рисунке 2, *а*. Величина угла α неизвестна. Если тела в таком положении отпустить, они начинают двигаться с ускорением $a=6$ м/с^2. С каким ускорением будут двигаться тела, если их расположить на цилиндрической поверхности симметрично (рис. 2, *б*)?

3. Конденсаторы, имеющие емкости $C_1=20$ мкФ и $C_2=60$ мкФ, зарядили до некоторых напряжений U_1 и U_2 соответственно. Затем отрицательно заряженные обкладки конденсаторов соединили проводником, сопротивление которого можно считать пренебрежимо малым, а положительные обкладки соединили через резистор сопротивлением $R=80$ Ом (рис. 3). В момент замыкания ключа K по резистору течет ток $I=0{,}2$ А. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту, когда ток в цепи практически прекратится?

4. Пучок протонов влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Направление поля перпендикулярно скорости пучка. В этом поле протоны движутся по дуге окружности радиусом $r=0{,}2$ м и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени. Ток в пучке $I=0{,}1$ мА. Удельный заряд протона (отношение заряда к массе) $e/m=10^8$ Кл/кг.

5. По двум параллельным металлическим рейкам, находящимся в горизонтальной плоскости на расстоянии $l=1$ м друг от друга, мо-

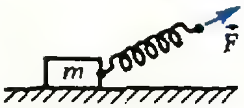


Рис. 1.

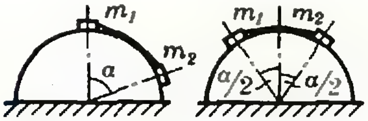


Рис. 2, а и б.

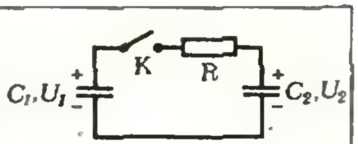


Рис. 3.

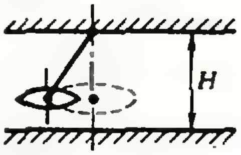


Рис. 4.

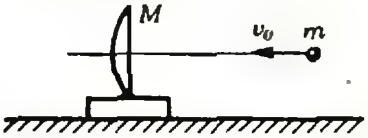


Рис. 5.

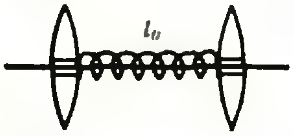


Рис. 6.

жет двигаться без трения проводящий однородный стержень. Длина стержня равна расстоянию между рейками, а его масса $m=10$ г. Концы стержня плотно прилегают к рейкам, обеспечивая хороший электрический контакт. Рейки соединены друг с другом через конденсатор емкостью $C=100$ мкФ. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально, а модуль его $B=10$ Тл. Определите заряд, возникающий на конденсаторе спустя $\tau=1$ с после начала действия на стержень внешней силы, которая приложена к середине стержня, направлена параллельно рейкам и по модулю равна $F=0{,}04$ Н. Начальная скорость стержня равна нулю. Сопротивлением реек и подводящих проводов можно пренебречь.

6. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F=0{,}63$ м подвешена на нити к потолку и равномерно движется по окружности, причем оптическая ось линзы все время остается вертикальной (рис. 4). При какой угловой скорости вращения изображение точки подвеса будет находиться на полу? Высота комнаты $H=3$ м. Как зависит число возможных решений от длины нити?

7. Шарик массой $m=50$ г движется со скоростью $v_0=5$ м/с вдоль оптической оси собирающей линзы, установленной на подставке на гладкой поверхности (рис. 5). Масса линзы с подставкой $M=0{,}2$ кг, фокусное расстояние линзы $F=10$ см. После упругого удара шарик отскакивает от линзы. Определите длительность промежутка времени, в течение которого будет существовать мнимое изображение шарика. Силу тяжести при движении считать пренебрежимо малой.

8. Две одинаковые линзы соединены пружиной и могут свободно перемещаться по гладкому горизонтальному стержню (рис. 6). Масса линзы $m=200$ г, ее фокусное расстояние $F=16$ см. Длина недеформированной пружины $l_0=25$ см, ее жесткость $k=15$ Н/м, массу пружины следует считать пренебрежимо малой. В начальный момент пружина не деформирована, одна из линз покоится, а другой сообщают некоторую скорость. Какому условию должна удовлетворять эта скорость, чтобы в момент наибольшей деформации пружины изображение одной линзы в другой стало мнимым?

Публикацию подготовили
Д. Калиниченко, А. Руденко, В. Цикунов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найдите область определения выражения

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$$

и упростите его.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3x+5}{x-3}>2.$$

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^3\left(1+\frac{x}{4}\right)$ на экстремумы.

4. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OK окружности с центром O. Докажите, что если $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OK}=\vec{0}$, то $ABCK$ — прямоугольник.

5. В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α. Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b, а диагональ большей боковой грани равна l.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Докажите тождество

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x^2-3}\cdot5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_{2x-5}(x^2-3x-10).$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-(x^2-5x+4)$ и $y=0$. Сделайте рисунок.

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды длиной m наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

Задачи устного экзамена

1. Определите знак выражения $\log_{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} 1)$.

2. Найдите область определения функции
$$f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}.$$

3. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Решите уравнение

а) $6\cdot 9^{0,5x-2}+2\cdot 3^{x-6}=56$

б) $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=3+2x^2$, $g(x)=3x^2-(5x-3)(2-x)$.

5. Решите неравенство

а) $|x^2-4x|>1$

б) $3^{|x|+2}<27$.

6. Напишите уравнение касательной к параболе $y=x^2-4$ в точке пересечения ее с осью ординат.

7. На кривой $y=4x^2-6x+3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

8. Найдите первообразную функции $y=\frac{2}{\sin^2 3x}$, график которой проходит через точку с координатами $\left(\frac{\pi}{12};1\right)$.

9. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций конгруэнтны.

10. Найдите радиус сектора, если его площадь равна 144 см², а дуга содержит $\frac{4}{9}$ радиана.

11. Дан треугольник ABC и точка M на стороне AB. Прямая, проведенная через точку M параллельно медиане CC_1, пересекает (CA) в точке P, а (CB) — в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{CC_1}$.

12. Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCK$ имеет место соотношение $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BC})$, где M и P — середины отрезков AB и CK соответственно.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Автомобилист и велосипедист движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1=20$ м/с и $v_2=5$ м/с соответственно. В начальный момент расстояние между ними $l_0=250$ м. Каким станет это расстояние через $t=5$ с? Задачу решите аналитически и графически.

2. На какой глубине в пресной воде давление в $n=3$ раза больше нормального атмосферного давления?

3. Найдите плотность воздуха при температуре $t=127$°C и давлении $p=900$ гПа.

4. Свинцовая дробинка, летящая со скоростью $v=100$ м/с, попала в доску и застряла в ней. На сколько градусов изменилась температура дробинки, если 50% выделенного при ударе количества теплоты пошло на ее нагревание? Удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг · К).

5. Генератор тока, имеющий ЭДС $\mathscr{E}=250$ В и внутреннее сопротивление $r=0{,}4$ Ом, питает $n=10$ ламп сопротивлением $R_1=240$ Ом каждая и $k=5$ ламп сопротивлением $R_2=145$ Ом каждая. Лампы соединены параллельно. Сопротивление подводящих проводов $R_{\text{пр}}=2{,}5$ Ом. Найдите напряжение на лампах. Изменится ли ответ (и как), если взять другой источник тока?

6. Сколько электроэнергии затрачивается для выделения из раствора $ZnSO_4$ $m=306$ г цинка? Напряжение на электродах $U=4$ В. Электрохимический эквивалент цинка $k=0{,}34$ мг/Кл.

7. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B=4\cdot10^{-3}$ Тл. Найдите период обращения. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

8. Маятник представляет собой стальной шарик, подвешенный на нити. Масса маятника $m=5$ г, период его колебаний $T=1$ с. Какова длина нити? Когда под шариком поместили магнит, период колебаний уменьшился до $T'=0{,}8$ с. Определите силу притяжения шарика к магниту.

9. Начертите ход луча, который переходит из стекла в воду и падает на границу раздела этих сред под углом $\alpha=60°$. Показатель преломления стекла $n_{\text{ст}}=1{,}8$, воды — $n_{\text{в}}=1{,}33$.

10. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=8$ см надо поместить предмет, чтобы его изображение получилось таким же по величине, как предмет, и действительным? Сделайте чертеж. Изменится ли ответ (и как), если взять линзу с бо́льшим фокусным расстоянием?

Публикацию подготовили
З. Новосельцева, О. Оноприенко

Московский институт химического машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Докажите тождество
$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_x 10+\log_y 10=5\\ \lg x+\lg y=\frac{5}{4}.\end{cases}$$

3. Конус расположен так, что его основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина лежит в центре другого основания цилиндра. Найдите площадь полной поверхности цилиндра и его объем, если объем конуса равен V, а его образующая составляет с осью цилиндра угол α.

4. Вычислите

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-3}}{x^2-4}.$$

5. Постройте график функции $y=2x^3-3x^2+6$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\cdot\sin 2x=\cos x.$$

2. Решите уравнение

$$x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}.$$

3. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна a и ее ребра образуют с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.

4. Найдите точки max и min функции

$$y=\frac{x^2+x+3}{x^2+5}.$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$, $y=x^2-1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело на веревке поднимают от поверхности земли с ускорением $a=2$ м/с^2 вертикально вверх. Через время $t=5$ с веревка оборвалась. Рассчитайте, сколько времени тело двигалось до земли после того, как оборвалась веревка.

2. Летящая горизонтально со скоростью $v=400$ м/с пуля попадает в брусок и застревает в нем. Какое расстояние пройдет по горизонтальной поверхности этот брусок от толчка пули, если его масса в $n=99$ раз больше массы пули? Начальная скорость бруска равна нулю, а коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu=0{,}1$.

3. Деревянный шарик погрузили в воду на глубину $h=1$ м и отпустили. Как высоко он подскочит над водой (без учета силы трения), если плотность шарика $\rho_ш=600$ кг/м^3, а плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3?

4. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной $l=80$ см до половины погружают в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие в трубке и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути длиной $l_{рт}=22$ см. Чему равно атмосферное давление?

5. В калориметр налито $m_в=2$ кг воды при температуре $t_в=+6$°C и положен кусок льда массой $m_л=2$ кг, имеющий температуру $t_л=-20$°C. Сколько воды и сколько льда будет в калориметре после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой можно пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг · К). Удельная теплоемкость льда $c_л=2100$ Дж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

6. Восемь одинаковых маленьких капель ртути, наэлектризованных до потенциала $\varphi=200$ В каждая, сливаются в одну. Рассчитайте потенциал этой капли. Все капли считайте шариками.

7. Электрон, ускоренный напряжением $U_0=100$ В, влетает в плоский конденсатор вдоль его осевой линии. При каком наименьшем напряжении между пластинами конденсатора электрон не выйдет из конденсатора? Расстояние между пластинами $d=1$ см, длина пластин $L=10$ см.

8. Два шарика имеют одинаковые электрические заряды $q=20$ нКл. Шарики соединяют тонкой проволокой. Какое количество электричества пройдет по проволоке, если шарики металлические, а их радиусы равны $R_1=15$ см и $R_2=5$ см?

9. К источнику тока подключили потребитель сопротивлением R_1. Затем его отключили и подключили другой потребитель сопротивлением R_2. Полезная мощность в обоих случаях оказалась одинаковой. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

10. Расстояние от освещенного предмета до экрана составляет $L=100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми равно $l=20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили
Н. Большаков, Б. Кудрявцев,
Р. Нифантьева, А. Першин

Харьковский институт радиоэлектроники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$2\cos x+\operatorname{ctg} x+2\sin x+1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\sin x>1.$$

3. Векторы $\vec a$ и $\vec b$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec c$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\vec a|=3$, $|\vec b|=5$ и $|\vec c|=8$, вычислите скалярное произведение $(3\vec a-2\vec b)\times(\vec b+3\vec c)$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x-2y+2=0$, $x=2$.

5. Решите уравнение

$$\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x}+1=\sin(\pi-x)-\cos x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi+x}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x}>x-3.$$

3. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр с полушарием сверху. При каких линейных размерах это тело будет иметь

наименьшую полную поверхность, если объем его равен V?

4. Найдите все числа a, для каждого из которых

$$\int_0^1 [a+(4-a)x+4a^2x^2]\,dx < \frac{17}{2}a-14.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1 \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$$

Задачи устного экзамена

1. Вычислите

а) $0{,}8\cdot(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$;

б) $\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}6^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}9^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}87^\circ$.

2. Найдите область определения функции

а) $y=\dfrac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$;

б) $y=\sqrt{2^x-3^x}$.

3. Вычислите

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

4. Найдите значение производной f' при $x=a$, если

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$, $a=0$;

б) $f(x)=\sin 4x\cdot\cos 4x$, $a=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Под каким углом синусоида $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2\cdot e^{-x}$ в точке $x=1$.

7. Найдите экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

8. Докажите, что функция $y=2x+\sin x$ возрастает на всей числовой оси.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$, укреплен блок (рис. 1). Грузы массой $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определите ускорение, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонных плоскостей, и силу натяжения нити. Коэффициент трения грузов о плоскости $\mu_1=\mu_2=\mu=0{,}1$. Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать.

2. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, как показано на рисунке 2. Равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно и погружена в воду на половину своей длины. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?

3. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с ядрами меди α-частиц с энергией $E_0=5$ МэВ последние отлетают назад с энергией $E=3{,}9$ МэВ. Вычислите по этим данным отношение масс ядра меди и α-частицы.

4. Плотность смеси азота и водорода при температуре $t=47^\circ$C и давлении $p=2$ атм равна $\varrho=0{,}3$ г/л. Найдите концентрации молекул азота и водорода в смеси. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К). Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К. Молярные массы азота и водорода равны соответственно $\mu_1=28$ г/моль и $\mu_2=2$ г/моль.

5. Однородное магнитное поле, индукция которого $B=10$ мТл, перпендикулярно однородному электрическому полю напряженностью $E=17$ кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=15$ кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно. Определите отношение q/m для этого иона.

6. Однослойная катушка диаметром $D=5$ см помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t=10^{-2}$ Тл/с. Катушка содержит $n=1000$ витков медной проволоки ($\varrho=1{,}75\cdot10^{-8}$ Ом · м) сечением $S=0{,}2$ мм². а) К концам катушки подключили конденсатор емкостью $C=10$ мкФ. Определите заряд на нем. б) Концы катушки замкнули накоротко. Определите тепловую мощность, выделившуюся в катушке.

7. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный а) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; б) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

8. Колебательный контур состоит из дросселя индуктивностью $L=0{,}2$ Гн и конденсатора емкостью $C=10^{-}$[illegible] Ф. Конденсатор зарядили до напряжения $U=2$ В, и он начал разряжаться. Каким будет ток в момент, когда энергия контура окажется распределенной поровну между электрическим и магнитным полями?

9. Антенна телевизора (пункт C на рисунке 3) наряду с волной, идущей непосредственно от передающей станции (пункт A), принимает волну, отраженную от железной

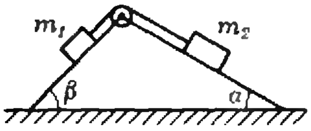


Рис. 1.

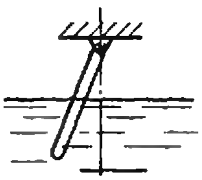


Рис. 2.

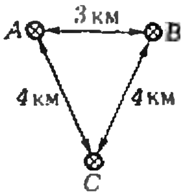


Рис. 3.

крыши здания (пункт B). Вследствие этого изображение двоится. На сколько сантиметров сдвинуты изображения друг относительно друга, если антенна, станция и крыша здания расположены на расстояниях, указанных на рисунке 3. Ширина экрана телевизора $l=50$ см. Указание. Учесть, что изображение в кадре телевизора разлагается на 625 строк и в секунду передается 25 кадров. Временем обратного хода лучей можно пренебречь.

10. Какое количество урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $P=5000$ кВт? КПД принять равным $\eta=17\%$. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $E_0=200$ МэВ. Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили
Р. Грудина, Н. Сарнавский

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$A=\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{8-5x}{2-\log_{\frac{1}{2}}x}>0.$$

3. Решите уравнение

$$-\sin 5x+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=2\cos(3x-2\pi).$$

4. Вычислите площадь фигуры, заключенной между линиями $y=8+2x-x^2$ и $2x-y+4=0$.

5. Вычислите тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Вариант 2

1. Приведите к виду, удобному для логарифмирования

$$A=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

2. Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма квадратов этих трех членов равна 275.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}.$$

4. Вокруг квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник. Определите площадь шестиугольника.

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=e^{-x}$ в точке с абсциссой $x=0$. Найдите угол между этой касательной и осью Ox.

Задачи устного экзамена

1. Решите уравнение

$$x^{\lg x-1}=100.$$

2. Решите неравенство

а) $9x-14-x^2>0$,

б) $\log_{0,5}\frac{2-x}{3}<0$.

3. Вычислите

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x}.$$

4. Постройте график функции

а) $y=\left|\log_{\frac{1}{4}}\frac{x}{4}\right|$,

б) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

5. Найдите производную функции

$$y=\log_2(2x^2-3x+1).$$

6. Найдите промежутки монотонности функции

$$y=3+8x+4x^4.$$

7. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 3x\,dx$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$

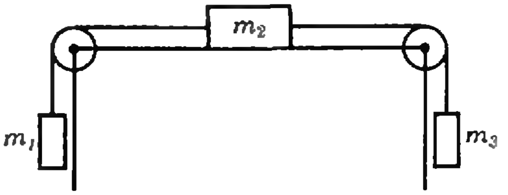
б) $y=2\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

9. Докажите с помощью векторов, что средняя линия $\triangle ABC$ параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Три тела массами $m_1=200$ г, $m_2=300$ г и $m_3=400$ г связаны нитями, перекинутыми через блоки, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью второго тела и опорой $\mu=0{,}2$. Найдите ускорение движения тел и силы натяжения нитей.



2. Из орудия массой $m_1=1000$ кг, движущегося со скоростью $v_1=10$ км/ч, произведен выстрел в направлении движения под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Как изменилась при этом скорость движения орудия? Масса снаряда $m_2=5$ кг, а скорость его при вылете $v_2=100$ м/с.

(Окончание см. на с. 56)

Заочная школа программирования

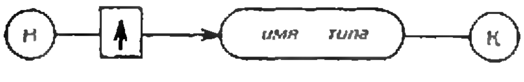
Урок 19:

Динамические структуры

Встречаются задачи, в которых удобно иметь структуры данных, более гибкие, чем массивы, записи и файлы. Хотелось бы, например, иметь возможность изменять порядок элементов структуры данных, вставлять в нее новые элементы и выбрасывать элементы, ставшие ненужными. Речь здесь идет о том, чтобы структура могла изменяться *динамически*, в ходе решения задачи (до сих пор мы имели дело в Паскале только со *статическими* структурами, которые определялись раз навсегда в момент написания программы). Динамические структуры не определены специально в языке, как определены, например, массивы, но их можно строить с помощью некоторых языковых средств, о которых мы сейчас расскажем.

Указатели и указуемые переменные

В программах языка Паскаль можно, наряду с уже известными типами, использовать типы указателей. *Тип указателя* задается синтаксической диаграммой.



Таким образом, каждому типу *t*, стандартному или описанному в программе, можно сопоставить тип указателя ↑ *t*. Значением типа ↑ *t* является *указатель* (или, что то же, *ссылка*), указывающий на некоторое значение типа *t*.

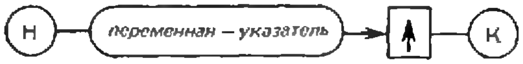
Указатель удобнее всего представлять себе как адрес того места в машинной памяти, в котором находится указываемое им значение.

Подобно тому, как в математике необходимо число 0, обозначающее отсутствие предметов, в программировании необходимо иметь нулевой указатель, который бы ни на что не указывал (или, что то же, указывал на ничто). Таким указателем служит стандартная константа *nil*. Любой тип указателя имеет ее среди своих значений.

Пусть некоторая переменная Р (будем называть ее *переменной-указателем*) имеет тип ↑ *t*. Вызов стандартной процедуры

new(P)

отведет в памяти место для нового *) значения типа *t* и сделает значением переменной Р указатель на это новое значение, представляемое в программе в виде указуемой переменной. Синтаксическая диаграмма *указуемой переменной* такова:



Теперь мы можем окончательно определить, что такое переменная в языке Паскаль: это либо имя, описанное в разделе описания переменных, либо переменная с индексами, либо выборка поля, либо буферная переменная, либо, наконец, указуемая переменная.

Цепные списки

Применим рассмотренные только что средства языка к простейшей форме динамических структур — *цепному списку*. Список этот есть последовательность записей одного и того же типа *t*; при этом одно из полей в этих записях имеет тип ↑ *t*. Через это поле и происходит сцепление записей в список — каждый элемент содержит в нем указатель на следующий элемент списка. В последней записи списка это поле содержит указатель *nil*.

---

*)new по-английски — «новый».

Пусть на заводском складе хранятся разнообразные детали, каждая из которых обозначается трехзначным номером. Сведения о запасах деталей могут представляться, например, списком, показанным на рисунке 1 (в данный момент имеются детали лишь трех видов).

При этом предполагается, что обрабатывающая эти сведения программа содержит описание типа

```
деталь = record
          номер:1..999;
          количество: integer;
          ссылка: ↑ деталь
        end;
```

и описание переменной

```
          склад: ↑ деталь;
```

Как на самом деле расположены в памяти элементы списка, программисту неизвестно. Существенно лишь то, как их упорядочивают указатели — значения полей *ссылка* (на рисунке указатели изображены стрелками, ведущими к указываемому объекту). Значение переменной *склад* указывает всегда на первый элемент списка и, начиная с этой переменной, можно прийти к любому его элементу.

Условимся, что в нашем списке детали располагаются всегда в порядке возрастания их номеров. Пусть на склад поступило *k* штук детали, имеющей номер *n* (раньше такой детали на складе не было). Надо внести изменения в сведения о состоянии склада, то есть включить новую запись в список (в месте, определяемом номером детали).

Начнем с того, что пополним раздел описаний переменных:

новая, перед, после: ↑ *деталь;*
найдено: boolean;

Указатель *новая* указывает на запись о новой детали. Указатели *перед* и *после* скользят по списку до тех пор, пока с их помощью не будет найдено место для включения нового элемента. В этот момент они станут указывать соответственно на элемент, предшествующий точке включения, и элемент, следующий за ней. Логическая переменная *найдено* сообщит о том, что поиск закончен и можно вносить в список новую запись. Особым образом обрабатывается случай, когда новый элемент приходится помещать в самом начале списка.

Операторы, выполняющие наше задание, будут такими:

```
new (новая); новая↑. номер:=n;
новая↑. количество:=k; после:=склад;      (1)
if склад↑. номер>n
  then склад:=новая                        (2)
  else
    begin найдено:=false;
     repeat
      if после=nil
        then найдено:=true.
        else if после↑. номер>n
              then найдено:=true;
      if NOT найдено
        then
         begin
          перед:=после;
          после:=после↑. ссылка
         end
     until найдено;
     перед↑. ссылка:=новая                (3)
     end;
 новая↑. ссылка:=после;                   (4)
```

Пусть требуется пополнить список, изображенный на рисунке 1. После выполнения строчки (1) схема станет такой, как на рисунке 2. Если, например, *n*=100 (*k* впредь считаем для определенности равным 13), то выполняется опера-

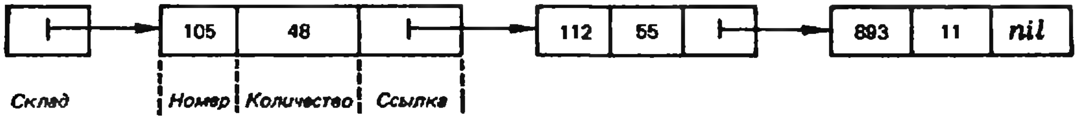


Рис. 1.

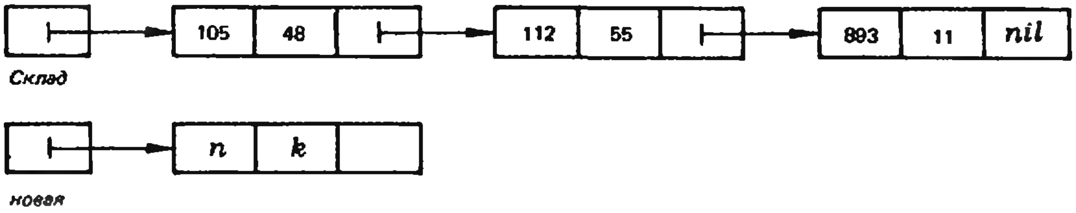


Рис. 2.

тор (2), после чего схема принимает вид, показанный на рисунке 3. Все операторы вплоть до (4) будут пропущены, а оператор (4) приведет к схеме, показанной на рисунке 4.

Пусть теперь *n* — не 100, а 200. Вместо (2) будут на этот раз работать операторы, стоящие за **else**. После первого выполнения тела цикла переменная *найдено* будет иметь значение *false*, а схема станет такой, как на рисунке 5.

При втором выполнении тела цикла *перед* и *после* сдвинутся на один элемент; в третий же раз *найдено* получит значение *true*, сдвига указателей *перед* и *после* не произойдет, а операторы (3) и (4), проработав, дадут новую схему (см. рис. 6).

Пусть, наконец, *n*=900. В этом случае момент, когда переменная *найдено* получает значение *true*, запечатлен на рисунке 7.

После этого цикл завершится — окончательная схема показана на рисунке 8.

Задание 19.1. *Измените приведенную выше программу так, чтобы она работала и в том случае, когда исходный список пуст (то есть склад еще не начал заполняться).*

Задание 19.2. *Неизвестно, имеются ли на складе детали с номером n. На склад поступило k штук этих деталей. Требуется внести изменения в сведения о состоянии склада.*

Пусть теперь со склада взяты все детали с номером *n* (известно, что они там были). Внести изменения в сведения о складе можно с помощью следующих операторов:

```
if склад↑. номер=n
   then склад:=склад↑. ссылка
   else
     begin перед:=склад;
       while перед↑. ссылка↑. номер<n
          do перед:= перед↑. ссылка;
       перед↑. ссылка:=перед↑. ссылка↑. ссылка
     end;
```

Если исходное состояние списка представлено на рисунке 8 и *n*=893, то после выполнения наших операторов схема станет такой, как на рисунке 9. Теперь на запись, у которой поле *номер* равно 893, нет ссылки ни от одной переменной. На самом деле, запись эта все еще присутствует в памяти, но совершенно недоступна. Такого «мусора» в памяти машины может оказаться довольно много, и некоторые трансляторы предусматривают возможность «чистки» этого мусора, то есть освобождения памяти для новой информации.

Задание 19.3. *Со склада затребовало k деталей с номером n. Напишите операторы, которые внесут нужные изменения в сведения о складе (то есть либо уменьшат значение поля* ***количество*** *в соответствующем элементе списка, либо полностью удалят этот элемент). Если заказ не может быть выполнен (совсем или частично), то на печать должно быть выдано сообщение о количестве недостающих деталей.*

Пример более сложной программы

Указатели дают возможность соединять записи не только последовательно, но и более сложным образом. Поэтому в Паскале можно представлять деревья и, как более общий случай, графы (см. статью В. Евстигнеева в «Кванте», 1981, № 3). Соединяемые таким образом записи могут в общем случае иметь различные типы.

Пусть, например, большой коллектив юных программистов изучает заочно современные языки программирования. Учащиеся распределены по разным консультационным пунктам, с которыми они поддерживают переписку. Структура, которую мы собираемся построить, — это прежде всего, список, элементы которого содержат названия городов и организаций, где находятся консультационные пункты. Но, кроме того, с каждым пунктом связан список, состоящий из имен и фамилий учащихся, консультирующихся на этом пункте.

Реализуем структуру, которая выглядит примерно так, как указано на рисунке 10.

В раздел описаний типов надо поместить такие описания:

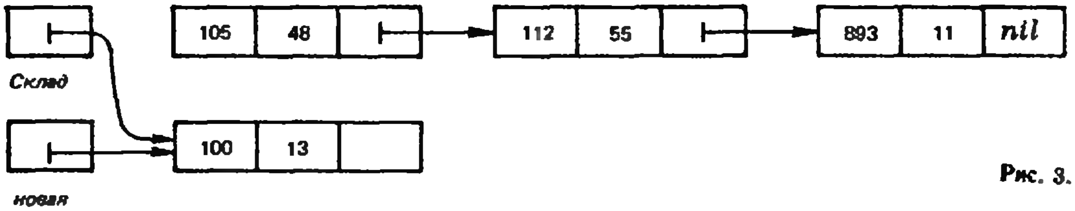

Склад
новая
105
48
112
55
893
11
nil
100
13

Рис. 3.

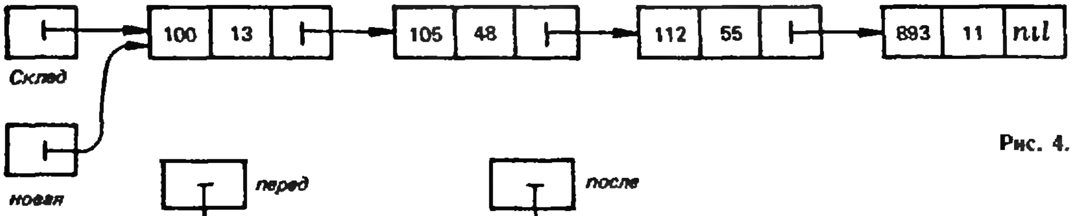

Склад
новая
100
13
105
48
112
55
893
11
nil

Рис. 4.

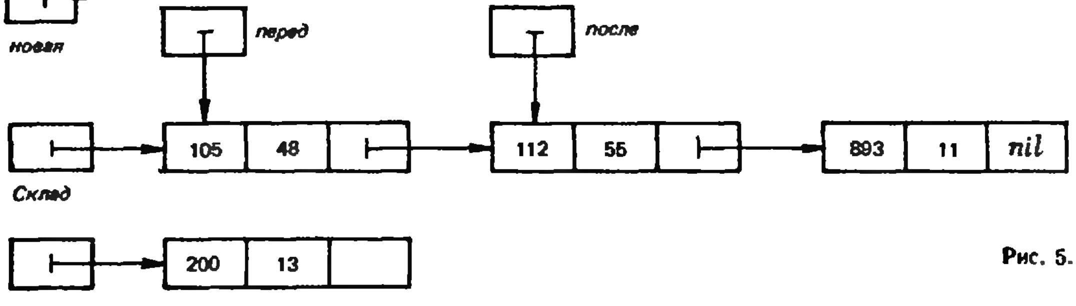

перед
после
Склад
105
48
112
55
893
11
nil
Новая
200
13

Рис. 5.

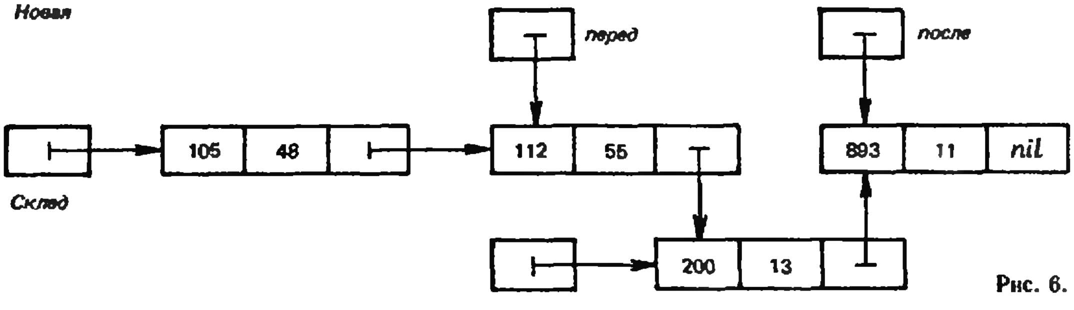

перед
после
Склад
105
48
112
55
893
11
nil
новая
200
13

Рис. 6.

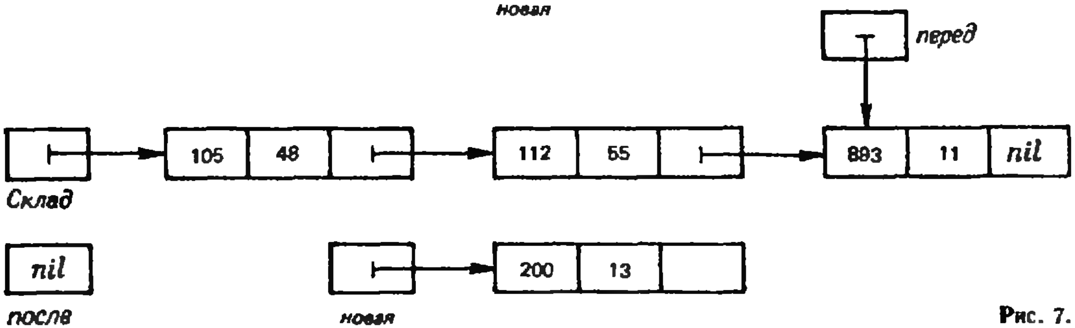

перед
Склад
105
48
112
55
893
11
nil
nil
после
новая
200
13

Рис. 7.

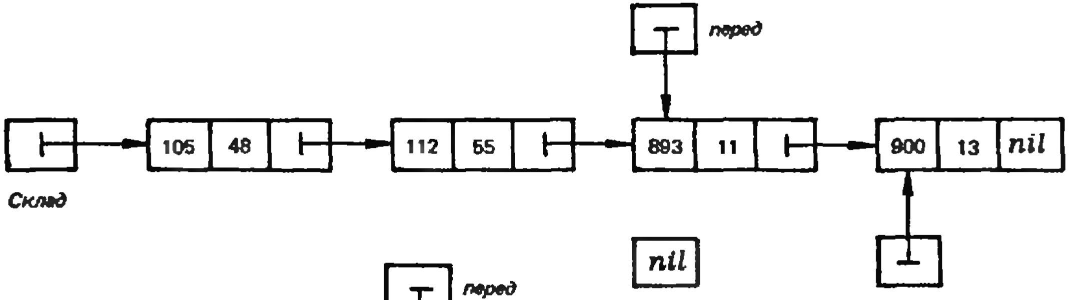

перед
Склад
105
48
112
55
893
11
900
13
nil
nil
после
новая

Рис. 8.

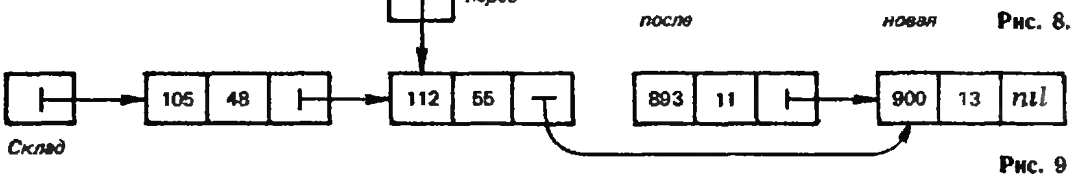

перед
Склад
105
48
112
55
893
11
900
13
nil

Рис. 9

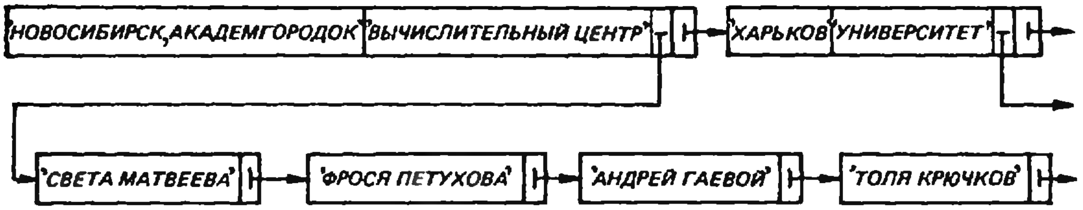


Рис. 10.

```
лицо = record  имяфамилия:
          array [1..40] of char;
          следующее: ↑лицо
       end;
пункт =  record адрес, организация:
          array [1..30] of char;
          учащиеся: ↑лицо;
          следующий: ↑пункт
       end;
```

В раздел описания переменных поместим теперь описание

структура:↑ пункт;

Мы видим, что в каждой записи типа *пункт* имеются два указателя — типа ↑ *пункт* для связи со следующим пунктом и типа ↑ *лицо* для подсоединения списка лиц, приписанных к этому пункту.

Следующие операторы напечатают имена и фамилии всех учащихся с указанием на консультационный пункт каждого (переменная *пункты* имеет тип ↑ *пункт*, переменная *лица* — тип ↑ *лицо*):

```
пункты: =структура;
while пункты ⟨ ⟩nil do
  begin лица: =пункты ↑. учащиеся;
     while лица ⟨ ⟩ nil do
       begin
         writeln (лица ↑. имяфамилия,
         пункты↑ адрес, пункты↑
         организация);
         лица: =лица ↑. следующее
       end;
     пункты: =пункты ↑. следующий
  end;
```

Задание 19.4. *Напишите программу, определяющую, сколько учащихся должно обращаться за консультациями по адресу, указанному в списке консультационных пунктов первым.*

А. Рар

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

(Начало см. на с. 51)

3. На какой высоте над поверхностью Земли сила тяжести тела будет в два раза меньше, чем на поверхности Земли?

4. Тело массой $m=0{,}5$ кг помещено в воду на глубину $h=2$ м. За какое время тело всплывет на поверхность? Плотность вещества тела $\varrho_т=0{,}7$ г/см^3. Плотность воды $\varrho_в=1$ г/см^3.

5. Два одинаковых ледяных метеорита летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе обращаются в пар. Какова должна быть при этом минимальная скорость метеоритов, если их температура перед столкновением $t=-20°$ С? Удельные теплоемкости льда и воды равны соответственно $c_л=2100$ Дж/(кг · К) и $c_в=4190$ Дж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды $r=23\cdot10^5$ Дж/кг. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

6. В закрытом сосуде находится газ под давлением $p=5\cdot10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если после открытия крана 4/5 массы газа выйдет из сосуда? Процесс можно считать изотермическим.

7. Шары радиусами $r_1=15$ см и $r_2=10$ см заряжены до потенциалов $\varphi_1=20$ кВ и $\varphi_2=40$ кВ соответственно. Каким станет потенциал после соприкосновения шаров? Какой заряд перейдет с одного шара на другой? Рассмотрите случай, когда шары заряжены одноименно.

8. К клеммам источника тока с внутренним сопротивлением $r=10$ Ом подключены два параллельно соединенных проводника, сопротивления которых $R_1=10$ Ом и $R_2=2$ Ом. Определите отношение токов, протекавших через первый проводник до и после обрыва в цепи второго проводника.

9. На столе лежит лист бумаги. Луч света, падающий на бумагу под углом $\alpha=45°$, дает на ней светлое пятно. На сколько сместится это пятно, если на бумагу положить стеклянную пластину толщиной $d=2$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. На каком расстоянии перед рассеивающей линзой с оптической силой $D=-2$ дптр надо поставить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось на середине расстояния между линзой и ее мнимым фокусом?

Публикацию подготовили
М. Борис, И. Турчин

Красноярская летняя школа

Каждый год первого августа на берегу Енисея в пионерском лагере «Таежный» появляются необычные вожатые — к старшеклассникам, интересующимся математикой и физикой, химией и биологией, приезжают студенты и сотрудники Красноярского университета. Торжественной присягой сотрудников и научной лекцией открывается в этот день Красноярская краевая летняя школа по естественным наукам (КЛШ). Школьники ждут от КЛШ новых знаний и интересного общения. И эти ожидания оправдываются. Но главное в КЛШ — соединение образования и общения. По мнению первого директора школы В. О. Бытева, общение должно быть умным, учеба должна быть общительной. Последовательное проведение этого принципа обеспечивает летней школе то, что ученики называют разумной атмосферой. Она немыслима без большого труда — ежедневных занятий по 5—6 уроков. Прежде всего это лекции и семинары учебных курсов по разнообразной тематике, например «Как решать задачу?» Ш. А. Даутова (по книгам Д. Пойа), «Введение в теорию чисел» М. А. Шубина, «Термодинамика» А. М. Баранова. Кроме того, каждый сотрудник летней школы готовит цикл факультативных занятий. Школьники могут выбирать два факультатива из многих предложенных. В КЛШ-80 особой популярностью пользовались факультативы «Планиметрия Лобачевского», «Цепные дроби», «Субатомная физика», «Введение в биофизику», и КЛШ-81 — «Движение заряженных частиц в электромагнитном поле», «Логические основы цифровой электроники», «Комбинаторика и вероятность», «Биофизика», «Астрономические наблюдения». КЛШ сотрудничает со Всесоюзной летней школой юных программистов, и самый большой успех выпал факультативу «Уроки современного программирования» под руководством представителя Новосибирска Г. А. Звенигородского. По итогам факультативов в школе прошла научная конференция.

Лекции Бориса Владимировича Гнеденко вызывали такой интерес, что обсуждение затронутых вопросов продолжалось на прогулках.

На «огневом рубеже» научно-спортивного биатлона. Кто раньше всех сдаст решение судье?

Ребята, приезжающие в КЛШ из всех районов громадного Красноярского края, могут услышать из первых уст о современной науке. Удивительными назвали ученики КЛШ встречи с членом-корреспондентом АН СССР К. С. Александровым и профессором Л. А. Айзенбергом (Институт физики СО АН СССР), В. Л. Гутенмахером и А. П. Савиным, представлявшими «Квант». И, конечно, событием для сотрудников и учеников КЛШ-81 стали встречи с академиком АН УССР Б. В. Гнеденко. В блестящем цикле лекций Борис Владимирович рассказал школьникам не только о задачах теории надежности и теории массового обслуживания, но и о математическом творчестве, о том, как решение практической задачи приводит к новой математической теории.

Обильную пищу для размышлений ученики КЛШ получают на конкурсах по решению задач, олимпиадах, физико-математическом турнире.

Каждый сотрудник КЛШ выполняет одновременно определенные учебные и воспитательные обязанности. Например, В. Петунин ведет не только семинары по методу координат, но и занятия по физкультуре, В. Костюк читает факультатив «Современные ЭВМ» и одновременно является завхозом школы, все вожатые комсомольских групп руководят семинарами по различным курсам. Спорт ребята любят — помимо спартакиады в КЛШ проводятся научно-спортивные соревнования под девизом «Решай задачу по плечу, бей головою по мячу!». В обширной культурной программе КЛШ вечера поэзии, музыки, танцев, беседы о литературе и искусстве. Незабываемы заключительные праздники школы — дни математика, физика, биолога и химика. В эти дни проходят заключительные собеседования по учебным курсам, физический КВН и математический хоккей, манифестация «Науку вперед!», викторина эрудитов, вечер математической драматургии, биолого-химическая дискотека, и пресс-конференция с преподавателями.

Заключительные анкеты школьников показывают, что за три недели работы КЛШ почти у всех учеников вырастает интерес к самостоятельной учебе, естественным наукам. Это — главный результат работы школы.

И. Фрумин

Задачи наших читателей

1. Докажите, что если $1<x<5$, то уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в натуральных числах.

В. Лунев

2. Разложите на множители многочлен x^8+4x^2+4.

Э. Туркевич

3. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в двоичной записи натурального числа n. Докажите, что среди пар $(m; n)$ различных натуральных чисел m и n найдется бесконечное множество таких, что $\frac{m}{S(m)}=\frac{n}{S(n)}$. Решите аналогичную задачу для десятичной системы.

Л. Ханин

4. В треугольнике сумма квадратов длин сторон равна m^2, а сумма их четвертых степеней равна n^4. Найдите площадь этого треугольника.

Н. Трифонов

5. а) Докажите, что для каждого $n>3$ на плоскости существует n окружностей с различными центрами такие, что любой отрезок, соединяющий центры двух окружностей, пересекают хотя бы одну окружность с другим центром.

б) Докажите, что существует такое m, что на плоскости нельзя расположить m окружностей так, чтобы лю- центры двух окружностей, пересекался с остальными $m-2$ окружностями.

в) Попробуйте найти наименьшее такое m. (Решение автору неизвестно.)

А. Балинский

6. а) Вместо переменных a, b, c, d, e, f, g, h (рис 1) расставьте первые восемь натуральных чисел так, чтобы сумма потоков, втекающих в каждый из пяти узлов (на рисунке 1 узлы отмечены красным цветом), была равна сумме вытекающих потоков. Сколько решений имеет задача?

б) Докажите, что подобная расстановка чисел 1, 2, ..., 8 для рисунка 2 невозможна.

М. Штеренберг

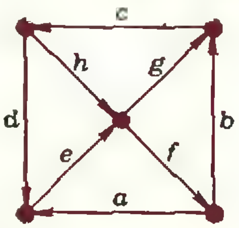


Рис. 1.

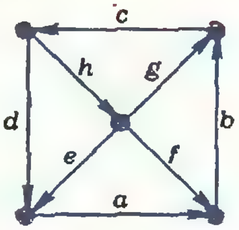


Рис. 2.

7. Тонкое проволочное кольцо вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр кольца и лежащей в его плоскости (рис. 3). Масса кольца m, его радиус r. Определите кинетическую энергию кольца.

Е. Лифшиц

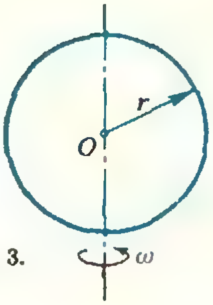


Рис. 3.

8.** Пусть $p\neq 2$ — простое число. Рассмотрим все натуральные числа, меньшие p. Обозначим через S_1, S_2, S_3, ..., S_{p-2} суммы произведений, составленных из этих чисел, взятых по одному, по два, по три и т. д., то есть

$$S_1=1+2+3+\ldots+(p-1),$$
$$S_2=1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+(p-2)\cdot(p-1),$$
$$S_3=1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4+\ldots+(p-3)\cdot(p-2)\cdot(p-1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{p-2}=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2)+1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-2)\times(p-1)+\ldots+2\cdot 3\cdot\ldots\times(p-2)\cdot(p-1).$$

а) Докажите, что все эти суммы делятся на p. Указание. Воспользуйтесь таким утверждением: *если многочлен с целыми коэффициентами степени меньше p делится на p во всех целых точках, то все его коэффициенты делятся на p.*

б) Докажите, что суммы S_3, S_5, S_7, ..., S_{p-2} делятся на p^2.

Эта задача — для тех, кто умеет обращаться с *биномиальными коэффициентами* (см., например, статью Н. Васильева и А. Зелевинского в № 1).

И. Вайнштейн

Редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещает читателей о безвременной кончине члена редакционного совета, выдающегося советского ученого и организатора науки, вице-президента АН УССР директора Института кибернетики академика Виктора Михайловича Глушкова, последовавшей 30 января 1982 г.

Фотоны

1. $n=\dfrac{P\lambda d^2}{16\ell^2hc}\approx 1{,}5\cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

2. $\varphi_{\max}=\dfrac{hc}{\lambda e}-\dfrac{A}{e}\approx 1{,}74$ В.

3. $F=\dfrac{E}{c\tau}\approx 6{,}7\cdot 10^{-6}$ Н.

4. Из законов сохранения энергии и импульса найдем

$$\nu=\frac{Mc(c-v)}{h}\left(-1+\sqrt{1+\frac{2h\nu_0}{M(c-v)^2}}\right).$$

Учитывая, что $v\ll c$ и что энергия фотона $h\nu_0$ много меньше энергии покоя атома Mc^2, воспользуемся указанным в условии приближением и получим

$$\nu\approx\frac{\nu_0 c}{c-v}\approx\frac{\nu_0}{1-v/c}\approx\nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{155-p-\sqrt{p^2+30p+2025}}{2}$. Указание. Если процент содержания меди во втором сплаве обозначить через x, то кусок второго сплава, содержащий 12 кг меди, весит $\dfrac{1200}{x}$ кг. Замечание. Дополнительное исследование показывает, что, сплавляя кусок первого сплава, содержащий 6 кг меди, с куском второго сплава, содержащим 12 кг меди, получить слиток, содержащий p % меди, можно только при $p\in\left]0;\ 64\frac{12}{17}\right[$.

2. $\dfrac{\sqrt6}{128}\ell^3\cos^3\alpha$ при $\alpha\in\left[\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt2}{8};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,
$\dfrac{\sqrt3}{16}\ell^3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ при $\alpha\in\left]0;\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt2}{8}\right[$.
Указание. Пусть сначала S_1 — произвольная точка на луче $[OS)$ и $|S_1O|=x$. Таким образом, $x\geqslant 0$. Функция $P(x)=|S_1S|+|S_1A_1|+|S_1B_1|+|S_1C_1|$ убывает на $\left[0;\ \dfrac{\ell\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2}\right]$ и возрастает на $\left[\dfrac{\ell\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2};\ +\infty\right[$; $x=\dfrac{\ell\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2}$ — ее точка минимума. Соответствующая этому числу точка S_1 лежит на высоте $[SO]$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\left[\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt2}{8};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. Если же $\alpha\in\left]0;\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt2}{8}\right[$, функция $P(x)$ принимает наименьшее значение на точках отрезка $[SO]$ при $S_1=S$.

3. $\left[e^{-\frac{1}{\sqrt2}};\ 1\right[\ \cup\ \left[e^{\frac{1}{\sqrt2}};\ +\infty\right[$. Указание. Чтобы функция $\dfrac{1}{x+a}$ была непрерывна на отрезке с концами $-1-a$, $-2a$, точка $-a$ не должна ему принадлежать.

4. $f'(x)=2\cos 2x\sqrt{\sin 2x}+\cos 4x+1$;

$x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\quad x_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac12\arcsin\dfrac{\sqrt5-1}{2}+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. $\dfrac{24+s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км и $\dfrac{24-s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км.

Указание. Поскольку, по условию, во второй части пути каждый из пешеходов затрачивал на километр на 10 мин меньше, чем в первой части пути, скорость каждого из них в первой части пути не превосходила 6 км/ч. Замечание. Дополнительное исследование показывает, что найденные выражения путей положительны при $s<6$.

2. $\dfrac{3\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{H^2(\ell^2-H^2)}{\left(\sqrt{3(\ell^2-H^2)}-2H\right)^2}$. Указание. Полная поверхность описанной в условии призмы, верхнее основание которой находится на расстоянии x от вершины конуса, равна

$$\frac{3\sqrt{\ell^2-H^2}}{H^2}Bx^2+6\sqrt{\ell^2-H^2}\,x,$$

где $B=\sqrt{3(\ell^2-H^2)}-2H$. Данный квадратный трехчлен тогда и только тогда имеет наибольшее значение на интервале $]0;\ H[$, когда одновременно $B<0$ и вершина параболы принадлежит этому интервалу (рис. 1), что равносильно неравенствам $1<\dfrac{\ell}{H}<\dfrac{2}{\sqrt3}$.

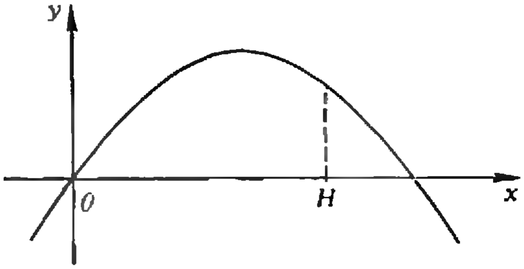


Рис. 1.

3. $I_1=\dfrac12\ln 2$, $I_2=\dfrac{6}{13}$, $I_2-I_1>0$. Указание. $e^{12}>(2{,}5)^{12}=(6{,}25)^6>6^6=46\,656>8192=2^{13}$.

4. $f'(x)=5+\dfrac{3}{\ln 2}\operatorname{tg}x$; $x=2\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{5\ln 2}{3}+6\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Физика

1. Совершенная работа A складывается из работы A_1, затраченной на растяжение пружины, и работы A_2, затраченной на перемещение

бруска. Работа A_1, с учетом закона Гука, равна

$$A_1=\frac{kx^2}{2}=\frac{k(F/k)^2}{2}=\frac{F^2}{2k},$$

а работа A_2 определяется выражением

$$A_2=Fs\cos\alpha.$$

Величина силы F зависит, вообще говоря, от того, как двигался брусок. Будем считать, что движение происходило с постоянной скоростью. (Очевидно, что на начальном этапе, когда скорость бруска увеличивалась от нуля до некоторого установившегося значения, наше допущение несправедливо. Однако, так как установившаяся скорость мала, этот этап длился очень недолго, и его вклад в работу не существен.)

Согласно второму закону Ньютона, сумма всех действующих на брусок сил (силы $\vec{F}$, силы тяжести $m\vec{g}$, силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$) при равномерном движении равна нулю:

$$\vec{F}+m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=0,$$

или, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат (сделайте соответствующий рисунок),

$$F\cos\alpha-F_{тр}=0,$$
$$N+F\sin\alpha-mg=0,$$

где $F_{тр}=\mu N$.

Отсюда найдем

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

Окончательно

$$A=A_1+A_2=\frac{F^2}{2k}+Fs\cos\alpha=$$
$$=\frac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2}+\frac{\mu mgs}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}\approx 19\ Дж.$$

2. В первом случае ускорение первого тела обеспечивается силой натяжения нити, и ускорение второго тела — разностью проекции его силы тяжести на направление касательной к цилиндрической поверхности и силы натяжения нити:

$$m_1a=F_н,$$
$$m_2a=m_2g\sin\alpha-F_н.$$

Отсюда можно найти $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{(m_1+m_2)a}{m_2g}.$$

Во втором случае, согласно второму закону Ньютона,

$$m_1a'=F'_н-m_1g\sin\alpha/2,$$
$$m_2a'=m_2g\sin\alpha/2-F'_н,$$

откуда новое ускорение тел

$$a'=\frac{(m_2-m_1)g\sin\alpha/2}{m_1+m_2}.$$

Значение $\sin\alpha/2$ можно найти из известной тригонометрической формулы $2\sin^2\alpha/2=1-\cos\alpha$:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^{1/2}=\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}\right)^{1/2}$$

В результате получим

$$a'=g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}\right)^{1/2}\approx 2{,}2\ м/с^2.$$

3. После прекращения тока в цепи напряжение на обоих конденсаторах будет одним и тем же (обозначим его через U). Его можно связать с начальными напряжениями U_1 и U_2 с помощью закона сохранения заряда:

$$C_1U_1+C_2U_2=(C_1+C_2)U,$$

и

$$U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}.$$

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, выделившееся в резисторе, равно разности начальной и конечной энергий заряженных конденсаторов:

$$Q=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}-\frac{(C_1+C_2)U^2}{2}=$$
$$=\frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}.$$

Заметим, что разность напряжений U_1-U_2 в момент замыкания ключа равна напряжению между положительными обкладками первого и второго конденсаторов. Тогда по закону Ома для участка цепи

$$U_1-U_2=IR.$$

Окончательно

$$Q=\frac{C_1C_2(IR)^2}{2(C_1+C_2)}\approx 1{,}9\cdot 10^{-3}\ Дж.$$

4. Попав на заземленную мишень, каждый протон тормозится и отдает мишени свою кинетическую энергию $mv^2/2$. В единицу времени к мишени подлетает $N=I/e$ протонов. Следовательно, тепловая мощность

$$P=\frac{mv^2}{2}N=\frac{mv^2}{2}\,\frac{I}{e}.$$

Скорость протонов v можно найти с помощью второго закона Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r}=evB,$$

и

$$v=\frac{eBr}{m}.$$

Таким образом,

$$P=\frac{mv^2}{2}\,\frac{I}{e}=\frac{B^2Ir^2}{2}\,\frac{e}{m}=2\ Вт.$$

5. При движении стержня в магнитном поле на его концах возникает напряжение $U=Blv$ (v — скорость стержня в данный момент времени). В результате по стержню и рейкам течет индукционный ток I, который заряжает конденсатор. Приращение заряда на конденсаторе за время Δt, с одной стороны, равно $\Delta q=I\Delta t$; с другой стороны, $\Delta q=C\Delta U=CBl\Delta v$. Отсюда получаем формулу, связывающую величину тока I с ускорением a движения стержня:

$$I=CBl\Delta v/\Delta t=CBla.$$

Ускорение найдем с помощью второго закона Ньютона. Кроме внешней силы $\vec{F}$, на стержень действует еще сила $\vec{F}_м$ со стороны магнитного поля. Она направлена противоположно силе $\vec{F}$ и по модулю равна $F_м=BIl=CB^2l^2a$. Таким образом,

$$ma=F-CB^2l^2a,$$

откуда

$$a=\frac{F}{m+CB^2l^2}.$$

За время τ на конденсаторе накопится заряд

$$q=I\tau=\frac{CBlF\tau}{m+CB^2l^2}=2\cdot10^{-3}\text{ Кл.}$$

6. Обозначим через h расстояние от потолка (предмета) до линзы. Тогда расстояние от линзы до пола (до изображения) будет равно $H-h$. По формуле линзы

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{H-h}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$h=\frac{H}{2}\pm\sqrt{\frac{H^2}{4}-HF}.$$

Подставив числовые данные, получим два значения h:

$$h_1=2{,}1\text{ м и } h_2=0{,}9\text{ м.}$$

Если длина нити $l\geqslant h_1=2{,}1$ м, возможны оба случая. Если $h_1>l\geqslant h_2$, существует только одно решение, соответствующее высоте $h_2=0{,}9$ м. Если же длина нити $l<h_2$, решений нет вообще.

Теперь свяжем найденное расстояние h с угловой скоростью ω вращения линзы. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\omega^2r=mg\operatorname{tg}\alpha,$$

где m — масса линзы, r — радиус окружности, по которой она движется, α — угол, образуемый нитью с вертикалью. Легко видеть, что $r=h\operatorname{tg}\alpha$; следовательно,

$$\omega^2=g/h,\text{ и } \omega=\sqrt{g/h}.$$

С учетом найденных значений h_1 и h_2, получим

$$\omega_1=\sqrt{g/h_1}\approx2{,}2\text{ с}^{-1}\text{ и } \omega_2=\sqrt{g/h_2}\approx3{,}3\text{ с}^{-1}.$$

7. Обозначим через v_1 и v_2 модули скоростей шарика и линзы после удара.

Мнимое изображение шарика в линзе будет существовать в течение промежутка времени t, для которого расстояние между шариком и линзой не больше фокусного. Он складывается из двух промежутков. Первый соответствует движению шарика до удара о линзу и равен $t_1=F/v_0$. Второй начинается в момент удара и заканчивается в момент, когда шарик и линза, двигаясь в противоположные стороны, разойдутся на расстояние F. Его длительность $t_2=F/(v_1+v_2)$.

Для определения скоростей v_1 и v_2 воспользуемся законами сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2},$$

$$mv_0=-mv_1+Mv_2.$$

Запишем эти равенства несколько по-другому:

$$m(v_0^2-v_1^2)=Mv_2^2,$$
$$m(v_0+v_1)=Mv_2.$$

Поделив первое на второе, получим

$$v_0-v_1=v_2,\text{ или } v_1+v_2=v_0.$$

Тогда окончательно

$$t=t_1+t_2=\frac{F}{v_0}+\frac{F}{v_1+v_2}=\frac{F}{v_0}+\frac{F}{v_0}=$$

$$=2\frac{F}{v_0}=0{,}04\text{ с.}$$

8. Изображение одной линзы в другой мнимое, если расстояние между линзами не больше фокусного расстояния. Это означает, что в момент наибольшей деформации пружины ее длина $l\leqslant F$. Поскольку по условию задачи $F<l_0$, пружина должна сжиматься. Для этого начальная скорость $\vec{v}_0$ одной из линз должна быть направлена навстречу другой — вот первое условие. Чтобы найти модуль этой скорости, воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Очевидно, что сжатие пружины будет максимальным в тот момент, когда скорости обеих линз одинаковы и по модулю, и по направлению. Обозначим эту скорость через v и запишем законы сохранения:

$$mv_0=2mv,$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=2\frac{mv^2}{2}+\frac{k(l_0-l)^2}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $l\leqslant F$, получим

$$v_0\geqslant(l_0-F)\sqrt{\frac{2k}{m}}\approx1{,}1\text{ м/с.}$$

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Область определения: $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. Выражение равно 0 при $a>b$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ при $a<b$.

2. $\left[-3\frac{2}{9};\ -1\frac{2}{3}\right[$.

3. Единственная точка экстремума — точка минимума $x=-3$.

4. Доказательство. Поскольку $\vec{OA}+\vec{OB}=-(\vec{OC}+\vec{OK})$, вектор $\vec{OE}=\vec{OA}+\vec{OB}$ противоположен вектору $\vec{OF}=\vec{OC}+\vec{OK}$. Значит, $\widehat{EOF}=180^\circ$ (рис. 2). $OAEB$ — ромб ($|OA|=|OB|$). Следовательно, $[AB]\perp[OE]$. Аналогично $[CK]\perp[OF]$. Таким образом, $[AB]\parallel[CK]$. Так же доказывается $[BC]\parallel[AK]$. Итак, $ABCK$ — параллелограмм. Но параллелограмм, вписанный в окружность, — прямоугольник.

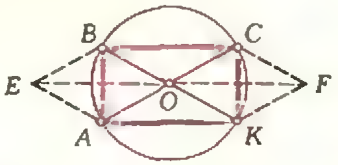


Рис. 2.

5. $\dfrac{\pi b^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{l^2-4b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Вариант 2

2. $\{1,\ 2\}$.

3. $]5;\ +\infty[$.

4. 4,5.

5. $\dfrac{2}{3}m^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

Задачи устного экзамена

1. —. **2.** $]1; 3]$. **3.** $-\sqrt{3}$. **4.** а) $\{6\}$; б) $\left\{\frac{13}{12}\right\}$.
5. а) $]-\infty; 2-\sqrt{5}[\cup]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{5}; +\infty[$. б) $]-1; 1[$. **6.** $y=-4$.
7. $(1; 1)$. **8.** $y=-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}3x+\frac{5}{3}$. Указание. Конгруэнтные дуги стягиваются конгруэнтными хордами. **10.** $18\sqrt{2}$ см.

Физика

1. $l=l_0-(v_1+v_2)t=125$ м; графическое решение приведено на рисунке 3.

2. $h=\frac{p(n-1)}{\varrho g}\approx 20$ м ($p=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление; $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

3. $\varrho=\frac{p\mu}{RT}\approx 0{,}8$ кг/м^3 ($\mu=2{,}9\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха; $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).

4. $\Delta t=\frac{v^2}{4c}\approx 19$ К.

5. $U=\frac{\mathcal{E}}{1+(r+R_{\text{пр}})(nR_1+kR_2)/R_1R_2}\approx$
$\approx 204{,}7$ В. Если взять другой источник тока, напряжение на лампах в общем случае изменится.

6. $W=Um/k=3{,}6\cdot 10^6$ Дж $=1$ кВт · ч.

7. $T=\frac{2\pi m}{eB}\approx 9\cdot 10^{-9}$ с.

8. $l=\frac{T^2g}{4\pi^2}\approx 0{,}25$ м; $F=mg\left(\frac{T^2}{T'^2}-1\right)\approx$
$\approx 3\cdot 10^{-2}$ Н.

9. Угол падения α больше предельного угла $\alpha_{\text{пр}}=\arcsin(n_{\text{в}}/n_{\text{ст}})$; следовательно, будет происходить полное отражение света (рис. 4).

10. $d=2F=16$ см (рис. 5); если взять линзу с бо́льшим фокусным расстоянием, предмет надо будет расположить соответственно дальше.

Московский институт химического машиностроения

Математика

Вариант 1

2. $\{(10; 10^{\frac{1}{4}}), (10^{\frac{1}{4}}; 10)\}$.

3. $S_{\text{ц}}=2\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)$, $V_{\text{ц}}=3V$.

4. $-\frac{1}{8\sqrt{3}}$.

Вариант 2

1. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

2. $\{10^{-4}, 10\}$.

3. $S=\frac{\pi a^2}{12}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}\operatorname{tg}\alpha$.

4. Наибольшее значение $\max\limits_{\mathbf{R}} y$ функция принимает в точке $x=5$, наименьшее $\min\limits_{\mathbf{R}} y$ — в точке $x=-1$.

5. $\frac{8}{3}$.

Физика

1. $t'=\frac{at}{g}+\sqrt{\left(\frac{at}{g}\right)^2+\frac{at^2}{g}}\approx 3{,}5$ с.

2. $l=\frac{v^2}{2(n+1)^2\mu g}\approx 8$ м.

3. $H=h(\varrho_{\text{в}}/\varrho_{\text{ш}}-1)\approx 0{,}67$ м.

4. $p=2\varrho_{\text{рт}}gl_{\text{рт}}\frac{l-l_{\text{рт}}}{l-2l_{\text{рт}}}\approx 9{,}4\cdot 10^4$ Па.

5. $m'_{\text{в}}=m_{\text{в}}-\frac{c_{\text{л}}m_{\text{л}}(0-t_{\text{л}})-c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda}\approx 1{,}9$ кг;
$m'_{\text{л}}\approx 2{,}1$ кг.

6. $\varphi'=4\varphi=800$ В.

7. $U=2U_0\frac{d^2}{L^2}=2$ В.

8. $\Delta q=q\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}=10$ нКл.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}$.

10. $F=\frac{L^2-l^2}{4L}=24$ см.

Харьковский институт радиоэлектроники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{6}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

2. $2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5}{6}\pi+2\pi l<x<\pi+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

3. -62.

4. $3-\frac{3}{4\ln 2}$.

5. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

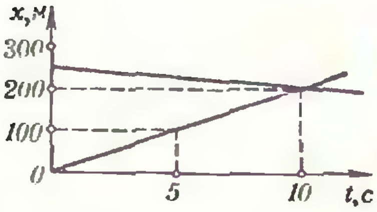


Рис. 3.

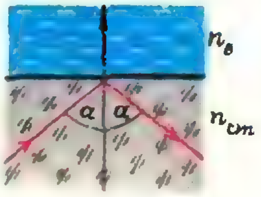


Рис. 4.

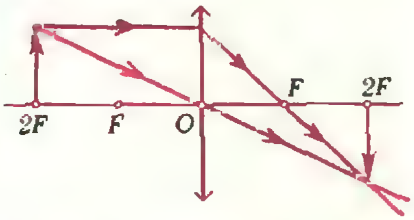


Рис. 5.

Вариант 2

1. $x_1=\pi+2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

2. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]4\frac{1}{2};\ +\infty[$.

3. Радиус основания цилиндра и высота должны равняться $\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$.

4. $\varnothing$.

5. $\left\{\left(\frac{10}{3};\ \frac{20}{3}\right),\ (-10;\ 20)\right\}$.

Задачи устного экзамена

1. а) 4; б) 0. Указание. $\operatorname{tg}45°=1$.
2. а) $[2;3[\ \cup\ ]3;4]$; б) $]-\infty;0[$. 3. а) 4; б) $\frac{1}{2}$.
4. а) $\frac{1}{8}$; б) -2. 5. $\frac{\pi}{3}$. 6. $y=\frac{1}{e}x$. 7. $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2$.

Физика

1. $a=g\frac{m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-m_1(\sin\beta+\mu\cos\beta)}{m_1+m_2}\approx 0{,}16$ м/с^2; $T=\frac{m_1m_2g}{m_1+m_2}(\sin\alpha+\sin\beta-\mu(\cos\alpha-\cos\beta))\approx 7{,}8$ Н.
2. $\varrho=3/4\varrho_в=7{,}5\cdot 10^2$ кг/м^3.
3. $\frac{m_м}{m_\alpha}=\frac{\sqrt{E_0}+\sqrt{E}}{\sqrt{E_0}-\sqrt{E}}\approx 15{,}6$.
4. $n_1=\frac{\varrho RT-p\mu_2}{kT(\mu_1-\mu_2)}\approx 3{,}5\cdot 10^{24}$ м$^{-3}$;

$n_2=\frac{\varrho RT-p\mu_1}{kT(\mu_2-\mu_1)}\approx 4{,}2\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

5. $\frac{q}{m}=\frac{E^2}{2UB^2}\approx 10^8$ Кл/кг.
6. а) $q=C\frac{\Delta B}{\Delta t}\frac{\pi D^2n}{4}\approx 1{,}96\cdot 10^{-7}$ Кл;

б) $P=\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2\frac{\pi D^3nS}{16\varrho}\approx 2{,}8\cdot 10^{-5}$ Вт.

7. а) $t=T/12$; б) $t=T/7{,}5$.
8. $i=U\sqrt{\frac{C}{2L}}=10^{-2}$ А.
9. $\Delta l=\frac{l}{t}\frac{|AB|}{c}\approx 7{,}8$ см $\left(t=\frac{1}{25\cdot 625}\right.$ с — время, за которое луч прочерчивает одну строку, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость электромагнитной волны).
10. $m=\frac{\mu Pt}{\eta E_0N_A}\approx 0{,}031$ кг.

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $A=1+\sqrt{bc}$.

2. $]\frac{1}{4};\ \frac{8}{5}[$.

3. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k,\ x_2=\frac{3\pi}{4}+\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

4. $10\frac{2}{3}$.

5. $\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

Вариант 2

1. $A=\operatorname{ctg}\alpha$.
2. $\div 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$ или $\div 13,\ 9,\ 5\ \ldots$
3. $]-1;\ 1[$.
4. $\sqrt{3}a^2$.
5. $y=-x+1$; 135°.

Задачи устного экзамена

1. $\left\{\frac{1}{10},\ 100\right\}$. 2. а) $]2;7[$; б) $]-\infty;-1[$.
3. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 5. $y'=\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)\ln 2}$.
6. $\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ — промежуток убывания, $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ +\infty\right[$ — промежуток возрастания.
7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 8. а) $2\frac{1}{3}$; б) $2-\sqrt{2}$.

Физика

1. $a=\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}g\approx 1{,}56$ м/с^2;

$T_1=m_1g\left(1+\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}\right)\approx 2{,}3$ Н;

$T_2=m_3g\left(1-\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}\right)\approx 3{,}3$ Н.

2. Если пренебречь изменением массы орудия при выстреле, то скорость орудия уменьшится на $\Delta v=\frac{m_2(v_2\cos\alpha-v_1)}{m_1}\approx 0{,}4$ м/с.
3. $H=R_З(\sqrt{2}-1)\approx 0{,}4\ R_З\approx 2560$ км ($R_З$ — радиус Земли).
4. $t=\sqrt{\frac{2h\varrho_т}{g(\varrho_в-\varrho_т)}}\approx 0{,}96$ с.
5. $v_{\min}=\sqrt{2(c_л(t_{пл}-t)+\lambda+c_в(t_к-t_{пл})+r)}\approx 2{,}5\cdot 10^3$ м/с ($t_{пл}=0$°C — температура плавления льда, $t_к=100$°C — температура кипения воды).
6. $p'=p/5=10^5$ Па.
7. $\varphi=\frac{\varphi_1r_1+\varphi_2r_2}{r_1+r_2}=28$ кВ; на первый шар перейдет заряд $\Delta q=4\pi\varepsilon_0r_1(\varphi-\varphi_1)\approx 1{,}3\cdot 10^{-7}$ Кл.
8. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{(r+R_1)R_2}{r(R_1+R_2)+R_1R_2}=\frac{2}{7}$.
9. $l=d(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=d\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)\approx 0{,}94$ см.
10. $d=\frac{1}{|D|}=0{,}5$ м.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. См. рис. 6.
2. Ответ: нельзя. В самом деле, пусть размеры бруска $a\times a\times b$; тогда суммарный объем 12 брусков равен $12a^2b$. С другой стороны, если ребро куба равно x, то объем каркаса

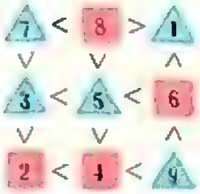


Рис. 6.

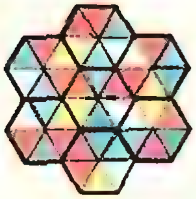


Рис. 7.

равен

$$x^3-(x-2a)^3-6a(x-2a)^2.$$

Уравнение (относительно x)

$$x^3-(x-2a)^3-6a(x-2a)^2=12a^2b$$

имеет корень $x=b+\frac{4}{3}a$, что невозможно (очевидно, x должен быть равен b, или $b+a$, или $b+2a$).

3. Ответ: 15. В самом деле, если спортсмен x раз набрал по 18 очков (попал в 10 и 8) и y раз — по 5 очков, то

$$18x+5y=99. \qquad (1)$$

Из (1) получаем $1<x<5$. Из чисел $99-18x$ на 5 делится только число $99-18\cdot 3$.

4. Ответ: 3. В самом деле, если $a_1, \ldots, a_n$ — записанные на доске числа, то $n\geqslant 3$. Сложив равенства

$$\begin{cases} 2a_1=a_2+a_3+\ldots+a_n, \\ 2a_2=a_1+a_3+\ldots+a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}, \end{cases} \qquad (2)$$

получим $2(a_1+\ldots+a_n)=(n-1)(a_1+\ldots+a_n)$, или $(n-3)(a_1+\ldots+a_n)=0$. Отсюда $n=3$ или $a_1+\ldots+a_n=0$. При $n>3$ из условия $a_1+\ldots+a_n=0$ и системы (2) получаем $a_1=\ldots=a_n=0$, что противоречит условию задачи. При $n=3$ система (2) имеет ненулевое решение (например, $a_1=a_2=a_3=1$).

5. См. рис. 7. Более сложная задача: *доказать, что для данного набора шестиугольников такое «прикладывание» единственно.*

Главный редактор — *академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — *академик* А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, $\boxed{\text{В. М. Глушков}}$, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихинович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
А. Прокофьев, И. Смирнова, Э. Смирнов

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

117071, Москва, Ленинский проспект, 15.
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21

Сдано в набор 19.1.82. Подписано в печать 19.2.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,12 Т-00352
Цена 40 коп. Заказ 78 Тираж 180 558 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

МАЙЯ ОСТАЕТСЯ ЧЕМПИОНКОЙ

Почти во всех областях интеллектуальной деятельности женщины добились успехов, соизмеримых с лучшими достижениями их коллег-мужчин.

В шахматах, однако, до недавнего времени царило полное превосходство мужчин. Знаменитая Вера Менчик, первая шахматная королева, значительно превосходила своих соперниц, но в мужских турнирах обычно оказывалась в конце таблицы. Новую эру открыла грузинская шахматистка Нона Гаприндашвили, завоевавшая звание международного гроссмейстера среди мужчин. Ее преемница, другая замечательная грузинская шахматистка Майя Чибурданидзе пошла еще дальше. В турнирах, где она была единственной представительницей прекрасного пола, она показала такие результаты, о которых многие гроссмейстеры-мужчины лишь мечтают. Два года подряд она выходила в первую лигу первенства СССР среди мужчин.

— Не страшно играть с мужчинами? — спросил однажды Майю ведущий «странички».

— Им страшнее. Они стыдятся мне проиграть.

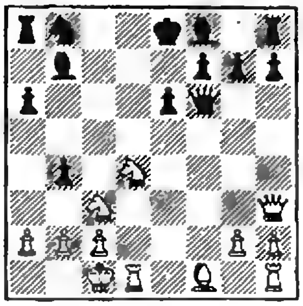
— А не жаль мужчин, которые вам сдаются?

— Пусть сражаются по-мужски! Между прочим, когда они меня обыгрывают, то не очень-то огорчаются.

— Майя, как вам удается почти весь вечер не отходить от шахматной доски?

— Когда-то гроссмейстер Пауль Керес сказал, что женщины отстают от мужчин потому, что не могут молчать пять часов подряд. Пришлось овладеть наукой молчания...

В мартовском номере «Кванта» за прошлый год мы привели эффектную комбинацию чемпионки против С. Двойриса. А вот как она завершила атаку против известного гроссмейстера В. Тукмакова.

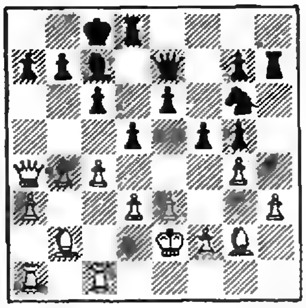


М. Чибурданидзе — В. Тукмаков

1. Кcb5! Сc5 2. К : e6 ab 3. С : b5+ Кc6 4. С : c6+ С : c6 5. Кc7+ Крf8 6. К : a8 Фf4+ 7. Крb1 Фb8 8. Лhf1 Сe7 9. Фe6. Черные сдались.

Во второй раз сыграть Чибурданидзе в первой лиге не пришлось. С этим турниром по срокам совпал ее матч на первенство мира с Наной Александрия. Нана в свое время тоже ходила в вундеркиндах. В 17 лет она впервые стала чемпионкой страны, в 1975 году уже посягала на шахматную корону в поединке с Гаприндашвили. Но в матче 1981 года явной фавориткой была 20-летняя чемпионка мира. Наверное, это и расслабило ее. Майя сделала упор на практическую игру в мужских турнирах, а фундаментальной теоретической подготовкой пренебрегла. Это могло ей дорого обойтись.

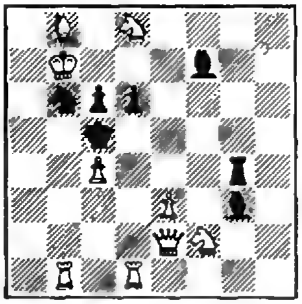
Уже начало матча было сенсационным. Во второй партии Нана, добившись подавляющего перевеса, в цейтноте лишь случайно не объявила мат, в третьей и четвертой партиях она тоже была близка к победе и, наконец, в пятой ее добилась. Почувствовав, что соперница превосходит ее в подготовке, Майя стала избегать известных дебютных вариантов. Эта тактика принесла успех — после девяти партий она уже впереди на два очка. Теперь Нана проявляет необычайную стойкость характера и исправляет положение. Перед двумя заключительными встречами счет равный — 7:7. Решающим оказался 15-й поединок.



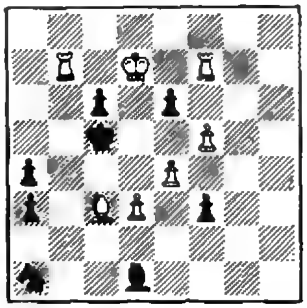
Здесь черные сильным ходом 23...d4! могли перехватить инициативу, но вместо этого они увлеклись пешкоедством. В результате Майя получила атаку, которую энергично довела до победы. **23...fg 24. Ф:a7 gh 25. Сh1 Сb8 26. Фa8 Фd6 27. cd ed 28. Сd4 Крd7 29. Ф : b7+ Фc7 30. Фa6 Лe8 31. b5 Кe7 32. Сb6 Фc8 33. bc+ К : c6 34. Фb5 Лh6 35. Ф : d5+ Лd6 36. Л : c6 Ф : c6 37. Фf5+.** Черные просрочили время, не успев сдаться.

В последней партии Александрия сравняла счет. Матч оказался первым в истории женских шахмат, закончившимся вничью. А чемпионкой мира осталась Майя Чибурданидзе.

Конкурсные задания

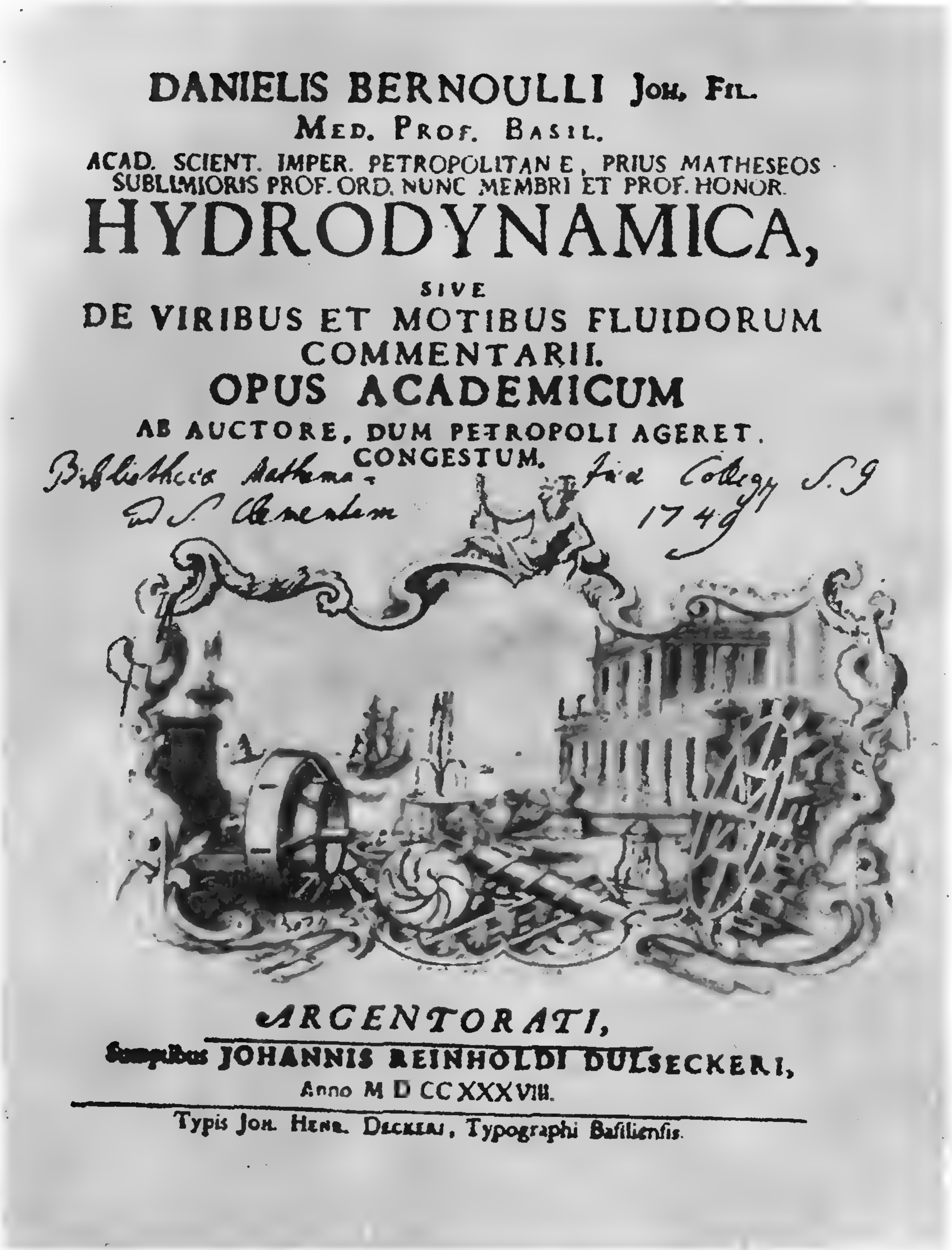


5. Е. Горовая. Мат в 2 хода.



6. Р. Солодова. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 20 мая 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»).



DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS
SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM
COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET,
CONGESTUM.

Bibliothecæ Mathematicæ Collegij S.J.
ad S. Clementem
1749

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno MDCCXXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis.

Титульный лист первого издания книги Даниила Бернулли «Гидродинамика».

В этом номере мы помещаем статью о жизни и научной деятельности Даниила Бернулли (1700—1782) — замечательного ученого-естествоиспытателя, почетного профессора Петербургской Академии Наук, одного из основоположников гидродинамики.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

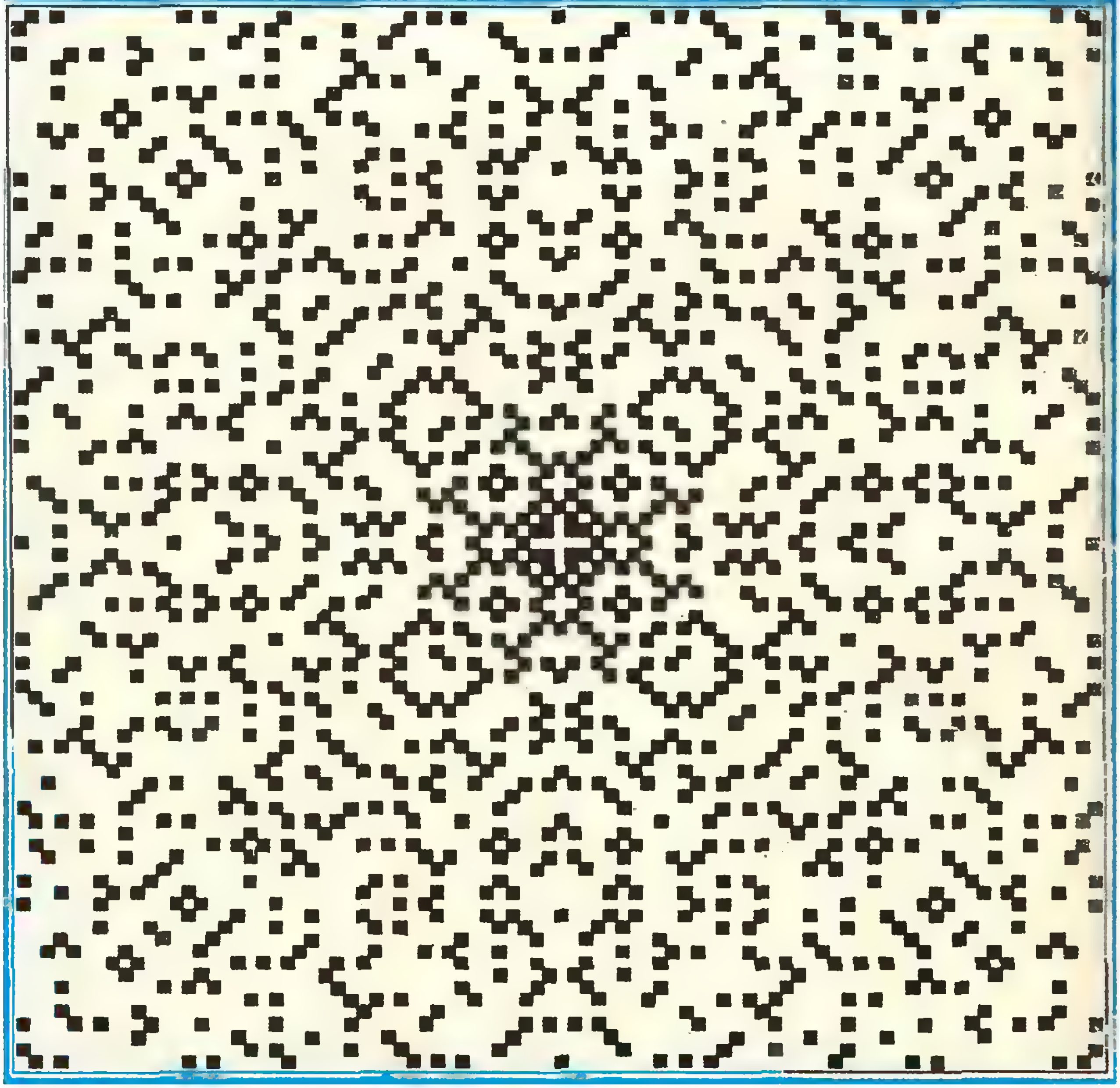
В статье академика Л. С. Понтрягина, опубликованной в этом номере журнала, рассказывается о комплексных числах. Среди них выделяются *целые комплексные числа*, то есть числа вида $a+bi$, где a и b — целые (они включают и обычные целые числа — при $b=0$).

Простым комплексным числом называется такое целое комплексное число, при представлении которого в виде произведения двух целых комплексных чисел один из сомножителей будет равным либо $+1$, либо -1, либо $+i$, либо $-i$.

Гаусс доказал, что простое число будет и простым комплексным числом, если оно представляется в виде $4k+3$, и составным в противном случае.

Любопытно, что голландский ученый Ван-дер-Поль при исследовании высокочастотных полей столкнулся с закономерностями, описываемыми гауссовыми числами. Рисунок на обложке журнала, полученный Ван-дер-Полем с помощью ЭВМ, изображает в виде квадратиков простые комплексные числа на комплексной плоскости.

А. П.



НОМЕР
4

КВАНТ

4
1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Космическая весна человечества	2	Humanity's cosmic spring
Л. Понтрягин. Основная теорема алгебры	3	*L. Pontriagin.* The main theorem of algebra
А. Боровой. Год чудес	10	*A. Borovoy.* The year of miracles
На орбите — новый музей	18	A new museum on orbit
В. Фабрикант. Можно ли услышать рев мамонта?	20	*V. Fabrikant.* Can we hear the mamouth's roar?
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
М. Людомирский, А. Панфилов. Почему висит кольцо?	22	*M. Liudomirski, A. Panfilov.* Why does the ring stay hanging?
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М736—М740; Ф748—Ф752	25	Problems M736—M740; P748—P752
Решения задач М696—М700; Ф708—Ф712	28	Solutions M696—M700; P708—P712
А. Зильберман. Два способа расчета электрических цепей	33	*A. Zilberman.* Two ways of calculating electric circuits
«Квант» для младших школьников		**Kvant for the younger school-children**
Задачи	35	Problems
А. Калинин. Причеши ежа	36	*A. Kalinin.* Combing a hedgehog
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
В. Рыжик. Надо ли искать ОДЗ?	39	*V. Ryjik.* Should one find the domain?
Варианты вступительных экзаменов в вузы		**College entrance exams**
Ереванский государственный университет	43	Erevan state university
Московский институт стали и сплавов	44	Moscow institute of steel and alloys
Московский гидромелиоративный институт	45	Moscow hydromeliorative institute
Московский технологический институт пищевой промышленности	46	Moscow food industry technological institute
Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола	47	Murmansk Lenin Komsomol higher naval engineering school
Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола	48	Riga Lenin Komsomol civil aviation institute
Искусство программирования		**The art of programming**
Заочная школа программирования. Урок 20	50	Computer programming correspondence school
Информация		**Information**
Об итогах конкурса «Малый интеркосмос»	52	"Maly intercosmos" contest results
XIII конференция юных математиков в Батуми	54	The 13th young mathematician's conference in Batumi
Заочная физическая школа	57	Physics correspondence school
Рецензии, библиография		**Book reviews**
А. Зорич. Астрономия: наука и ее творцы	58	*A. Zorich.* Astronomy: science and creators
Ответы, указания, решения	60	**Answers, hints, solutions**
Новости науки *(42)*		**Science news** *(42)*
Смесь *(17, 49, 53, 59)*		**Miscelleneous** *(17, 49, 53, 59)*
Шахматная страничка		**The chess page**
Патовые рекорды *(3-я с. обложки)*		Stalemate records *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982

Космическая весна человечества

Для всех нас апрель отмечен двумя выдающимися событиями — днем рождения В. И. Ленина и первым полетом человека в космос. 12 апреля 1961 года космический корабль «Восток», пилотируемый Ю. А. Гагариным, совершил первый в мире орбитальный космический полет, продолжавшийся 108 минут. 21 год отделяет нас от этого выдающегося события в истории человечества, и каждый из них отмечен замечательными успехами на пути в космос.

В нашей стране запущено более 1300 искусственных спутников Земли и несколько десятков пилотируемых и автоматических космических кораблей. В семидесятые годы основным направлением развития советских космических исследований стало создание орбитальных научных станций «Салют». По словам Л. И. Брежнева «Советская наука рассматривает создание орбитальных станций со сменяемыми экипажами как магистральный путь человека в космос».

Более четырех лет успешно работает в околоземном космическом пространстве орбитальная научная станция «Салют-6». Первоначально предполагалось, что она сможет успешно функционировать в течение полутора лет. Однако к настоящему моменту этот срок превзойден почти в три раза. Постоянно возрастала продолжительность работы основных экспедиций на станции «Салют-6» — 96, 140, 175, 185 суток! Последний рекорд принадлежит космонавтам Леониду Ивановичу Попову и Валерию Викторовичу Рюмину.

На станции «Салют-6» впервые были испытаны такие сложные научные приборы, как субмиллиметровый телескоп БСТ-1 и радиотелескоп КРТ-10 с диаметром антенны 10 м.

Достижения космонавтики являются достоянием всего человечества, способствуют укреплению мира и развитию прогресса. Поэтому наша страна вносит огромный вклад в развитие международного сотрудничества в космосе. Вместе с советскими космонавтами на «Салюте-6» работали космонавты Чехословакии, Польши, Германской Демократической Республики, Болгарии, Венгрии, Румынии, Вьетнама, Кубы и Монголии. Успешно проходит подготовка к совместному советско-французскому космическому полету; развивается советско-индийское сотрудничество в области исследований космоса.

Советские космические исследования прокладывают человечеству путь к созданию специализированных орбитальных станций, предназначенных для разработки космической технологии, использующей невесомость и глубокий вакуум, а также специальных медико-биологических лабораторий. Появятся еще более тяжелые и долгоживущие орбитальные станции с совершенным научным оборудованием для разнообразных астрофизических исследований. Развитие цивилизации потребует создания орбитальных космических производств, мощных энергетических установок, межпланетных научных поселений, освоения ближайшего спутника Земли — Луны.

Космос ждет и вас, наши дорогие читатели. Профессия космонавта нелегка; она требует глубокой научной подготовки и совершенного здоровья. И тот, кто хотел бы овладеть ею, должен готовиться к этому еще в школьные годы.

Л. Понтрягин

Основная теорема алгебры

Здесь будет доказана основная теорема алгебры, утверждающая, что *всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.* При этом действительные числа считаются частным случаем комплексных чисел. Эта теорема впервые была доказана Гауссом в 1799 году для частного случая многочленов с действительными коэффициентами. Гаусс показал, что всякий такой многочлен имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень. С точки зрения современной абстрактной алгебры теорема эта показывает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто: это значит, что, рассматривая корни алгебраических уравнений (то есть корни многочленов) в этом поле, мы не можем получить новых чисел.

В этом смысле поле комплексных чисел радикально отличается от поля действительных чисел, которое не является алгебраически замкнутым. При этом стоит заметить, что поле комплексных чисел получено из поля действительных чисел присоединением лишь корня одного уравнения

$$z^2+1=0.$$

Доказательство основной теоремы алгебры основано не на соображениях абстрактной алгебры, а на конкретном рассмотрении поля комплексных чисел. Строгое ее доказательство должно опираться на точное определение действительного числа и на точное определение непрерывности функции. Я здесь привожу не строгое, но геометрически убедительное доказательство, основанное на рассмотрении путей в плоскости комплексного переменного и их деформаций. Доказательство это не только доказывает теорему, но до некоторой степени объясняет, почему она верна.

Как следствие основной теоремы алгебры мы покажем, как многочлен с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами раскладывается на множители.

Пути в плоскости комплексного переменного

Если точка z в плоскости P комплексного переменного перемещается во времени, когда время t меняется в пределах $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то мы считаем, что в плоскости P задан путь (рис. 1). Таким образом, *путь* есть функция $z(t)$ действительного переменного t, принимающая комплексные значения, заданная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$z(t);\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Формула эта задает путь. Речь идет здесь о движении точки, осуществляемом, естественно, без скачков. Так что функция $z(t)$ является **непрерывной** функцией. Мы не уточняем здесь понятие непрерывности, считая, что оно интуитивно ясно, как движение точки. Следует отчетливо понимать, что путь есть **процесс**

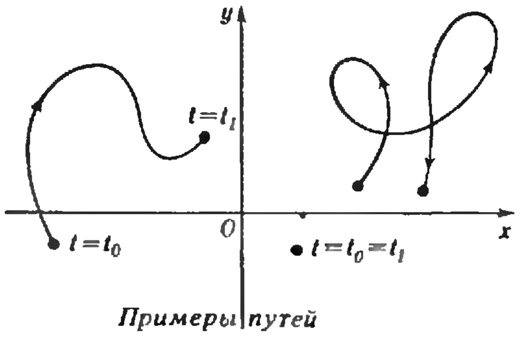
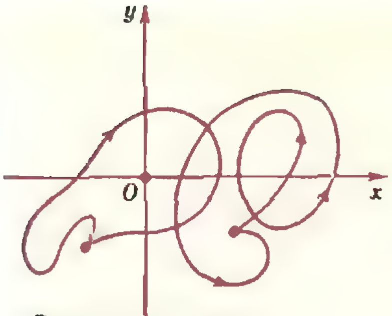


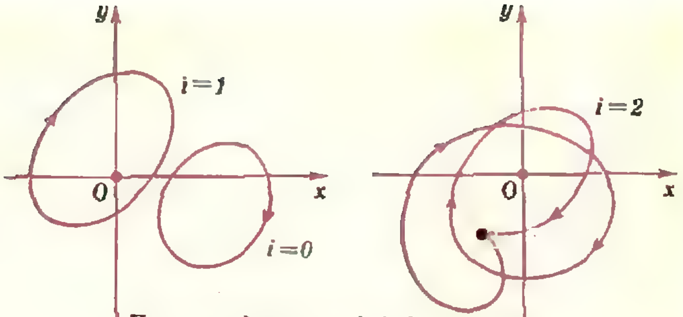
Рис. 1

Настоящая статья является продолжением статьи академика Л. С. Понтрягина «Комплексные числа», опубликованной в предыдущем номере.



Замкнутые пути

Рис. 2.



Пути с индексами 0, 1, 2

Рис. 3.

движения, а не та линия, которую описывает движущаяся точка. Одну и ту же линию можно описать разными способами.

В процессе движения точка $z(t)$ в разные моменты времени может попадать в одну и ту же точку плоскости, так что не исключается равенство

$$z(t_2)=z(t_3) \text{ при } t_2\neq t_3.$$

Таким образом, путь может иметь самопересечения. Он может даже состоять из одной точки, именно в случае, когда точка $z(t)$ вовсе не перемещается при изменении t. В дальнейшем, если это не будет оговорено специально, мы всегда будем предполагать, что *путь не проходит через начало координат*, то есть что величина $z(t)$ ни при каком значении t не обращается в нуль. Точка $z(t_0)=z_0$ называется ***началом*** пути, а точка $z(t_1)=z_1$ — его ***концом***. Если имеет место равенство $z_0=z_1$, то путь называется *замкнутым* (рис. 2).

Так как комплексное число $z(t)$ не обращается в нуль, для всякого значения t определен аргумент $\varphi(t)$ комплексного числа $z(t)$; но он определен лишь с точностью до слагаемого $2k\pi$. Эта неоднозначность для нас не желательна. Для того чтобы освободиться от нее, мы выберем для начальной точки z_0 вполне определенный аргумент $\varphi_0=\varphi(t_0)$.

Затем по мере возрастания t будем выбирать аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ так, чтобы при малых изменениях t он менялся мало. Этим неоднозначность выбора аргумента будет устранена. Добавление к аргументу числа $2k\pi$ при $k\neq0$ привело бы сразу к резкому изменению величины $\varphi(t)$. Выбрав начальное значение аргумента $\varphi(t_0)=\varphi_0$ и следя за тем, чтобы аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ менялся вместе с t непрерывно, мы получаем вполне определенную функцию $\varphi(t)$, меняющуюся непрерывно, то есть без скачков. Если выбрать начальное значение аргумента φ_0 иначе, изменив его на $2k\pi$, то он будет отличаться от ранее выбранного ровно на $2k\pi$ на всем протяжении изменения t. Отсюда следует, что при таком способе построения функции $\varphi(t)$ величина

$$\varphi(t_1)-\varphi(t_0) \qquad (1)$$

не зависит от случайно выбранного начального значения аргумента числа z_0.

Если путь замкнут, то точки z_0 и z_1 совпадают и, следовательно, их аргументы $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_1)$ могут отличаться лишь на $2k\pi$. Поэтому число (1) в случае замкнутого пути есть $2k\pi$. Целое число k называется *индексом* замкнутого пути в плоскости комплексного переменного z. Следует еще раз подчеркнуть, что индекс замкнутого пути можно определить лишь в том случае, когда путь не проходит через начало координат.

Индекс k имеет простой геометрический смысл. Именно, он указывает, сколько раз точка $z(t)$, описывая замкнутый путь, обходит начало координат (рис. 3).

Рассмотрим простой пример. Путь

$$1+r(\cos t+i\sin t);\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi \quad (2)$$

является замкнутым. Он описывает окружность с центром в точке 1 и радиусом r и проходит окружность с течением времени t равномерно против часовой стрелки. Если число r меньше 1, то окружность не содержит внутри себя начала координат и индекс пути равен 0. Если $r>1$, то окружность содержит внутри себя начало координат, и индекс пути равен 1 (проверьте это самостоятельно). В случае $r=1$ путь проходит через начало координат и его индекс не определен. Если число r меняется, то путь (2), как говорят, деформируется (рис. 4). Мы видим на этом примере, что во время деформации замкнутого пути его индекс не меняется, если только путь в какой-то момент деформации не проходит через начало координат.

Говоря, что путь описывается движением точки во времени, мы лишь хотели придать более интуитивный характер определению пути. В действительности же речь идет о зависимости комплексного переменного z от некоторого действительного параметра t (который можно обозначить и другой буквой). Так, например, путь (2) можно записать в виде

$$1+r(\cos\alpha+i\sin\alpha);\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi, \quad (3)$$

где параметром уже является не t, а α. Ясно, что путь (3) описывается точкой $1+z$, когда точка z описывает путь

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha);\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.$$

Здесь r есть числовой параметр, от которого зависит сам путь. Говорят, что при изменении r путь (3) деформируется.

Введем понятие *деформации пути*. Будем считать, что путь *деформируется*, если он постепенно меняется без скачков в зависимости от некоторого параметра, который для пути (3) обозначен через r, а вообще может быть обозначен и другой буквой, например, s (рис. 5). Таким образом, деформирующийся путь записывается формулой

$$z(\alpha,\ s);\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1;\ s_0\leqslant s\leqslant s_1. \quad (4)$$

Здесь при каждом фиксированном значении параметра s мы имеем определенный путь, описываемый во время изменения α от α_0 до α_1, а при изменении s сам путь меняется, деформируясь. Ясно, что если путь (4) замкнут, то есть если при любом значении s имеет место равенство

$$z(\alpha_0,\ s)=z(\alpha_1,\ s),$$

то в течении деформации индекс пути должен меняться без скачков. А так как он есть целое число, то индекс этот остается постоянным. Конечно, это верно только в том случае, когда для произвольного значения s путь (4) не проходит через начало координат. В противном случае для этого значения s индекс пути не определен. Таким образом, мы можем высказать следующее утверждение:

Если замкнутый путь непрерывно деформируется, не проходя в процессе деформации через начало координат, то индекс его не меняется.

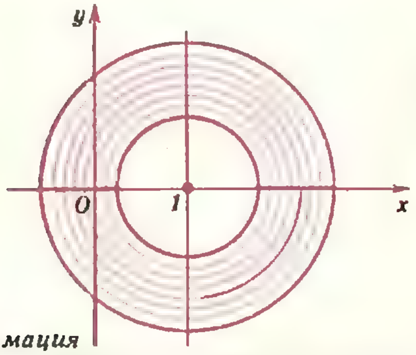
Дадим еще один пример замкнутого пути

$$r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha);\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \quad (5)$$

Ясно, что путь этот описывается точкой z^n, когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha);\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.$$

Видно, что когда α меняется от 0



Деформация пути $1+r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ при изменении r

Рис. 4.

Деформация пути

Рис. 5.

до 2π, аргумент точки z^n меняется от 0 до $2n\pi$. Таким образом, индекс пути (5) равен n (см. рис. 6, где схематически показан случай $n=3$).

Комплексные функции комплексного переменного

Если числовое значение комплексной переменной величины w можно найти, зная числовое значение другой комплексной переменной величины z, то переменная величина w называется *функцией* переменной величины z, что записывается в форме

$$w=f(z).$$

Если комплексная функция $f(z)$ комплексного переменного z имеет производную, то она называется аналитической функцией. Теория аналитических функций является теперь одним из важнейших разделов математики. Здесь нас будут интересовать лишь аналитические функции очень частного вида, именно, многочлены.

Рассмотрим многочлен

$$w=f(z)=z^n+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_{(n-1)}z+a_n, \qquad (6)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть комплексные коэффициенты, а n — неотрицательное целое число, которое называется *степенью* многочлена. Целью нашего исследования будет доказательство того, что многочлен (6) положительной степени имеет корень, то есть что уравнение

$$f(z)=0,$$

где $f(z)$ — многочлен (6) и $n>0$, имеет решение. Для доказательства этого мы рассмотрим замкнутый путь

$$f(r(\cos\alpha+i\sin\alpha));\ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi, \qquad (7)$$

который описывает точка $f(z)$, когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha);\ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi.$$

Случай, когда свободный член a_n многочлена $f(z)$ равен 0, не требует рассмотрения, так как в этом случае многочлен $f(z)$ имеет очевидный корень $z=0$. Поэтому мы будем считать, что $a_n\neq0$. Замкнутый путь (7) зависит от параметра r и при изменении параметра r деформируется. При $r=0$ число z равно 0, и путь $f(z)$ состоит из неподвижной точки a_n. Таким образом, его индекс при $r=0$ равен 0. Мы докажем, что если взять r достаточно большим, то индекс пути (7) равен n. Но по предположению $n\neq0$, поэтому при изменении числа r от большого значения к нулю путь (7), деформируясь, пройдет при каком-то значении r через начало координат, а это и значит, что при некотором значении z функция $f(z)$ обратится в нуль, то есть корень у этого многочлена существует (рис. 7).

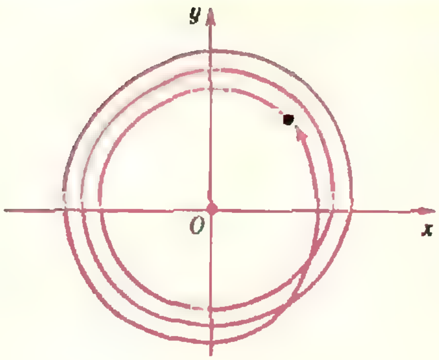


Рис. 6.

Для доказательства того, что при достаточно большом r замкнутый путь (7) имеет индекс, равный n, продеформируем этот путь в более простой, индекс которого легко сосчитать.

Прежде всего мы разобьем многочлен f на сумму двух

$$f(z)=z^n+g(z),$$

где $g(z)$ задается формулой

$$g(z)=a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n.$$

Так как коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлена $g(z)$ суть вполне определенные числа, то они все не превосходят по модулю некоторую константу C. Из доказанного в предыдущей статье (см. «Квант», 1982, № 3) неравенства (8), распространенного на произвольное число слагаемых, следует, что при $|z|>1$

$$|g(z)|\leqslant nC|z^{n-1}|. \qquad (8)$$

Рассмотрим многочлен $f(z, s)$, зависящий от параметра s, $0\leqslant s\leqslant1$, задаваемый следующей формулой:

$$f(z,s)=z^n+sg(z).$$

Мы имеем равенство

$$z^n=f(z,s)-sg(z),$$

откуда

$$|z^n|\leqslant|f(z,s)|+|-sg(z)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(z,s)|+nC|z^{n-1}|s\leqslant$$
$$\leqslant|f(z,s)|+nC|z^{n-1}|,$$

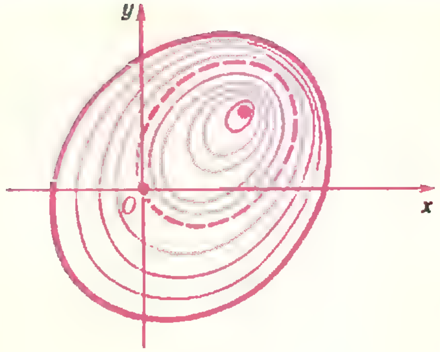


Рис. 7.

(см. (8)). Отсюда следует

$$|f(z,s)|\geqslant|z^n|-nC|z^{n-1}|.$$

Обозначим $|z|$ через r, тогда последнее неравенство принимает вид $|f(z,s)|\geqslant r^n-nCr^{n-1}=r^{n-1}(r-Cn)$.

Таким образом, при $r>Cn$ правая часть предыдущего неравенства положительна. Следовательно, модуль функции $f(z,s)$ не обращается в нуль ни при каком значении S, если только $0\leqslant s\leqslant 1$.

Обратим внимание теперь на тот факт, что при $s=0$ многочлен $f(z,s)$ превращается в известный нам многочлен z^n. А индекс пути z^n, когда z описывает окружность $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, нами уже сосчитан (см. (5)). Он равен n. При $s=1$ многочлен $f(z,s)$ превращается в многочлен $f(z)$ и определяемый им путь (7) имеет индекс, тоже равный n. Итак, мы доказали, что индекс пути (7), определяемый многочленом $f(z)$, при $r>Cn$ равен n. Из этого, как сказано выше, уже следует, что многочлен $f(z)$ обращается в нуль при некотором значении z, где $|z|<Cn$.

Итак, основная теорема алгебры доказана.

Деление многочленов

При делении целого положительного числа a на целое положительное число b мы приходим к равенству

$$a=bh+k, \qquad (9)$$

где h и k — целые неотрицательные числа и $k<b$. Число h называется частным, а k — остатком при делении числа a на число b.

Способ деления целых чисел хорошо известен из арифметики. Но так же, как целые числа, можно делить друг на друга и многочлены. Будем исходить из двух многочленов

$$a(z)=a_0z^p+a_1z^{p-1}+\ldots+a_p,$$
$$b(z)=b_0z^q+b_1z^{q-1}+\ldots+b_q.$$

Мы будем предполагать здесь, что числа a_0 и b_0 не равны нулю, так что многочлен $a(z)$ имеет степень p, а многочлен $b(z)$ имеет степень q. В результате деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ мы можем прийти к следующему равенству, аналогичному равенству (9):

$$a(z)=b(z)h(z)+k(z), \qquad (10)$$

где степень многочлена $k(z)$ меньше q. Многочлены $h(z)$ и $k(z)$ называются, соответственно, ***частным*** и ***остатком*** при делении многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$.

Если $k(z)\equiv 0$, то говорят, что многочлен $a(z)$ *делится* на многочлен $b(z)$, а $h(z)$ является частным от их деления.

Равенство (9) доказано в арифметике, а равенство (10) должно доказываться в алгебре. Но деление многочленов не входит в ныне действующую школьную программу. Чтобы доказать (10), мы должны построить такие многочлены $h(z)$ и $k(z)$, которые удовлетворяют этому равенству. Процесс этого построения представляет собою очень важный алгоритм. Опишем его.

Если $p<q$, то тогда $h(z)=0$, $k(z)=a(z)$, и равенство (10) выполнено.

Теперь мы будем строить многочлены $h(z)$ и $k(z)$ в предположении, что $p\geqslant q$. Сперва построим равенство

$$a(z)=b(z)\ h_1(z)+a_1(z), \qquad (11)$$

в котором степень многочлена $a_1(z)$ меньше p. Для этого положим

$$h_1(z)=\frac{a_0}{b_0}z^{(p-q)}.$$

Тогда разность

$$a(z)-b(z)h_1(z)=a_1(z)$$

имеет степень меньше, чем p, так как в этом многочлене коэффициент при z^p равен нулю, а остальные степени z, входящие в этот многочлен, очевидно, меньше p. Таким образом, равенство (11) построено.

Если многочлен $a_1(z)$ имеет степень меньшую, чем q, то равенство (11) уже является равенством (10). В противоположном случае к многочлену $a_1(z)$ применим ту же процедуру, которая применена к многочлену $a(z)$ при построении равенства (11). И тогда мы получим для него равенство

$$a_1(z)=b(z)\ h_2(z)+a_2(z),$$

причем степень многочлена $a_2(z)$ уже меньше, чем степень многочлена $a_1(z)$. Если многочлен $a_2(z)$ уже имеет степень меньшую, чем q, то подставляя $a_1(z)$ из последнего равенства в равенство (11), мы получим

$$a(z)=b(z)\ (h_1(z)+h_2(z))+a_2(z),$$

которое уже является равенством (10). Если многочлен $a_2(z)$ тоже имеет степень бо́льшую, чем q, то мы продолжим наше построение дальше, и в конце концов докажем нужное равенство (10).

Здесь мы описали процесс деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$, то есть нахождение многочленов $h(z)$ и $k(z)$, входящих в равенство (10). Докажем теперь, что они однозначно определены многочленами $a(z)$ и $b(z)$. Допустим, что наряду с равенством (10) имеет место равенство

$$a(z)=b(z)h_0(z)+k_0(z), \qquad (12)$$

причем степень многочлена $k_0(z)$ меньше q. Вычитая равенство (12) из равенства (10), получим

$$b(z)\ (h(z)-h_0(z))=k_0(z)-k(z).$$

Так как степень многочлена $b(z)$ равна q, а степень многочлена $k_0(z)-k(z)$ меньше q, то последнее равенство может иметь место лишь при условии $h(z)-h_0(z)\equiv 0$, так что и $k(z)-k_0(z)\equiv 0$.

Многочлены с произвольными комплексными коэффициентами

Теперь существующий по основной теореме алгебры корень многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами обозначим через z_1. Докажем, что многочлен $f(z)$ делится на двучлен $(z-z_1)$. Производя деление многочлена $f(z)$ на многочлен первой степени $(z-z_1)$ по правилам, описанным в предыдущем разделе, мы получим частное, которое обозначим через $f_1(z)$, и некоторый остаток в виде многочлена нулевой степени, то есть числа́, которое мы обозначим через k. Таким образом, имеем

$$f(z)=f_1(z)\ (z-z_1)+k.$$

Так как $f(z_1)=0$, то полагая в предыдущем равенстве $z=z_1$, получаем $k=0$.

Итак, многочлен $f(z)$ разделился на $(z-z_1)$, и мы имеем

$$f(z)=(z-z_1)f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — многочлен степени $n-1$, который, очевидно, начинается с члена z^{n-1}. Если $n>1$, то $n-1>0$; тогда многочлен $f_1(z)$ будет положительной степени и, по доказанному ранее, имеет некоторый корень z_2. Таким образом, по только что доказанному, многочлен $f_1(z)$ разлагается на множители

$$f_1(z)=(z-z_2)f_2(z). \qquad (13)$$

Продолжая этот процесс дальше, мы получим разложение $f(z)$ на n линейных множителей

$$f(z)=(z-z_1)\ (z-z_2)\dots(z-z_n).$$

Числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ являются корнями многочлена $f(z)$, и других корней многочлен $f(z)$, очевидно, не имеет. Может, однако, оказаться, что один и тот же корень встречается в этом разложении несколько раз. Группируя равные между собой корни, мы получаем разложение

$$f(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_q)^{k_q},$$

где все корни $z_1, z_2, \dots, z_q$ различны. Число k_1 называется *кратностью* корня z_1, число k_2 — кратностью корня z_2, и так далее, число k_q — кратностью корня z_q. Таким образом, число различных корней многочлена $f(z)$ может быть и меньше, чем n. Однако если учитывать кратность каждого корня, то сумма кратностей в точности равна n. В этом смысле многочлен $f(z)$ имеет ровно n корней.

Многочлены с действительными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай, когда все коэффициенты многочлена $f(z)$ — действительные числа. О корнях такого многочлена можно высказать некоторые весьма интересные дополнительные соображения.

Для рассмотрения многочлена с действительными коэффициентами введем понятие числа $\bar{z}$, комплексно сопряженного данному комплексному числу z. Именно, если

$$z = x + iy,$$

то, по определению, число

$$\bar{z} = x - iy \tag{14}$$

называется ***комплексно сопряженным*** с z. Таким образом, число $\bar{z}$, комплексно сопряженное с числом z, является зеркальным образом числа z относительно оси действительных чисел.

Если

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то

$$\bar{z} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)). \tag{15}$$

Таким образом, аргументы двух комплексно сопряженных чисел отличаются лишь знаком. Из формулы (14) следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Из формулы (15) следует, что

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Заметим еще, что равенство

$$\bar{z} = z$$

имеет место тогда и только тогда, когда z есть действительное число.

Из трех предыдущих формул легко получить, что для многочленов $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет место равенство

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z).$$

Из этого равенства следует, что *если z_1 есть корень многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами, то $\bar{z}_1$ есть также его корень*. В случае, если z_1 есть действительное число, то это утверждение бессодержательно. В случае, если z_1 не есть действительное число, то утверждение указывает на существование наряду с корнем z_1 отличного от него корня $\bar{z}_1$. Таким образом, если z_1 — не действительное число, то многочлен $f_1(z)$ (см. (13)) имеет делителем $(z - \bar{z}_1)$, и мы получаем разложение на множители

$$f(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) f_2(z).$$

Полагая в этом равенстве

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$

получаем

$$f(z) = (z^2 - 2x_1 z + x_1^2 + y_1^2) f_2(z).$$

Таким образом, мы выделили у многочлена $f(z)$ действительный квадратичный множитель $z^2 - 2x_1 z + x_1^2 + y_1^2$. Отсюда следует, что многочлен $f_2(z)$ — также многочлен с действительными коэффициентами, так как он получается в результате деления многочлена $f(z)$ на действительный квадратичный трехчлен. Следовательно, у этого многочлена $f_2(z)$ комплексные корни опять попарно сопряжены. Если у него найдется корень, равный уже ранее найденному корню z_1, то найдется и корень $\bar{z}_1$. Таким образом, в этом случае из многочлена $f_2(z)$ выделится еще один квадратичный множитель, равный прежнему квадратичному множителю. Из этого видно, что кратность комплексного корня многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами равна кратности сопряженного корня, и мы получаем разложения многочлена $f(z)$ на действительные множители:

$$f(z) = (z^2 - 2x_1 z + x_1^2 + y_1^2)^{k_1} \dots \dots (z^2 - 2x_p z + x_p^2 + y_p^2)^{k_p} \times \times (z - z_{p+1})^{k_{p+1}} \dots (z - z_q)^{k_q}.$$

Заметим, что квадратичные множители вида

$$z^2 - 2x_i z + x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

в которых все y_i не равны нулю, уже не разлагаются на действительные множители.

А. Боровой

Год чудес

(пятьдесят лет назад)

> *То, что уже открыто, часто кажется очень простым... Но поиск, идущий в темноте и длящийся годами, при котором на смену уверенности приходит отчаяние, при котором следуют бесконечные прорывы к ясности, — все это знает лишь тот, кто прошел этот путь.*
>
> *А. Эйнштейн*

В летопись экспериментальной физики 1932 год вошел совершенно особо, как год многих выдающихся открытий. Его называли «годом чудес», «золотым годом экспериментаторов», позднее — «годом информационного взрыва».

В начале года успех пришел в Англию, в старинный университетский город Кембридж. Там, в стенах Кавендишской лаборатории, которой руководил Эрнест Резерфорд, были сделаны два открытия. Они последовали друг за другом: сначала был открыт нейтрон; затем, приблизительно через месяц, пучок протонов, полученный на новом приборе ускорителе, расщепил атомное ядро. Это открыло неведомые ранее возможности для проникновения в глубины вещества, для исследования атомных ядер. Физики во всех странах мира поняли это. В Советском Союзе академик А. Ф. Иоффе посоветовал некоторым из своих учеников оставить прежние исследования и заняться ядерной физикой. Вот что вспоминает президент Академии наук СССР академик А. П. Александров:

«Новая ситуация в ядерной физике привлекла к ней усиленное внимание советских ученых. Точка роста науки пропущена не была — с 1932 года в Институте А. Ф. Иоффе молодые И. В. Курчатов, А. И. Алиханов и другие ученые начали развивать работы по ядерной физике».

Работы в Кавендишской лаборатории открыли список замечательных открытий 1932 года. Осенью этого же года ученый Калифорнийского института обнаружил в космическом излучении частицу антиматерии — позитрон. И еще один успех, тоже американских физиков и химиков,— открытие дейтона, получение первых капель тяжелой воды.

За экспериментальные достижения 1932 года были присуждены четыре Нобелевские премии. Три из них — почти сразу, в 1934, 1935 и 1936 годах. Четвертая — позднее, в 1951 году.

Нейтрон
(июнь 1920 — февраль 1932)

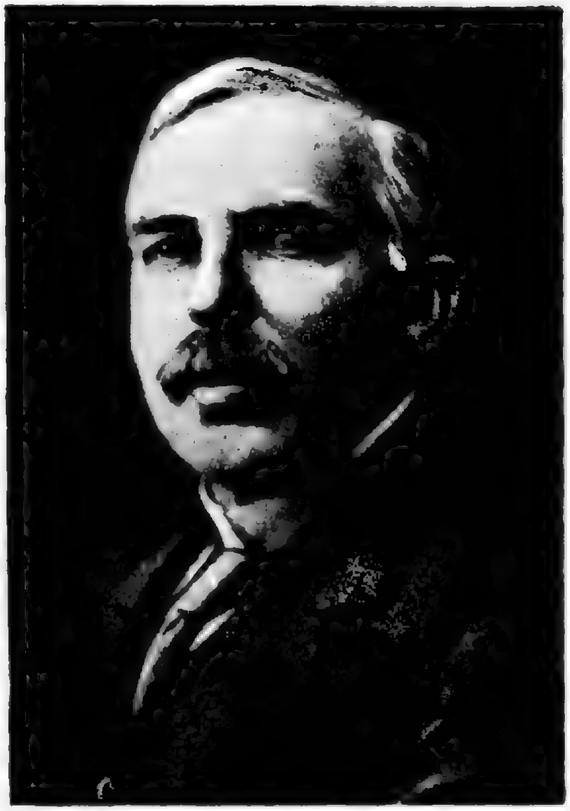
1932 год был и годом исполнения предсказаний. Это, в первую очередь, относится к нейтрону, существование которого было предсказано Резерфордом в июне 1920 года. Чтобы читатель понял, на чем основывалось это предсказание, нам придется ненадолго обратиться к еще более раннему времени.

Открытие радиоактивности дало в руки физикам инструмент для проникновения в глубь вещества, созданный самой природой. Это были α-частицы (ядра атома гелия), испускаемые радиоактивными элементами (радием, полонием и другими).

В лаборатории Резерфорда α-частицами, как снарядами, обстреливались различные вещества, и результатом опытов стало величайшее событие в науке — открытие атомного ядра. Оказалось, что в атоме облако легких электронов окружает положительно заряженное ядро, в котором и сосредоточена практически вся масса атома. А размеры ядра в сто тысяч раз (!) меньше, чем размеры электронного облака.

Теперь все усилия исследователей сосредоточились на следующем шаге — понять, из чего состоит ядро. И опять на помощь пришли α-частицы. Резерфорд со своими сотрудниками облучал ими азот и другие легкие газы и наблюдал расщепление ядер. При этом из них вылетали ядра водорода — протоны, как их позднее назвал Резерфорд. Первые работы по расщеплению ядер были опубликованы в 1919 году, и уже в них ученый сделал вывод, что протоны являются структурной частью более тяжелых ядер.

А через год Резерфорд выступил с лекцией, в которой рассказал, как он представляет себе устройство ядра. По мнению Резерфорда, ядра более сложные, чем водород, должны состоять из положительно заряженных протонов и электронов. Для такого предположения имелись веские причины. Наличие протонов подтверждали опыты самого Резерфорда. Существование электронов казалось естественным, поскольку они вылетали из ядра при β-распаде. Наконец, эта гипотеза помогала объяснить накопившиеся к тому времени данные о соотношении между массами и зарядами ядер. Так, заряд ядра гелия в два раза превышал заряд протона, а масса была в четыре раза больше, чем масса ядра водорода. Для углерода эти соотношения составляли соответственно 6 и 12 и т. п.



Эрнест Резерфорд

Предположение Резерфорда все объясняло:

Элемент					
	Водород	Гелий	...	Углерод	...
Состав ядра	p (протон)	$4p+2e^-$	...	$16p+6e^-$	...
Заряд ядра (Z)	+1	+2	...	+6	...
Относительная масса ядра (A)	~1	~4	...	~12	...

Гипотеза была вполне логичной (она существовала и раньше), поскольку другого набора элементарных частиц для построения ядер у физиков тогда и не было. Но вот дальше...

Дальше, размышляя о том, какие силы удерживают в ядре отталкивающиеся друг от друга положительные протоны, Резерфорд предположил, что один электрон может связать собой два протона, и тогда получится ядро с $Z=1$ и $A=2$ — тяжелый водород, поскольку по всем химическим свойствам такой элемент будет подобен обычному водороду (одинаковые заряды ядер!). А может существовать ядро из протона и электрона — «нейтральный дублет». Масса такой пары близка к массе протона, но сама она будет сильно отличаться от известного всем атома водорода. Если в атоме водорода протон и электрон разделены расстоянием 10^{-10} м, то в дублете частицы ближе друг к другу на целых пять порядков (радиус ядра — 10^{-15} м) и, значит, связаны очень сильно. Такое ядро должно было бы обладать удивительными свойствами: поскольку внешнее поле, создаваемое им, практически равно нулю, это ядро могло бы не только свободно проходить через толщу вещества, «не чувствуя» атомных электронов, но и проникать в глубь самих ядер, соединяться с ними и подвергать ядра неким неизвестным превращениям.

Так Резерфорд дал законченный портрет нейтрона. Надо сказать, что для части физиков предсказание Резерфорда осталось неизвестным, а другие не отнеслись к нему достаточно серьезно. В двадцатых годах стало общепризнанным, что ядро состоит из протонов и электронов. Нейтрон же ожидало почти полное забвение.

Но все-таки не полное, а «почти полное». В Кавендишской лаборатории в «нейтральный дублет» поверили и его искали.

В это время в лаборатории проводились эксперименты по искусственному расщеплению ядер, в которых участвовал молодой сотрудник (и ученик) Резерфорда Джеймс Чедвик. Исследователи были вынуждены часами сидеть в темноте, наблюдая слабые вспышки света от протонов, попадающих в экран из сернистого цинка. И часто при этой довольно скучной процедуре Резерфорд говорил с Чедвиком о нейтроне. Идея буквально захватила молодого физика. И вот в течение следующих десяти лет, иногда совместно с учителем, иногда в одиночку, Чедвик обдумывал и проводил эксперименты, стараясь обнаружить неуловимую частицу «либо в момент ее образования, либо в момент ее испускания из ядра атома».

1923 год, 1925 год, 1928 год...

Эксперименты, новые эксперименты (некоторые из них сам Чедвик называет почти абсурдными), и... постоянные отрицательные результаты.

Джеймс Чедвик

Проходили годы, а Чедвик продолжал сохранять уверенность в правоте учителя.

В 1930 году немецкие физики Боте и Беккер наблюдали странное, далеко проникающее излучение. Они назвали это излучение «бериллиевые лучи» (поскольку оно появлялось при бомбардировке α-частицами бериллия) и решили, что это гамма-кванты с большой энергией. (Сейчас мы записали бы этот процесс так: ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}+\alpha={}^{12}_{6}\mathrm{C}+n$.)

Следующий шаг сделали французские ученые Ирен и Фредерик Жолио-Кюри. Молодые физики обнаружили, что бериллиевое излучение выбивает из парафина протоны. (Так была обнаружена еще одна отличительная черта нейтрона — взаимодействие с атомными ядрами. Все, как предсказывал Резерфорд!) Но супруги Жолио-Кюри продолжали считать, что новое излучение — гамма-кванты.

Истину обнаружил Чедвик. Через пять недель после доклада Жолио-Кюри на заседании Парижской Академии наук и через 12 лет после выступления Резерфорда. Остроумными количественными опытами и расчетами он показал, что «бериллиевые лучи» состоят из нейтральных частиц с массой, близкой к массе протона.

Жолио-Кюри впоследствии говорил:

> «Большинство физиков, в том числе и мы, не обратили внимания на гипотезу Резерфорда. Но она все еще блуждала под сводами здания лаборатории Кавендиша, где работал Чедвик, и вполне естественно и справедливо, что последняя точка в открытии нейтрона была поставлена именно здесь. Идеи, высказанные когда-то нашими учителями — как живущими, так и ушедшими от нас, — много раз вспоминаются и забываются в их лабораториях, сознательно или подсознательно проникая в мысли тех, кто постоянно там присутствует. Постепенно идеи созревают: тогда совершается открытие».

О том, в каких экспериментах был обнаружен нейтрон и почему он оказался вполне «самостоятельной» частицей, а не просто объединением протона и электрона, можно прочитать в статье Л. Тарасова «Открытие нейтрона», которая была опубликована в «Кванте» № 5 за 1979 год. Нам же осталось отметить, что в 1935 году Джеймс Чедвик стал лауреатом Нобелевской премии по физике, а доказательство существования нейтрона сразу привлекло всеобщее внимание. Стало ясно, что ядра состоят из нейтронов и протонов и что эти частицы должны быть объединены новым, еще неизвестным видом сил. Так родилось понятие о «ядерном» или «сильном» взаимодействии.

Исполнилось и предсказание Резерфорда о том, что нейтрон станет для исследователей прекрасным инструментом, проникающим в глубь ядер. Во многих лабораториях мира стали обстреливать вещество нейтронами и получили интереснейшие результаты.

Нарушим немного хронологию и перейдем теперь к открытию другой частицы. Среди уже известных элементарных частиц — фотона (квант электромагнитного излучения), электрона, протона, весьма призрачного (но уже предсказанного) нейтрино и, наконец, нейтрона — возник еще один удивительный феномен.

О «случайных» открытиях

Часто говорят, что позитрон обнаружили случайно. Писать так стало почти традиционным. Действительно, Карл Андерсон, который и совершил это открытие, проводил эксперименты, «цель которых состояла в измерении энергетического спектра электронов, образующихся в атмосфере и в материалах благодаря приходящему из космоса излучению». Ни о каких позитронах речь не шла.

Однако любое физическое открытие, как бы оригинально и неожиданно оно ни было, всегда только звено в бесконечной цепочке успехов и ошибок науки. И примером тому как раз может служить обнаружение позитрона. Мы расскажем только о некоторых звеньях цепочки, приведших к цели.

О первых исследованиях космических лучей.

О приборе, с помощью которого было сделано открытие.

О работах советского физика Д. В. Скобельцына.

И конечно же, о предсказании существования позитрона — ведь 1932 год — год исполняющихся предсказаний!

Космические лучи (1901—1927)

Всем, наверное, знаком школьный прибор — электроскоп. Если его зарядить, то листочки со временем опадают, и это происходит, как бы хорошо ни была изолирована подставка и каким бы герметичным ни был кожух. Напрашивается естественный вывод, что в воздухе среди нейтральных молекул всегда присутствуют носители заряда — ионы. Воздух хоть и плохо, но проводит электрический ток, и поэтому электроскоп разряжается. Каково происхождение этих ионов? Попытка ответить на этот вопрос сыграла важную роль в обнаружении космического излучения.

В начале нашего века, после открытия радиоактивности, положение, казалось, прояснилось. Ведь ничтожное количество радиоактивных элементов всегда присутствует в почве, в стенах здания, в материалах установок, и наконец, в самих экспериментаторах. В атмосферу попадают радиоактивные газы (правда, они быстро распадаются). Это идущее отовсюду излучение «разбивает» молекулы и приводит к ионизации воздуха.

Экспериментальная техника улучшалась, на смену относительно простым приборам пришли сложные — электрометры, которые могли уловить присутствие даже нескольких десятков ионов в кубическом сантиметре воздуха. Чтобы еще больше увеличить чувствительность электрометров и избавиться от внешнего фона, их окружали слоем свинца, поглощавшим внешнее излучение, и выдерживали несколько суток, чтобы внутри прибора распались радиоактивные газы. И тем не менее ток разрядки шел. Была высказана гипотеза, что через свинец проникает энергичное излучение земных пород. А поскольку начало нашего века ознаменовалось удивительными успехами в воздухоплавании, то почему бы не подняться над поверхностью Земли и тем самым удалиться от ее излучения? Так и было сделано. Сначала пытались использовать Эйфелеву башню (300 м), затем, в 1909-10 годах К. Геккель поднялся на воздушном шаре на высоту около 4 км. Наиболее точные измерения в то время провел В. Гесс. Согласно его данным, ток разрядки вначале уменьшался, а затем быстро возрастал; на высоте 5 км он был уже в три раза больше, чем у поверхности Земли. Гесс высказал предположение, что существует проникающее ионизирующее излучение, идущее сверху и ослабляемое атмосферой.

В 1922—26 годах работы, которые велись группой американских физиков под руководством Р. Милликена на воздушных шарах-зондах (они поднимались до 5 км), в горных местностях, под водой, позволили с точностью установить, что на Землю из мирового пространства падает неизвестное излучение. Милликен назвал его космическим. Для того чтобы понять природу этого излучения, ионизационный метод уже не годился — он регистрировал только следствие (ионизацию), которое могло быть вызвано самыми разными причинами. Чтобы продвинуться дальше в изучении космических лучей, физикам понадобился «самый оригинальный и удивительный инструмент» (это — слова Резерфорда), существовавший в то время для регистрации частиц — туманная камера Вильсона

Камера Вильсона (1911—1912)

Поток влажного воздуха, нагретого землей, поднимается вверх. В более высоких слоях атмосферы воздушные массы расширяются и одновременно охлаждаются. Теперь водяной пар находится в пересыщенном состоянии и начинает конденсироваться, собираться в капли влаги. Мы говорим: «небо затянулось пеленой тумана». Процесс роста капель в пересыщенном паре оказался не простым. Так, ученые выяснили, что для образования тумана необходимы центры конденсации, иначе пар может значительное время оставаться пересыщенным. Чаще всего центрами конденсации становятся мелкие частицы пыли.

Этими вопросами занимался и английский физик Чарльз Вильсон. Именно он открыл, что центрами конденсации пара могут стать ионы, образовавшиеся при облучении пересыщенного пара рентгеновскими лучами или радиацией других видов (α, β, γ). Со свойственным ему упорством и огромным экспериментальным искусством (а Вильсон славился тем, что почти всю аппаратуру делал сам), проработав над этой темой много лет, ученый создал новый прибор для регистрации частиц. Он назвал его «туманной камерой», но очень скоро экспериментаторы переименовали его в «камеру Вильсона».

Опишем теперь в самых общих чертах принцип работы камеры Вильсона. Объем, наполненный парами жидкости (вода, спирт и т. п.), с помощью поршня или диафрагмы резко увеличивается. Пар, тщательно очищенный от пыли, некоторое время ($0,1 \div 1$ с) находится в пересыщенном состоянии и не конденсируется. Если в этот момент через объем пролетает частица, ионизирующая молекулы пара, то на образовавшихся ионах начинают возникать капли воды. След частицы становится видимым и может быть сфотографирован. Для этого стенка камеры делается прозрачной. За счет теплопроводности стенок температура пара довольно быстро повышается, след исчезает, и иногда всю камеру заполняет туман. Надо опять готовить прибор к работе, и подготовка требует уже десятков секунд. В этом и состоит главный недостаток прибора — у него, как говорят физики, «большое мертвое время». (Внешне простой принцип работы туманной камеры (его описание есть даже в школьных учебниках) не дает ни малейшего представления о тех физических и технических трудностях, которые возникали при ее изготовлении и наладке.) Но прежде чем более совершенные установки вытеснили «туманную камеру», прошли десятки лет, и с ее помощью были сделаны выдающиеся открытия. Поэтому Чарльз Томсон Рис Вильсон «за метод делать видимыми пути заряженных частиц с помощью конденсации пара» получил в 1927 году Нобелевскую премию по физике.

Итак, у физиков появилась возможность наблюдать частицы и определять многие их характеристики. Вот на снимке (рис. 1) «жирный след» α-частицы, и слева — прерывистый след из редких капель, образованных быстрым электроном. Разницу легко объяснить, если воспользоваться приближенной формулой для числа ионов N, образующихся на пути длиной в 1 см:

$$N \sim Z^2/v^2, \qquad (1)$$

где Z — заряд частицы, v — ее скорость ($[v] =$ см/с). Электрон с энергией 5 МэВ движется практически со скоростью света, а α-частица с той же энергией — в 20 раз медленнее. Кроме того, она имеет в 2 раза больший заряд.

Рис. 1. Следы электрона и α-частицы в камере Вильсона.

Но по снимкам нельзя измерить энергию быстрых электронов или определить знак заряда частицы. След протона, летящего со скоростью $v \approx c$, выглядит так же, как и след быстрого электрона (хотя при одной и той же скорости энергия протона должна быть в 2000 раз больше, чем энергия электрона).

«Ультра β-лучи» Скобельцына (1923—1929)

Молодой ленинградский физик Дмитрий Скобельцын решил использовать камеру Вильсона для фотографирования электронов отдачи, которые появлялись в газе при облучении его гамма-лучами. Это явление называется комптон-эффект — по имени открывшего его английского физика Артура Комптона. По словам самого Комптона, оно напоминает игру на бильярде, когда шарик (γ-квант) сталкивается с другим шариком (электроном), отдавая ему часть энергии и импульса.

Чтобы измерять импульсы электронов p (и их энергию), Скобельцын поместил камеру в магнитное поле. Из школьного курса известно, что частица с зарядом q, влетающая со скоростью $\vec{v}$ (импульсом $\vec{p}$) в поле с индукцией $\vec{B}$ так, что, $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\vec{p} \perp \vec{B}$), движется по окружности с радиусом

$$R = \frac{p}{qB}. \qquad (2)$$

Измеряя кривизну траектории электронов на фотографиях, можно найти их импульс. Мы сейчас не будем останавливаться на исследованиях комптон-эффекта, которые сами по себе дали исключительно интересные результаты, а вспомним о космическом излучении.

Вот что писал Д. В. Скобельцын:

> «...на снимках обнаруживались время от времени прямые пути частиц неизвестного происхождения, почти не отклоняемые магнитным полем, но по своему ионизирующему действию не отличающиеся сколько-нибудь от быстрых β-лучей, фотографии которых имеются на тех же снимках. Дальнейшие наблюдения, результаты которых были опубликованы в 1925 году, позволили установить, что появление путей таких «ультра β-лучей» отнюдь не связано с прохождением через камеру Вильсона γ-лучей, что налицо поток частиц, пронизывающих атмосферу».

Частиц такой большой энергии, что они практически не отклонялись в относительно слабом поле камеры.

Скобельцын доказал, что ионизация, создаваемая космическим излучением, может быть объяснена «ультра β-частицами».

На ряде снимков Скобельцына был виден целый поток быстрых частиц. Их назвали космическими ливнями.

Итак, звенья цепочки, ведущей к позитрону, собраны:

1. Открыты космические лучи.
2. Создан прибор — камера Вильсона, помещенная в магнитное поле.
3. Этот прибор позволил доказать, что в состав космического излучения входят заряженные частицы.

Вот только поле пока еще было мало и не отклоняло «ультра β-лучи».

Открытие позитрона

Мы уже упоминали имя Роберта Эндрюса Милликена. Это был выдающийся физик, получивший в 1923 году Нобелевскую премию «за работы по изучению элементарного заряда электричества и фотоэлектрического эффекта». По воспоминаниям друзей, он сочетал в себе (кроме многих других исключительных черт) два качества, которые трудно было не заметить: разговорчивость, во много раз превышающую среднюю норму, и выдающуюся физическую интуицию. Сыграло ли первое какую-нибудь роль для открытия позитрона — осталось неизвестным. Но второе оказалось решающим. Узнав об опытах Скобельцына, Милликен сразу же поручил одному из своих сотрудников — Карлу Андерсону — начать исследования космического излучения с помощью камеры Вильсона, но уже помещенной в значительно более сильное, чем в опытах Скобельцына, магнитное поле. Это потребовало и экспериментального искусства, и исключительных для того времени технических средств.

И вот получены фотографии, на которых видны искривленные траектории космических частиц. Рисунок 2 сделан с такой фотографии. Плотность ионизации, радиус кривизны траектории — все говорило о том, что следы *I* и *II* принадлежат электронам. Но как объяснить появ-

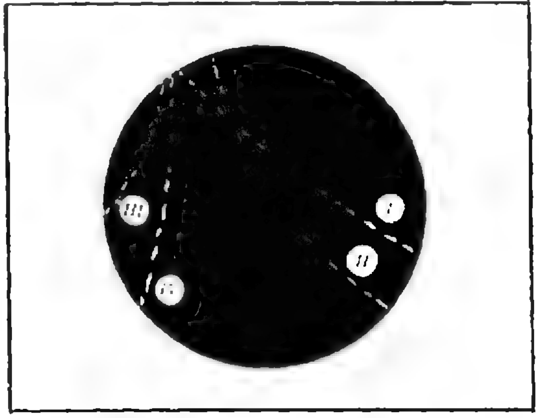


Рис. 2. Следы электронов (*I, II*) и позитронов (*III, IV*) в камере Вильсона. (Магнитное поле направлено на нас.)

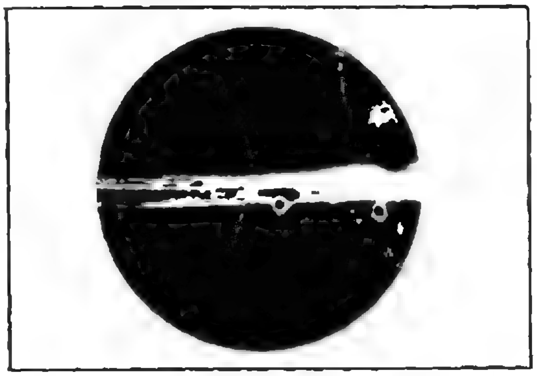


Рис. 3. Фотография следа позитрона в камере Вильсона (светлая горизонтальная полоса — свинцовая пластинка).

К. Андерсон около своей установки.

ление следов III и IV с «неправильной» кривизной? На фотографиях их было приблизительно столько же, сколько и электронных.

Первое предположение, и весьма естественное, заключалось в том, что это следы протонов. Другой знак заряда — другой знак кривизны траектории. Но исследование фотографий привело к выводу, что ионизирующая способность у положительных частиц практически та же, что у электронов. Если предположить, что это протоны, то скорость их должна быть столь же велика, что и скорость электронов (см. (1)), то есть $\sim c$; импульс же таких протонов — в 10^3 раз больше импульса электронов, и следовательно, радиусы кривизны их траекторий-следов в магнитном поле должны быть в тысячу раз больше, чем у электронов (см (2)).

Вывод один — не протоны.

Второе предположение заключалось в том, что «неправильные частицы» — электроны, но летящие в противоположном направлении. Тогда и траектория у них будет иметь противоположную кривизну. Чтобы проверить это предположение, Андерсон придумал остроумный опыт. Он поместил посередине камеры свинцовую пластину. Проходя через нее, частица теряет энергию, замедляется и магнитное поле сильнее искривляет ее траекторию. По фотографии (рис. 3) можно определить направление движения частицы, а зная, что поле направлено «от нас», убедиться, что она имеет положительный заряд.

И вот в 1932 году Андерсон пришел к выводу, что новые частицы — не что иное как «положительные электроны» с массой m_e и зарядом e^+. Сначала это предположение было высказано довольно робко. Но вскоре оно было убедительно подтверждено в экспериментах самого Андерсона, а также Блэкетта и Оккиалини. Кроме того, эти ученые показали, что появление позитронов в камере связано с ливнями космического излучения.

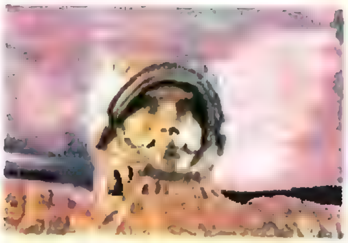
Самым поразительным в этой истории было даже не открытие новой частицы, хотя в физике, особенно в то время, это было событием первостепенной важности. Поразительным было то, что обнаружилась частица, предсказанная в 1931 году, в существование которой никто не верил — слишком необычным было это предсказание. Но об этом — в следующем номере журнала.

Литература

1. Л. Тарасов. Открытие нейтрона. «Квант», 1979, № 5.
2. Д. Юз. История нейтрона. М., Атомиздат, 1964.
3. Нейтрон. Предыстория, открытие, последствия. М., «Наука», 1975.
4. И. Дорман. Космические лучи. М., «Наука», 1981.

Только у нас!

В кунсткамеру «Кванта» поступила знаменитая свеча, являвшаяся эталоном единицы силы света до 1967 года (когда она была заменена канделой) и хранившаяся в платиновом цилиндре близ Парижа. Платиновый цилиндр нам пока не прислали.



НА ОРБИТЕ – НОВЫЙ МУЗЕЙ

В 1981 году, в канун 20-летия полета Юрия Гагарина, в Москве, рядом со станцией метро «ВДНХ», в цоколе обелиска Героям космоса, открылся мемориальный музей космонавтики. Его экспонатами стали образцы космической техники, оригиналы документов, в которых отражен путь нашей страны к высотам космоса, личные вещи космонавтов. Рассказ чуть ли не о каждом экспонате можно начать со слов «первый», «впервые». Но эти слова во многом относятся и к самому музею.

В нем впервые в практике музейного дела в таком всеобъемлющем виде используется звук, освещение, оптические эффекты, проекционная аппаратура, новейшие конструкции. Цель, которая при этом преследуется, — человек, пришедший сюда, должен пережить максимально возможное «погружение» в космос на земле.

Уже в вестибюле в витринах, напоминающих скафандры, посетителей встречают документы, памятные медали и другие реликвии, отмечающие основные этапы в развитии советской космонавтики. Затем, через оригинальный «шлюз», посетители попадают в главный зал, который напоминает внутреннюю часть космического корабля. В глубине зала находится монументальная композиция, которая состоит из витража, излучающего «космическое» сине-голубое сияние, полупрозрачной сферы «Знаки зодиака», олицетворяющей наши прошлые представления о Вселенной, и скульптуры космонавта (часть этой композиции воспроизведена на первой странице нашей обложки).

Витрин в музее мало. Проходя вдоль зала, посетители видят экспонаты как бы через иллюминаторы космического корабля. Зеркальные проемы из нержавеющей стали создают иллюзию «невесомости», в которой находятся демонстрируемые образцы космической техники. Голубая светящаяся лента отделяет экспозицию от зрителей. Акустическая и телевизионная аппаратура позволяют вести красочный рассказ о буднях и праздниках нашей космонавтики.

Знакомство с музеем завершается в кинозале. Над полупрозрачным зеркальным экраном парит семиметровая модель планетоплана с солнечной батареей. Поверхность стен зала выполнена в виде рельефа с цветодинамической системой освещения.

В этом зале с помощью новейших средств лазерной, электронной и полиэкранной техники зрителю показывается художественная композиция, отражающая гуманистические идеалы человека в освоении космического пространства. В течение 20 минут посетители совершают путешествие в прошлое, настоящее и будущее космических исследований.

В создании экспозиции музея участвовали художники, скульпторы, архитекторы, конструкторы: О. Ломако (главный художник), Г. Шульц, Н. Ломако, Ж. Канканян, Н. Рудько, И. Казанский. Научное руководство по созданию музея осуществляла З. Кострикина.

В. Колейчук

Кинозал

Общий вид экспозиционного зала музея

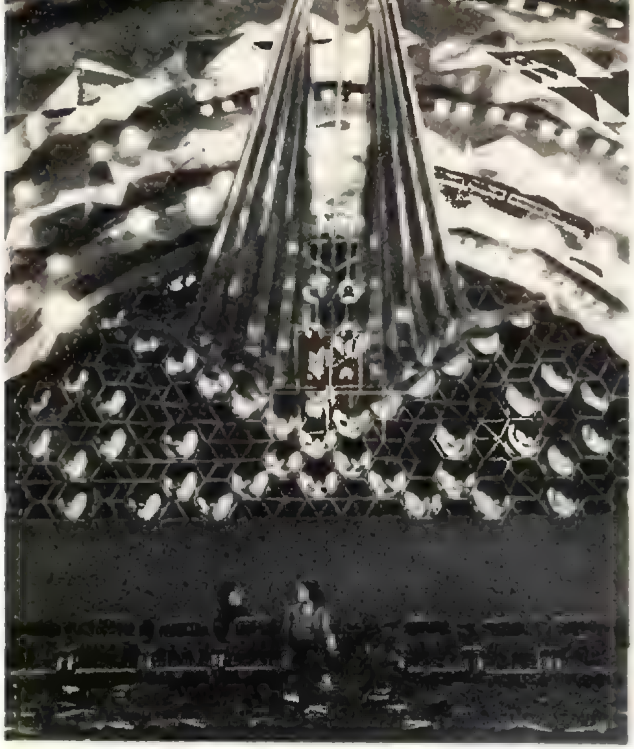
Скульптурная композиция «Знаки зодиака»

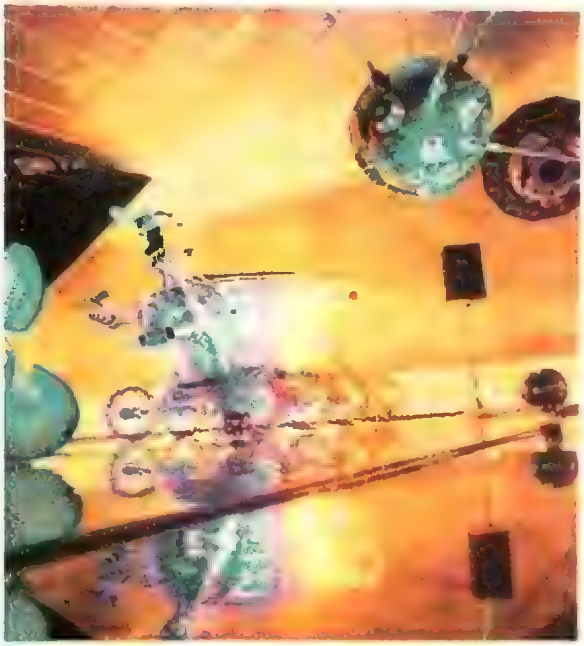
Скафандр космонавта и спускаемый аппарат

Луноход и первый искусственный спутник

Личные вещи первого в мире космонавта Ю. А. Гагарина

Фото Г. Макарычева





В. Фабрикант

Можно ли услышать рев мамонта?

> *Я обязан высшим духовным вдохновением сочинениям Гете, Фауст которого является, быть может, величайшим художественным произведением, Шекспиру и др., но лишь благодаря Шиллеру, я стал собой. Без него я был бы человеком с тем же носом и бородою, но я никогда бы не был собой.*
>
> *Л. Больцман*

Довольно давно мой бывший студент И. А. Полетаев, ставший крупным специалистом в области кибернетики, опубликовал, из озорства, статью, в которой противопоставил физику лирике. В этой статье он доказывал, что время лирики прошло и настало время монополии физики. К его удивлению, статья была принята всерьез и вызвала целую бурю. Насколько были уязвлены поэты, можно судить по задорному стихотворению Ильи Сельвинского «Физики и лирики», написанному явно в отместку физикам:

Да, брат, физики в почете,
Им теперь и черт не брат:
Будто демоны в полете
О Венере говорят.
Но Венера, дура баба,
Их не жалует. Отнюдь.
Поглядишь, поэтик слабый
С нею скрещивает путь.
Вон несется астрофизик
На свиданье под часы.
Треплет ветер... Дождик высек...
«Петухов» дают басы.
Но глядит, глядит, глядит он
На заветное окно,
А Венера с троглодитом
Уж давно сидит в кино.

Вывод

Электроном опаленный,
Открывает физик новь!
Рвется к лире Аполлона
Старомодная любовь.

Такой остроумный писатель, как И. Г. Эренбург, в беседе с И. А. Полетаевым старался привести убедительные аргументы, опровергающие основной вывод его статьи. Как говорил Полетаев, для него главное было не рассмеяться во время этой беседы.

Вряд ли следует подчеркивать, что физики с полным уважением относятся к лирике. Академик Л. И. Мандельштам знал почти всю поэзию своего любимца Пушкина наизусть. Его друг академик Н. Д. Папалекси выше всех поэтов ставил Лермонтова. (Насколько я знаю, это был единственный пункт разногласий между друзьями.) Академик Г. С. Ландсберг, сидя часами в абсолютно темной спектроскопической лаборатории, подряд декламировал всего «Евгения Онегина». Академик С. И. Вавилов даже на фронте не расставался с гетевским «Фаустом». В его книге «Глаз и Солнце» много искусно подобранных поэтических цитат. Он критиковал качество стихотворного перевода поэмы «О природе вещей» с латинского на русский язык.

Поэты, в свою очередь, проявляли и проявляют интерес к физике. Вот об этом-то и пойдет речь в настоящей заметке. Поэты не всегда в ладах с физикой, но, критикуя их, следует помнить притчу Пушкина «Сапожник», где сказано Критику: «Суди, дружок, не свыше сапога!»

Вначале мы напомним стихи, посвященные относительности движения.

Прежде всего — шутливое стихотворение М. В. Ломоносова:

Случились вместе два Астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.
Один твердил: Земля, вертясь, круг Солнца ходит;
Другой, что Солнце все с собой планеты водит:
Один Копéрник был, другой слыл Птоломей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.

Хозяин спрашивал: «Ты звезд теченье знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?»
Он дал такой ответ: «Что в том Коперник прав,
Я правду докажу, на Солнце не бывав,
Кто видел простака из поваров такова,
Который бы вертел очаг вокруг жаркова?»

Пушкин, как всегда, поразительно точен и тонок в известном стихотворении «Движение». Вдумайтесь еще раз в содержание пушкинского шедевра:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однакож прав упрямец Галилей.

Поэт Евгений Винокуров, вероятно считая, что Пушкин не исчерпал тему, написал стихотворение «Очевидности»:

Меня со всех сторон
окружили очевидности.
— Это же очевидно, — я слышал,
как восклицают то тут, то там...
Я не верю, что земля
стоит на месте,
а солнце всходит,
хотя и убеждаюсь в этом
всякий раз —
стоит лишь мне
выглянуть в окно.

Поэтов, естественно, поражает конечность величины скорости света и эффекты, с этим связанные. Фет в стихотворении «Угасшим звездам» пишет:

Может быть, нет вас под теми
огнями:
Давняя вас погасила эпоха,—
Так и по смерти лететь к вам
стихами,
К призракам звезд, буду призраком
вздоха!

Иначе обыгрывает ту же тему Степан Щипачев в стихотворении «Свет звезды»:

Вечерний свет звезды
Мерцает в вышине.
Задумались сады,
И стало грустно мне.
Он здесь, в моем окне,
Звезды далекой свет,
Хотя бежал ко мне
Сто сорок тысяч лет.
А вам езды-то час,
И долго ли собраться!
А нет, чтоб догадаться
Приехать вот сейчас.

(Окончание см. на с. 24)

М. Людомирский,
А. Панфилов

Почему висит кольцо?

«Почему повисает алюминиевое кольцо, свободно надетое на незамкнутый сердечник трансформатора?» — такой вопрос был предложен участникам III Московского турнира юных физиков. Наверное, любой девятиклассник, не задумываясь, ответил бы примерно следующее: «В кольце индуцируются токи, которые взаимодействуют с внешним магнитным полем. Согласно правилу Ленца, индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим действием мешать причине, его породившей. В данном случае индукционные токи имеют такое направление, что сила Ампера как бы отталкивает кольцо от катушки трансформатора. В некотором положении эта сила уравновешивает силу тяжести кольца, и оно повисает в воздухе».

В том, что такое поведение кольца обусловлено именно индукционными токами, убедиться нетрудно. Для этого достаточно просто разрезать кольцо поперек — оно не будет висеть ни при каких условиях. Однако в приведенном объяснении есть два момента, на которые мы хотели бы обратить внимание. Во-первых, не ясно, какое именно сопротивление кольца — активное или индуктивное — играет решающую роль. Во-вторых, требует объяснения существование лишь одного положения равновесия кольца. Попытаемся разобраться в этих вопросах.

1. Покажем, что эффекта повисания кольца не было бы, если бы кольцо обладало только активным сопротивлением. Проведем некоторые вычисления.

Сила Ампера, действующая на тонкое кольцо длиной l, по которому течет ток I, равна

$$F = B_г I l,$$

где $B_г$ — горизонтальная проекция вектора магнитной индукции внешнего поля (рис. 1). Индукционный ток I определяется законом Ома:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Здесь $\mathscr{E}$ — электродвижущая сила индукции, R — активное сопротивление кольца. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с противоположным знаком:

$$\mathscr{E} = -\Phi' = -(B_в S)'$$

($B_в$ — вертикальная проекция вектора магнитной индукции, S — площадь, ограниченная кольцом). Пусть магнитное поле изменяется по гармоническому закону с частотой ω, тогда

$$B_г = B_{гм} \cos\omega t,$$
$$B_в = B_{вм} \cos\omega t,$$
$$\mathscr{E} = -(B_в S)' = B_{вм} S\omega \sin\omega t.$$
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{B_{вм} S\omega}{R} \sin\omega t,$$

и

$$F = B_г I l = \frac{B_{гм} B_{вм} S\omega t}{2R} \sin 2\omega t,$$

где $B_{гм}$ и $B_{вм}$ — максимальные значения горизонтальной и вертикальной проекций вектора индукции.

Так как среднее за период значение синуса равно нулю, среднее значение сила Ампера тоже равно нулю. Следовательно, кольцо висеть не сможет.

Это противоречие устраняется, если предположить, что кольцо обладает не только активным, но и ин-

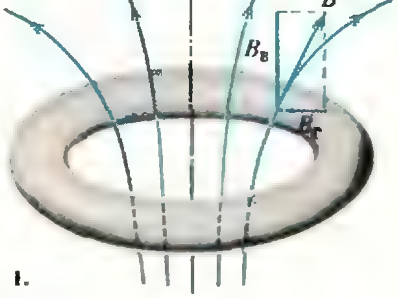


Рис. 1.

дуктивным сопротивлением тоже, которое и играет первостепенную роль. В таком случае ток в кольце будет изменяться со сдвигом по фазе относительно ЭДС, и для мгновенного значения силы Ампера получится другое выражение:

$$I = \frac{B_{\text{вм}} S\omega}{Z} \sin(\omega t + \varphi),$$

и

$$F = B_{\text{г}} I l = \frac{B_{\text{гм}} B_{\text{вм}} S\omega l}{Z} \cos\omega t \times$$

$$\times \sin(\omega t + \varphi) = \frac{B_{\text{гм}} B_{\text{вм}} S\omega l}{2Z} \times$$

$$\times (\sin(2\omega t + \varphi) + \sin\varphi)$$

(здесь Z — полное сопротивление кольца, φ — сдвиг по фазе между током и электродвижущей силой). Среднее значение силы за период будет равно

$$F_{\text{ср}} = \frac{B_{\text{гм}} B_{\text{вм}} S\omega l}{2Z} \sin\varphi,$$

что, безусловно, не равно нулю.

В наших опытах использовались кольца, изготовленные из нескольких слоев алюминиевой фольги общей толщиной около 1 мм. Внутренний радиус колец был равен 15 мм, а внешний — 30 мм. По оценкам на частоте 50 Гц активное сопротивление таких колец составляло миллиомы, а индуктивное — десятки миллиом. При таких параметрах сила Ампера получалась порядка 10^{-2} Н, что вполне достаточно для удержания кольца массой в несколько граммов. Это и наблюдалось на опыте.

2. Почему же кольцо находится в равновесии только в одном положении, на одной определенной высоте? Ответ на этот вопрос мы получили из опыта.

В выражение для силы Ампера входят амплитудные значения вертикальной и горизонтальной проекций вектора магнитной индукции. Необходимо было выяснить, как эти значения изменяются с высотой.

Мы работали на установке, фотография которой представлена на рисунке 2. В катушку (ее внутренний радиус 10 мм, радиус щек 40 мм, высота 70 мм) с обмоткой из медного эмалированного провода (диаметром 1,2 мм) вставлен цилиндрический сердечник, набранный из железных стержней (длиной 200 мм, диаметром 2 мм). На катушку подавалось напряжение (100—120 В) от лабораторного автотрансформатора. Нам удалось измерить вертикальную и горизонтальную проекции магнитного поля в непосредственной близости от сердечника на различных расстояниях от катушки. В качестве датчика мы использовали катушку (из 300 витков медного эмалированного провода диаметром 0,2 мм), в которой наводилась ЭДС индукции. Для измерения этой ЭДС катушка подключалась ко входу осциллографа.

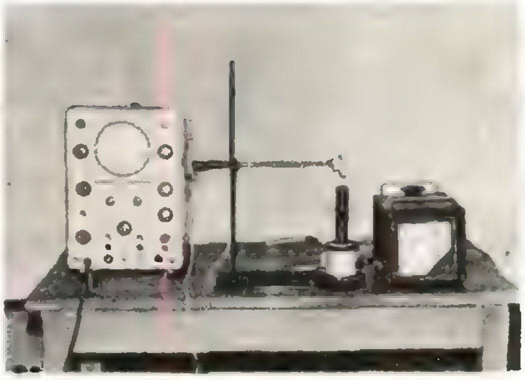


Рис. 2.

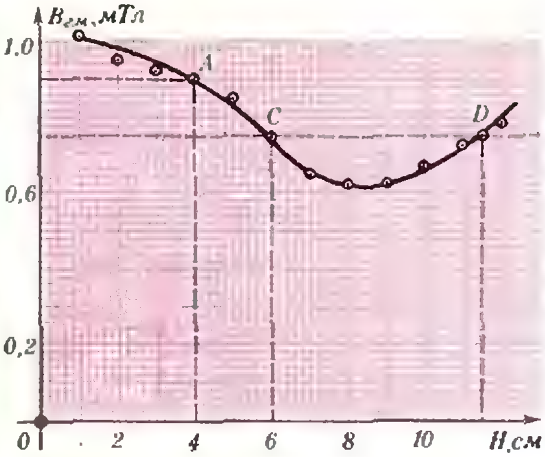


Рис. 3.

Оказалось, что вертикальная проекция вектора магнитной индукции практически не меняется с высотой, а горизонтальная проекция изменяется так, как показано на рисунке 3. Здесь по оси абсцисс отложена высота H над катушкой (измеренная в сантиметрах), а по оси ординат — амплитудное значение $B_{\text{гм}}$ горизонтальной проекции магнитного поля (в миллитесла). Полученный график и позволяет объяснить существование единственного положения устойчивого равновесия кольца.

Пусть кольцо имеет такую массу, что для компенсации силы тяжести, действующей на кольцо, необходима горизонтальная проекция поля, равная приблизительно 0,9 мТл. На графике лишь одна точка *A* соответствует этому значению; значит, кольцо повиснет на высоте 4 см над катушкой. Это положение равновесия устойчиво, так как при случайном опускании кольца оно попадет в более сильное магнитное поле, сила Ампера увеличится и поднимет кольцо до прежней высоты.

А что, если для равновесия кольца потребуется горизонтальная проекция, равная приблизительно 0,75 мТл? Этому значению соответствуют две точки на графике — *C* и *D*. Однако и в этом случае устойчивое равновесие только одно — в точке *C*, то есть на высоте 6 см над катушкой. А в точке *D* равновесие — неустойчивое. Действительно, если кольцо опустится чуть ниже высоты 11,5 см, сила Ампера уменьшится и не сможет уравновесить силу тяжести; следовательно, кольцо опустится еще ниже (до точки *C*).

Заметим, что опытным путем положение неустойчивого равновесия обнаружить довольно трудно. Это связано с наличием различных внешних воздействий, выводящих кольцо из этого положения.

Можно ли услышать рев мамонта?

(Начало см. на с. 20)

Леонид Мартынов, поэт, внимательно следивший за развитием физической науки, в такой форме отобразил соотношение скоростей звука и света:

Это почти неподвижности мука.
Мчаться куда-то со скоростью звука,
Зная прекрасно, что есть уже где-то
Некто,
Летящий
Со скоростью
Света!

А вот стихотворение Михаила Светлова «Голоса», наталкивающее на мысль, что человек со временем, благодаря космическим полетам, сможет услышать голоса ранее живших людей и животных:

. . . .

И возможно, что за небосклоном
Он живет среди звездных миров —
Не записанный магнитофоном
Околевшего мамонта рев.
Мы — живущие вместе на свете —
Разгадали не все чудеса.
И бредут от планеты к планете
Крепостных мужиков голоса.
И быть может, на всех небосклонах
Повторяется снова сейчас
Несмолкающий шепот влюбленных
И густой Маяковского бас.

Пусть звезда не одна раскололась,
Но понятный и вечно живой
С хрипотцой Циолковского голос
Не замолк на волне звуковой.
С детства не был силен я в науке;
Не вступая с учеными в спор,
Я простер постаревшие руки
В нестареющий синий простор.

. . . .

Небо полнится голосами
Тех, кто жил и любил на Земле.

Если Светлов прав, то нетрудно рассчитать, с какой сверхзвуковой скоростью должен удаляться космонавт от Земли, чтобы, скажем, за десять лет полета догнать ушедший в космос рев мамонтов. Как известно, мамонты исчезли примерно десять тысяч лет назад.

Дорогой читатель, сделай прикидку и оцени трудности запуска ракеты, летящей с соответствующей скоростью.

К сожалению, самокритика поэта, имеющаяся в данном стихотворении, не лишена оснований. Помня о пушкинской притче, не будем строги к поэту, но, все же, в чем основная физическая ошибка Светлова? Ответ на вопрос настолько прост, что не стоит присылать его к нам в журнал. Подумайте о том, насколько усложнилась бы жизнь на Земле, если бы Светлов был прав.

задачник кванта

Задачи

M736—M740; Ф748—Ф752

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M736, M737» или «Ф748». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M736. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите равенство

$$\frac{|PC|}{|PL|}-\frac{|AC|}{|BC|}=1.$$

З. Анджапаридзе

M737. Обозначим через d_k количество таких домов в вашем городе, в которых живет не меньше k жителей ($d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \ldots$), и через c_m — количество жителей в m-м по величине населения доме ($c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 \geqslant \ldots$). Докажите равенства

а) $c_1+c_2+c_3+\ldots=d_1+d_2+d_3+\ldots$;

б) $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\ldots=d_1+3d_2+5d_3+\ldots+(2k-1)d_k+\ldots$

$d_1^2+d_2^2+d_3^2+\ldots=c_1+3c_2+5c_3+\ldots$

$\ldots+(2m-1)c_m+\ldots$,

А. Зелевинский

M738*. Докажите, что а) количество прямых различных направлений, на которые данный n-угольник дает одинаковые по величине проекции, не превосходит $2n$; б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника четно; в) для треугольника это число больше 3 тогда и только тогда, когда он остроугольный.

В. Прасолов

M739. Докажите, что при любом значении x, для которого правая часть имеет смысл, выполнены равенства

а) $$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=3;$$

б) $$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}=c_n,$$

где n — нечетное число, c_n — константа (зависящая от n).

в)* Найдите c_n для каждого нечетного $n=5, 7, \ldots$.

В. Алексеев

M740. Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю

Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — отвечала соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа — и зажми ее пальцем! До этого уровня и надо налить воду» (рис. 1). — «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — гордо ответила тетя Люда.

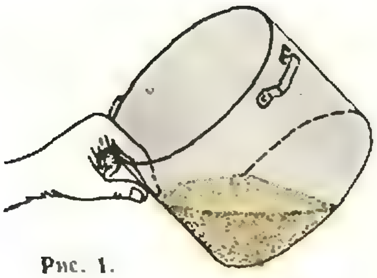


Рис. 1.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту всегда получится одинаковым.

б) Чему равно это отношение?

В. Семенова

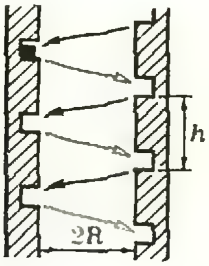


Рис. 2.

Ф748. По винтообразному желобу с прямоугольным профилем, вырезанному на внутренней поверхности бесконечного длинного полого цилиндра, скользит маленький кубик (рис. 2). Радиус основания цилиндра равен R, шаг винта — h, коэффициент трения скольжения — μ. Найти установившуюся скорость движения кубика. (Размер кубика и глубина желоба много меньше R.)

Р. Энфиаджян

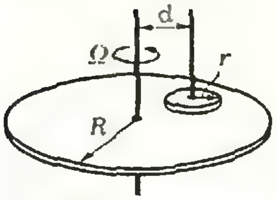


Рис. 3.

Ф749. Массивный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. На него сверху опускают диск радиуса r массы m, ось которого направлена строго вертикально (рис. 3). Расстояние между осями дисков равно d $(d > r)$. Коэффициент трения между поверхностями дисков равен μ. Определить установившуюся угловую скорость малого диска. Какой момент сил необходимо приложить к оси большого диска, чтобы скорость его вращения оставалась неизменной? Трение в осях отсутствует.

С. Кротов

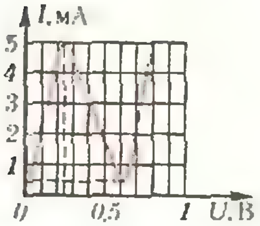


Рис. 4.

Ф750*. При изменении напряжения на элементе Э ток через него меняется так, как показано на рисунке 4. Как будет меняться со временем напряжение на элементе Э, если его включить в схему, приведенную на рисунке 5 (параметры схемы указаны на рисунке)? Какого минимального сопротивления резистор можно подключить параллельно элементу Э, чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным?

З. Рафаилов

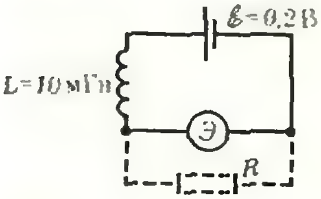


Рис. 5.

Ф751. На очень шероховатый цилиндр радиуса r, расположенный горизонтально, надет тонкий обруч радиуса R (рис. 6). Найти период колебаний обруча в вертикальной плоскости.

К. Сергеев

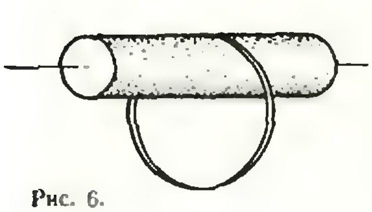


Рис. 6.

Ф752. На расстоянии $L_1 = 5$ м от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположена равномерно освещенная вертикаль-

ная плоскость *П* (рис. 7). Между линзой и плоскостью на расстоянии $L_2 = 1$ м от линзы расположена вертикально непрозрачная пластинка толщины $l = 5$ см, в которой проделано отверстие диаметра $d = 1$ см (центр отверстия находится на главной оптической оси линзы). Как будет выглядеть пятно на экране *Э*, помещенном в фокальной плоскости линзы справа от нее? (Внутренние стенки отверстия не отражают свет.)

А. Зильберман

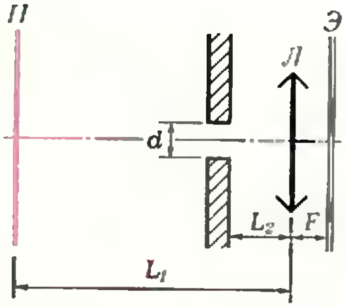


Рис. 7.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (•). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 30 th, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15, «ФИЗМАТЛИТ», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The List of prizewinners is published in the September issue.

Problems

M736—M740; P748—P752

M736. The median BK and the bissector CL of triangle ABC intersect at the point P. Prove that

$$\frac{|PC|}{|PL|} - \frac{|AC|}{|BC|} = 1$$

Z. Andjaparidze

M737. Denote by d_k the number of houses in our city in which no less than k people live ($d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$) and by c_m the m-th house (in decreasing order of the number of inhabitants, $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$). Prove the relations

a) $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$;

b) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \ldots + (2k-1)d_k + \ldots$

c) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots = c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \ldots + (2m-1)c_m + \ldots$

A. Zelevinski

M738*. Prove that a) the number of lines of different directions on which a given n-sided polygon gives projections of the same length is no greater than $2n$; b) the maximal number of such lines for any polygon is even; c) for a triangle, this number exceeds 3 if and only if all its angles are acute.

V. Prasolov

M739. Prove the following relations for any value of x such that the right-hand sides are defined

a) $$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} = 3;$$

b)* $$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = C_n.$$

where n is odd and C_n is a constant (depending on n).

c)* Find C_n for each odd $n = 5, 7, 9, \ldots$

V. Alexeev

M740. Serge poured some groats into a cylindrical pot and asked aunt Luda:

— How much water must I pour in to make tasty groat porridge?

— That's easy enough, the aunt answered, just incline the pot like this, knock on it so that the groats level out and cover exactly half the pot's bottom. Now put your finger on the pot's inner wall at the highest spot where the groats reach. That will be the level up to which water must be poured (see figure рис. 1).

— But I could have poured in a different amount of groats, and pots are wider or narrower, said Serge, expressing his doubts.

— No matter, said aunt Luda proudly, my recipe always works!

a) Prove that aunt Luda is right: the volume ratio of water and groats obtained by her recipe is constant.

b) Find this ratio.

V. Semionova

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

P748. A small cube slides along a heliocoidal trough with rectangular cross-section cut in the inner surface of a long hollow cylinder (see figure Рис. 2 p. 26). The radius of the cylinder is R. the step of the helicoid is h and the friction coefficient is μ. Find the steady-state speed of the cube. (The size of the cube and the depth of the trough are far smaller than R.)

R. Enfiadjan

P749. A massive disk rotates about its vertical axis with angular velocity Ω. Another disk (of mass m and radius r) whose axis is strictly vertical is lowered on the first one (see figure Рис. 3). The distance between the axes is d ($d>r$). The friction coefficient between the disks is μ. Determine the steady-state angular velocity of the small disk. What moment of force must be applied to the axis of the large disk for its angular velocity to remain constant? There is no friction in the axles.

S. Krotov

P750*. When the voltage on the element $Э$ varies, the current through it varies as shown on the figure Рис. 4. How will the voltage on the element $Э$ vary with time if it is in the circuit on figure Рис. 5, where the parameters of the circuit are indicated? What is the minimal resistance of a resistor parallel to the element $Э$ so that the voltage on it doesn't remain constant?

Z. Rafailov

P751. A thin hoop of radius R is put on a horizontal rough-surfaced cylinder of radius r (see figure Рис. 6). Find the oscillation period of the hoop in the vertical plane.

K. Sergeev

P752. A uniformely lighted vertical plane $П$ is placed at the distance $L_1=5$m from a thin convergent lens of focal distance $F=10$cm (see figure Рис. 7). A vertical opaque plate of thickness $l=5$ cm with an aperture of diameter $d=1$ cm is located between the plane and the lens at the distance $L_2=1$m from the latter, with the centre of the aperture on the optical axis of the lens. Describe the spot which appears on a screen placed in the focal plane of the lens to its right. (The inner walls of the aperture do not reflect light.)

A. Zilberman

Решения задач

М696—М700; Ф708—Ф712

М696. *Можно ли таблицу 10×10 клеток заполнить 100 различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата $k\times k$ клеток ($2<k<10$) а) суммы, б) произведения k чисел на его диагоналях были одинаковы?*

а) Ответ: можно. Назовем таблицу *подходящей*, если для любого квадрата $k\times k$ клеток ($2<k<10$) суммы k чисел на его диагоналях одинаковы.

Примером подходящей таблицы является таблица 1 (убедитесь в этом). Заметим теперь, что, если ко всем числам какой-либо строки подходящей таблицы прибавить одно и то же число, таблица останется подходящей.

В самом деле, если квадрат $k\times k$ не пересекается с измененной строкой, то суммы чисел на его диагоналях не меняются. В противном случае обе диагонали этого квадрата пересекаются с измененной строкой ровно по одной клетке, и суммы чисел, стоящих на его диагоналях, остаются равными.

Теперь легко построить таблицу, удовлетворяющую условию задачи. Для этого достаточно к строкам таблицы 1 добавить некоторые числа так, чтобы в результате все числа таблицы оказались различными. Например, первую строку оставляем неизменной, ко второй добавляем 10, к третьей 20, и так далее. Полученная таблица 2 удовлетворяет условию.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

б) Решается аналогично пункту а) (нужно только все числа a, стоящие в клетках таблиц 1, 2, заменить на числа 2^a).

А. Балинский

◆

М697. *Назовем пузатостью прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1.*

Будем считать, что длина стороны квадрата равна 1. Пусть $a_k \times b_k$ — размеры прямоугольников разбиения, причем $a_k > b_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Поскольку $a_k < 1$ при всех k,

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n} > a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = 1$$

(в правой части стоит площадь квадрата).

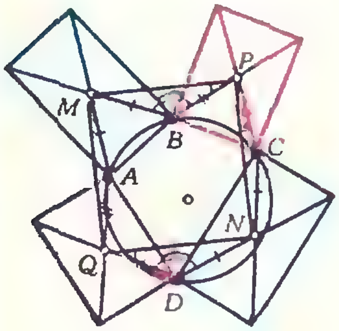
Отметим, что равенство в написанном неравенстве возможно лишь, если все $a_k = 1$ $(k = 1, 2, ..., n)$, то есть если квадрат разбит на полосы отрезками, параллельными его сторонам.

Интересно выяснить, какую оценку суммы пузатостей прямоугольников разбиения можно дать для данного прямоугольника площади 1 и пузатости k.

С. Фомин

◆

М698. *На сторонах a, b, c, d вписанного в окружность четырехугольника «наружу» построены прямоугольники размерами $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$, $d \times b$. Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами а) параллелограмма, б) прямоугольника.*



а) Пусть M, P, N, Q — центры прямоугольников, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок).

Поскольку в четырехугольнике, вписанном в окружность, суммы противоположных углов равны 180°, а прямоугольники, построенные на противоположных сторонах, конгруэнтны, то $\widehat{MBP} = \widehat{NDQ}$ и $\widehat{NCP} = \widehat{MAQ}$ (мы рассматриваем углы, меньшие 180°). Таким образом, $\triangle MBP \cong \triangle NDC$ и $\triangle NCP \cong \triangle MAQ$. Отсюда $|MP| = |NQ|$ и $|NP| = |MQ|$, а это означает, что четырехугольник $MPNQ$ — параллелограмм.

б) Можно считать, что сторона MQ параллелограмма видна из точки A изнутри параллелограмма, сторона PN видна из точки C снаружи и, аналогично, сторона MP видна из точки B изнутри, а сторона NQ из точки D видна снаружи. Тогда расположение всех отрезков и треугольников будет таким, как показано на рисунке.

Докажем, что $\widehat{MPN} + \widehat{NQM} = 180°$ (отсюда будет следовать, что $\widehat{MPN} = \widehat{NQM} = 90°$). Эта сумма, очевидно, равна $\widehat{BPC} + \widehat{DQA} = 180°$, поскольку $\widehat{BPM} = \widehat{DQN}$, а $\widehat{CPN} = \widehat{AQM}$.

О. Пенкин

◆

М699. *Полукруг с диаметром AB разрезан отрезком CD, перпендикулярным AB, на два криволинейных треугольника ACD и BCD, в которые вписа-*

а) Пусть O — центр данного полукруга. Будем считать, что $|AO| = 1$. Пусть, для определенности, точка C лежит между точками B и O и $|OC| = a$ (см. рисунок).

Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADC и ODC, получаем $|AD|^2 - |AC|^2 = |OD|^2 - |OC|^2$, то есть *ны окружности, касающиеся AB в точках E и F (см. рисунок). Докажите, что а) $|AD|=|AF|$, б) $|DF|$ — биссектриса угла BDC, в) величина угла EDF не зависит от выбора точки C и AB.*

$|AD|^2=|AC|^2+|OD|^2-|OC|^2$, или $|AD|^2=(1+a)^2+1-a^2=2+2a$.

Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник BDC, r — ее радиус. Из прямоугольного треугольника OO_1F находим $(1-r)^2=r^2+(a+r)^2$, или $(a+r)^2+2r=1$. Поскольку $|AF|^2=(1+a+r)^2=1+2a+2r+(a+r)^2=2+2a$, получаем $|AF|=|AD|$. (Аналогично доказывается $|BD|=|BE|$.)

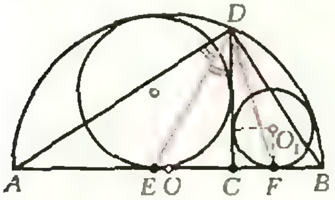
б) Треугольник ADF — равнобедренный, так что $\widehat{AFD}=\widehat{ADF}$. Далее, $\widehat{AFD}=\widehat{BDF}+\widehat{DBF}$, $\widehat{ADF}=\widehat{ADC}+\widehat{CDF}$ и $\widehat{ADC}=\widehat{DBF}$; поэтому $\widehat{CDF}=\widehat{BDF}$.

в) из решения пункта б) следует, что $\widehat{EDF}=\widehat{EDC}+\widehat{CDF}=\frac{1}{2}\widehat{ADB}=\frac{\pi}{4}$.

В. Сендеров

◆

М700. *Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на а) два, б) три класса так, чтобы в один класс не попали два числа с разностью 10^m (ни при каком целом $m=0, \pm 1, \pm 2...$)?*



а) Ответ: нельзя. Достаточно заметить, что уже числа 0, 1, 2, ..., 10 невозможно разбить на две части так, чтобы числа 0 и 10 находились в разных частях и чтобы никакая часть не содержала двух последовательных чисел (убедитесь в этом).

б) Ответ: можно. Разобьем множество всех конечных десятичных дробей на 3 класса, объединив в один класс те дроби, суммы цифр которых дают одинаковые остатки при делении на 3. Легко видеть, что разность двух любых дробей, принадлежащих одному классу, имеет сумму цифр, делящуюся на 3, и поэтому не равна 10^k ни при каком $k \in \mathbb{Z}$.

А. Лейдерман

◆

Ф708. *Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100°C$ мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99°C$ (рис. 1).*

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80°C$.

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздухи в лаборатории постоянная и равна $t_0=20°C$. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $c=3$ Дж/К.

Тепловая мощность, выделяющаяся при прохождении тока через резистор, частично идет на нагревание резистора, частично рассеивается в окружающее пространство. В состоянии теплового равновесия (когда температура резистора остается постоянной) вся выделяющаяся мощность рассеивается.

Обозначим через α коэффициент пропорциональности между рассеиваемой на резисторе мощностью и разностью температур резистора и окружающего воздуха.

При температуре $t_3=80°C$ сопротивление резистора равно $R_1=50$ Ом (см. рис. 1), и $U_1^2/R_1=\alpha(t_3-t_0)$ (где $U_1=60$ В), откуда

$$\alpha=U_1^2/R_1(t_3-t_0)=1{,}2 \quad \text{В}^2/(\text{Ом}\cdot\text{град}).$$

Самопроизвольные колебания тока при напряжении на резисторе $U_2=80$ В происходят в результате колебаний значения сопротивления резистора. Когда температура резистора становится равной $t_1=100°C$, сопротивление его скачком увеличивается от $R_1=50$ Ом до $R_2=100$ Ом. В результате уменьшается тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, резистор начинает охлаждаться (отвод тепла происходит быстрее, чем выделение). Когда температура резистора падает до 99°C, сопротивление его скачком уменьшается от 100 Ом до 50 Ом. Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, увеличивается, резистор вновь нагревается (выделение тепла происходит быстрее, чем отвод). При температуре $t_1=100°C$ вновь происходит скачок сопротивления, и процесс повторяется.

Период колебаний тока в цепи равен $T=\tau_1+\tau_2$, где τ_1 — время нагрева резистора от 99°C до 100°C, τ_2 — время охлаждения от 100°C до 99°C.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\frac{U_2^2}{R_1}\tau_1=\tau_1\alpha(t_1-t_0)+c(t_1-t_2),$$

$$\frac{U_2^2}{R_2}\tau_2=\tau_2\alpha(t_1-t_0)-c(t_1-t_2)$$

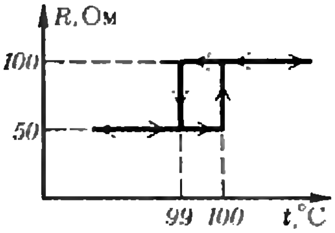


Рис. 1.

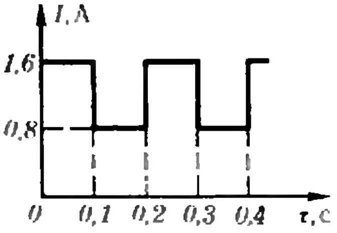


Рис. 2.

(поскольку температура резистора меняется очень незначительно, можно считать, что отводимая тепловая мощность постоянна и равна $\alpha(t_1 - t_0)$).

Подставляя числовые данные, находим:

$$\tau_1 = \tau_2 \approx 0{,}1 \text{ с} \Rightarrow T \approx 0{,}2 \text{ с}.$$

Максимальное значение тока равно, очевидно,

$$I_{\max} = U_2/R_1 = 1{,}6 \text{ А}.$$

Минимальное значение —

$$I_{\min} = U_2/R_2 = 0{,}8 \text{ А}.$$

На рисунке 2 приведен график изменения тока в цепи со временем.

А. Буздин

◆

Ф710.*) *При наблюдении в облаке за падением капли, которая увеличивается в размерах, поглощая мельчайшие капельки, встречающиеся на ее пути, было установлено, что капля движется все время с постоянным ускорением. Определите это ускорение, считая начальный размер капли малым. Сопротивлением воздуха при движении капли пренебречь.*

Изменение импульса падающей капли переменной массы за малое время Δt равно

$$\Delta(mv) = mg\cdot\Delta t. \qquad (1)$$

По условию задачи изменение массы капли за время Δt равно

$$\Delta m = \alpha\rho v_{\text{ср}} s\cdot\Delta t, \qquad (2)$$

где ρ — плотность воды, $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость капли за время Δt, $s = 4\pi r^2$ — площадь поверхности капли, α — безразмерный коэффициент пропорциональности. С другой стороны, поскольку $m = 4/3\pi r^3\rho$ (r — радиус капли),

$$\Delta m = 4\pi r^2\rho\cdot\Delta r = s\rho\cdot\Delta r.$$

Если за время Δt капля проходит расстояние Δy, то $\Delta t = \Delta y/v_{\text{ср}}$. Подставив выражения для Δm и Δt в (2), получим

$$\Delta r = \alpha\cdot\Delta y \sim \Delta y.$$

Следовательно, радиус капли растет пропорционально пройденному пути, то есть $r \sim y$.

Поскольку капля движется с постоянным ускорением a, $y = at^2/2 \sim t^2$. Значит, $r \sim t^2$, $m \sim r^3 \sim t^6$. Учитывая эти соотношения, из (1) получаем

$$\Delta(t^6 at) \sim t^6 g\cdot\Delta t.$$

Выполняя слева дифференцирование, находим a:

$$\Delta(at^7) = 7at^6\cdot\Delta t = t^6 g\cdot\Delta t \Rightarrow a = g/7.$$

А. Стасенко

◆

Ф711. *В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и молярных массах некоторых твердых тел (первые две строки таблицы). На основании этих данных установить некоторую физическую закономерность и заполнить три пустые клеточки*

Если внимательно посмотреть на таблицу, то можно увидеть, что произведение удельной теплоемкости c (Дж/(г·К)) на молярную массу A (г/моль), то есть молярная теплоемкость $C = cA$ (Дж/(моль·К)), для всех приведенных в таблице металлов есть величина, примерно постоянная (значения C приведены в третьей строке таблицы) и близкая к $3R = 24{,}93$ Дж/(моль·К). Этот экспериментальный факт известен как закон Дюлонга и Пти. Среднее значение C для десяти приведенных в таблице металлов равно 25,02 Дж/(моль·К). Максимальное отклонение от среднего равно —0,7 для алюминия и +0,8 для никеля, то есть относительное отклонение не превышает 3÷4%. Разумно ожидать, что и для таких металлов, как титан, железо, магний, молярная теплоемкость должна быть близка к 25 Дж/(моль·К) с такой же примерно точностью.

---

*) Решение задачи Ф709 — в статье А. Зильбермана «Два способа расчета электрических цепей» на с. 33.

таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

Теперь легко заполнить оставшиеся пустыми клеточки таблицы: для железа $A\approx56$ г/моль; для магния $c\approx1{,}04$ Дж/(г · К); для титана $c\approx0{,}52$ Дж/(г · К).

Приведем экспериментальные значения молярной теплоемкости этих металлов: для железа $C=25{,}02$ Дж/(моль · К);

	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
c, Дж/(г · К)	0,238	0,90	0,128	0,122	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A, г/моль	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51
C, Дж/(моль · К)	25,47	24,31	25,22	25,5	24,6	24,5		24,64		25,8	25,7		24,7

для магния $C=24{,}6$ Дж/(моль · К); для титана $C=25{,}02$ Дж/(моль · К).

Е. Сурков

Ф712. *Небольшой шарик движется с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точке A в цилиндрический вертикальный колодец глубины H и радиуса R. Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 1). При каком соотношении между $\vec{v}_0$, H, R и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца?*

◆

На рисунке 1 приведен вид сверху на траекторию движения шарика.

Поскольку соударения шарика со стенкой и дном колодца упругие, абсолютное значение горизонтальной проекции скорости шарика остается неизменным и равным v_0. Расстояния по горизонтали между точками, в которых происходят два последовательных соударения, равны $|AA_1|=|A_1A_2|=|A_2A_3|=\ldots=2R\cos\alpha$. Время между двумя последовательными соударениями шарика со стенкой колодца равно $t_1=2R\cos\alpha/v_0$.

Вертикальная проекция скорости шарика при соударениях со стенкой не изменяется, а при соударении с дном меняет знак на противоположный. Абсолютное значение вертикальной проекции при первом ударе о дно равно $\sqrt{2gH}$; время движения от вершины колодца до дна равно $t_2=\sqrt{2H/g}$.

На рисунке 2 представлена вертикальная развертка многогранника $A_1A_2A_3\ldots$ Следы траектории шарика на такой развертке — параболы (целые параболы — следы траектории между последовательными ударами о дно). Понятно, что шарик сможет «выбраться» из колодца, если момент максимального подъема по параболе совпадет с моментом соударения со стенкой (то есть в момент максимального подъема шарик окажется в точке A_n на границе колодца). Это означает, что времена t_1 и t_2 должны быть связаны

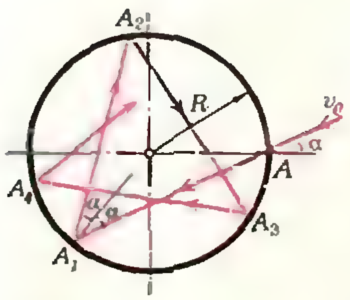


Рис. 1.

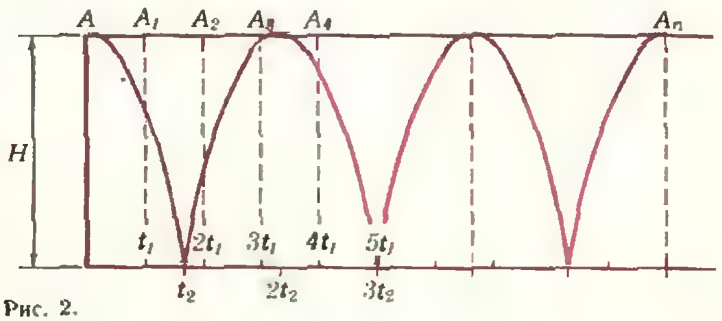


Рис. 2.

соотношением

$$nt_1 = k2t_2,$$

где n и k — целые взаимно простые числа. Подставляя значения t_1 и t_2, находим соотношение между v_0, H, R и α, при котором шарик может «выбраться» из колодца:

$$n\frac{R\cos\alpha}{v_0} = k\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

С. Кротов

А. Зильберман

Два способа расчета электрических цепей

Для расчета электрических цепей часто пользуются уравнениями Кирхгофа. Однако в случае сложных цепей (с большим числом ветвей) уравнения эти содержат много неизвестных, довольно громоздки. На практике удобно применять более простой способ — *метод узловых потенциалов*. В качестве неизвестных при этом выбираются потенциалы узлов цепи. Поскольку нас всегда интересуют не сами потенциалы, а их разности, то потенциал одного из узлов (любого) можно считать равным нулю. Тогда число неизвестных окажется на единицу меньше числа узлов. Выразив токи в ветвях через введенные потенциалы (закон Ома для участков цепи) и записав уравнения для узлов — сумма токов, втекающих в узел, равна сумме вытекающих из узла токов, — мы получим как раз столько уравнений, сколько неизвестных величин. Найдя потенциалы, мы легко сможем найти токи в ветвях.

Для примера решим методом узловых потенциалов несложную задачу.

Задача. *В схеме, показанной на рисунке 1, найти ток, текущий через резистор с сопротивлением R.*

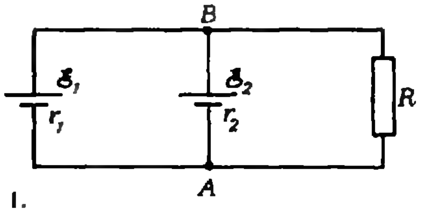


Рис. 1.

Обозначим потенциалы точек A и B соответственно $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \varphi$. Тогда токи, текущие через батареи и резистор, равны, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 - \varphi}{r_1}, \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}_2 - \varphi}{r_2}, \quad I_R = \frac{\varphi}{R}.$$

Запишем уравнение для узла B:

$$\frac{\mathscr{E}_1 - \varphi}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2 - \varphi}{r_2} = \frac{\varphi}{R}.$$

Отсюда находим φ:

$$\varphi = \frac{(\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1)R}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Ток, текущий через резистор, равен

$$I_R = \frac{\varphi}{R} = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Метод узловых потенциалов дает особенно большую «экономию» уравнений для схем с малым числом узлов. (Например, если в предыдущей задаче включить в цепь сколько угодно батарей, уравнение все равно получится только одно!)

У этого метода есть «близнец» — метод контурных токов, позволяющий «экономить» уравнения для узлов. Подумайте сами: как выбирать неизвестные величины в этом методе (его название — это подсказка)? Однако на практике метод узловых потенциалов оказывается все-таки удобнее.

Еще один способ расчета цепей — *метод наложения*. Он основан на принципе суперпозиции и подходит только для цепей, не содержащих нелинейные элементы (если в схеме есть, например, диод или лампа накаливания, то этот способ применять нельзя). Метод наложения используется для расчета цепей, содержащих несколько источников ЭДС, и позволяет свести задачу к нескольким простым.

Расчет проводят так. Рисуют и рассчитывают упрощенные схемы, в каждую из которых включен только один из источников, а ЭДС остальных равны нулю; при этом внутренние сопротивления «выкинутых» источников включают в соответствующие участки схем. Ясно, что число таких схем равно числу источников в начальной схеме. Искомый ток в ветви находят, суммируя токи, текущие по этой ветви во всех простых схемах.

В качестве примера решим методом наложения предыдущую задачу.

На рисунке 2 приведены простые схемы. Ток, текущий через R, в схеме 2,*а* равен

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{r_{\text{общ.1}}}\frac{r_2}{(R + r_2)} = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1 + r_2/(r_2 + R)}\frac{r_2}{(R + r_2)} =$$

$$= \frac{\mathscr{E}_1 r_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

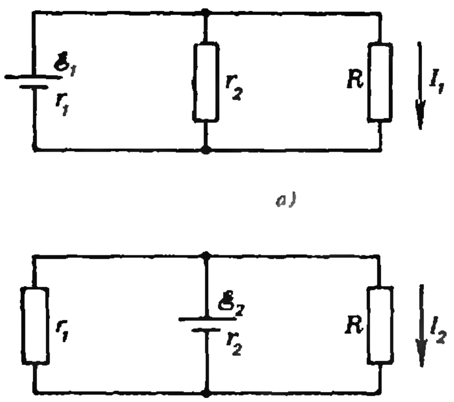
а в схеме 2, *б* —

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_2}{r_{\text{общ.2}}}\frac{r_1}{(R + r_1)} = \frac{\mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

В исходной схеме (см. рисунок 1) ток, текущий через резистор, равен

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

И все же обычно удобнее оказывается метод узловых потенциалов. Однако для некоторых специальных задач — например, для



а)

б)

Рис. 2.

расчета изменения тока в какой-либо ветви схемы при изменении ЭДС одного из источников — метод наложения очень удобен. Изменение ЭДС на величину $\Delta\mathcal{E}$ можно представить как добавление к данному источнику последовательно батареи без внутреннего сопротивления с ЭДС, равной $\Delta\mathcal{E}$. Понятно, что в этом случае нет надобности рассчитывать все простые схемы; достаточно рассмотреть только одну — с ЭДС $\Delta\mathcal{E}$. Полученные при этом значения токов в ветвях и будут искомыми изменениями токов.

Найдем, например, изменение тока через батарею $\mathcal{E}_2$ (в предыдущей задаче) при изменении ЭДС первой батареи ($\mathcal{E}_1$) на $\Delta\mathcal{E}$. Воспользуемся схемой, аналогичной 2,*а*, в которой на месте $\mathcal{E}_1$ включена батарея с ЭДС $\Delta\mathcal{E}$. В такой схеме ток, текущий через r_2, равен

$$\Delta I=\frac{\Delta\mathcal{E}}{r_{\text{общ}}}\,\frac{R}{(r_2+R)}=\frac{\Delta\mathcal{E}\cdot R}{r_1r_2+R(r_1+r_2)}.$$

Это и есть изменение тока через батарею $\mathcal{E}_2$ при изменении ЭДС $\mathcal{E}_1$ на $\Delta\mathcal{E}$.

Решим методом наложения задачу Ф709. Напомним ее условие.

Ф709. *Собрана схема, показанная на рисунке 3. ЭДС батареи $\mathcal{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$, чтобы*

1) ток через батарею $\mathcal{E}_2$ стал прежним?

2) ток через батарею $\mathcal{E}_1$ стал прежним?

Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

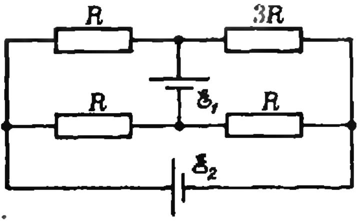


Рис. 3.

На рисунке 4 представлены простые схемы для цепи, в которой $\mathcal{E}_1$ заменено на $\Delta\mathcal{E}_1$, а $\mathcal{E}_2$ — на $\Delta\mathcal{E}_2$, где $\Delta\mathcal{E}_2$ и есть искомое изменение ЭДС $\mathcal{E}_2$. Для того чтобы ток через вторую батарею остался прежним, токи, текущие через эту батарею (то есть через ветви, из которых эта батарея «выкинута») в схемах 4, *а* и 4, *б*, должны быть равными по величине и противоположными по направлению.

В схеме 4, *а* ток, текущий от батареи $\Delta\mathcal{E}_1$, разветвляется, и в диагональ получившегося моста течет ток ΔI, равный разности токов-разветвлений:

$$\Delta I=\frac{\Delta\mathcal{E}_1}{R_{AB}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\Delta\mathcal{E}_1}{5R/4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\Delta\mathcal{E}_1}{5R}.$$

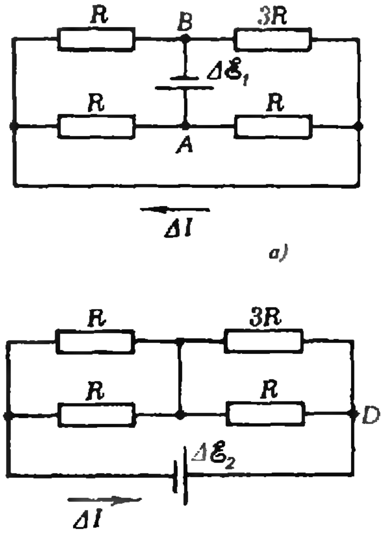
В схеме 4, *б*

$$\Delta I=\frac{\Delta\mathcal{E}_2}{R_{CD}}=\frac{\Delta\mathcal{E}_2}{5R/4}=\frac{4\Delta\mathcal{E}_2}{5R}.$$

Приравнивая полученные выражения для ΔI, найдем $\Delta\mathcal{E}_2$:

$$\Delta\mathcal{E}_2=\Delta\mathcal{E}_1/4.$$

Знаки изменений найдем, сравнив полярность батарей в исходной схеме (рис. 3) и в схемах 4, *а* и 4, *б*. В нашем случае батарея $\Delta\mathcal{E}_1$ включена против батареи $\mathcal{E}_1$ (суммарная ЭДС меньше $\mathcal{E}_1$), и батарея $\Delta\mathcal{E}_2$ условно нарисована против батареи $\mathcal{E}_2$, при этом мы получили $\Delta\mathcal{E}_2<0$ — ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$ следует уменьшить. Если бы оказалось, что $\Delta\mathcal{E}_2>0$, это означало бы, что ЭДС $\mathcal{E}_2$ следует увеличить.



а)

б)

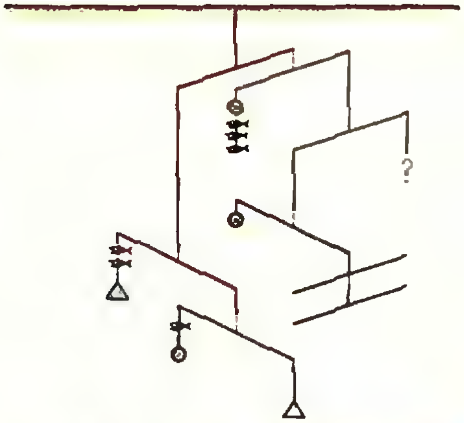
Рис. 4.

Аналогично находится изменение $\mathcal{E}_2$ для случая сохранения тока через батарею $\mathcal{E}_1$.

Эту задачу можно решать и любым другим способом, но метод наложения дает, пожалуй, самое простое и наглядное решение.

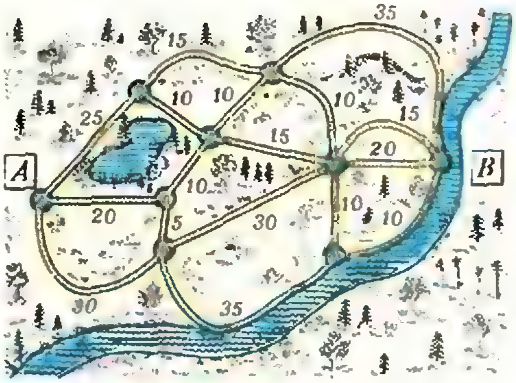
Методы узловых потенциалов и наложения можно использовать и для расчета цепей переменного тока. При этом, суммируя токи, нельзя забывать про фазы.

Квант для младших школьников

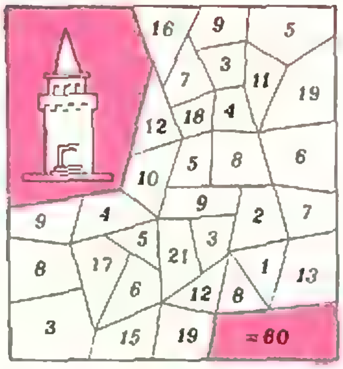


Задачи

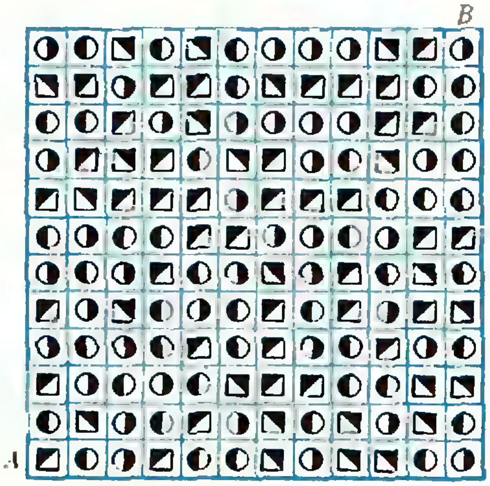
1. Английский популяризатор математики Бернард назвал эту конструкцию из рыбок, шариков, конусов и палочек (см. рисунок) «Эквилябр», объединив слова «Эквилибристика» и «Канделябр». Какую массу надо привесить к «свободной палочке» (знак ? на рисунке), чтобы «Эквилябр» находился в равновесии? Найдите массу каждой фигурки, если известно, что масса палочки 10 г.



2. Группа туристов хочет попасть из деревни A в деревню B за кратчайшее время (см. рисунок; рядом с каждой дорогой указано время, которое тратится на ее прохождение). Какой маршрут должны избрать туристы?



3. От основания башни в верхнем красном углу нужно за 10 шагов пройти в нижний красный угол (см. рисунок; *шаг* — это проход через один участок с числом внутри) так, чтобы сумма чисел на пройденных участках равнялась 60. Как это сделать?



4. Найдите путь от A до B, проходящий через расположенные в квадрате 12×12 кружочки и квадратики (см. рисунок), чтобы он состоял из четверок ◩ ◪ ◐ ◑ (именно в такой последовательности).

Эти задачи заимствованы из книги Лемака (Z. Lehman) «Kurzweil durch Mathe» (Берлин, 1980).

А. Калинин

Причеши ежа

Обратили ли вы внимание на рисунок на четвертой странице обложки? Многогранник с причудливо торчащими колючими гранями и есть тот самый «еж», который нам предстоит «причесать». Еж-головоломка состоит из 8 деревянных пятигранников, скрепленных резинкой: поворачивая друг относительно друга половинки ежа, ему нужно придать правильную, «причесанную» форму (рис. 1).

Но прежде чем причесывать ежа, его нужно изготовить.

Сделаем ежа

Проще всего нашу головоломку изготовить из детских деревянных кубиков. Для этого понадобится восемь кубиков (для тех, кто хорошо разбирается в геометрии, достаточно трех). Нужны еще обрезки тонкой резинки и восемь колечек, которые можно нарезать из пластмассовой трубки. Вместо колечек подойдут и маленькие пуговицы. Мы советуем головоломку делать в следующей последовательности:

1. Из кубиков выпилите 8 пятигранников (рис. 2).
2. Закруглите ножом и напильником края взаимно перпендикулярных граней, чтобы они не задевали друг за друга при вращении.
3. Просверлите внутри каждого пятигранника канал, идущий от вершины, в которой сходятся три пря-

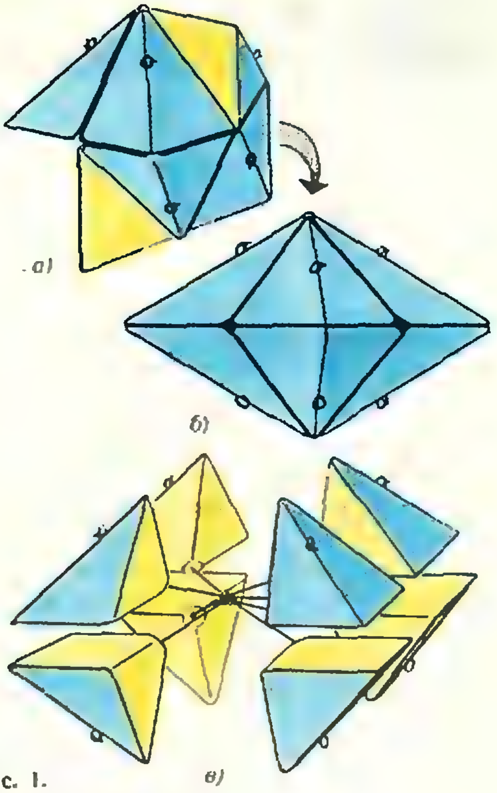


Рис. 1.

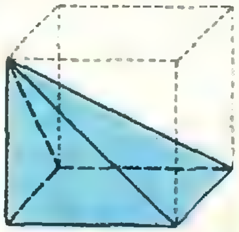


Рис. 2.

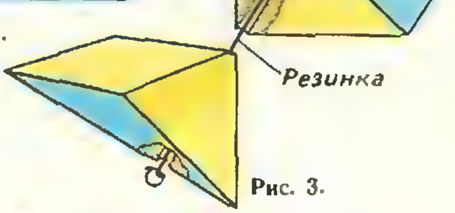


Рис. 3.

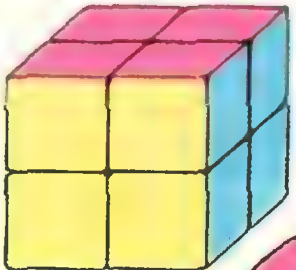


Рис. 4.

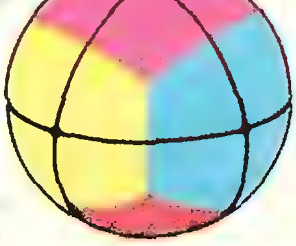


Рис. 5.

мых угла, в точку на противоположном ребре (рис. 3). Каналы можно просверлить гвоздем или тонким сверлом.

4. Через каналы двух пятигранников пропустите резинку и завяжите ее за колечки или пуговицы так, как показано на рисунке 3. То же самое проделайте с тремя остальными парами. Учтите, что на рисунке 3 резинка показана в растянутом виде. Нужно, чтобы она прижимала пятигранники друг к другу.

5. Раскрасьте грани головоломки, трущиеся части зачистите шкуркой, покройте лаком, и снова зачистите.

6. Соберите головоломку, зацепив друг за друга соединенные резинками четыре пары пятигранников, так, чтобы получился «причесанный» еж (рис. 1, *в*).

Теперь вы можете играть: несколько раз поверните одну половинку головоломки относительно другой. Делайте это в разных плоскостях. После поворотов грани головоломки начинают «торчать» в разные стороны. Это видно на обложке журнала и на рисунке 1, *а*. Теперь попробуйте вернуть головоломку в первоначальное положение. Для вас будет неожиданным, что это окажется трудной задачей. Трудной, но и очень интересной.

При игре имейте в виду, что резиновый шарнир выдерживает около 100 поворотов, после чего необходимо потратить несколько минут на распутывание резинок — и головоломка будет снова готова к игре.

Откуда взялся еж?

В науке и технике бывает так, что одно открытие дает толчок к быстрому появлению множества новых интересных идей и изобретений. Что-то похожее произошло и с головоломкой «Волшебный кубик». Можно считать, что наш еж является родственником знаменитого кубика.

В «Волшебном кубике» 26 маленьких кубиков группами по девять вращаются в шести плоскостях. При этом получается очень трудная головоломка, так как число возможных расположений маленьких кубиков в большом превышает 43 квинтиллиона, то есть $43 \cdot 10^{18}$ (поэтому нахождению единственного правильного состояния кубика и приходится посвящать несколько страниц журнала).

Если уменьшить количество кубиков, расположенных вдоль ребра головоломки, с трех до двух, получится головоломка из восьми кубиков (рис. 4). Она тоже не тривиальна — ей посвящена другая статья в нашем журнале: «Поворачиваем кубики» («Квант», 1981, № 12)

Рассмотрим еще несколько идей, с помощью которых можно получить новые оригинальные головоломки. Наша цель — научиться придумывать и делать самим волшебные головоломки разной сложности.

Идея первая: изменим форму

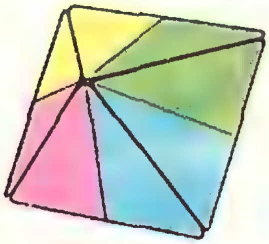
Если поставить себе целью придумать новую головоломку, то нетрудно прийти к мысли, что подвижными элементами головоломки не обязательно должны быть кубики. Да и сама головоломка может иметь вид не куба, а например, сферы (рис. 5). Сложность разгадывания головоломок на рисунках 4 и 5 одинакова. А вот если за основу головоломки вместо куба брать другие многогранники, то появятся новые головоломки различной сложности (рис. 6). В переходе от раскрашенного куба к другим цветным многогранникам состоит первая идея получения новых головоломок.

Чтобы понять, как и какие многогранники можно использовать для получения головоломок, отметим четыре их свойства:

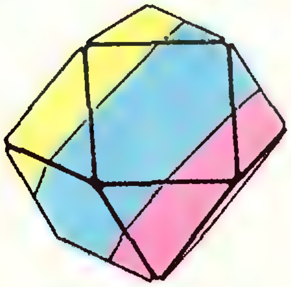
1. Все сечения, которые делят пополам цветной многогранник и позволяют его поворачивать, являются конгруэнтными правильными многогранниками, центры которых совпадают.

2. Таких сечений должно быть не менее трех.

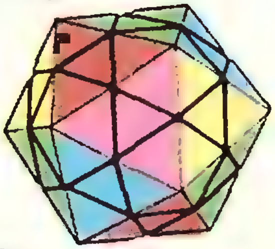
3. Сечения могут проходить по ребрам многогранника, как на рисунке 6 у октаэдра, кубооктаэдра и икосододекаэдра, или пересекать грани, как на том же рисунке у икосаэдра.



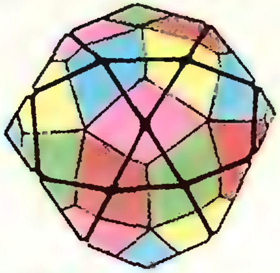
Октаэдр



Кубооктаэдр



Икосаэдр



Икосододекаэдр

Рис. 6.

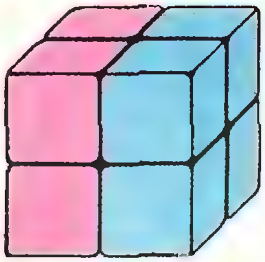


Рис. 7.

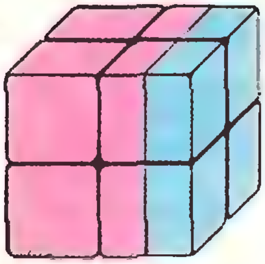


Рис. 8.

4. Каждый подвижный элемент цветного многогранника сам является многогранником, часть граней которого всегда находится снаружи головоломки, а остальные грани всегда целиком находятся внутри.

На основании описанных свойств и примеров, показанных на рисунке 6, вы сможете придумать свои варианты цветных многогранников-головоломок. Если у вас есть склонность к конструированию, подумайте о том, как сделать шарнирный механизм, обеспечивающий более надежную работу головоломки, чем наши резиночки. Советую в этой связи посмотреть статью М. Евграфова «Механика волшебного кубика» в предыдущем номере «Кванта».

Идея вторая: изменим раскраску

Если в одном из наших цветных многогранников все грани окрасить в один цвет, то никакой головоломки не будет. Головоломка с двухцветной окраской на рисунке 7 может находиться в семи различных состояниях. Это, конечно, очень простая головоломка. Но она резко усложняется, если, всего-навсего, сдвинуть границу окраски (рис. 8). Почему это происходит?

Дело в том, что красно-синие кубики головоломки из рисунка 8 могут оказаться, после серии поворотов, на своих местах, но иначе развернутыми (например, иметь горизонтальную синюю грань). Если ту же серию поворотов выполнить с головоломкой из рисунка 7, то соответствующие синие кубики будут выглядеть так же, как в первоначальном положении. Другими словами, одинаковым состояниям головоломки из рисунка 7 отвечают разные состояния головоломки со сдвинутой окраской. Головоломка усложнилась!

Комбинируя идеи изменения раскраски и формы, пользуясь идеей «торчащих граней», вы сможете придумать много разнообразных головоломок.

Рисунки ваших головоломок присылайте в редакцию. А, может быть, вы предложите и оригинальную конструкцию шарнирного механизма для них?

В. Рыжик

Надо ли искать ОДЗ?

Традиционный вид задач на вступительных экзаменах в вузы — уравнения, неравенства, системы (уравнений или неравенств).

Многочисленные пособия для школьников и абитуриентов при их решении часто дают безоговорочную рекомендацию: «Сначала ищем ОДЗ!» По-видимому, отголоском этой рекомендации является художественно оформленный призыв «Помни ОДЗ!», висевший в одном из ленинградских ПТУ.

Прежде всего заметим, что аббревиатуры ОДЗ в нынешних школьных учебниках нет. Словосочетание «**О**бласть **Д**опустимых **З**начений» означает «область определения».

ОДЗ уравнения или неравенства — это, по определению, пересечение ОДЗ его левой и правой части.

Так, надо ли решение уравнения (неравенства, системы) начинать с поиска ОДЗ? Обязательно ли, решая уравнение (неравенство, систему), искать ОДЗ?

Мой ответ на эти вопросы состоит из трех частей: решая уравнение (неравенство, систему), искать ОДЗ, тем более — начинать решение с поиска ОДЗ, **не обязательно; как правило,** то есть в большей части уравнений (неравенств, систем), предлагаемых обычно на вступительных экзаменах, начинать решение с поиска ОДЗ **не надо; иногда,** в некоторых специально подобранных или более трудных уравнениях (неравенствах, системах), **полезно** начинать решение с установления ОДЗ.

Как правило, не надо

$$\sqrt{x^2-3x+4}=1-3x. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x+4=(1-3x)^2 \\ 1-3x\geqslant 0, \end{cases} \qquad (2)$$

решить которую уже нетрудно. (Между прочим, неравенство $x^2-3x+4\geqslant 0$, определяющее ОДЗ уравнения (1), вытекает из уравнения, входящего в систему (2).) Можно также при желании от уравнения (1) перейти к выводному*) уравнению $x^2-3x+4=(1-3x)^2$ и найденные корни проверить. (Решив вместо уравнения (1) равносильную ему систему (2), проверку делать, конечно, не нужно.) Этот прием: переходить не к равносильному, а к выводному и делать проверку — надо иметь в виду и в других рассматриваемых примерах.

Легко доказать, что любое уравнение вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \qquad (3)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

В самом деле. Если x_0 является корнем уравнения (3), то есть справедливо числовое равенство $\sqrt{f(x_0)}=g(x_0)$, то $f(x_0)=[g(x_0)]^2$ и $g(x_0)\geqslant 0$; значит, x_0 является решением системы (4). Если же, обратно, x_0 является решением системы (4), то есть справедливо числовое равенство $f(x_0)=[g(x_0)]^2$ и $g(x_0)\geqslant 0$, то $\sqrt{f(x_0)}=\sqrt{[g(x_0)]^2}=|g(x_0)|$; поскольку $g(x_0)\geqslant 0$, $|g(x_0)|=g(x_0)$; значит, x_0 является корнем уравнения (3).

В уравнении (1) поиск ОДЗ приводит к ненужному, но легко выполняемому расчету. Однако иногда перед абитуриентом, привыкшим всегда искать ОДЗ, возникают непреодолимые трудности. Так, устанавливая ОДЗ уравнения $\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{1-x}$, он, вероятно, не справится с неравенством $x^3-x+1\geqslant 0$, в то время как рассматриваемое уравнение равносильно системе

---

*) См. п. 74 пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», 1981).

$$\begin{cases} x^3-x+1=1-x \\ 1-x\geqslant 0, \end{cases}$$

решаемой мгновенно.

Вообще, любое уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно «на выбор» каждой из систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Выбирая «более легкую» из них, обычно удается обойтись без поиска ОДЗ.

Уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$ равносильно уравнению

$$\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-1}, \qquad (5)$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x+4=(1+\sqrt{x-1})^2. \qquad (6)$$

В самом деле, если x_0 является корнем уравнения (5), то оно, конечно, является и корнем уравнения (6): уравнение $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ всегда, то есть при любых f и g, является выводным из уравнения $f(x)=g(x)$. Если же обратно, x_0 является корнем уравнения (6), то есть справедливо числовое равенство $x_0+4=(1+\sqrt{x_0-1})^2$, то, прежде всего, $x_0+4\geqslant 0$; значит, $\sqrt{x_0+4}=\sqrt{(1+\sqrt{x_0-1})^2}=|1+\sqrt{x_0-1}|$; поскольку $1+\sqrt{x_0-1}\geqslant 0$, $|1+\sqrt{x_0-1}|=1+\sqrt{x_0-1}$; следовательно, x_0 является корнем уравнения (5).

Уравнение (6) равносильно каждому из уравнений

$$x+4=1+2\sqrt{x-1}+x-1,$$
$$\sqrt{x-1}=2,$$
$$x-1=4.$$

Уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$ равносильно, конечно, уравнению

$$\sqrt{x+3}=7-\sqrt{3x-2}, \qquad (7)$$

но, в отличие от предыдущего случая, уравнение (7) не равносильно уравнению $x+3=(7-\sqrt{3x-2})^2$; оно равносильно, ввиду доказанной выше равносильности (3) и (4), системе

$$\begin{cases} x+3=(7-\sqrt{3x-2})^2 \\ 7-\sqrt{3x-2}\geqslant 0 \end{cases}$$

и, далее, каждой из систем

$$\begin{cases} x+3=49-14\sqrt{3x-2}+3x-2 \\ \sqrt{3x-2}\leqslant 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\sqrt{3x-2}=x+22 \\ \sqrt{3x-2}\leqslant 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(3x-2)=(x+22)^2 \\ 3x-2\leqslant 49. \\ x+22\geqslant 0. \end{cases}$$

Аналогично можно решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$, однако в данном случае проще сразу заметить, что его ОДЗ есть пустое множество и, следовательно, корней оно не имеет.

* * *

Перейдем к неравенствам

$$3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2. \qquad (8)$$

Неравенство (8) равносильно совокупности*) систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-2\geqslant 0 \\ 9(6+x-x^2)>(4x-2)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-2<0 \\ 6+x-x^2\geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (9)$$

(Решая вторую из систем (9), мы заодно находим ОДЗ неравенства (8).)

В самом деле, пусть сначала x_0 является решением неравенства (8), то есть справедливо числовое неравенство $3\sqrt{6+x_0-x_0^2}>4x_0-2$. Докажем, что тогда x_0 является решением одной из систем (9). Рассмотрим два случая: $4x_0-2\geqslant 0$ и $4x_0-2<0$. Если $4x_0-2\geqslant 0$, то по одному из свойств числовых неравенств (если $a>b\geqslant 0$ и $n\in\mathbf{N}$, то $a^n>b^n$) $9(6+x_0-x_0^2)>(4x_0-2)^2$; таким образом, в этом случае x_0 является решением первой из систем (9). Если же $4x_0-2<0$, то x_0 является решением второй из систем (9), поскольку из справедливости неравенства $3\sqrt{6+x_0-x_0^2}>4x_0-2$ вытекает, что выражение $\sqrt{6+x_0-x_0^2}$ имеет смысл, то есть $6+x_0-x_0^2\geqslant 0$.

Пусть теперь x_0 является решением одной из систем (9). Докажем, что тогда x_0 является решением неравенства (8). Если x_0 является решением первой из систем (9), то по одному из свойств числовых неравенств (если $a>b\geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$) $\sqrt{9(6+x_0-x_0^2)}>\sqrt{(4x_0-2)^2}$; поскольку $4x_0-2\geqslant 0$, $3\sqrt{6+x_0-x_0^2}>4x_0-2$, то есть x_0 является решением неравенства (8). Если же x_0 является решением второй из систем (9), то $\sqrt{6+x_0-x_0^2}$ имеет смысл и, естественно, $\sqrt{6+x_0-x_0^2}\geqslant 0$; из $4x_0-2<0$ следует $\sqrt{6+x_0-x_0^2}>4x_0-2$, то есть x_0 опять является решением неравенства (8).

Легко доказать, что любое неравенство вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

(Неравенство $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)$ решается аналогично.)

Проще обстоит дело с решением неравенства вида $\sqrt{f(x)}<g(x)$; та-

---

*) См. сноску на с. 229 вышеуказанного пособия.

кое неравенство равносильно одной системе

$$\begin{cases} f(x) < [g(x)]^2 \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Неравенство $\sqrt{x^3-x-1} > \sqrt{x^3-1}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^3-x-1 > x^3-1 \\ x^3-1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Любое неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

* * *

Решим два более сложных неравенства. (Проверьте, научились ли вы доказывать равносильность, — докажите каждую из указанных ниже равносильностей.)

$$18\sqrt{2x-3} - 9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{x-2}. \qquad (10)$$

Неравенство (10) равносильно неравенствам

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)}}{\sqrt{2x-3}} \geqslant 2\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}},$$

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{2x-3}} - 2\left(\frac{\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{2x-3}}\right)^2 \geqslant 0. \qquad (11)$$

Множество решений вспомогательного неравенства $18-9t-2t^2 \geqslant 0$ равно $\left[-6; \frac{3}{2}\right]$. Следовательно, неравенство (11) равносильно неравенству

$$0 \leqslant \frac{\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{2x-3}} \leqslant \frac{3}{2}. \qquad (12)$$

Неравенство (12) равносильно системам

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sqrt[4]{\dfrac{x-2}{2x-3}} \leqslant \dfrac{3}{2} \\ x-2 \geqslant 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

(чтобы написать систему, равносильную неравенствам (12), мы были вынуждены приписать неравенства, задающие фактически ОДЗ неравенствам (10))

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{x-2}{2x-3} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \\ x-2 \geqslant 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2x-3} \leqslant \dfrac{81}{16} \\ x-2 \geqslant 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-2) \leqslant 81(2x-3) \\ x-2 \geqslant 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-2) \leqslant 81(2x-3) \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Дальнейшее решение очевидно.

Неравенство

$$\frac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7$$

равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} \neq 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение $x=1$. Вторая система равносильна системам

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(3-\sqrt{8+x})^2}{(3+\sqrt{8+x})^2(3-\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(3-\sqrt{8+x})^2}{(1-x)^2} > x-7 \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8+x})^2 > x-7 \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{8+x} < 4 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

С неравенством $\sqrt{8+x} < 4$ мы уже справляться научились.

Иногда полезно

Решать уравнение

$$\sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1} \qquad (13)$$

возведением в квадрат «кисло» (получается полное уравнение четвертой степени). Поэтому найдем сначала ОДЗ уравнения — $[1; 2]$. На ОДЗ

$$\sqrt{2-x} + x - 3 \leqslant \sqrt{2-1} + x - 3 =$$
$$= x - 2 \leqslant 0.$$

С другой стороны, $\sqrt{x-1} \geqslant 0$. Следовательно, уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-1} = 0. \end{cases}$$

которая, очевидно, не имеет решений.

И в уравнении

$$x^2+x+\sqrt{x+1}=2+\sqrt{2} \qquad (14)$$

возводить в квадрат плохо. ОДЗ уравнения (14) — луч $[-1; +\infty[$. На отрезке $[-1; 0]$

$$x^2+x+\sqrt{x+1}\leqslant 0+1=1.$$

Значит, на этом отрезке уравнение (14) корней не имеет. При $x\geqslant 0$ функция $x^2+x+\sqrt{x+1}$ возрастает, и поэтому уравнение (14) не может иметь на луче $[0; +\infty[$ больше одного корня. Один корень: $x=1$ — легко угадывается.

Уравнение

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3 \qquad (15)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3 \\ \sqrt{x-5}>\sqrt{2x-1}, \end{cases} \qquad (16)$$

поскольку *добавление к уравнению (неравенству, системе) его следствия приводит к равносильной системе.* На ОДЗ $[5; +\infty[$ система (16) равносильна системам

$$\begin{cases} \sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3 \\ x-5>2x-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3 \\ x<-4. \end{cases}$$

Значит, уравнение (15) корней не имеет.

Неравенство $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4-x^2}<x$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4-x^2}<x \\ x>0 \end{cases}$$

Его ОДЗ — $[-2; 0]\cup\{2\}$. На $[-2; 0]$ система решений не имеет, а $x=2$ является ее решением.

* * *

В заключение два совета. При изложении решения во всех не очень сложных случаях доказывать «равносильности» ($\Leftrightarrow$) и «следования» ($\Rightarrow$) не надо; достаточно — словами или символами — указать, что чему равносильно или что из чего следует. Если в уравнении (неравенстве, системе) есть выражение, область определения которого задает область определения всего уравнения (неравенства, системы), пока это выражение участвует в решении в неизменном виде, находить его область определения не стоит.

Новости науки

Протонная радиоактивность

Это явление было обнаружено учеными сравнительно недавно, но уже имеет свою историю.

В 1962 году в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне была открыта так называемая запаздывающая протонная радиоактивность, когда протон вылетал из возбужденного ядра, образовавшегося после испускания ядром позитрона.

В 1970 году был сделан следующий шаг — зафиксирована протонная радиоактивность ядерных изомеров, то есть ядер с длительным временем жизни в возбужденном состоянии.

Наконец, в 1981 году физики из ФРГ наблюдали испускание протона ядром, находящимся в состоянии с минимальной возможной энергией, или, как принято говорить, в основном состоянии.

Заметим, что протонный распад «разрешен» только ядрам, у которых число нейтронов значительно меньше, чем у самого легкого стабильного изотопа данного элемента. Такие ядра называют нейтронодефицитными. Например, у ^{118}Cs, излучателя запаздывающих протонов, на 15 нейтронов меньше, чем у стабильного изотопа ^{133}Cs.

Протонный распад из основного состояния испытывают ядра с еще большим дефицитом нейтронов, а их получить нелегко. Ученые пошли по такому пути. Пучок ионов никеля, ускоренных в мощном ускорителе, направлялся на мишень из рутения или молибдена. Ядра никеля, сливаясь с ядрами мишеней, превращались в нейтронодефицитные изотопы лютеция или тулия:

$$^{58}_{28}\mathrm{Ni}+^{96}_{44}\mathrm{Ru}\to^{151}_{71}\mathrm{Lu}+p+2n,$$
$$^{58}_{28}\mathrm{Ni}+^{92}_{42}\mathrm{Mo}\to^{147}_{69}\mathrm{Tm}+p+2n,$$

которые и испытывали потом протонный распад.

Измерения показали, что при превращении лютеция в иттербий:

$$^{151}_{71}\mathrm{Lu}\to^{150}_{70}\mathrm{Yb}+p$$

энергия протонов равна 1,22 МэВ, и его период полураспада равен 85±10 мс. Для изотопа тулия эти величины равны 1,04 МэВ и 420±100 мс соответственно.

Теперь физикам осталось обнаружить последний предсказываемый теорией вид протонного распада — двупротонную радиоактивность, то есть испускание ядром одновременно двух протонов.

В. Кузнецов

Ереванский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1>0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{\sin x+\cos x}=4\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x.$$

3. Найдите экстремумы функции $y=(x-4)^2\cdot x^2$.

4. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y=\sqrt{\cos 2x}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{8}$, $y=0$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC высота BD, опущенная на основание, равна h, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$\cos x+\operatorname{tg} x=1+\sin x.$$

2. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{5^{x-2}-1}.$$

3. В какой точке кривой $y=\sqrt{1+x^2}$ касательная параллельна прямой $y=\frac{x}{2}+1$?

4. Найдите x и y, если $\vec{u}\nparallel\vec{w}$ и

$$x\vec{u}+y\vec{w}=(3-2y)\,\vec{u}+(4x-3)\,\vec{w}.$$

5. Площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, в 9 раз больше площади круга, вписанного в этот треугольник. Найдите углы треугольника.

Вариант 3

(химический, географический, биологический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5})=\log_3 9.$$

2. Решите уравнение

$$4\cos^2 3x=1.$$

3. Найдите все числа $a>0$, удовлетворяющие условию

$$\int_0^a (2x-1)\,dx>12.$$

4. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}.$$

5. Вывод формулы объема цилиндра.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найдите ускорения тел и натяжения нитей в устройстве, изображенном на рисунке 1. Массы тел равны $m_1=100$ г и $m_2=300$ г. Массой блоков можно пренебречь.

2. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в «мертвую петлю», с высоты $H=2R$, где R — радиус петли. На какой высоте тело оторвется от петли?

3. Тонкий резиновый шар радиусом $r_1=2$ см наполнен воздухом при температуре $t_1=20$°C и нормальном атмосферном давлении. Каким станет радиус шара, если его опустить в воду с температурой $t_2=4$°C на глубину $h=20$ м? Натяжением резины можно пренебречь.

4. Найдите количество теплоты, которое выделилось при абсолютно неупругом соударении двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу. Масса первого шара $m_1=0{,}4$ кг, его скорость $v_1=3$ м/с. Масса второго шара $m_2=0{,}2$ кг, его скорость $v_2=12$ м/с.

5. Проволочное кольцо радиусом $R=10$ см заряжено отрицательно и несет заряд $q=-5\cdot10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстоянии L, равном 0; 5; 15 см.

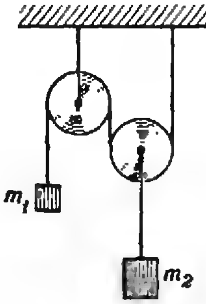


Рис. 1.

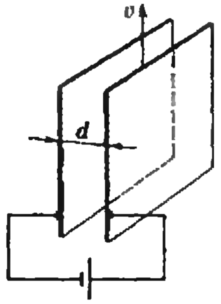


Рис. 2.

6. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, напряжение которой $U=600$ В. Какой величины ток будет проходить по проводам при сдвигании одной пластины вдоль другой (рис. 2), если скорость движения $v=6$ см/с? Пластины конденсатора квадратные, площадью $S=100$ см²; расстояние между пластинами, равное $d=0{,}1$ см, во время движения остается постоянным.

7. По катодной трубке течет ток I, когда напряжение на ней равно U. Определите силу, с которой действуют электроны на единицу поверхности анода, если известно отношение e/m.

8. В магнитном поле, индукция которого $B=5\cdot10^{-2}$ Тл, вращается стержень длиной $l=1$ м с постоянной угловой скоростью $\omega=20$ рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна линиям магнитной индукции. Найдите ЭДС индукции, возникающую на концах стержня.

Публикацию подготовили
Г. Варданян, Д. Седракян, Г. Тоноян

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+4y=3. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$4^{2x-3}=0{,}5.$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 x=3\sin x.$$

4. Найдите область определения функции

$$y=\log_3\frac{x^2-4x+3}{5-x}$$

5. В шар радиуса R впишите цилиндр наибольшего объема.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$2+\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=0.$$

2. Решите неравенство

$$x<\frac{6}{x-5}.$$

3. Решите уравнение

$$4\cos x=\sin 2x.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x-6^y=5 \\ x\cdot6^y=6. \end{cases}$$

5. В круг радиуса 4 с центром в точке (4; 0) вписана трапеция наибольшей площади так, что две ее соседние вершины лежат в точках пересечения окружности с осью абсцисс, а две другие — на окружности. Найдите координаты вершин и площадь трапеции.

Физика

Задачи устного экзамена

1. К потолку лифта, масса которого $m=100$ кг, подвешен груз. Сила $F=1500$ Н заставляет лифт двигаться вверх. Груз находится на расстоянии $l=1$ м от пола лифта. Нить внезапно обрывается. Сколько времени пройдет от момента разрыва нити до удара груза об пол?

2. Нейтрон (его масса m_1) ударяется о неподвижное ядро атома углерода ($m_2=12m_1$). Считая удар центральным и упругим, найдите, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона при ударе.

3. В баллоне объемом $V=10$ л находится гелий под давлением $p_1=10$ атм и при температуре $t_1=27$°C. После того как из баллона было взято $m=10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $t_2=17$°C. Определите давление гелия, оставшегося в баллоне.

4. Шар, диаметр которого $d=1$ см и заряд $q=10^{-6}$ Кл, помещен в масло плотностью $\varrho_м=0{,}8$ г/см^3. Плотность материала шара $\varrho=8{,}6$ г/см^3. В какое электрическое поле, направленное вертикально вверх, надо поместить шар, чтобы он плавал в масле?

5. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d=1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U=300$ В. В пространство между пластинами помещается плоскопараллельная пластинка из стекла толщиной $d_1=0{,}3$ см и плоскопараллельная пластинка из парафина толщиной $d_2=0{,}7$ см. Найдите напряжения на каждом слое. Диэлектрические проницаемости равны, соответственно, $\varepsilon_1=6$ и $\varepsilon_2=2{,}6$.

6. Найдите количество теплоты, выделяющееся ежесекундно в единице объема медного провода при плотности тока $j=30$ А/см^2. Удельное сопротивление меди $\varrho=1{,}71\times10^{-8}$ Ом · м.

7. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор, параллельно его пластинам, со скоростью $v_0=2\cdot10^7$ м/с. Длина конденсатора $l=10$ см, напряженность электрического поля конденсатора $E=200$ В/см. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, линии которого перпендикулярны силовым линиям электрического поля. Индукция магнитного поля $B=2\times10^{-2}$ Тл. Найдите радиус винтовой траектории электрона в магнитном поле.

8. Катушка, индуктивность которой $L=3\cdot10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S=100$ см^2 и расстоянием между ними $d=0{,}1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на волну длиной $\lambda=750$ м?

9. Свет, падающий из воздуха на стеклянную плоскопараллельную пластинку, отражается (от пластинки) под углом $\gamma=60°$ и преломляется (в пластинке) под углом $\beta=30°$. Определите скорость света в пластинке.

10. Заряженное тело массой $m=0{,}02$ кг и зарядом $q_1=5\cdot10^{-6}$ Кл движется из бесконечности со скоростью $v_0=3$ м/с по главной оптической оси вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R=1$ м к его полюсу, где расположен другой заряд q_2. Определите величину заряда q_2, при которой заряженное тело останавливается в тот момент, когда его изображение совпадает с ним самим.

Публикацию подготовили *В. Бузанов, О. Малючков, Б. Разумейко*

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

2. Решите уравнение

$$7\cdot 10^{2x+3}-5\cdot 4^{2x+3}=2\cdot 25^{2x+3}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}.$$

4. Вокруг оси Ox вращается касательная, проведенная к параболе $y=x^2$ в точке $A(1;1)$. Найдите объем тела, полученного вращением отрезка касательной, ограниченного точкой касания и точкой пересечения касательной с осью Ox.

5. Объем прямой треугольной призмы равен V. В основании призмы лежит равносторонний треугольник. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Вариант 2

1. В плоскости Oxy найдите вектор $\vec{b}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ и имеющий с ним одинаковую длину.

2. Найдите все решения уравнения

$$2^{1+2x}-9\cdot 2^x+4=0,$$

удовлетворяющие условию $\cos\frac{5x-2}{2+x}<0.$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+3x+2$ на промежутке $[-2;+2]$, постройте ее график.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{6-\sin x-7\cos^2 x}+\sin x=0.$$

5. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана фигура F, ограниченная линиями $y=0$, $x=6$, $y=\frac{4}{x}$ и касательной к кривой $y=\frac{4}{x}$ в точке $A(x_0;y_0)$, в которой $x_0=2$. Найдите площадь фигуры F.

Задачи устного экзамена

1. Найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$.

2. Найдите линейную функцию $f(x)$, если $f(-1)=2$, $f(2)=-3$.

3. Найдите квадратичную функцию $f(x)$, если $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(3)=5$.

4. Найдите функцию, обратную функции

а) $y=2x-4$;

б) $y=\lg\frac{x}{2}$;

в) $y=x^2-1$, $x\in\,]-\infty;0]$.

5. Выясните, является ли четной или нечетной функция

а) $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$;

б) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

в) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

6. Найдите область определения функции

а) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

б) $y=\sqrt{6x-x^2-5}$;

в) $y=\log_2\frac{x^2-3x+2}{x+1}$;

г) $y=\log_{|x|-4}2$;

д) $y=\sqrt{\frac{3^x-4^x}{2x^2-x+5}}$.

7. Постройте график функции

а) $y=\frac{1-2x}{3}$;

б) $y=|x^2-x-6|$;

в) $y=|x|+|x-1|$.

8. Найдите предел

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

9. Найдите производную функции

а) $y=(\sin 2x+8)^3$;

б) $y=\sqrt{\ln x}$;

в) $y=\sqrt{\sin 2x}$.

10. Найдите уравнение касательной к параболе $y=x^2-7x+3$, если эта касательная параллельна прямой $5x+y-3=0$.

11. Найдите первообразную функции $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

12. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos ax$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6a}$, $x=\frac{\pi}{2a}$, больше 3?

13. Найдите все значения a, при которых множество

$\{(x;y)\mid x^2+y^2+2x\leqslant 1\}\cap\{(x;y)\mid x-y+a=0\}$

содержит только одну точку. Найдите эту точку.

14. Вычислите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{b}=(3;-2;1)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$ и $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

15. Отрезок AB единичной длины является хордой сферы радиуса 1 и расположен под углом $\frac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра CD до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определите $|BD|$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из орудия вылетает снаряд со скоростью $v_0=600$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите наибольшую высоту и время полета снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Автомашина массой m движется с постоянной скоростью v : 1) по горизонтальному плоскому мосту; 2) по выпуклому мосту; 3) по вогнутому мосту. Радиус кривизны моста в последних двух случаях равен R. С какой силой давит машина на мост, проезжая через его середину, в каждом из случаев?

3. Конькобежец массой $M=70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=3$ кг со скоростью $v=8$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}02$?

4. В баллонах объемом $V_1=20$ л и $V_2=44$ л содержится газ. Давление в первом баллоне $p_1=2{,}4$ мПа, во втором — $p_2=1{,}6$ мПа. Определите общее давление после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

5. В воздухе на расстоянии $r=10$ см расположены два точечных электрических заряда $q_1=8\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=-6\cdot10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между зарядами.

6. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при его замыкании на внешнее сопротивление $R_1=1$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1=2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2=2$ Ом напряжение на зажимах $U_2=2{,}4$ В. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

7. Найдите мощность электрического нагревателя, если с его помощью за время $\tau=20$ мин можно вскипятить $V=2$ л воды. Начальная температура воды $t=20°$С; КПД нагревателя $\eta=70\%$; удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг · К).

8. Прямолинейный проводник с током помещен в однородное магнитное поле индукцией $B=0{,}2$ Тл. Определите силу, действующую на проводник, если длина проводника $l=10$ см, сила тока $I=3$ А, а направление тока составляет с направлением индукции поля угол $\alpha=45°$.

9. В дно озера вбита свая высотой $H=4$ м, выступающая из воды на $h=1$ м. Найдите длину тени сваи на дне озера, если лучи Солнца падают на поверхность воды под углом $\alpha=45°$. Показатель преломления воды $n=4/3$.

10. Как с помощью вогнутого сферического зеркала получить уменьшенное изображение предмета?

Публикацию подготовили
В. Ковалев, А. Назаретов,
Г. Ткачев, Г. Шадрин

Московский технологический институт пищевой промышленности

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(первый экзамен на механическом факультете)

1. Упростите выражение

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

и вычислите при $a=1, 2$ и $b=3/5$.

2. Корни квадратного уравнения $x^2-12x+c=0$ оба целые, причем один корень вдвое больше другого. Чему равен свободный член c?

3. Вычислите x, если

$$\log_2\log_3\log_4 x=0.$$

4. Решите уравнение

$$\log_6(5+6^{-x})=x+1.$$

5. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}<0{,}2.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}.$$

7. Найдите наименьшее значение функции $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;2]$.

8. Какой угол φ образует с осью абсцисс касательная к кривой $y=x-x^2$ в точке с абсциссой $x=1$?

9. Постройте график функции $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Сколько общих точек имеет график с осью Ox?

10. Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что второй член $a_2=-5/9$, знаменатель прогрессии $q=-1/9$.

Вариант 2
(второй экзамен на механическом факультете)

1. Периметр равнобедренного треугольника 32 см, основание относится к боковой стороне как 6:5. Определите площадь треугольника.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=9-x^2$, $y=0$.

3. Вычислите $\dfrac{87}{3+4\cos2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

4. Вычислите $\cos45°\cdot\cos15°-\sin45°\cdot\sin15°$.

5. Упростите выражение

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(x+20°)+\operatorname{tg}(70°-x)=2.$$

Ответ запишите в градусах.

7. Найдите длину медианы треугольника, проведенной из вершины B, если $A(2;-1)$, $B(0;-3)$ и $C(4;3)$ — вершины треугольника.

8. Найдите сумму квадратов диагоналей параллелограмма, построенного на сторонах $a=5$, $b=3$.

9. Вычислите объем цилиндра, если диаметр его основания есть $D=10$ см и высота равна $H=16$ см. Примечание. Считайте $\pi=3{,}14$.

10. В полукруг вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Определите эту максимальную площадь, если $R=2$.

Вариант 3
(экзамен на остальных факультетах)

1. При каком значении k уравнение $kx^2+12x-3=0$ будет иметь корень, равный 1/5?

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$

и вычислите при $a=-2{,}5$ и $b=0{,}5$.

3. Решите уравнение

$$\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right).$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x-7}-\frac{6}{\sqrt{x-7}}-1=0.$$

5. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$\sqrt{(0{,}8)^{x(x-3)}}>1.$$

6. Вычислите $\operatorname{tg}110^\circ+\operatorname{ctg}20^\circ$, не используя таблиц.

7. Найдите корень уравнения

$$\cos 4x=-2\cos^2 x,$$

лежащий в интервале $50^\circ<x<90^\circ$. Ответ запишите в градусах.

8. Через точку, которая делит гипотенузу в отношении 1:2, проведен перпендикуляр, который делит катет длиной 6 см на два отрезка. Определите длину большего из этих отрезков, если длина гипотенузы равна 9 см.

9. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны основания равны 5 и 11, а диагональ пирамиды 12. Определите боковую поверхность.

10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y=\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$$

в точке с абсциссой $x=1$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

1. Два одинаковых груза массой $m_1=2$ кг каждый связаны нитью, перекинутой через блок с неподвижной осью. На один из грузов кладут перегрузок массой $m_2=1$ кг. С каким ускорением будут двигаться грузы? Принять $g=10$ м/с².

2. Веревка длиной $l=20$ м переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем, в результате незначительного толчка, начинает двигаться по блоку. Какова будет скорость веревки в момент, когда она сойдет с блока? Массой блока пренебречь. Считать $g=10$ м/с².

3. Маховик диаметром $d=1$ м вращается равномерно, при этом точки на ободе маховика имеют скорость $v=10$ м/с. Определите период вращения маховика. Считать $\pi=3{,}14$. Ответ округлить до десятых долей.

4. Определите КПД нагревателя, расходующего $m_1=0{,}08$ кг керосина на нагревание $m_2=3$ кг воды на $\Delta T=90$ К. Теплота сгорания керосина $q=4{,}2\cdot10^7$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Ответ дать в процентах, с точностью до целого числа.

5. Два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1=1{,}7$ В и $\mathcal{E}_2=1{,}4$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=0{,}8$ Ом и $r_2=0{,}4$ Ом соединены последовательно и подключены к резистору сопротивлением $R=5$ Ом. Определите напряжение на внешнем участке цепи.

6. Проводник длиной $l=1$ м движется со скоростью $v=5$ м/с перпендикулярно к линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0{,}2$ В.

7. Радиус кривизны выпуклого зеркала $R=1{,}5$ м. Предмет находится на расстоянии $d=5$ м от него. На каком расстоянии от зеркала будет изображение предмета? Ответ дать с точностью до двух знаков после запятой.

8. Луч света переходит из стекла в воду, причем угол падения $\alpha=45^\circ$, а угол преломления $\beta=53^\circ$. Найдите показатель преломления стекла, если показатель преломления воды $n_в=1{,}3$. Ответ дать с точностью до 0,1. Принять $\sin 45^\circ=0{,}7$; $\sin 53^\circ=0{,}68$.

Публикацию подготовили
З. Кузьменко, А. Узиков

Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{(a^{-1}+b^{-1})\,(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\cdot\sqrt[5]{a^{-2}}}}.$$

2. Решите уравнение

$$\lg\sqrt{75+5^{\sqrt{x-1}}}=1.$$

3. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=10x^3-13x^2+7x$, $g(x)=11x^3-15x^2-3$.

4. Решите уравнение

$$5\cos 2x=4\sin x.$$

5. Сумма длин радиуса основания и образующей конуса равна n; образующая составляет с основанием угол α. Найдите полную поверхность конуса.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$(-\sqrt[3]{x^{0,4}})^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\sqrt[3]{x^2}-x^{-1}\left(\frac{-3x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^{-0,6}}}\right)^2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_5(x^2-11x+43)=2.$$

3. Решите неравенство $f'(x)\geq g'(x)$, если $f(x)=5-3x+\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}$, $g(x)=3x-7$.

4. Решите уравнение

$\sin x-\cos x-4\cos^2 x\cdot\sin x=4\sin^3 x$.

5. Найдите объем конуса, высота которого 12 дм, а площадь осевого сечения 48 дм^2.

Задачи устного экзамена

1. Постройте график функции

а) $y=2^{\log_2 x}$;

б) $y=\log_{1-\cos^2 x}\sin^2 x$.

2. Найдите знак числа $\lg x$, если $x^3<x^2$.

3. Решите неравенство

$$\frac{(x-1)^2x}{x+1}\leq 0.$$

4. На какое множество отображает производная функции $y=\sqrt[4]{x^3}$ промежуток $\left[\frac{1}{16}; 81\right]$?

5. Найдите все значения a, для которых выполняется неравенство

$$\int_0^a x\,dx\leq a+4.$$

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$.

7. Найдите угол между непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два корабля движутся относительно берега со скоростями $v_1=9$ уз и $v_2=12$ уз, направленными под углами $\alpha_1=30°$ и $\alpha_2=60°$ к меридиану. С какой скоростью второй корабль движется по отношению к первому? (1 уз $=0,514$ м/с — *прим. ред.*).

2. Торговое судно, взяв груз в порту Мурманск ($\varphi=70°$ северной широты), перевезло его в порт, расположенный на экваторе. Во сколько уменьшился вес груза на экваторе по сравнению с весом груза в порту Мурманск? (При решении задачи учесть эффект, создаваемый вращением Земли; Землю считать шаром.)

3. При подъеме корабля в док попала большая льдина. Что произойдет с уровнем воды в доке, когда льдина растает?

4. Сколько молекул содержится: 1) в 1 см^3 пресной воды; 2) в 1 см^3 воздуха (при нормальных условиях)?

5. Три одинаковых заряда $q=10^{-6}$ Кл расположены по вершинам равностороннего треугольника со стороной $r=20$ см. Какую работу надо совершить, чтобы расположить эти заряды в одну линию с расстоянием 10 см между соседними? Заряды находятся в вакууме.

6. Заряженный шар радиусом $r_1=1$ см соединяют тонким длинным проводником с незаряженным шаром, радиус которого $r_2=2$ см. После того как шары разъединили, энергия второго шара оказалась равной $W=0,3$ Дж. Какой заряд был на первом шаре до соединения? Электроемкостью соединительного проводника пренебречь.

7. Лифт массой $m=0,5$ т поднимается на высоту $h=25$ м за $t=30$ с. Напряжение на зажимах электродвигателя $U=127$ В, КПД мотора $\eta=90\%$. Определите мощность, потребляемую мотором, и силу тока в обмотках электродвигателя.

8. Контур радиоприемника судовой радиостанции настроен на частоту $f=9$ МГц. Как нужно изменить емкость переменного конденсатора колебательного контура приемника, чтобы он был настроен на длину волны $\lambda=50$ м?

9. Левый фонарь бортовых огней излучает электромагнитные волны длиной $\lambda=7\cdot10^{-7}$ м, что соответствует красному цвету. Какова длина волны этих лучей в воде ($n=1,33$)?

10. На паруса какой окраски, черной или белой, свет будет оказывать большее давление?

Публикацию подготовили
Е. Банная, А. Панков, В. Цилик

Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найдите площадь сечения и объем пирамиды, зная сторону основания a и угол α между сечением и основанием.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x=4\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$$

5. Вычислите предел

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

Вариант 2

1. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k. Найдите двугранный угол при основании.

2. Решите уравнение

$$\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x+\pi}{2}}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\frac{3x+2}{4(1-x)}>0.$$

4. Найдите $\log_{30}8$, если известно, что $\lg 5=a$ и $\lg 3=b$.

5. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если O — начало координат, вектор $\overrightarrow{OA}$ составляет с осями Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$, и точка B имеет координаты $(-2;\,-2;\,-2\sqrt{2})$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Понятие об абсолютном нуле температуры. Абсолютная температурная шкала. Уравнение состояния идеального газа.

2. Прямой постоянный магнит падает сквозь металлическое кольцо. Будет ли магнит падать с ускорением свободного падения? Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ объясните.

3. Самолет описывает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. Определите наименьшую скорость самолета, при которой летчик не оторвется от самолета в верхней точке петли. Радиус петли $R=180$ м. Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

4. Определите максимальные значения кинетической энергии и скорости электронов, вылетающих из металла под действием гамма-лучей с длиной волны $\lambda=0{,}03$ нм. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с. Масса электрона $m=9{,}1\times\times10^{-31}$ кг.

Вариант 2

1. Законы отражения света. Построение изображений в сферических зеркалах. Фокус зеркала.

2. Как будет меняться период колебаний маятника, представляющего собой сосуд малой массы, подвешенный на длинной нити и наполненный водой, если вода постепенно вытекает из отверстия в дне сосуда?

3. Свинцовая пуля пробивает доску, при этом скорость пули падает с $v_0=400$ м/с до $v=300$ м/с. Какая часть пули расплавилась? Нагреванием доски можно пренебречь. Начальная температура $t_0=27$°С. Температура плавления свинца $t=327$°С. Удельная теплоемкость свинца $c=0{,}126$ кДж/(кг · К). Удельная теплота плавления свинца $\lambda=0{,}25\times\times10^5$ Дж/кг.

4. Электрон (заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг) влетает со скоростью $v=1{,}5\cdot10^7$ м/с в однородное магнитное поле с индукцией $B=6{,}28\cdot10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям поля. Найдите радиус окружности, которую электрон опишет в этом поле.

Вариант 3

1. Переменный ток. Генератор переменного тока. Период и частота переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока. Трансформатор. Передача и распределение энергии.

2. Лучи красного и зеленого света переходят из воды в воздух. Покажите ход лучей. Ответ объясните.

3. Снаряд массой $m_1=50$ кг, летящий под углом $\alpha=30°$ к вертикали со скоростью $v_0=800$ м/с, попадает в платформу, нагруженную песком, и застревает в нем. Найдите скорость платформы после падения снаряда, если ее масса $m_2=16$ т.

4. Электрон в невозбужденном атоме водорода получил энергию $E=12$ эВ. На какой энергетический уровень он перешел? Сколько линий можно будет увидеть в спектре излучения при переходе электрона на более низкие энергетические уровни? Энергия основного состояния атома водорода $E_1=-13{,}5$ эВ.

Публикацию подготовили

Л. Гущин, Н. Ларионова, Я. Шайцан

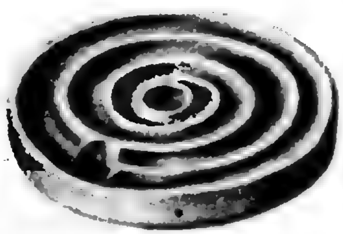
Задачи наших читателей

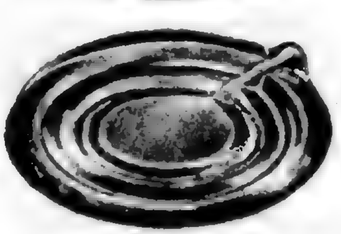
Многие хозяйки при кипячении молока пользуются так называемым молочным сторожем. Два таких «сторожа» показаны на рисунке. Первый (более старинного образца) сделан из фаянса, сверху на нем имеется спиралевидное углубление, а сбоку — небольшое отверстие. Второй (современный вариант) внешне похож на небольшую перевернутую металлическую тарелку, в дне которой имеется два кольцеобразных углубления, соединенных радиальным каналом.

Воздушные пузырьки, оторвавшиеся от дна кастрюли или от самого «сторожа» (положенного на дно кастрюли), выходят из бокового отверстия «сторожа», поднимаются вверх и разрывают пенку на молоке, спасая молоко от «убегания».

Казалось бы, все ясно. Только зачем в «стороже» спиралевидное (или кольцеобразное) углубление?

Л. Ашкинази





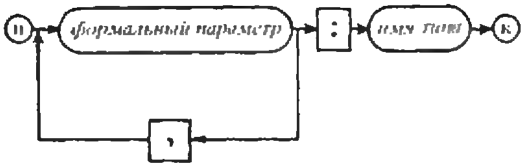
Заочная школа программирования

Урок 20: Параметры процедур и функций

В языке Паскаль как процедура, так и функция могут иметь список параметров. Каждый из параметров процедуры*) изображается внутри описания процедуры некоторым именем, называемым формальным параметром. Формальный параметр играет роль обозначения, позволяющего описать ту последовательность действий, которую мы хотим применить при разных выполнениях процедуры к различным фактическим величинам. Эти величины задаются в операторе вызова процедуры или в обращении к функции в виде списка фактических параметров, длина которого совпадает с длиной списка формальных параметров. Между формальными и фактическими параметрами устанавливается простое позиционное соответствие: первый фактический параметр соответствует первому формальному, второй — второму и т. д. Каждый формальный параметр процедуры осмыслен только внутри данной процедуры. В начале выполнения процедуры формальный параметр связывается с величиной, заданной соответствующим фактическим параметром и существующей вне этой процедуры. В Паскале имеется четыре вида параметров: параметры-значения, параметры-переменные, параметры-процедуры и параметры-функции. Вид того или иного параметра процедуры задается в ее заголовке (см. урок 16).

Параметры-значения

Параметры-значения описываются диаграммой:



Параметр-значение процедуры является ее локальной переменной (о локальных и глобальных именах в Рапире см. Урок 7). Формальный параметр представляет эту переменную в пределах описания процедуры. Фактический параметр в этом случае должен быть выражением того же типа, что и переменная, обозначаемая соответствующим формальным параметром. В момент вызова процедуры происходит вычисление этого выражения, и полученное значение присваивается переменной в качестве начального значения. В дальнейшем при выполнении процедуры эта переменная ничем не отличается от других локальных переменных этой процедуры.

Поиск наибольшего общего делителя двух целых положительных чисел может быть осуществлен с помощью следующей функции:

```
function нод(x, y:integer):integer;
  {0<y<x}
   begin if y=0
       then нод:=x
       else нод:=нод(x,x mod y)
 end;
```

Задание 20.1. *Имеется следующее описание функции:*

```
function a(x,y: integer):integer;
  {x>0,y>0}
  begin if x=0
         then a:=y+1
         else if y=0
               then a:=a(x—1,1)
               else a:=a(x—1,a(x,y—1))
  end;
```

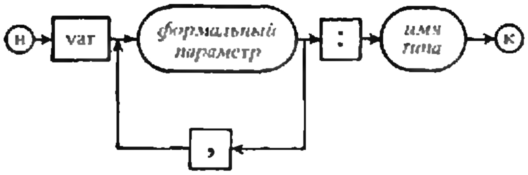
Определить максимальное число экземпляров параметра x, одновременно существующих при выполнении обращения a (2,2).

Параметры-переменные

Диаграмма, описывающая *параметры-переменные*, имеет вид:

---

*) Все, что здесь и ниже говорится о параметрах процедуры, полностью переносится на параметры функции.



В этом случае фактический параметр должен быть переменной заданного типа, а формальный параметр служит обозначением этой переменной во все время данного выполнения процедуры. Если в фактическом параметре имеются индексы, то они вычисляются в момент вызова процедуры.

Параметр-переменная необходим во всех случаях, когда параметр используется для представления результата процедуры или функции.

В программах сортировок, рассматривавшихся во втором номере «Кванта», уже использовался такой вид параметров.

Пусть имеются следующие описания:

```
vark:integer;
    b:array [1...100]of real;
proceduremax(var i:integer);
    {1<i<100}
    varj:integer;
    begin
      forj:=i+1 to 100 do
        ifb[i]<b[j]theni:=j
      end;
```

Тогда после выполнения операторов

$$k:=20;\ max(k)$$

переменной *k* будет присвоен индекс наибольшего элемента из

$$b[20],\ b[21],\dots,b[100].$$

З а д а н и е 20.2. *Можно ли использовать процедуру*

```
procedure замена (var x,y:integer);
  varz:integer;
  begin
z:–x;
x:=y;
y:=z
  end
```

для обмена значениями у любых двух переменных целого типа? Например, поменяются ли значения у переменных k и a[20] после вызова ***замена*** *(k, a [k+1]), если до его выполнения k было равно 19?*

З а д а н и е 20.3. *Пусть имеются описания*

```
type таблица=array[1..2,1..2] of integer;
procedure умножение (var x,y,z:таблица);
  begin
    z[1,1]:=x[1,1]*y[1,1]+x[1,2]*y[2,1];
    z[1,2]:=x[1,1]*y[1,2]+x[1,2]*y[2,2];
    z[2,1]:=x[2,1]*y[1,1]+x[2,2]*y[2,1];
    z[2,2]:=x[2,1]*y[1,2]+x[2,2]*y[2,2]
  end;
```

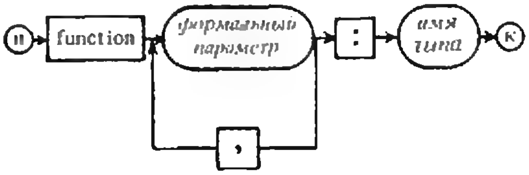
и даны три таблицы

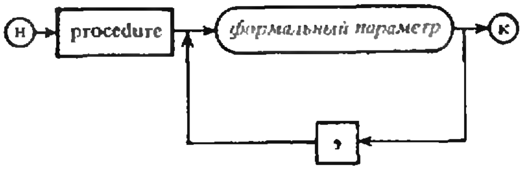
$$a=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}3, & 3\\ 3, & 3\end{pmatrix}.$$

Определить вид таблиц a, b и c после каждого из вызовов: ***умножение*** *(a, b, c),* ***умножение*** *(a, b, a),* ***умножение*** *(a, b, b). Что произойдет при этих же вызовах, если параметры x и y сделать параметрами-значениями? Что будет, если и z станет параметром-значением?*

Параметры-процедуры и параметры-функции

Диаграммы, описывающие *параметры-процедуры* и *параметры-функции*, имеют вид:





Фактическим параметром должно быть имя процедуры или функции (в зависимости от вида параметра), а соответствующий формальный параметр служит ее обозначением во все время выполнения оператора вызова.

Параметры-процедуры и параметры-функции используются в тех случаях, когда в процедуру или функцию требуется передать не результат некоторого вычисления, а правила этого вычисления.

Следующая функция

```
function корень(эпсилон, a,b:real;
                     functionf:real):real;
  {f(x) — вещественная функция с одним
параметром типа real. Функция непрерывна
в интервале a<x<b и имеет в точках a и b
значения разных знаков}
  var c:real; d:boolean;
  begin
   if f(a)>0 then
     begin c:=a; a:=b; c:=b end;
   d:=true;
```

```
    while(abs(a—b)>эпсилон)AND d do
      begin
          c:=(a—b)/2;
          if f(c)=0
          then d:=false
          else if f(c)>0
          then b:=c
          else a:=c
      end;
   корень:=(a+b)/2
  end;
```

позволяет находить корень уравнения $f(x)=0$ для любой функции f на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ с точностью *эпсилон* методом половинного деления (y является корнем уравнения $f(x)=0$ с точностью *эпсилон*, если $f(y-эпсилон)$ и $f(y+эпсилон)$ имеют значения разных знаков).

Задание 20.4. *Заданы описания процедур:*

```
 procedure p;
   begin writeln (15) end;
procedure r(x:integer;procedure g);
   procedure q;
     begin writeln(x) end;
   begin
     if x=1
     then g
     else if x=10
            then r(x—1,q)
            else r(x—1,g)
     end;
```

Что будет напечатано в результате выполнения каждого из операторов вызова

$$r(20,p),\ r(5,p)?$$

В. Касьянов

Информация

Об итогах конкурса «Малый интеркосмос»

ЦК ВЛКСМ, Академия наук СССР, Министерство просвещения СССР, Государственный Комитет СССР по профессионально-техническому образованию, Всесоюзное общество «Знание» с февраля по ноябрь 1981 г. провели первый Всесоюзный конкурс учащихся школ, профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента, посвященный 20-летию первого полета в космос человека, гражданина СССР Ю. А. Гагарина*). Активное участие в конкурсе приняли юноши и девушки Украины, Белоруссии, Казахстана, Горьковской, Калужской, Московской, Ростовской, Саратовской, Ташкентской областей, гг. Москвы, Тбилиси. В целом в адрес оргкомитета конкурса поступило свыше 2 тысяч проектов научных, технических, прикладных и технологических экспериментов.

С 3 по 6 ноября в Москве состоялся заключительный этап конкурса, в котором участвовало 400 руководителей научно-технических объединений, юных любителей авиации и космонавтики из всех союзных республик страны. Среди них 94 члена ВОИР и НОУ, 44 участника ВДНХ СССР, 26 лауреатов смотра НТТМ. По возрасту подавляющее большинство составили учащиеся 8—10 классов. Самый юный участник финала — Дурманова Ира — ученица 3 класса с. ш. № 6 г. Херсона. На заключительный этап конкурса прибыли также делегации учащихся НРБ, ВНР, ГДР, ЛНДР, МНР, СРВ, ЧССР.

Защита предложенных проектов проходила по 8 секциям. Их возглавляли авторитетные жюри из видных ученых во главе с летчиком-космонавтом СССР, председателем Федерации космонавтики СССР Н. Н. Рукавишниковым. Жюри высоко оценило представленные работы, например, космическую дрель киевлянина Виктора Аврутиса, цветомузыкальные очки группы юных техников пос. Новомихайловский Краснодарского края, автоматический регистратор микрометеоритов москвича Александра Стеркина, рекомбинационный ракетный двигатель Андрея Воронина из г. Ивантеевка Московской области.

Наши болгарские друзья Тошо Недялков и Святослав Божилов сделали математические расчеты запуска зонда перпендикулярно плоскости эклиптики. Исполнение этого проекта позволит получить много новой информации. За свою работу юные исследователи награждены призом имени М. В. Келдыша.

Члены кружка космического проектирования Московского городского Дворца пионеров и школьников под руководством специалистов на основании физико-математических расчетов предложили серию проектов конструкций, обеспечивающих деятельность космонавтов вне корабля, таких как специальное космическое кресло, устройство для закрепления космонавтов на любом месте поверхности орбитальной станции.

Интересны, оригинальны, устремлены в будущее работы учащихся г. Москвы, Белгородской, Калужской, Челябинской областей, Украинской ССР, ЧССР, ГДР.

Авторы лучших проектов награждены призами им. К. Э. Циолковского, М. В. Келдыша, С. П. Королева, Ю. А. Гагарина, вымпелами ЦК ВЛКСМ, побывавшими в космосе, дипломами, специальными призами, учрежденными различными организациями.

В программе работы с участниками финала особое внимание было уделено пропаганде среди учащихся достижений Советского Союза и стран социалистического содружества в науке и технике, успехов в исследовании и освоении космического пространства. Ребята посетили Мавзолей В. И. Ленина, побывали в «Звездном городке», научных учреждениях, музеях, на ВДНХ СССР, встретились с учеными, специалистами, летчиками-космонавтами СССР. Была организована выставка работ юных космонавтов, на которой экспонировалось около 200 моделей, макетов, конструкций, приборов.

---

*) Условия конкурса публиковались в «Кванте», 1981, №№ 4, 5.

В пленарном заседании приняли участие академик АН СССР, Герой Социалистического Труда Г. И. Петров, летчик-космонавт СРВ Фам Туан, летчики-космонавты СССР Г. С. Титов, Н. Н. Рукавишников, В. Д. Зудов, заместитель министра просвещения СССР Ф. Е. Штыкало, заместитель председателя правления Всесоюзного общества «Знание» Ю. С. Карабасов, секретарь ЦК ВЛКСМ Л. И. Швецова, ученые, специалисты, комсомольские работники, ответственные работники органов народного и профессионально-технического образования. Участникам конкурса прислали приветствия мать первого в мире космонавта А. Т. Гагарина, летчики-космонавты Г. Иванов, З. Йен, М. Гермашевский, В. Ремек.

Обращаясь к ребятам, Зигмунд Йен писал: «Я убежден, что вы будете принадлежать когда-нибудь к славной плеяде ученых, инженеров, техников, специалистов и космонавтов. Своим пытливым умом, интересными идеями, экспериментами, открытиями в области науки и техники, а также своей страстью, активным личным участием будете способствовать продвижению вперед дела освоения космического пространства, путь в которое нам открыл незабываемый Ю. А. Гагарин».

Всесоюзный конкурс учащихся школ и профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента способствовал развитию познавательной активности, фантазии учащихся, воспитанию у них через увлеченность космонавтикой творческого отношения к труду вообще, чувства сопричастности к делам народа, углублению общественно полезной направленности деятельности юных любителей науки и техники, привлечению к работе с детьми и подростками специалистов, ученых, новаторов производства, студентов.

Конкурс показал, что с течением времени интерес детей и подростков к космонавтике не ослабевает. На смену массовому увлечению космическими полетами приходит углубленный и осмысленный интерес к существу проблем и задач космонавтики. Все более широкое распространение получают школы и клубы юных авиаторов и космонавтов, музеи космонавтики, развивается новая область детского технического творчества — космическое моделирование. Сложился опыт этой работы в ряде школ и внешкольных учреждений Удмуртской АССР, Белгородской, Калининградской, Карагандинской, Киевской, Львовской областей.

Ученые, руководители кружков и клубов, участники конкурса высказали предложение о проведении подобного конкурса в 1985—86 гг. в честь 25-летия полета Ю. А. Гагарина.

Ю. Иванов
член оргкомитета конкурса

Уголок коллекционера

Коллекции филателистов, собирающих марки по тематике «советская наука», пополнились новыми марками, посвященными создателям нашей космической науки и техники. В 1981 году, к 70-летию со дня рождения, была выпущена марка с портретом Президента АН СССР академика М. В. Келдыша, который был теоретиком отечественной космонавтики. А в самом начале 1982 года появилась марка с портретом генерального конструктора космических аппаратов и систем академика С. П. Королева.

Выпуск ее приурочен к 75-летию со дня рождения этого выдающегося ученого и организатора отечественной науки и техники. Светлые образы двух героев штурма космоса навсегда увековечены советской филателией.

В. Р.

XIII конференция юных математиков в Батуми

Могут ли старшеклассники заниматься математикой сверх школьной программы? Хотят ли они это делать? Интересует ли их это? Письма и анкеты, поступающие в «Квант», показывают: примерно 10% школьников 9—10 классов интересуются математикой и физикой за рамками школьной программы. Особенно ясно это видно на конференциях, летних лагерях и слетах, куда приезжают школьники из разных городов. На этих слетах школьники сами делают доклады, увлеченно обсуждают работы таких же ребят, как они, сравнивают свои достижения с работами сверстников, обмениваются опытом, погружаются в атмосферу научного творчества, встречаются с учеными и — отдыхают. Велико и воспитательное значение таких контактов старшеклассников разных городов и республик.

Один из таких слетов традиционно проводится в ноябре в г. Батуми. Подготовка и организация этого нелегкого, но очень полезного дела требует немало труда. Организацию слета взяли на себя Совет профсоюзов и Министерство просвещения Аджарии, Аджарское отделение Всесоюзного общества «Знание», обком профсоюза работников просвещения, отдел просвещения и городской комитет комсомола г. Батуми, Дворец пионеров и школьников Аджарии и ФМШ-интернат № 2 г. Батуми. Вдохновителем слета была бессменный член жюри, заслуженный педагог Аджарии М. И. Жгенти; массу труда вложили в него учащиеся школы № 7 г. Батуми.

В XIII празднике юных математиков (так назвали этот слет его организаторы), кроме школьников Аджарии, участвовали около 350 школьников Москвы, Тбилиси, Киева, Свердловска, Перми, Сухуми и других городов, а из Ленинграда приехали не только школьники, но и учащиеся ПТУ № 24, выступившие на одном уровне с командами школьников. Активное участие в празднике приняли члены редколлегии журнала «Квант», ученые из Москвы, Ленинграда, Тбилиси, Свердловска, лекторы Всесоюзного общества «Знание», представители ВЗМШ.

Праздник открыл министр просвещения Аджарии В. М. Цулукидзе. Он рассказал ребятам о заботе, которую проявляет о молодежи партия и правительство, пожелал участникам успешной работы.

Программа конференции была традиционна, хотя некоторые коррективы внесла погода — три дня дождя и града способствовали первоочередному проведению математической части праздника.

Работа секций началась в актовом зале Батумского дворца пионеров с доклада девятиклассника ФМШ № 2 г. Батуми Мераба Путкацадзе «Можно ли сказать, что седьмое ноября чаще выпадает на воскресенье, чем на понедельник?». Затем в течение двух дней состоялось большинство докладов, распределенных жюри по секциям А и Б. Более трудные доклады, предназначенные десятиклассникам, проходили в секции Б, но слушатели часто переходили из одной секции в другую — послушать доклад, привлекший их названием, или просто побывать на докладе одноклассника. Уровень докладов был достаточно высоким, слушались они с вниманием, интересом и пониманием. Члены жюри, комментируя доклады, говорили о связях затронутых вопросов с сегодняшней математикой и ее приложениями.

Расскажем кратко о докладах, вызвавших наибольший интерес. Олег Чалых (ФМШ

Открытие конференции.

Доклад читает М. Путкацадзе.

КВН. Представление команды школы № 91 г. Москвы.

Встреча с «Квантом». Выступление А. Б. Сосинского.

Награды вручает член редколлегии «Кванта» Н. Б. Васильев.

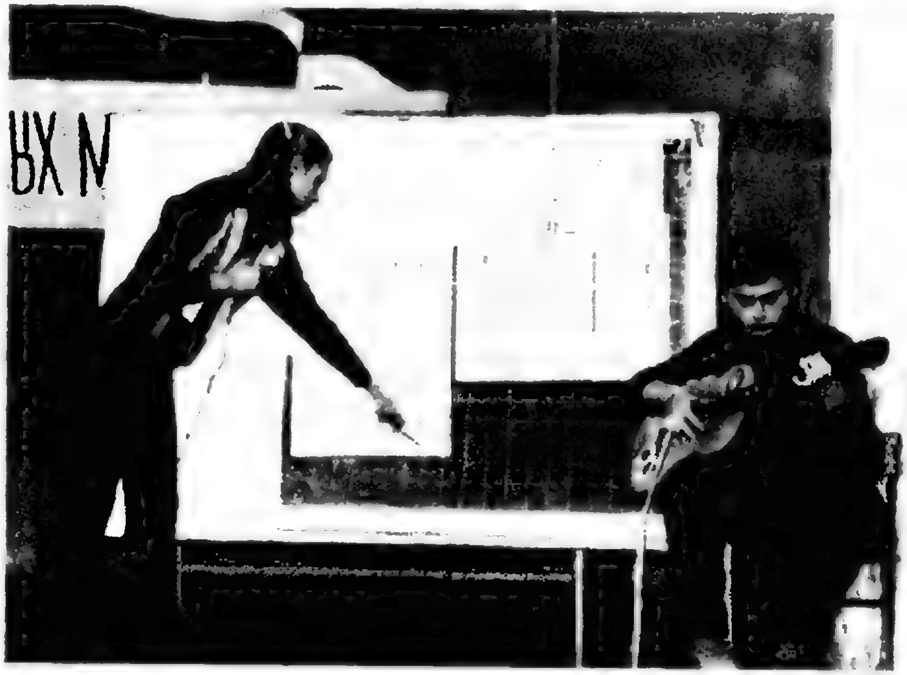
Момент КВН.

В. Ракова читает доклад под аккомпанемент В. Еремеева.

Фото А. Виленкина и Т. Волосюк

XIII

XIII
ПРАЗД
Х М


БХ N

№ 18 при МГУ, 10 кл.) в докладе «Разрезание конгруэнтных блинов» решал такую задачу: *каким должно быть r, чтобы при любом расположении n кругов радиуса r внутри круга радиуса 1 нашлась прямая, пересекающая все круги?* Олег установил, что при нечетном n прямая существует тогда и только тогда, когда

$$r > \left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right) / \left(3\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

а для четных n нашел оценки сверху и снизу для r.

Миша Вировец (с. ш. № 91 г. Москвы, 10 кл.) исследовал замкнутые ломаные, такие, что сумма квадратов проекций их сторон на любую прямую одинакова. Миша назвал такие фигуры (то ли в шутку, то ли всерьез) *изосквериыми*. Он показал, что все правильные n-угольники изосквериы, привел примеры других изосквериых многоугольников и дал некоторую алгебраическую характеризацию изосквериых фигур в терминах комплексных чисел.

Разумеется, в этих докладах (и в большинстве других) речь шла или о решении пусть трудных, но элементарных задач, или об известных классических результатах. Но вот к доске вышел Алеша Павлов (ФМШ № 30 при ЛГУ, 10 кл.) и рассказал о своих собственных исследованиях сумм вида

$$S_N(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{in\varphi}$$

($\varepsilon_n = \pm 1$), которые тесно связаны с так называемыми тригонометрическими суммами. Докладчику удалось улучшить оценку $\max\limits_{\varphi} S_N(\varphi) < 5\sqrt{N}$, недавно полученную двумя американскими математиками (правда, не для всех N). Слушателей очень заинтересовал комментарий члена жюри (и редколлегии «Кванта») Н. Б. Васильева, который объяснил, как эта тематика связана с недавними результатами бывшего победителя многих математических олимпиад, ныне аспиранта МГУ В. Конягина.

Большой интерес у слушателей вызвал доклад Вероники Раковой (с. ш. № 2 г. Свердловска, 9 кл.). Жюри отметило также мастерство ее одноклассника и содокладчика Володи Еремеева, который... аккомпанировал ей на гитаре. Доклад, однако, был совсем серьезным и назывался «Математический подход к проблеме нового гитарного строя».

Когда Лаша Эпремидзе (Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.) начал свой доклад «Непрерывная функция без производной», жюри собралось выслушать обычный рассказ о так называемой функции Ван-дер-Вардена. Однако докладчик стал строить совсем другую функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, утверждая, что она тоже непрерывна и не имеет производной ни в одной точке отрезка $[0;\ 1]$.

Жюри усомнилось в правильности этого утверждения, но Лаша сумел парировать все нападки. Позже, при обстоятельном обсуждении подробного текста доклада выяснилось, что предложенная конструкция вполне корректна и ее обоснование проще традиционного; этот доклад мы надеемся опубликовать в «Кванте».

Следующий из отмеченных нами докладов связан со сравнительно недавним исследованием известных математиков В. Борсука и В. Г. Болтянского. В нем Антон Баков (с. ш. № 104 г. Свердловска, 9 кл.) рассказал о делении плоских фигур на фигуры меньшего диаметра и на фигуры меньшей ширины.

Пожалуй, наибольшее оживление в зале вызвал доклад Мити Ногина (с. ш. № 91 г. Москвы, 10 кл.) «О справедливости кидания на пальцах». Митя объяснил, почему при большом количестве участников этот общепринятый способ выбрать человека по жребию весьма несправедлив — при кидании на пяти пальцах предпочтительнее шансы участника, с которого начинается подсчет, при кидании на десяти — стоящего напротив. Мы надеемся, что последние два упомянутых доклада тоже найдут отражение в «Кванте».

7 ноября, как по заказу, погода улучшилась, и началась праздничная, спортивная и культурная часть конференции. В ее программе был футбольный матч, экскурсии, встреча с «Квантом», математический КВН, вечер занимательной математики. Большое впечатление на ребят произвели Ботанический сад, в котором собраны растения из всех частей света, дельфинарий, в котором дрессированные черноморские афалины группами прыгали через перекладину и кольца, приносили мячи, катали дрессировщика в лодке. Не упустили ребята и возможности искупаться в море (это в ноябре!).

На встрече с «Квантом» перед ребятами выступили члены редколлегии «Кванта» М. И. Башмаков, Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, А. П. Савин, зав. отделом математики А. Б. Сосинский. Они рассказали ребятам о работе журнала, о некоторых интересных вопросах математики, успехах ЭВМ в игре в шахматы. В небольшой анкете, проведенной на месте, ребята высказали свое мнение о журнале, ряд пожеланий.

На вечере занимательной математики ребят ждали выступления свердловчан, сухумцев и пьеса о математических приключениях Старика Хоттабыча и Вольки, подготовленная школой № 7 г. Батуми под руководством заслуженного педагога Аджарии С. К. Кикава. Очень активно прошел математический КВН. Тема домашнего задания «Математика как спорт», как оказалось, допускала много разных трактовок, и если после прекрасного исполнения восточного танца вперед вышли хозяева праздника, то потом их чуть обошла команда школы № 91 г. Москвы. Второе место заняла школа № 7 г. Батуми, третье — сухумцы.

На торжественном закрытии праздника секретарь Батумского горкома комсомола З. Н. Карселадзе вручила участникам грамоты и призы. Выступавшие особо отмечали радостную, дружелюбную атмосферу этого праздника для ребят, принесшего им много радости и пользы

А. Виленкин, А. Сосинский

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать **до 15 сентября** по адресу: 117234, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Заочная физическая школа. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	9-й
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3д.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Учащиеся 9 класса по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс для решения предлагаются задачи 1—4, поступающим в 10 класс — задачи 3—6.

1. Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с горки высотой H (рис. 1). Коэффициент трения между телом и горкой μ. Горка может перемещаться по горизонтальной поверхности без трения; масса горки M; угол наклона к горизонту α. Найдите расстояние, на которое переместится горка за время движения тела по горке.

2. Два пластилиновых шарика с массами m и M движутся перпендикулярно друг другу со скоростями v и V соответственно. Происходит их столкновение, в результате которого шарики слипаются и далее движутся как единое целое. Определите энергию, выделившуюся при столкновении в виде тепла.

3. Однородный куб массой m с длиной ребра a покоится на горизонтальной поверхности; коэффициент трения между поверхностью и кубом $\mu=0{,}8$. Груз массой M прикрепляется к кубу с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 2). При какой минимальной высоте h крепления нити основание куба оторвется от поверхности, а двигаться поступательно куб не будет? Трением нити о блок пренебречь.

4. Известно, что ускорение силы тяжести на поверхности Луны примерно в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли. Исходя из этого, оцените, какие результаты показали бы на Луне рекордсмены мира по прыжкам в высоту и длину, по метанию копья, в беге на 100 метров.

5. Цилиндр, изготовленный из теплоизоляционного материала, разделен на три части с объемами V_1, V_2 и V_3 нетеплопроводными заслонками. Во всех трех частях находится один и тот же газ, при этом его давление и температура в первой части равны p_1 и T_1, во второй — p_2 и T_2, а в третьей — p_3 и T_3. Какое давление установится в цилиндре, если заслонки открыть?

6. Металлическое кольцо массой m и сопротивлением R начинает падать под действием силы тяжести с высоты H в магнитном поле с индукцией, изменяющейся с высотой x по закону $B(x)=B_0(1-x/H)$ (рис. 3). Определите установившуюся скорость падения кольца, если его радиус l, а плоскость кольца остается перпендикулярной линиям магнитной индукции.

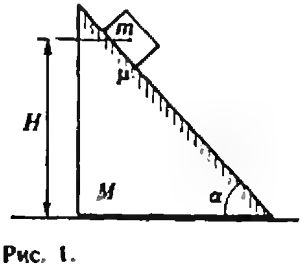


Рис. 1.

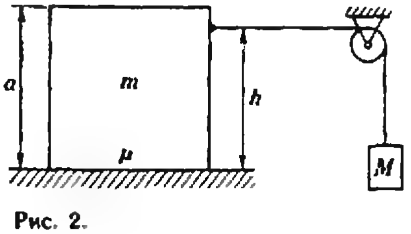


Рис. 2.

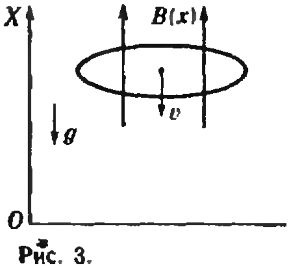


Рис. 3.

Астрономия: наука и ее творцы

«Пути, которыми люди проникают в суть небесных явлений, представляются мне почти столь же удивительными, как и сами эти явления» — эти слова, принадлежащие одному из величайших астрономов Иоганну Кеплеру, служат как бы эпиграфом к книге Д. Херрмана «Открыватели неба»*). Книга посвящена истории накопления и развития астрономических знаний; в ней рассказывается об открытиях и заблуждениях, о столкновениях и борьбе идей, о счастливых и горьких судьбах творцов науки.

Астрономия — одна из древнейших, едва ли не самая древняя наука. Своими истоками она уходит в те незапамятные времена, когда человек впервые задал себе вопрос: а что это такое — раскинувшееся над ним звездное небо? И еще: откуда по утрам приходит и куда прячется солнце? Почему луна ночь от ночи меняет свой облик, постепенно превращаясь из едва заметного серпа в яркий серебряный диск, а затем вновь становясь ущербной, будто пожираемое каким-то чудовищем? Может, и впрямь в этом участвуют неземные существа, неведомые силы? И вот возникают мифы, рождаются божества, которые требуют поклонения и которых надо задабривать, ибо от них зависят здоровье людей и хороший урожай, удачная охота и благополучное возвращение из похода. В свою очередь мифы дают названия многим звездам, созвездиям, туманностям.

Это наивное обращение к звездам, как и попытки жрецов интерпретировать небесные явления с целью предсказания грядущих событий, еще даже не прелюдия астрономии. А что же следует принять за ее начало? Автор книги считает первым, принципиально важным шагом на пути становления астрономии как науки систематическое составление списков созвездий, видимых в ночное время; такие списки появились в Древнем Египте около 2000 г. до н. э. Таким образом, история развития астрономии насчитывает почти четыре тысячелетия. Долгие века рутины сложившихся представлений сменялись периодами бурного подъема, революционных потрясений, ломки привычных, устоявшихся взглядов и концепций. Такой подъем эта наука переживает и сегодня. Он знаменуется проникновением в далекие глубины Вселенной, открытием пульсаров, квазаров и других экзотических объектов, выведением астрономических инструментов за пределы Земли — на спутники и космические станции.

Разумеется, на 200 страницах своей книги автор не мог осветить всю 40-вековую историю астрономии с исчерпывающей полнотой, но он сделал максимум возможного, нарисовав логически стройную картину совершенствования представлений о мире, показав взаимосвязь этих представлений с общественно-экономическим развитием человечества. Что же касается самих творцов, «открывателей неба», то в предметно-именном указателе к книге фигурирует более 250 имен ученых, внесших заметный вклад в астрономию. Список, возможно, и не исчерпывающий, но достаточно полный. И что самое главное — повествование ведется в стиле непринужденного рассказа, беседы с читателем. В книге даже отсутствует нумерация глав и разделов, а сами заголовки — нестандартные, броские, завлекательные. Например, в главе «От гармонии мира к всемирному закону» есть такие разделы: «Исследователь из Ураниборга» (о Тихо Браге), «Браге ищет компромиссное решение», «Геометрический мир» (о построениях Кеплера), «Встреча в Праге», «На пороге небесной механики», «Еретик» (о Джордано Бруно), «Конфликт разума и силы» (о Галилее).

Очень сложно пересказать содержание такой книги, поэтому мы ограничимся кратким обзором ее и лишь на некоторых моментах остановимся подробнее.

В открывающей книгу главе «Звезды над Вавилоном» речь идет о предыстории астрономии: о наблюдении за Солнцем, Луной и звездами в Вавилоне и Египте, о древних календарях и пророчествах жрецов, о первых обсерваториях и монументальных сооружениях вроде «вычислительной машины каменного века», позволявшей предсказывать движение Солнца и Луны и даже, по предположениям ученых,— их затмения.

В главе «Книга с картинками и система колес» рассказывается о возникновении астрономии как науки, источником для которой послужили систематические наблюдения за положением и перемещением звезд, проводившиеся в Древней Греции, группировка звезд в созвездия, составление каталогов звезд и карт звездного неба и т. п.— вплоть до попыток построения единой картины мира. Венцом древнегреческой астрономии явилась геоцентрическая система Птолемея, согласно которой в центре мироздания находится Земля. Несмотря на все свое несовершенство, система Птолемея продержалась полтора тысячелетия. Сейчас, с высоты наших знаний, она кажется предельно ненаучной, абсурдной, но, если мысленно перенестись на двадцать столетий назад и представить себе, что в распоряжении астрономов были лишь примитивные угломерные приборы да собственные глаза, можно только восхищаться глубокомыслием и мудростью древних ученых — Евдокса, Аристотеля, Гиппарха и того же Птолемея, строивших сложные траектории движения небесных тел в виде эпициклов, эксцентров, гомоцентрических сфер и т. п.

Недостатки геоцентрической системы сознавали многие ученые, и она не продержалась бы столь долго, если бы не яростная защита со стороны всемогущей церкви, ибо концепция Земли как центра мира полностью отвечала догматам религии. Потребовался не только гений ученых, но и великое мужество, чтобы заявить: «В центре господствует Солнце!». Именно это изречение автор взял в качестве названия для следующей главы, посвященной, в основном, описанию жизни и творческого подвига Николая Коперника, который сформулировал истинно научные принципы гелиоцентрической системы мира. (Любопытна рассказанная в книге история публикации фундаментального труда Коперника, особенно авторского предисловия, которое увидело свет лишь триста лет спустя.)

---

*) Д. Херрман. Открыватели неба. Перевод с немецкого. М., «Мир». 1981.

XVI-XVII века — период бурного расцвета коперниковской астрономии, ее развития и совершенствования. Он насыщен драматическими и даже трагическими событиями (сожжение на костре инквизиции Джордано Бруно, вынужденное отречение от своих взглядов Галилео Галилея). Но ни запреты, ни травля, ни расправа с инакомыслящими не могли остановить поступательное движение науки, а вместе с ней — перестройку человеческого сознания, торжество материалистических идей. Этот период, которому посвящена глава «От гармонии мира к всемирному закону», завершается открытием Исааком Ньютоном «формулы мира» — закона всемирного тяготения. В результате родилась не только механика как наука о движении под действием сил, но и небесная механика как наука о движении небесных тел под влиянием «центральных» сил тяготения.

Принято считать — и совершенно справедливо, что наше время характеризуется взаимным проникновением наук. Но такой процесс начался не сегодня. Еще в 1800 году знаменитый английский астроном Вильям Гершель поставил интересный и необычный по тем временам опыт: пропустив солнечный свет через призму, с помощью термометра он измерил температуру различных участков образовавшегося спектра. Выяснилось, что за пределами наиболее теплого красного участка видимой части спектра имеется еще более «горячая» область. Так было открыто инфракрасное (а вскоре и ультрафиолетовое) излучение. Но главное, опыты Гершеля показали, что можно, не покидая Землю, узнать об астрономических объектах нечто значительно большее, чем их положение на небосводе. Можно сказать, что эти опыты на службу астрономии поставили сугубо земную науку — физику и заложили основы астрофизики. Об астрофизических исследованиях небесных объектов рассказано в главе «Физика неба».

Следующий принципиально важный этап связан с применением в астрономии спектроскопии. К этим исследованиям причастны многие физики, химики и астрономы второй половины XIX века. Изучая спектры звезд, удалось установить их многие физические и химические свойства такие, как химический состав, температуру, физическое строение, скорости движения. Полученные сведения о звездах настолько обширны, что дают богатую пищу для суждения об их происхождении и эволюции. Этой теме посвящена глава «Рождение и жизнь звезд».

Продолжительность жизни звезд исчисляется миллиардами лет, и даже едва заметные изменения в их состоянии происходят за миллионы лет. Лишенные возможности наблюдать за развитием звезд непосредственно, мы вынуждены судить об этом процессе косвенно, изучая звезды, находящиеся на различных этапах эволюции.

Эта глава, как и две последние — «В мире галактик» и «Новый Колумб», подводят читателя к сегодняшнему дню астрономии. Здесь описаны новейшие астрономические инструменты: крупнейший в мире 6-метровый зеркальный телескоп, установленный на Северном Кавказе, гигантские радиотелескопы, позволяющие проникать на расстояния в миллионы световых лет, рентгеновские и гамма-телескопы и даже установка для улавливания гравитационных волн. Подробно рассказано о выходе человека в космос, об исследовании Луны и планет Солнечной системы.

Но основное в заключительных главах — картина Вселенной, какой мы представляем ее сейчас. Автор знакомит читателя с теорией Фридмана о нестационарной Вселенной, с работами Хаббла и других ученых, доказавших эффект разбегания галактик, с теорией «большого взрыва» и ее подтверждением — наличием реликтового излучения, с гипотезой Амбарцумяна о возникновении звездных систем в ядрах галактик и т. д.

В заключение хочется подчеркнуть, что книга богато иллюстрирована красочными фотографиями и рисунками. Здесь и старинные астрономические карты, и различные инструменты — от простейших секстантов до гигантских радиотелескопов, и портреты ученых, и снимки туманностей, и многое-многое другое.

И. Зорич

Задачи наших читателей

1. Докажите, что уравнение

$$\sin^3 x+\cos x=a$$

при $|a|>\frac{5}{4}$ не имеет решений.

В. Пикулин

2. Докажите тождество

$$\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}.$$

М. Розенберг

3. Решите уравнение $x^{x^3}=5$*).

Р. Лозанов

4. Существует ли геометрическая прогрессия из девяти различных натуральных чисел, заключенных между 250 и 7000?

И. Бараш

---

*) Здесь $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

Ереванский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. $\left]\frac{5-3\sqrt{5}}{10};\ 2\right]$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k\ (k\in Z)$.

3. Точки минимума $x=0$ и $x=4$, точка максимума $x=2$.

4. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

5. $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

Вариант 2

1. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_2=2\pi l\ (k,\ l\in Z)$.

2. $[1;\ 2[\ \cup\ ]2;\ 5]$

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $x=1,\ y=1$.

5. Угол при основании равен $\arccos\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ или $\arccos\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Вариант 3

1. $\{-1\}$.

2. $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k\ (k\in Z)$.

3. $]4;\ +\infty[$.

4. $\frac{2}{5}$.

Физика

1. $a_1=2g\frac{m_2-2m_1}{4m_1+m_2}\approx 2{,}8$ м/с²;

$a_2=g\frac{m_2-2m_1}{4m_1+m_2}\approx 1{,}4$ м/с²;

$T_1=\frac{3m_1m_2g}{4m_1+m_2}\approx 1{,}3$ Н;

$T_2=2T_1=\frac{6m_1m_2g}{4m_1+m_2}\approx 2{,}6$ Н.

2. $h=5R/3$.

3. $r_2=r_1\sqrt[3]{\frac{p}{p+\rho gh}\,\frac{T_2}{T_1}}\approx 1{,}4$ см

($p=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).

4. $Q=\frac{m_1m_2(v_1+v_2)^2}{2(m_1+m_2)}=15$ Дж.

5. Для любой точки на оси кольца напряженность электрического поля направлена вдоль оси к центру кольца, а модуль напряженности равен

$$E=\frac{|q|L}{4\pi\varepsilon_0(R^2+L^2)^{3/2}}.$$

Для трех данных значений L получим, соответственно, $E=0$; 1600; 1150 В/м.

6. $I=\frac{\varepsilon_0 U v\sqrt{S}}{d}\approx 3{,}2\cdot 10^{-8}$ А.

7. $F=I\sqrt{\frac{2U}{e/m}}$.

8. $\mathcal{E}=B\omega l^2/2=0{,}5$ В.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\{(-1;\ 2)\}$.

2. $\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

3. $x=\pi k\ (k\in Z)$.

4. $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]3;\ 5[$.

5. Плоскости, в которых расположены основания искомого цилиндра, удалены от центра шара на $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

Вариант 2

1. $\{1\}$.

2. $]-\infty;\ -1]\ \cup\ ]5;\ 6]$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$.

4. $\{(6;\ 0)\}$.

5. $(0;\ 0)$, $(2;\ 2\sqrt{3})$, $(6;\ 2\sqrt{3})$, $(8;\ 0)$ и $(0;\ 0)$, $(2;\ -2\sqrt{3})$, $(6;\ -2\sqrt{3})$, $(8;\ 0)$; $12\sqrt{3}$.

Физика

1. $t=\sqrt{\frac{2l}{g+F/m}}\approx 0{,}28$ с.

2. $E/E'=169/121$.

3. $p_2=T_2\left(\frac{p_1}{T_1}-\frac{mR}{\mu V}\right)\approx 3{,}6\cdot 10^5$ Па.

4. $E=(\rho-\rho_м)\frac{\pi d^3g}{6q}\approx 4\cdot 10^4$ В/м.

5. $U_1=U\frac{\varepsilon_2d_1}{\varepsilon_2d_1+\varepsilon_1d_2}\approx 47$ В;

$U_2=U\frac{\varepsilon_1d_2}{\varepsilon_2d_1+\varepsilon_1d_2}\approx 253$ В.

6. $Q=\rho j^2\approx 1{,}54\cdot 10^3$ Вт/м³.

7. $R=\frac{El}{v_0B}\approx 5\cdot 10^{-3}$ м.

8. $\varepsilon=\frac{\lambda^2d}{4\pi^2c^2L\varepsilon_0S}\approx 6$ (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

9. $v=c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\approx 1{,}7\cdot 10^5$ м/с.

10. $q_2=\frac{2\pi\varepsilon_0Rmv_0^2}{q_1}\approx 2\cdot 10^{-6}$ Кл.

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{6}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{3}{7}$.

2. $\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$.

3. $x=2\pi k$ $(k \in Z)$.

4. $\frac{\pi}{6}$.

5. $\sqrt[3]{4V}$.

Вариант 2

1. $\pm\sqrt{2}\ (4\vec{i}+3\vec{j})$.
2. $\{2\}$.
3. $\max\limits_{[-2;\ 2]} y=y(2)=4$, $\min\limits_{[-2;\ 2]} y=y(-2)=-24$.
4. $x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$ $(k \in Z)$.
5. $4\ln 3-2$.

Задачи устного экзамена

1. 2^{x^2}, 2^{2x}.
2. $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$.
3. $y=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$.
4. а) $y=\frac{1}{2}x+2$; б) $y=2\cdot 10^x$; в) $y=-\sqrt{x+1}$.
5. а) Четная; б) и в) Нечетная.
6. а) $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$; б) $[1; 5]$; в) $]-1; 1[\ \cup\ ]2; +\infty[$; г) $]-\infty; -5[\ \cup\ ]-5; -4[\ \cup\ ]4; 5[\ \cup\ ]5; +\infty[$; д) $]-\infty; 0]$. 8. а) -7; б) 3; в) 1.
9. а) $6(\sin 2x+8)^2\cdot\cos 2x$; б) $\frac{1}{2x\cdot\sqrt{\ln x}}$; в) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$.
10. $y=-5x+2$.
11. $-\cos x+x+C$.
12. $\left]0; \frac{1}{6}\right[$.
13. $\{-1; 3\}$. При $a=-1$ $(0; -1)$, при $a=3$ $(-2; 1)$.
14. $\frac{\sqrt{14}}{2}$.
15. I. Решение. Проведем диаметр AO (рис. I). Поскольку $|AO|^2+|CO|^2=|AC|^2$, $(AO)\perp(CD)$. Введем систему координат с началом в центре сферы O, осью абсцисс $[OD)$, осью ординат $[OA)$ и перпендикулярной к ним осью аппликат. Поскольку $\overrightarrow{OD}=(1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$. Но $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Значит, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\cos\widehat{BOD}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\widehat{BOD}=\frac{\pi}{3}$ и $\triangle BOD$ — равносторонний.

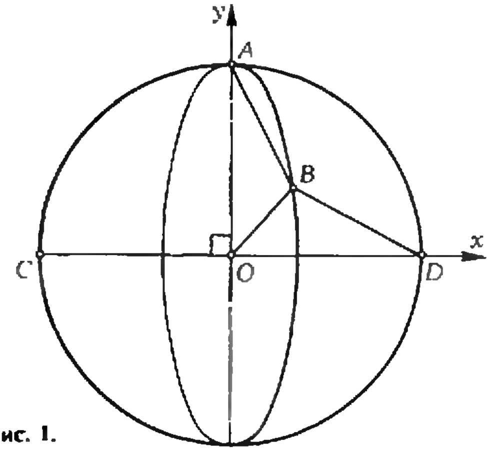


Рис. I.

Физика

1. $h_{\max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=4{,}5$ км; $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=60$ с.
2. $F_1=mg$; $F_2=m(g-v^2/R)$; $F_3=m(g+v^2/R)$
3. $s=\frac{m^2v^2}{2\mu gM^2}\approx 0{,}3$ м.
4. $p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}\approx 1{,}9$ мПа.
5. $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+|q_2|}{(r/2)^2}\approx 5\cdot 10^4$ В/м.
6. $r=\frac{R_1R_2(U_2-U_1)}{U_1R_2-U_2R_1}=0{,}5$ Ом.
7. $P=\frac{c\varrho V(t_к-t)}{\eta\tau}=800$ Вт (здесь $t_к=100°$ С — температура кипения воды; $\eta=0{,}7$).
8. $F=IlB\sin\alpha\approx 0{,}04$ H.
9. $l=h\operatorname{tg}\alpha+(H-h)\operatorname{tg}\beta=$
$$=h+\frac{(H-h)\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\approx 2{,}9 \text{ м}.$$
10. Изображение будет уменьшенным, если предмет находится за центром зеркала.

Московский технологический институт пищевой промышленности

Математика

Вариант 1

1. 2,52. 2. 32. 3. 64. 4. $\{0\}$. 5. -1. 6. $\{-3\}$. 7. 4. 8. 135°. 9. 1. 10. 4,5.

Вариант 2

1. 48. 2. 36. 3. 13. 4. $\frac{1}{2}$. 5. 1. 6. 25°. 7. 5. 8. 68. 9. 1256. 10. 4.

Вариант 3

1. 15. 2. 3,75. 3. $\{1\}$. 4. $\{16\}$. 5. 2. 6. 0. 7. 60°. 8. 4,5. 9. 160. 10. 0.

Физика

1. $a=g\frac{m_2}{2m_1+m_2}=2$ м/с².
2. $v=\sqrt{gl/2}=10$ м/с.
3. $T=\pi d/v=0{,}3$ с.
4. $\eta=\frac{cm_2\Delta T}{qm_1}100\%=34\%$.
5. $U=\frac{(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)R}{r_1+r_2+R}=2{,}5$ В.
6. $B=\frac{U}{vl}=0{,}04$ Тл.

7. $f = -\dfrac{Rd}{R+2d} = -0{,}65$ м (знак «минус» говорит о том, что изображение предмета мнимое).

8. $n_{\text{ст}} = n_{\text{в}} \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 1{,}5$.

Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\dfrac{1}{ab\sqrt[5]{a^3}}$.
2. $\{9\}$.
3. $\left[-1; \dfrac{7}{3}\right]$.
4. $x_1 = (-1)^k \arcsin \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{10} + \pi k$,

   $x_2 = (-1)^{l+1} \arcsin \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10} + \pi l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$
5. $\dfrac{\pi n^2 \cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. $-12\sqrt[3]{x^2}$.
2. $\{2, 9\}$.
3. $[2; 3]$.
4. $x = -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{3} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.
5. 64π дм^3.

Задачи устного экзамена

2. —. 3. $]-1; 0] \cup \{1\}$. 4. $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{2}\right]$.

5. $[-2; 4]$. 6. $\dfrac{8}{3}$. 7. 90°. Указание. Используйте теорему о трех перпендикулярах.

Физика

1. $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)} \approx 6{,}2$ уз.

2. $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{gT^2 - 4\pi^2 R\cos\varphi}{gT^2 - 4\pi^2 R} \approx 1{,}002$ (здесь $T = 24$ ч — период обращения Земли; $R = 6400$ км — радиус Земли).

3. Уровень воды останется прежним.

4. $N_1 = N_A \dfrac{\varrho_{\text{в}} V}{\mu_{\text{в}}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{22}$;

   $N_2 = N_A \dfrac{p_0 V}{RT_0} \approx 2{,}7 \cdot 10^{19}$ (здесь $\varrho_{\text{в}} = 1$ г/см^3 — плотность пресной воды, $\mu_{\text{в}} = 18$ г/моль — ее молярная масса, $p_0 = 10^5$ Па и $T_0 = 273$ К — давление и температура при нормальных условиях, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная).

5. $A = \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} \approx 0{,}09$ Дж.

6. $q = (r_1 + r_2)\sqrt{\dfrac{8\pi\varepsilon_0 W}{r_2}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Кл.

7. $N = \dfrac{mgh}{\eta t} \approx 4{,}5$ кВт; $I = \dfrac{N}{U} \approx 35{,}8$ А.

8. Емкость конденсатора надо увеличить в $(\lambda f/c)^2 = 2{,}25$ раз (здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

9. $\lambda_{\text{в}} = \lambda/n \approx 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м.

10. Давление света больше на паруса белой окраски.

Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{48\cos\alpha} a^2$, $V = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{48} a^3$.
2. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$.
3. $\{2, 3\}$.
4. $\{2\}$. Указание. Обозначьте $\sqrt{x+7}$ через t.
5. $\dfrac{1}{4}$.

Вариант 2

1. $2\operatorname{arctg}(2\sqrt{3}k)$.
2. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.
3. $\left]0; \dfrac{2}{7}\right[$.
4. $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$.
5. π.

Физика

Вариант 1

2. Нет, не будет.
3. $v = \sqrt{Rg} = 42$ м/с.
4. $E_{\text{к max}} = hc/\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-15}$ Дж ≈ 41 кэВ;

   $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2hc}{\lambda m}} \approx 1{,}2 \cdot 10^8$ м/с.

Вариант 2

2. Период колебаний будет увеличиваться.
3. $\dfrac{m_{\text{расп}}}{m} = \dfrac{2c(t-t_0) + v^2 - v_0^2}{v^2 - 2\lambda} \approx 0{,}14$.
4. $R = \dfrac{mv}{eB} \approx 0{,}13$ м.

Вариант 3

2. См. рис. 1.
3. $v = \dfrac{m_1 v_0 \sin\alpha}{m_1 + m_2} \approx 1{,}2$ м/с.
4. Электрон перешел на третий энергетический уровень. В спектре излучения можно будет увидеть три линии.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 39)

1. Поскольку $\underbrace{22\ldots2}_{1980\ \text{«двоек»}} = 2 \cdot \dfrac{100^{991-1} - 1}{9}$, $100^{991-1} - 1$ по Малой теореме Ферма делится на 991 и числа 9 и 991 взаимно просты, число $\underbrace{22\ldots2}_{1980\ \text{«двоек»}}$ делится на $2 \cdot 991 = 1982$.

2. Пусть q — простое число и t — показатель степени, с которым q входит в разложение числа $l! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot l$ на простые множители. Среди чисел, не превосходящих l, ровно

$\left[\frac{l}{q}\right]$ делится на q; из чисел, кратных q, ровно $\left[\frac{l}{q^2}\right]$ делится на q^2; из чисел, кратных q^2, ровно $\left[\frac{l}{q^3}\right]$ делится на q^3 и т. д.; поэтому

$$l=\left(\left[\frac{l}{q}\right]-\left[\frac{l}{q^2}\right]\right)+2\left(\left[\frac{l}{q^2}\right]-\left[\frac{l}{q^3}\right]\right)+3\left(\left[\frac{l}{q^3}\right]-\left[\frac{l}{q^4}\right]\right)+\ldots=\left[\frac{l}{q}\right]+\left[\frac{l}{q^2}\right]+\left[\frac{l}{q^3}\right]+\ldots$$

(очевидно, здесь все слагаемые, начиная с некоторого, — нули). Поэтому, если s — показатель степени, в которой p входит в $\frac{m!}{n!(m-n)!}$, то $s=\sum_k\left(\left[\frac{m}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{m-n}{p^k}\right]\right)$, причем при $k>\log_p m$ слагаемые обращаются в нуль, а при $k<\log_p m$ — не превосходят 1, ибо являются целыми числами, меньшими 2:

$$\left[\frac{m}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{m-n}{p^k}\right]=\left\{\frac{n}{p^k}\right\}+\left\{\frac{m-n}{p^k}\right\}-\left\{\frac{m}{p^k}\right\}<2.$$

В силу этого s не превосходит числа слагаемых, то есть $s\leqslant\log_p m$. Поэтому $r\leqslant s\leqslant\log_p m$, то есть $p^r\leqslant m$.

Равенство $p^r=m$ достигается для всех m, являющихся степенью простого числа.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 58)

1. Доказательство основано на неравенстве $(a+b)^n>a^n+nba^{n-1}$, а в случае $x=5$, кроме того, на небольшом переборе.

2. $x^8+4x^2+4=(x^4-2x^3+2x^2-2x+2)\ (x^4+2x^3+2x^2+2x+2)$.

3. Равенство $\frac{m}{S(m)}=\frac{n}{S(n)}$ выполнено при $m=69=1000101_2$ и $n=92=1011100_2$. Поэтому множество A натуральных чисел k, удовлетворяющих равенству $\frac{3k}{S(3k)}=\frac{4k}{S(4k)}$, не пусто (последнее равенство выполнено при $k=23$). Покажем, что множество A бесконечно.

Если $k\in A$, $k=a_1a_2\ldots a_p$ — двоичная запись числа k и, аналогично, $3k=b_1b_2\ldots b_q$ ($q=p+1$ или $p+2$), то

$$\begin{array}{r}+\;a_1a_2\ldots a_p\,0\\ a_1\ldots\;\;a_p\\ \hline b_1b_2\ldots b_{q-1}b_q\end{array}$$

Возьмем $l\geqslant0$ и рассмотрим числа $N=(2^{p+l+2}+1)k=a_1\ldots a_p0\overbrace{0\ldots0}^{l}0\,a_1\ldots a_p$.

Двоичное разложение числа $3N$ получается как результат сложения

$$\begin{array}{r}+\;a_1a_2\ldots a_p0\;\;0\ldots00a_1a_2\ldots a_p\,0\\ a_1\ldots\;\;a_p0\ldots\;00\;a_1\ldots\;\;a_p\\ \hline b_1\ldots\;\;b_q\underbrace{0\ldots\;0}_{i}b_1\ldots\;\;\;\;b_q\end{array},$$

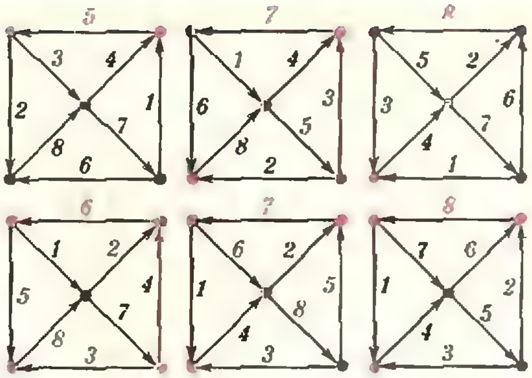


Рис. 2.

где $i=l$ или $l+1$. Отсюда $S(3N)=2S(3k)$. Кроме того, $S(4N)=2S(4k)$. Поэтому $N\in A$.

4. $\frac{\sqrt{m^4-2n^4}}{4}$.

6. а) Если направления всех потоков на рисунке 1 (см. «Квант», № 3, с. 58) заменить на противоположные, получится фигура, совпадающая с зеркальным отражением данной относительно вертикальной оси. Поэтому каждому решению соответствует симметричное. Шесть решений показаны на рисунке 2 (еще шесть им симметричны).

б) По условию должно быть $c=d+h$, $h=e+f+g$, то есть $c=d+e+f+g$. Но даже $1+2+3+4>8$. Поэтому требуемая расстановка невозможна.

7. Докажем следующую теорему: *кинетическая энергия плоского тела, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости тела, равна сумме кинетических энергий вращения (с той же угловой скоростью) вокруг взаимно перпендикулярных пересекающихся осей, лежащих в плоскости тела.*

Доказательство. Кинетическая энергия тела, вращающегося с угловой скоростью ω, равна

$$K=\frac{1}{2}\sum_i m_i\omega^2r_i^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_ir_i^2,$$

где m_i — масса i-й точки тела, r_i — расстояние от i-й точки до оси вращения. Если вращение происходит вокруг оси l_1 (рис. 3), то

$$K_{l_1}=\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_ir_{il_1}^2.$$

Но $r_{il_1}^2=r_{il_2}^2+r_{il_3}^2$. Так что

$$K_{l_1}=\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_ir_{il_2}^2+\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_ir_{il_3}^2,$$

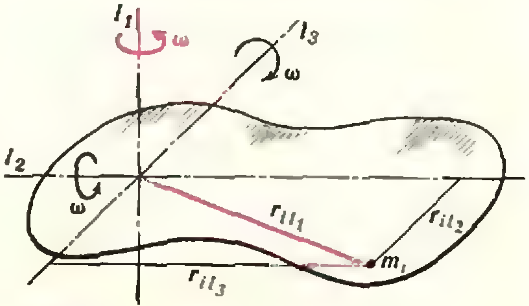


Рис. 3.

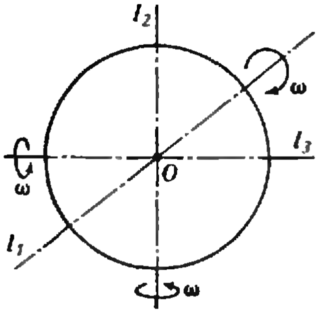


Рис. 4.

то есть

$$K_{l_1}=K_{l_2}+K_{l_3},$$

что и требовалось доказать.

Теперь вернемся к кольцу. Кинетическая энергия кольца, вращающегося вокруг своей оси (оси l_1; рис. 4), равна $K_{l_1}=\frac{m\omega^2r^2}{2}$ (кольцо однородно по массе и все его точки находятся на одном и том же расстоянии от оси l_1, поэтому $\sum_i m_ir_i^2=mr^2$). При вращении же вокруг осей l_2 и l_3 кинетические энергии, очевидно, одинаковы. Так что

$$K_{l_2}=K_{l_3}=\frac{K_{l_1}}{2}=\frac{m\omega^2r^2}{4}.$$

Это и есть искомая кинетическая энергия.

8. а) Рассмотрим два многочлена степени p с целыми коэффициентами: многочлен $x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+(p-1))$ и многочлен x^p-x. Первый многочлен, очевидно, делится на p при всех целых x, второй делится на p при всех целых x согласно Малой теореме Ферма (см. с. 39 в «Кванте» № 1). Разность этих многочленов — многочлен с целыми коэффициентами степени меньше p, делящийся на p при всех целых x. Поэтому его коэффициенты делятся на p. Но эти коэффициенты — интересующие нас суммы.

б) Суммы $\sum\limits_{1<k_1<k_2<\ldots<k_q<p-1}\prod\limits_{i=1}k_i$ и $\sum\limits_{1<k_1<k_2<k_q<p-1}\prod\limits_{i=1}(p-k_i)$ отличаются только порядком слагаемых (если $k<p$, то и $p-k-p$). Поэтому при нечетном q $(3<q<p-2)$

$$S_q=\sum_{1<k_1<k_2<\ldots<k_q<p-1}\prod_{i=1}k_i=$$

$$=\sum_{1<k_1k_2<\ldots<k_q<p-1}\prod_{i=1}(p-k_i)=$$

$$=C_{p-1}^{q}p^q+\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^iC_{p-1-i}^{q-i}p^{q-i}S_i-S_q,$$

то есть

$$2S_q=C_{q-1}^{q}p^q+\sum_{j=1}^{q-1}(-1)^jC_{p-1-j}^{q-j}p^{q-j}S_j,$$

откуда, учитывая, что все S_j делятся на p, получаем, что S_q делится на p^2.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1. 1. Ла2! b4 2. Ла5! d4 3. Крd7! Кр:f6 4. С:d4×.

Задание 2. 1. е8С! Кр:d6 2. с8Л! Кре6 3. Лс6× (1...Кр:f6 2. g8Л! Кре6 3. Лg6×).

Главный редактор — *академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — *академик* А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков; А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, С. Лухин,
А. Пономарева, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

117071, Москва, Ленинский проспект, 15.
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21
Сдано в набор 18.2.82 Подписано в печать 25.3.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,02 Т-07857
Тираж 180 724 Цена 40 коп. Заказ 394

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ПАТОВЫЕ РЕКОРДЫ

Любая шахматная партия может кончиться двумя исходами: победой одного из партнеров или ничьей. Ничья, в частности, фиксируется, когда на доске стоит пат. Здесь мы рассмотрим ряд (искусственных) кратчайших партий, заканчивающихся патом.

Чтобы поставить сопернику мат, надо с шахом «запереть» одного его короля. На это вполне может хватить двух ходов (**1. f4 e6 2. g4 Фh4×**). Чтобы возник пат, все фигуры одной из сторон не должны иметь возможности двигаться (при этом их король не должен быть под шахом). Сколько же ходов надо сделать, чтобы «запереть» все фигуры одного цвета? Оказывается, не так много — пат может получиться уже на десятом ходу! Следующую рекордную партию Сэм Лойд придумал около ста лет назад.

1. e3 a5 2. Фh5 Лa6 3. Ф:a5 h5 4. Ф:c7 Лah6 5. h4 f6 6. Ф:d7+ Kpf7 7. Ф:b7 Фd3 8. Ф:b8 Фh7 9. Ф:c8 Kpg6 10. Фe6. Пат.

Здесь «замурованы» все оставшиеся на доске черные фигуры, но если заменить первые 2,5 хода на **1. a3 e6 2. a4 Фh4 3. Лa3 Ф:a4** (и далее 4. h4 Ф:c2 и т. д.), то партия кончится патом белых.

Этой идее можно придать и несколько иное оформление.

1. e3 d5 2. Фb3 h5 3. Ф:b7 Cf5 4. Ф:a7 Ch7 5. Ф:b8 Лa6 6. Ф:c7 Лh6 7. h4 f6 8. Ф:d8+ Kpf7 9. Ф:d5+ Kpg6 10. Фe6. Пат. Здесь на h7 замурован не ферзь, а слон черных.

В следующем «поединке» черные также запатовывают противника на десятом ходу, но тут уже нельзя поменять цвет фигур — белые ставят аналогичный пат только на 11-м ходу.

1. h4 e5 2. c4 d5 3. Фb3 dc 4. e4 cb 5 ab Ф:h4 6. Лa4 Ф:h1 7. g4 C:g4 8. Kf3 C:f3 9. Ka3 C:a3 10. Лb4 C:b4. Пат.

Потребуем теперь, чтобы ни одна из фигур ни белых, ни черных не была взята. За сколько ходов возможен пат в этом случае?

Кажется, что дополнительное условие намного затянет партию, однако, как ни странно, пат получается всего на два хода позднее.

1. d4 d6 2. Фd2 e5 3. a4 e4 4. Фf4 f5 5. h3 Ce7 6. Фh2 Ce6 7. Лa3 c5 8. Лg3 Фa5+ 9. Kd2 Ch4 10. f3 Cb3 11. d5 e3 12. c4 f4. Пат.

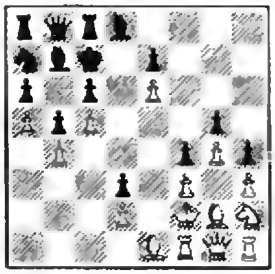
А как обстоит дело с взаимным запатованием королей? Партия, которая заканчивается патом обеим сторонам, продолжается 19 ходов.

1. e4 d5 2. e5 d4 3. c3 f6 4. Фf3 Kpf7 5. Ф:b7 Фd5 6. Kpd1 Ф:g2 7. Kpc2 Ф:f1 8. Ф:c8 Ф:g1 9. Ф:b8 Л:b8 10. Л:g1 Лb3 11. Лg6 Лa3 12. Лh6 gh 13. ba Kpg7 14. Kpb2 d3 15. e6 a5 16. h4 a4 17. h5 c5 18. f4 c4 19. f5. Пат белым и черным.

В последнем примере в заключительной позиции симметрично запатованными оказались оба короля. При этом сама игра была несимметричной (ходы противника копировали то белые, то черные), и по пять фигур исчезли с доски. Уникальной является следующая патовая партия, в которой, во-первых, доску покидают только по одному коню, во-вторых, оба короля вновь оказываются симметрично запатованными, и, в-третьих, что самое удивительное, все ходы белых и черных центрально симметричны.

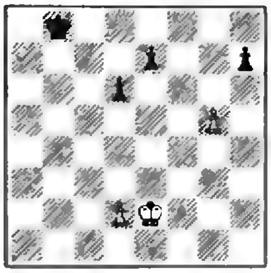
1. Kf3 Kc6 2. Kc3 Kf6 3. Kb5 Kg4 4. h3 a6 5. Ka7 Kh2 6. K:h2 K:a7 (первый и последний размены) **7. g4 b5 8. Cg2 Cb7 9. e4 d5 10. Kpe2 Kpd7! 11. Фg1 Фb8!** (исходные расположения королей и ферзей не были центрально симметричны, теперь же на доске установлен полный порядок) **12. b4 g5 13. Cb2 Cg7 14. Лf1 Лc8 15. Cd4 Ce5 16. f3 c6 17. Cf2 Cc7 18. Ce1 Cd8 19. Kpf2 Kpc7 20. a4 h5 21. a5 h4 22. c4 f5 23. c5 f4 24. e5 d4 25. e6 d3.**

Пат обоим королям.

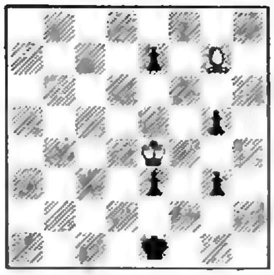


Доказать математически строго, что приведенные паты — самые быстрые, очень сложно, так как для этого необходимо перебрать миллионы партий. Тем не менее нет практически никаких сомнений в том, что эти рекорды никогда не будут превзойдены.

Конкурсные задания

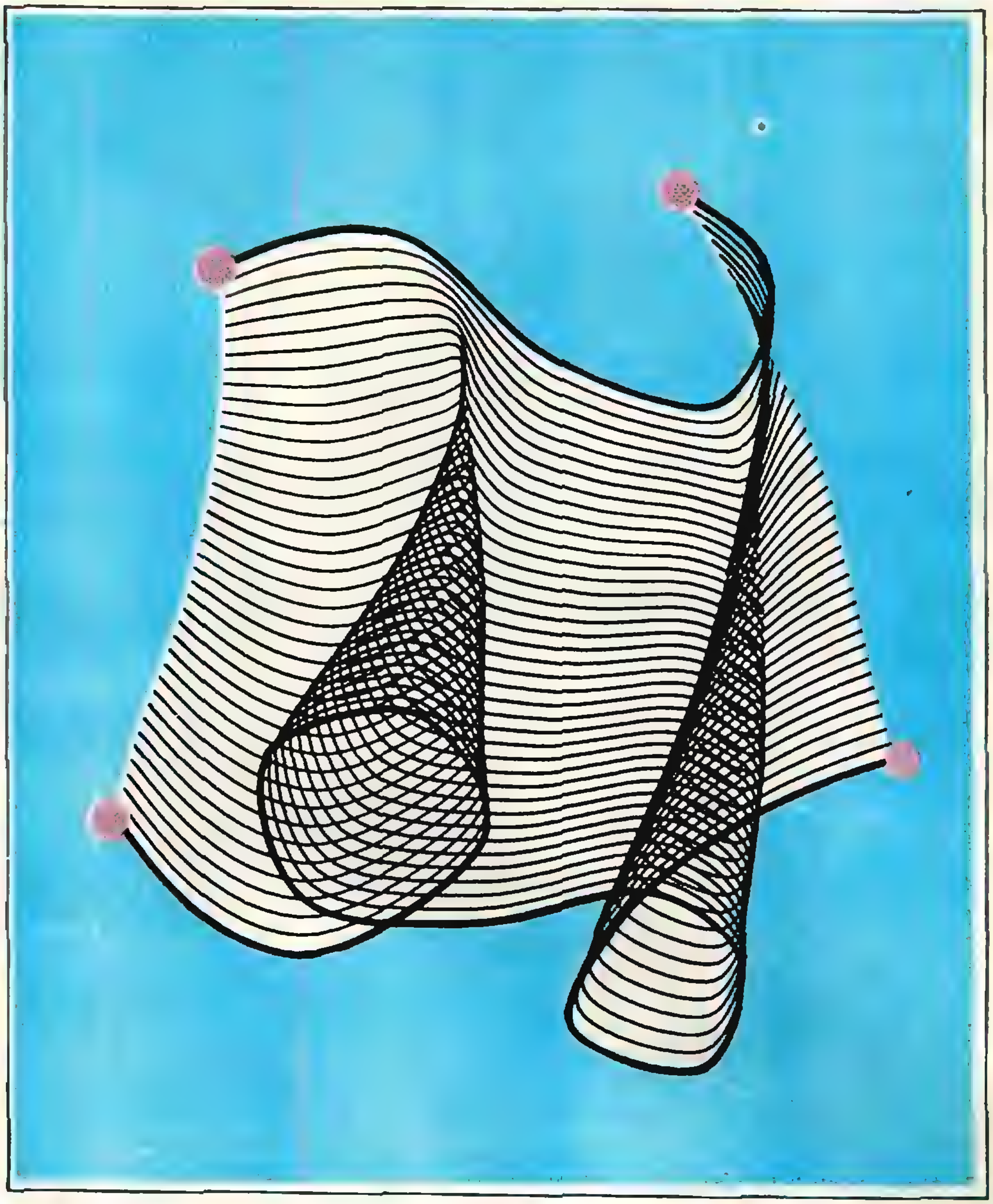


7. Белые начинают и делают ничью.



8. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 25 июня 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).



На рисунке показано семейство линий, нарисованное ЭВМ по параметрическим уравнениям

$$x = F(t, u),\ y = G(t, u),$$

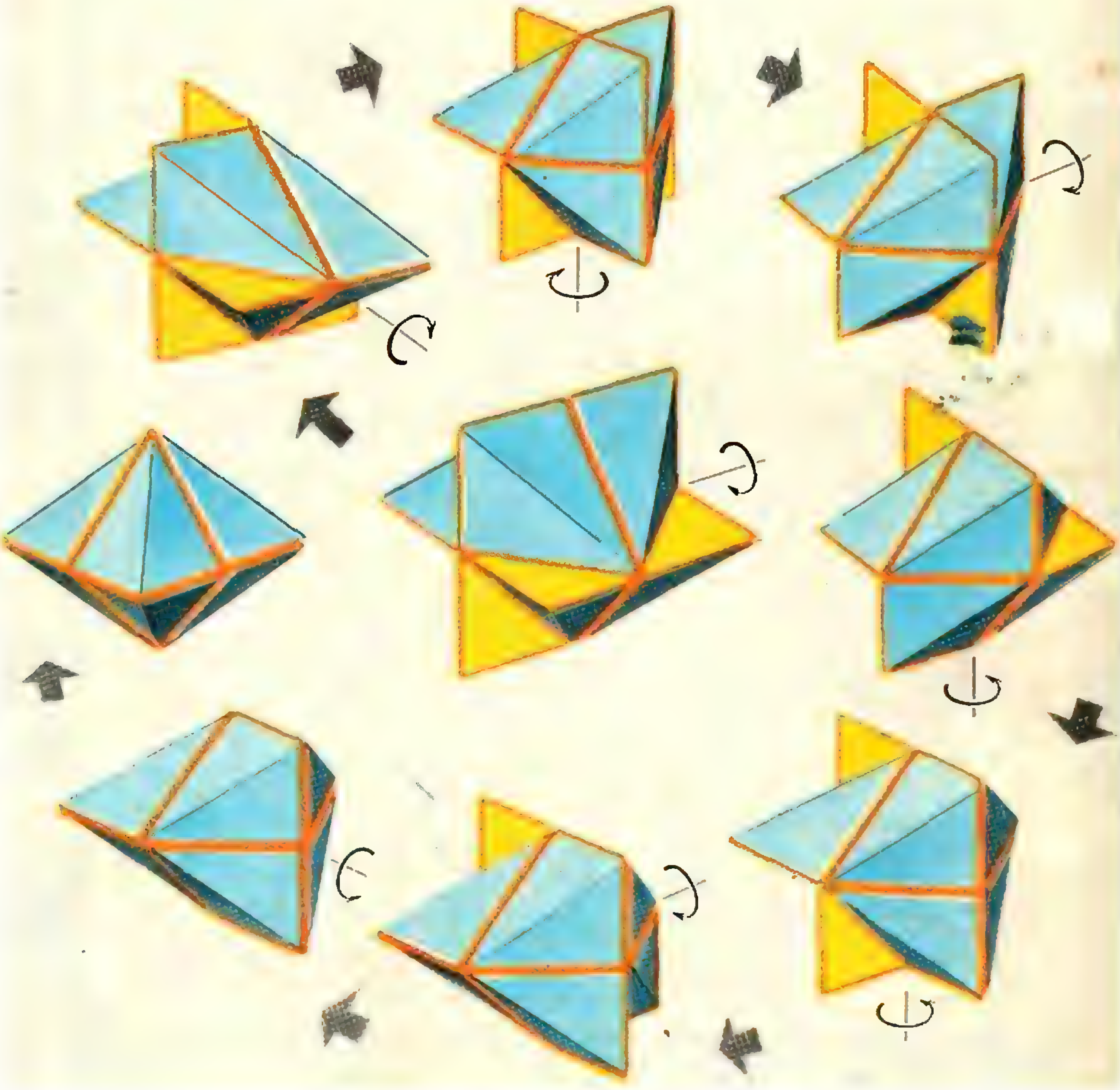
где $0 < t < 1$ и $0 < u < 1$. При изменении t от 0 до 1, точка с координатами $(x, y) = (F(t,0), G(t, 0))$ (конец пера на графопостроителе) движется по некоторому пути, описывая верхнюю кривую, а точка с координатами $(F(t, 1), G(t, 1))$ — по другому пути (кривая с двумя петлями внизу). Последовательно придавая параметру u промежуточные значения, возрастающие от 0 до 1, ЭВМ начертила более тонким пером 38 промежуточных кривых. В целом рисунок иллюстрирует процесс деформации одного пути в другой; нужно только себе представить, что кривые меняются при изменении параметра u не скачками, а непрерывно. О деформации путей можно прочитать в статье Л. Понтрягина «Основная теорема алгебры», опубликованной в этом номере.

Ю. Котов

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На рисунке показан процесс решения головоломки «Причеши ежа», о которой рассказано в этом номере. Еж составлен из восьми деревянных пятигранников, две грани которых окрашены в голубой цвет, две другие — в желтый. Пятигранники склеплены резинками, позволяющими поворачивать (в разных плоскостях) одну половину ежа относительно другой. Первоначально еж представляет собой синий немного сплюснутый октаэдр, но после нескольких случайно выбранных поворотов часть желтых граней выходит наружу и острые углы пятигранников начинают торчать как колючки. В центре показан такой «растрепанный» еж, а вокруг него — другие его положения; соседние получены друг из друга поворотом на 90° (направление поворота указано черной стрелкой). Если двигаться от центра, следуя серым стрелкам, мы увидим, как постепенно убираются колючки ежа и получается «причесанный» еж: синий многогранник слева в среднем ряду.



НОМЕР
5

ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

КВАНТ

5
1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: | IN THIS ISSUE:

В номере		In this issue
Б. Пастухов. Верность ленинским заветам, делу партии	2	*B. Pastukhov.* Fidelity to Lenin's heritage and to the party's goals
* * *		* * *
А. Боровой. Год чудес	3	*A. Borovoy.* The year of miracles
В. Тихомиров. Аэродинамическая задача Ньютона	11	*V. Tikhomirov.* Newton's aerodynamical problem
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М741—М745; Ф753—Ф757	19	Problems M741—M745; P753—P757
Решения задач М701—М705; Ф713—Ф717	22	Solutions M701—M705; P713—P717
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	29	Problems
Л. Луганский. «Стойте справа, проходите слева...»	30	*L. Luganski.* "Stand right, move along left..."
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
Е. Морозов. Оптические системы	35	*E. Morozov.* Optical systems
Варианты вступительных экзаменов в вузы		**College entrance exams**
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	40	Moscow M. V. Lomonosov state university
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола	44	Novosibirsk Lenin Komsomol state university
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	46	Leningrad A. A. Jhdanov state university
Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина	48	Tashkent V. I. Lenin state university
Информация		**Information**
А. Виленкин. Семинар руководителей НОУ	49	*A. Vilenkin.* Seminar for NOU activists
Искусство программирования		**The art of programming**
Ю. Первин. Сортировки по текстовым ключам Включение и распределение	51	*Yu. Pervin.* Sorting-out by text keys. Inclusion and distribution
Ответы, указания, решения	55	**Answers, hints, solutions**
Смесь *(10, 28)*		**Miscellaneous** *(10, 28)*
Шахматная страничка		**The chess page**
Шахматная машина времени *(3-я с. обложки)*		Chess time machine *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982

Верность ленинским заветам, делу партии

XIX съезд Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи — волнующее и важное событие в жизни молодого поколения нашей страны. Идейно и нравственно повзрослевшими приходят юноши и девушки к своему форуму. Среди них большой отряд школьников, учащихся профессионально-технических училищ, тех, кому адресован журнал «Квант».

К вам, пытливым, вдумчивым и инициативным, обращены слова Генерального секретаря Центрального Комитета КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР Леонида Ильича Брежнева: «Пусть и впредь в ваших сердцах горит чистый огонь патриотизма, живет благородное чувство личной ответственности за порученное дело, за все, что происходит в стране».

Коммунистическая партия, Советское государство предоставили молодому поколению исключительные возможности для овладения естественнонаучными и общественно-политическими знаниями. Решения XXVI съезда КПСС определили пути дальнейшего решения задачи развития творческих способностей учащихся общеобразовательных школ, привития им умения самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной информации. Завет В. И. Ленина — учиться — был и остается самым важным, самым актуальным в деятельности ВЛКСМ.

Всесоюзный Ленинский Коммунистический Союз Молодежи считает своей важнейшей задачей всемерно помогать школе в повышении качества учебно-воспитательного процесса, теснее соединять учебный процесс с подготовкой молодежи к труду, особенно в сфере материального производства. Жизнь убедительно показала преимущество образования, тесно связанного с участием школьников в производительном труде. Это способствует выработке высоких нравственных качеств и активной жизненной позиции учащихся.

Сегодня на этапе зрелого социализма, когда особенно важно соединение достижений научно-технической революции с преимуществами социализма, на первый план выдвигается задача подготовки специалистов нового типа — не только высокообразованных, но и творчески мыслящих, способных решать самые ответственные задачи современной теории и практики. Учиться коммунизму означает сегодня умение смотреть далеко вперед, быть готовым к самостоятельной творческой работе, к активному участию в общественно-политической жизни общества.

Подготовить себя к участию в коммунистическом строительстве — это значит научиться коллективизму, дисциплине, уметь реально видеть жизненные проблемы, самостоятельно разбираться в различных явлениях окружающей нас действительности, быть готовым к тому, чтобы, как говорил В. И. Ленин, суметь «достроить и довершить то, что мы начали»*).

Верность ленинским традициям, великому делу Коммунистической партии демонстрирует юность нашей Родины, собравшись на свой XIX съезд. Решения съезда, мудрое напутствие партии своему помощнику и резерву — Ленинскому комсомолу, всей советской молодежи должно стать для читателей «Кванта», как и для всего юношества, путеводной звездой в их жизни, учебе, труде.

Б. Н. Пастухов,
Секретарь ЦК ВЛКСМ

---

*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 41, с. 301.

А. Боровой

Год чудес

Уравнение Дирака (1928—1931)

«Из-за того что я стал писателем, не следует думать, что я никогда не стремился к какой-либо достойной деятельности». Эту шутку Бернарда Шоу вполне мог бы повторить молодой человек из Бристоля, который стремился к весьма достойной деятельности инженера-электрика, а стал автором многих «безумных идей» физики XX века. Его полное имя Поль Адриен Морис Дирак. Лишившись места в Бристоле, он в 1925 году приехал в Кембридж, увлекся только еще рождающейся областью физики — квантовой механикой — и сыграл большую роль в создании новой науки.

На 1925—1930 годы, по выражению Нильса Бора, приходился «золотой век» квантовой механики. Позднее Дирак говорил: «Я благодарен судьбе, что родился вовремя: будь я старше или моложе на несколько лет, мне не представились бы столь блестящие возможности. Казалось, все благоприятствовало мне...». И, прежде всего, исключительная одаренность,— добавим мы.

В 24 года Дирак удостаивается докторской степени, а в 31 год — Нобелевской премии (вместе с Э. Шредингером) «за открытие новой плодотворной формы атомной теории».

Поль Адриен Морис Дирак.

Уже в 1927 году были выработаны основные принципы квантовой механики, создан ее математический аппарат. Новая теория смогла объяснить законы природы, действующие в атомных масштабах. Однако она была неприменима к частицам, движущимся со скоростью, близкой к скорости света.

И вот в январе 1928 года Поль Дирак вывел уравнение, описывающее поведение быстрых электронов. Оно объединяло в себе принципы квантовой механики и теории относительности. Это уравнение объясняло взаимодействие электрона с магнитным полем, описывало поведение внутриатомных электронов, разъясняло некоторые особенности спектральных закономерностей и т. д. Все хорошо, но... уравнение Дирака допускало решения, при которых электрон мог иметь отрицательную кинетическую энергию. Это казалось совершенным абсурдом.

Приблизительно три года шли дебаты теоретиков об этих «нефизических» решениях, пока выход не нашел сам автор. Мы не можем привести здесь его рассуждения, и сообщим только окончательный вы-

---

Первая часть этой статьи была опубликована в предыдущем номере журнала.

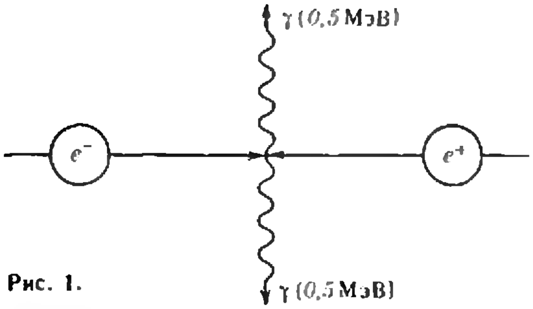


Рис. 1.

вод: согласно Дираку, наряду с электроном в природе должна существовать частица — его двойник, но с положительным зарядом $+e$.

«Антиэлектрон», или «позитрон»

Если такая частица столкнется с электроном, то обе они исчезнут — аннигилируют, а масса частиц, согласно соотношению Эйнштейна $E=mc^2$, перейдет в энергию образовавшихся гамма-квантов:

$$e^-+e^+\to 2\gamma.$$

Символически этот процесс представлен на рисунке 1.

Пожалуй, никто, кроме Дирака (да и он не проявлял особой уверенности), не принял такого толкования отрицательных решений. Крупнейшие теоретики Нильс Бор, Вольфганг Паули не разделяли точки зрения молодого ученого. Но «год чудес» принес с собой открытие позитрона.

«Мелодия превращается в скрипку»

Это — слова академика С. И. Вавилова. На одной из лекций он рассказывал о процессе, обратном реакции аннигиляции, когда летящий гамма-квант рождает пару электрон + позитрон:

$$\gamma\to e^++e^-.$$

Такой процесс превращения электромагнитного поля в вещество был открыт почти одновременно в 1933 году четырьмя группами физиков — во Франции, Германии, Англии и США. На рисунке 2 — знаменитая фотография, полученная супругами Жолио-Кюри. Вы видите, как пара частиц возникает словно из ничего, поскольку сам гамма-квант невидим в туманной камере Вильсона.

Существуют два обязательных условия рождения пары. Первое — энергия гамма-кванта должна превышать сумму энергий покоя компонент пары: $E_\gamma > 2m_ec^2 = 1{,}02$ МэВ. И второе — обязательно должны присутствовать ядро или электрон, которые примут на себя избыток энергии и импульса. Иначе нарушатся законы сохранения энергии и импульса*).

Рождение e^+e^--пар объяснило один непонятный эффект, с которым еще в 1930 году столкнулись исследователи. Эксперименты показывали, что жесткие гамма-кванты поглощаются в веществе значительно сильнее, чем это предсказывала теория. Как оказалось, «аномальное» поглощение было связано с образованием пар. И вполне вероятно, что, если Андерсон и Блэкетт и Оккиалини помедлили, честь обнаружения позитрона принадлежала бы физикам, занимающимся вопросами поглощения гамма-квантов.

Рис. 2.

---

*) Необходимость этого требования можно доказать строго (предоставляем это читателям). А мы ограничимся следующим рассуждением: всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой полный импульс образовавшейся пары равен нулю; для гамма-кванта, летящего со скоростью света, такой системы выбрать нельзя; поэтому необходимо третье тело, которому он мог бы передать часть импульса и энергии.

Позитрон — первый шаг в антимир

Сейчас физики считают, что каждой из элементарных частиц соответствует своя античастица. (Иногда частица и античастица «совпадают», как это имеет место для гамма-кванта.) Открытие позитрона было первым шагом в мир античастиц, в антимир. Следующие шаги — открытие антипротона и антинейтрона — были сделаны только через четверть века. Для их осуществления потребовалось строительство огромных и дорогих приборов — ускорителей частиц. По всем своим параметрам эти приборы совершенно не соизмеримы с тем ускорителем, который создали Джон Кокрофт и Эрнест Уолтон. Этот ускоритель заработал в лаборатории Кавендиша весной 1932 года.

Почему возник вопрос об ускорителях

После того, как, обстреливая α-частицами ядра азота, Э. Резерфорд расщепил их и доказал, что из ядра вылетает протон, он продолжал опыты вместе с Чедвиком, и испытанию подверглись все легкие элементы вплоть до калия. Расщепить удалось многие из них — бор, азот, фтор, натрий и т. д., но все же далеко не все. К 1924 году исследователи пришли к двум важным выводам. Во-первых, для расщепления тяжелых ядер с большим зарядом недостаточно энергий α-частиц, испускаемых радиоактивными препаратами. Основная группа быстрых частиц обладает энергиями 8—9 МэВ, и сильное кулоновское отталкивание не позволяет им проникнуть в глубь ядра. Во-вторых, часть легких ядер, с чётными порядковыми номерами устроена более прочно и не распадается под действием облучения.

Итак, энергии снарядов не хватало. Надо было думать о том, как увеличить эту энергию. Речь шла об ускорении в электрическом поле тяжелых заряженных частиц — протонов или α-частиц. Но если не представляло особых трудностей получить ионы водорода (p) или гелия (α-частицы), то разогнать их до энергий в миллионы электронвольт (а это означало, что частицы должны пролетать огромную, $\sim 10^6$ В разность потенциалов) представлялось невероятно трудной задачей. Во-первых, в это время ни одна лаборатория не имела генераторов такого сверхвысокого напряжения. В самых совершенных рентгеновских трубках использовалось $U = 0{,}35$ миллиона вольт. Во-вторых, изоляция трубок не выдерживала больших напряжений и происходил ее пробой. Тем не менее идеи витали в воздухе, и работы начались (или уже шли к 1924 г.).

Экспериментаторы ясно видели одно огромное преимущество искусственных источников. В них можно было получить гораздо больший поток частиц, чем от естественных препаратов. Например, 1 г радия испускает $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-частиц в секунду, и они летят во все стороны. А пучок ионов гелия при силе тока в 1 мкА (10^{-6} А) дал бы $3{,}1 \cdot 10^{12}$ α-частиц или в 2 раза больше протонов, которые все можно было бы направить непосредственно на мишень. Как мы увидим ниже, именно огромные потоки искусственных снарядов позволили на первых порах решить задачу расщепления ядра.

Туннельный переход (1928 год)

Существует рассказ о том, как один репортер попросил у Эйнштейна показать ему записную книжку, в которую ученый заносит свои выдающиеся мысли. «Выдающихся так мало,— ответил Эйнштейн,— что я вполне успеваю их запомнить».

В 1928 году произошли два события, о которых можно сказать, что они были совершенно выдающимися: Дирак создал свое уравнение, и был предсказан «туннельный переход».

Обратимся к рисунку 3. На нем представлена энергетическая картина взаимодействия налетающего протона с ядром. Исследователям важно, чтобы протон p проник внутрь ядра, то есть в область $R < R_я$, где действуют ядерные силы. Именно там лежит terra incognita (неизведанная

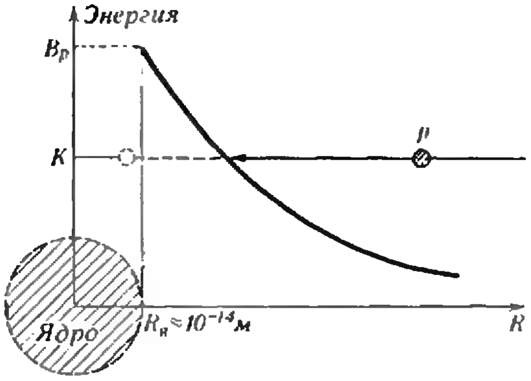


Рис. 3.

земля). Но на пути протона возникает барьер, созданный электрическими силами отталкивания. Его высота на границе ядра с зарядом eZ равна

$$B_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2 Z_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}.$$

Для разных ядер величины B_p сильно отличаются. Так, $B_p(^{6}_{3}\text{Li}) \approx 2$ МэВ, $B_p(^{27}_{13}\text{Al}) \approx 4{,}5$ МэВ, а $B_p(^{238}_{92}\text{U}) \approx$ ≈ 15 МэВ.

Если протон имеет начальную кинетическую энергию $K < B_p$, то он никогда не попадет в глубь ядра. Он «отразится» от барьера. Так утверждает классическая механика.

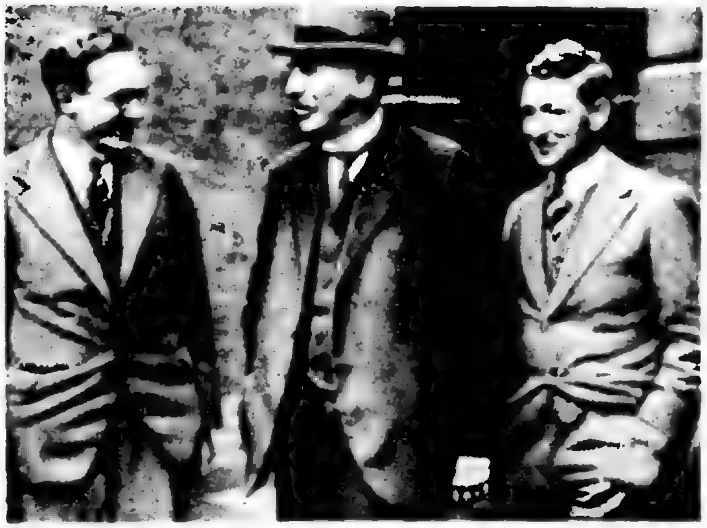
Но вот в 1928 году Г. Гамов и, независимо, Р. Генри и Э. Кондон опровергли этот, казалось бы, бесспорный вывод. Они доказали, что, согласно квантовой механике, существует определенная вероятность проникновения частицы сквозь потенциальный барьер. Эта вероятность очень быстро падает с уменьшением отношения K/B_p, но все же не равна нулю. Пусть, для примера, пучок протонов с энергией 1 МэВ испытывает лобовые соударения (запомним это условие — «лобовые соударения») с ядрами алюминия ($B_p \approx 4{,}5$ МэВ). Тогда из каждой тысячи протонов приблизительно пять проникнут в область $R < R_{\text{я}}$. Такой процесс получил название «туннельный переход». Частицы как бы прорывают себе туннель в потенциальном барьере. В макроскопическом мире это кажется волшебством. Ведь тогда человек, состоящий из атомов, может пройти сквозь стену собственного дома. «Может» — отвечает квантовая механика, но, увы, с очень малой вероятностью. Такой «туннельный переход» осуществится за время, неизмеримо большее, чем время существования Вселенной (поэтому обычный путь — пройти через дверь — имеет очевидные преимущества).

Резерфорд внимательно следил за развитием ускорительной техники. В 1928 году в Кавендише уже работал электронный ускоритель с разрядной трубкой на 0,5 миллиона вольт. Однако до ускорения протонов и бомбардировки ядра, казалось, было еще очень далеко. Пока не родилась идея туннельного перехода. Один из сотрудников лаборатории Г. Аллибон вспоминал: после лекции Гамова о туннельном переходе «мы с Уолтоном спустились вниз по лестнице в нашу лабораторию и подошли к Кокрофту, который работал в той же комнате. Кокрофт как раз подставлял в формулу Гамова цифры, которые можно было получить в то время для ионного тока,— это 1,0 мкА протонов, ускоренных до энергий 0,5 МэВ,— чтобы выяснить вероятность проникновения протонов через энергетический барьер ядер бора. Даже после учета возможных потерь эти цифры казались вполне приемлемыми, и через некоторое время он подал Резерфорду объяснительную записку с предложением строить трубку». Недостаток энергии можно было теперь скомпенсировать большой величиной тока. А она была очень нужна. Когда мы оценивали вероятность проникновения протона в ядро, речь шла о лобовом соударении. Но такой удар испытывает лишь весьма незначительная часть бомбардирующих частиц. К тому же, протоны тормозятся, ионизируя атомы и теряя при этом драгоценную энергию.

Резерфорд дал свое согласие, и Кокрофт и Уолтон приступили к разработке ускорителя.

Заповедь экспериментатора

Создав новый прибор, получи на нем физические результаты (пускай сначала даже посредственные), а затем занимайся его усовершенствованием. И еще — иди главным путем.



Слева направо: Э. Уолтон, Э. Резерфорд, Д. Кокрофт.

К 1932 году на пороге открытия искусственного расщепления ядер стояло несколько групп ученых. Э. Лоуренс и М. Ливингстон (США) приступили к созданию нового прибора — циклотрона. В этом ускорителе частицы разгонялись электрическим полем, а магнитное заворачивало их траекторию. Таким образом, пучок мог многократно проходить ускоряющий промежуток. Он двигался по плоской спирали, набирая энергию и увеличивая радиус. К началу «года чудес» лаборатория Лоуренса обладала протонным пучком с энергией 2,2 МэВ. Но исследователи сразу стали монтировать циклотрон с гигантским (по тому времени) магнитом весом в 74 тонны.

Замечательный электростатический генератор был еще в 1929 году построен Ван-де-Граафом в Принстонском университете (США). Модель, созданная в 1931 году, могла уже ускорять частицы до энергий 1,5 МэВ при токе в 25 мкА.

Мы не будем останавливаться здесь на работах других групп. Все они шли к одной цели, шли параллельными или почти одинаковыми путями и почти «голова в голову». Но первой пришла группа из Кавендишской лаборатории.

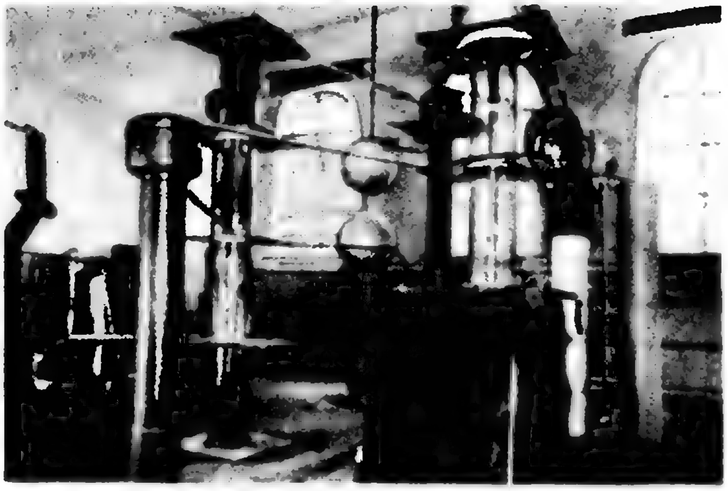
В толстом томе трудов Королевского общества напечатана подробная статья Кокрофта и Уолтона с описанием электростатического генератора для ускорения протонов и других тяжелых ионов. Она поступила в редакцию 23 февраля 1932 года. Экспериментаторы вывели из трубки через тонкое слюдяное окошко пучок протонов с энергией около 0,7 МэВ и... начали изучать их поглощение в воздухе в зависимости от величины приложенного напряжения. Одновременно рождались мысли о модернизации установки и замене ее частей (в начальной конструкции были использованы подручные детали, в частности жестянки из-под печенья).

Итак, все группы исследователей в какой-то мере нарушали приведенную выше заповедь. В Кавендише это продолжалось недолго. По воспоминаниям различных лиц, величина «шторма», который устроил Резерфорд своим ученикам, достигала разных «баллов».

Самый смягченный, «штилевой» вариант приводит тот же Аллибон: «Резерфорд все время спрашивал, ставили ли Кокрофт и Уолтон под пучок мишень; но поскольку они с головой ушли в измерения зависимости пробега от энергии, то ставить мишень даже не пробовали. Резерфорд настаивал и сердился за их медлительность. Поэтому... они сделали мишень из лития и поставили эксперимент только для того, чтобы Резерфорд перестал ворчать». В результате было открыто искусственное расщепление ядер:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}+p\rightarrow\alpha+\alpha.$$

Об этом извещает письмо в редакцию журнала «Nature» («Природа»), присланное 16 апреля 1932 года.



Ускоритель Д. Кокрофта и Э. Уолтона.

(За свою «покладистость» Кокрофт и Уолтон в 1951 году были удостоены Нобелевской премии.)

После этого открытия буквально в течение нескольких месяцев опыт по искусственному расщеплению был повторен несколькими группами и в том числе — советскими физиками, работавшими в Харькове: К. Синельниковым, А. Лейпунским, А. Вальтером и Г. Латышевым.

Теперь очень коротко расскажем о самом эксперименте Кокрофта и Уолтона.

Искусственное расщепление ядра лития
(апрель 1932 года)

Установка Кокрофта — Уолтона располагалась в большой светлой комнате. Вы видите ее на фотографии. Слева — четыре секции электростатического генератора, справа — ускорительная трубка из двух секций. Остальные колонны — конденсаторы или изолирующие опоры.

Идея получения высокого напряжения кажется очень простой. Если зарядить n одинаковых емкостей до напряжения U_0 и соединить их последовательно, то разность потенциалов на концах цепи будет $U=nU_0$. Самое трудное — придумать механизм подзарядки такой системы. И эта задача была решена Кокрофтом и Уолтоном чрезвычайно остроумно.

Второй важнейшей частью установки была ускоряющая трубка, собранная из двух секций, к каждой из которых подводилось напряжение от генератора (до 350 тысяч вольт). Таким образом, максимальная энергия протонного пучка могла составлять ~0,7 МэВ.

После «внушения», сделанного Резерфордом, на нижнем конце ускоряющей трубки появилась установка для изучения искусственного расщепления ядер лития (на фотографии она закрыта черной материей). Сначала схема опыта выглядела так, как это показано на рисунке 4. Пучок протонов падал на мишень из лития, повернутую под углом 45° к направлению пучка. Вылетающие из мишени α-частицы попадали на экран из сернистого цинка. Когда на такой экран попадает энергичная (несколько МэВ) α-частица, происходит вспышка света, которую можно увидеть с помощью микроскопа.

Приступив к опыту, исследователи начали понемногу увеличивать напряжение на трубке. Когда оно достигло величины 125 кВ, появились первые вспышки от α-частиц. Их еще было мало (5 штук в минуту при токе в 1 мкА), но чем больше увеличивалось напряжение, тем чаще появлялись световые точки. Число вспышек оказалось пропорциональным току протонов.

Ожидаемая и неожиданная удача!

После первых успешных результатов, как всегда, наступило время их кропотливой проверки. Все — яркость вспышек, величина пробега частиц, характер следов в камере Вильсона (ею был заменен счетчик вспышек) — указывало на то, что это α-излучение с энергией около 8 МэВ.

Однако изобретательные молодые физики провели еще один, контрольный, эксперимент. Согласно расчетам, α-частицы, появляющиеся при ядерной реакции $^{7}_{3}\mathrm{Li}+p\rightarrow 2\alpha$, должны разлетаться под углом 180° *). Одновременная регистрация двух таких частиц была бы полным подтверждением расщепления ядра. Для контрольного эксперимента была собрана установка, в которой использовались два счетчика (два экрана), расположенные по разные стороны от мишени (на рисунке 5 — схема такой установки).

И вот оба экспериментатора смотрят в микроскопы. У каждого из них под рукой телеграфный ключ и движущаяся бумажная лента. Увидев вспышку, надо нажать ключ, и он поставит точку на ленте. При сравнении оказалось, что точки совпадают (по времени) так часто, как это следовало из расчетов.

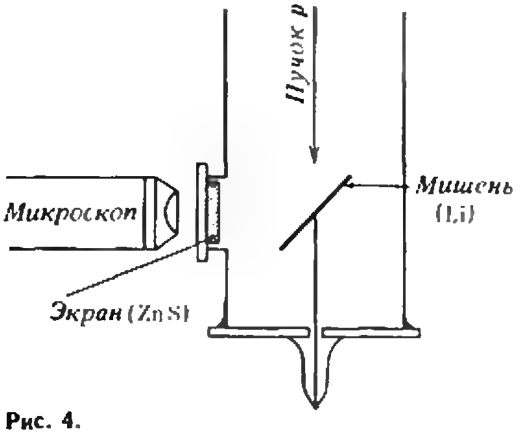


Рис. 4.

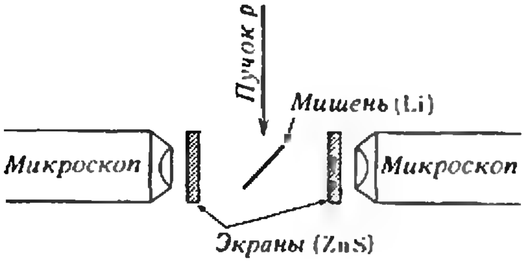


Рис. 5.

Еще немного об ускорителях

После 1932 года ускоритель зашагал семимильными шагами. В конце 1936 года разгоняемые в циклотроне α-частицы превзошли по своей энергии все, что давали естественные препараты. Шло время, рождались новые идеи, и создавались новые типы ускорителей. Как-то было подсчитано, что через каждые пять лет энергии ускоряемых частиц возрастали почти на порядок. Ускорителям стало тесно в комнатах, залах, потом в ангарах. Пришло время, когда увидеть ускоритель целиком можно только с самолета. Если установка Кокрофта и Уолтона обошлась «ужасно дорого» (приблизительно в 1000 фунтов стерлингов), то потом эта цифра обросла таким количеством нулей, что строительство ускорителей стало под силу только богатым странам. Но и они объединяются для создания новых гигантов.

В распоряжении физиков оказались пучки самых различных частиц и среди них — дейтонов (d) — ядер тяжелого водорода дейтерия D. Они состоят из одного протона и одного нейтрона, то есть имеют заряд +1 и массу 2.

Удивительная судьба связывает нейтрон и дейтон. Существование обоих было предсказано Резерфордом в 1920 году, и обе частицы были открыты в 1932 году.

Дейтон и тяжелая вода

16 февраля 1932 года в редакцию журнала Американского физического общества «Физическое обозрение» поступила статья «Изотоп водорода с массой 2 и его концентрирование».

Популярный сейчас журнал представлял во времена своей молодости довольно тонкую книжку и намного уступал своей известностью европейским изданиям.

Однако работа трех американских ученых Юри, Брикведда и Мерфи была выдающимся событием для всей физики.

Путь к обнаружению дейтона был далеко не легким. Подобно любому из путей к большому открытию, он заключал в себе и ошибки, и недоразумения.

---

*) Энергия протонов много меньше, чем высвобождаемая в этом процессе и переходящая в кинетическую энергию α-частиц.

Содержание тяжелых атомов в водороде составляет менее 1 на 6000 легких. Это и было основной причиной трудностей.

Свою работу Юри, Брикведд и Мерфи начали с того, что научились обогащать водород тяжелым изотопом. Вот почему в названии статьи стоят слова о концентрации, и недаром ее авторы работали в лаборатории низких температур. В этой лаборатории они подвергали особой перегонке жидкий водород (а он сжижается при температуре —253 °С!). Легкие молекулы $^1H^1H$ уходили первыми, а остаток обогащался тяжелым изотопом $^1H^2H$.

Затем точными спектральными методами, которые мы не можем здесь описывать, было показано, что в обогащенных образцах действительно присутствуют атомы тяжелого водорода.

Вскоре Уошборн и Юри обнаружили, что при электролизе водных растворов первым выделяется легкий водород $^1H^1H$, и вода насыщается тяжелым. Ее плотность в процессе электролиза постепенно повышается, и в конце концов можно получить почти чистую тяжелую воду — D_2O. Свойства тяжелой воды необычны: плотность ее — 1,1 г/см^3, температура замерзания равна 4 °С, температура кипения — 101,4 °С.

Необычна и судьба этого вещества, которое сначала было известно лишь узкому кругу ученых, а через 10 лет после своего открытия стало предметом пристального внимания людей, очень далеких от науки. Это объяснялось тем, что тяжелая вода понадобилась для производства атомного оружия. К началу второй мировой войны почти весь европейский запас тяжелой воды — 185 килограммов — находился на территории оккупированной Франции. И гестапо, и абвер устроили настоящую охоту за драгоценным сырьем. Французские патриоты во главе с Фредериком Жолио-Кюри сначала успешно прятали ее у себя на родине, а затем тайно переправили в Англию.

Совсем короткое заключение

Подходил к концу 1932 год — «золотой год экспериментаторов», «год чудес», «год исполнения предсказаний». Замечательные открытия этого года были подготовлены огромным трудом многих и многих людей, о подавляющем большинстве которых мы не смогли даже упомянуть в этой статье. У нас почти не было возможности рассказать и об ошибках, блужданиях и разочарованиях.

«Среди плодотворных дней, встречается много других, когда ничего не получается, когда все валится из рук, когда кажется, что даже сама природа относится к тебе враждебно. Вот именно тогда надо победить разочарованность» (Мария Кюри).

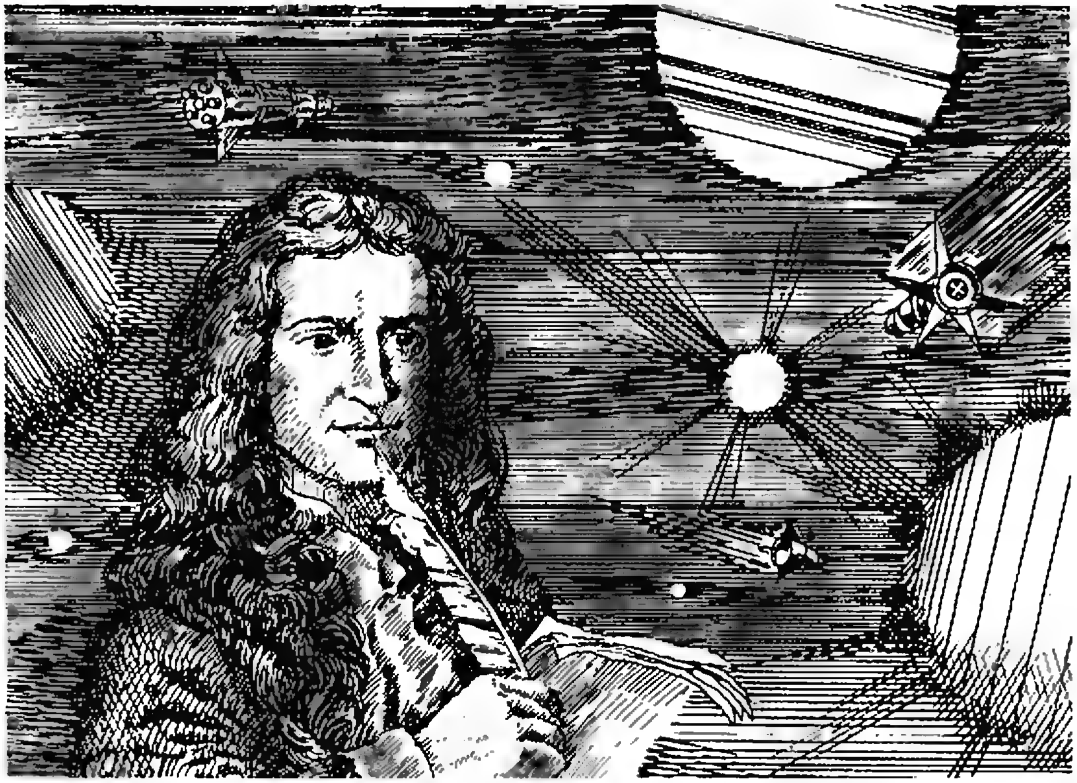
ВСТРЕЧА С ЧИТАТЕЛЯМИ

8 апреля 1982 года в Московском физико-техническом институте (г. Долгопрудный) состоялась встреча редакции нашего журнала с преподавателями и студентами МФТИ. Перед ними выступали члены редакционной коллегии и редакционного совета «Кванта». Я. А. Смородинский рассказал о последних достижениях физики. О работе редакции, ее планах на будущее рассказали М. Н. Данилычева, Н. Б. Васильев, А. Р. Зильберман, Н. Х. Розов, В. Е. Белонучкин, Р. Н. Кузьмин, Г. Н. Яковлев. А. П. Савин ознакомил участников встречи с итогами анализа анкет «Кванта», распространенных среди студентов МФТИ.

Преподаватели и студенты МФТИ — бывшие активные читатели «Кванта» — с энтузиазмом высказали свое мнение о журнале, пожелания редакции.

В дальнейшем редакция намерена провести ряд таких встреч в различных вузах и школах.

А. Виленкин



В. Тихомиров

Аэродинамическая задача Ньютона

Ошибаются ли гении? Обычно, задавая такой вопрос, предполагают утвердительный ответ. В сознании, что и гениям свойственно заблуждаться, есть нечто утешительное — об ошибках гениев нередко пишут с большим воодушевлением. Вот пример. Перу Л. Янга — замечательного математика, внесшего немалый вклад в развитие математического анализа, принадлежит книга «Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления», М., «Мир», 1974. Это очень интересная и своеобразная книга*). В ней рассеяны философские рассуждения автора, обращенные ко многим, иногда удаленным от математики, темам. На вопрос «ошибаются ли гении?» Янг отвечает с запальчивой утвердительностью, ссылаясь при этом на Ньютона. На с. 42 упомянутой книги он пишет: «Ньютон сформулировал вариационную задачу о теле вращения, испытывающем наименьшее сопротивление в газе. Принятый им закон сопротивления физически абсурден, в результате чего поставленная им задача не имеет решения (чем более зазубрен профиль, тем меньше сопротивление)... Если бы выводы Ньютона были хотя бы приблизительно верны, то мы не нуждались бы сегодня в дорогостоящих экспериментах в аэродинамических трубах».

Что же это за задача, и насколько справедливы приведенные выше слова? Об этом и будет рассказано дальше.

Аэродинамическая задача Ньютона

В 1687 году вышли «Математические начала натуральной философии» Ньютона. Вряд ли какое-либо произведение научной литературы может быть сопоставлено с этой книгой — в ней Ньютону было суждено открыть систему мира. Лагранж назвал это сочинение «вели-

---

*) Не предназначенная, разумеется, для школьников. (*Прим. ред.*)

чайшим из произведений человеческого ума».

Обсуждая вопросы, связанные с сопротивлением, оказываемым материальным телам средой, в которой они движутся, Ньютон, как бы мимоходом, бросил следующую фразу: «Когда же фигура $DNFG$ будет кривою такого рода, что если из любой ее точки N опустить на ось перпендикуляр NM и из заданной точки G провести прямую GR, параллельную касательной к кривой в точке N и пересекающую ось в точке R, то имеет место пропорция $MN:GR = GR^3:(4BR \cdot GB^2)$, тогда тело, образующееся при обращении этой кривой около оси AB, при движении в вышеупомянутой редкой среде в направлении от A к B будет испытывать меньшее сопротивление, нежели всякое иное тело вращения, описанное на той же длине и ширине»*) (рис. 1).

Фраза Ньютона привлекла к себе внимание современников лишь после того, как в 1696 году И. Бернулли поставил свою знаменитую задачу о брахистохроне (см. напр. «Квант», 1975, № 12 или книгу Г. Н. Бермана «Циклоида», М., «Наука», 1980). Задаче о брахистохроне, а не задаче Ньютона, суждено было стать родоначальницей нового направления в математике, впоследствии названного *вариационным исчислением*.

В сиянии брахистохроны задача Ньютона заняла положение несчастной Золушки: ее как-то избегали, вспоминали о ней редко, да и то, как правило, чтобы поведать о заблуждении гения. Но, как и для Золушки, для задачи Ньютона настал свой черед.

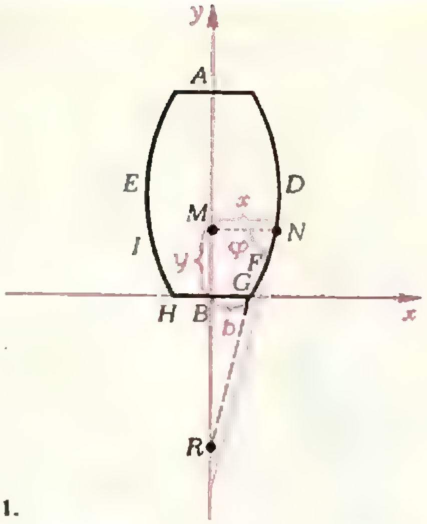


Рис. 1.

* * *

Попробуем вникнуть в замысел Ньютона.

При конструировании кораблей, снарядов, торпед или ракет естественно возникает стремление придать им такую форму, чтобы они испытывали возможно меньшее сопротивление при своем движении. Ньютон пишет: «Можно сравнивать сопротивление тел между собой и находить те, которые наиболее приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде». Но, если, скажем, корабль не может иметь слишком большой симметрии своего корпуса, то головки ракет, снарядов и торпед естественно делать круглыми в поперечном сечении; иными словами, им резонно придавать форму *тел вращения*. Но какую именно — сферическую, коническую, веретенообразную или еще какую-нибудь? На такой вопрос нельзя ответить без вычислений, без решения некоторой математической задачи на максимум и минимум. Именно такую задачу ставит (и решает в приведенной выше фразе) Ньютон.

В самом первом приближении задача ставится так.

Задача. *Найти тело вращения заданной длины и заданной ширины, испытывающее наименьшее сопротивление при движении в некоторой среде.*

Пояснения. Каждый из терминов, участвующий в формулировке (*длина, ширина, движение* и *сре-*

---

*) Подлинный текст Ньютона воспроизведен в книге В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина «Оптимальное управление». (М., «Наука», 1979). Перевод «Математических начал» опубликован в собрании сочинений акад. А. Н. Крылова. (М.—Л., Изд. АН СССР, 1937, т. 7). Цитируемое место содержится на с. 430. Мы чуть подкорректировали его. Рисунок 1 — копия рисунка из «Математических начал». Правда, мы расположили его «сверху вниз», а не «слева направо»; кроме того, на рисунке 1 имеются дополнительные красные линии и буквы, нанесенные нами, они понадобятся нам в дальнейшем.

да), требует полного описания. Ньютон представляет себе тело вращения одинаковым сзади и спереди, то есть симметричным относительно плоскости, проходящей через середину оси вращения и перпендикулярной этой оси. Таким образом, *длина* тела — это его длина по оси вращения, а радиус срединного сечения — это *ширина* тела. Следовательно, при всех рассмотрениях можно ограничиться лишь половинкой тела, что мы и делаем дальше. Будем считать, вслед за Ньютоном, что *движение*, совершаемое телом,— это равномерное движение с постоянной скоростью v.

Теперь — о *среде* — это наиболее тонкий и принципиальный вопрос. Среда, описанная Ньютоном, несколько необычна, он называет ее *редкой*. Ньютон представляет себе редкую среду «состоящей из равных частиц, свободно расположенных на равных друг от друга расстояниях». Неподвижные частицы имеют фиксированную массу m и являются абсолютно упругими шарами. Само тело Ньютон считает также абсолютно упругим, так что каждый шарик, столкнувшись с движущимся телом, отскакивает от него по закону «угол падения равен углу отражения».

После приведенных пояснений можно было бы сразу точно поставить и начать решать общую задачу, но мы сначала изучим более простую. С этой более простой задачи, кстати говоря, начинает и сам Ньютон.

Задача об усеченном конусе. *При данном основании и высоте усеченного конуса найти тот, который испытывает наименьшее сопротивление при движении в редкой среде.*

Формализация задачи об усеченном конусе

Только что задача была сформулирована словесно, без формул. Нам надлежит сейчас осуществить ее *перевод* с обычного языка на язык математики. Такой перевод называется *формализацией*.

Итак, пусть усеченный конус имеет высоту, равную H, и радиус верхнего основания R (рис. 2)*).

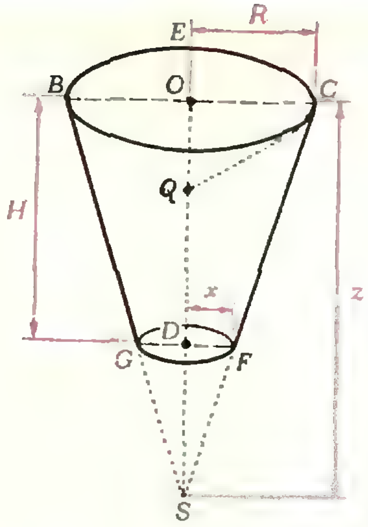


Рис. 2.

Ньютон пишет: «Так как действие среды на тело то же самое... движется ли тело в покоящейся среде или же частицы среды ударяют с той же скоростью на покоящееся тело, то будем рассматривать тело в покое». Поступим так же и мы: оставив конус неподвижным, мы будем считать, что на него снизу вверх «надвигается» среда со скоростью v.

Поверхность конуса, испытывающая столкновения с шариками среды, состоит из его нижнего основания и боковой поверхности. Сначала вычислим сопротивление, испытываемое нижним основанием. Обозначим его радиус через x. За единичное время с этим основанием столкнутся шарики, которые первоначально находились в цилиндре с основанием, равным нижнему основанию, и высотой, равной v. Объем этого цилиндра V_0 равен $\pi x^2 v$. Пусть ϱ — плотность среды. Тогда число частиц, ударившихся о нижнее основание за единичное время, будет равно $N_0 = \frac{\varrho}{m} V_0 = \frac{\varrho}{m} \pi x^2 v$. Каждая частица после удара о нижнее основание сменит свою скорость на противоположную, то есть получит приращение импульса, равное $-2mv$. По третьему закону Ньютона конус получит противоположное прираще-

---

*) Часть рисунка 2, выполненная в черном цвете, содержится в «Математических началах».

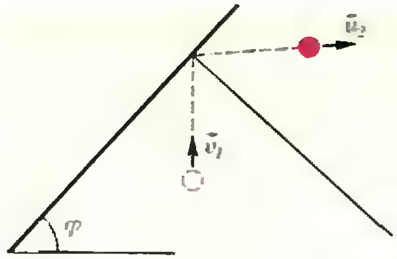


Рис. 3.

ние импульса, и, значит, общее приращение импульса от всех частиц будет равно $N_0 2mv = 2\pi\varrho x^2 v^2$. Аналогично обстоит дело и для боковой поверхности. О нее ударяются частицы, помещаемые в объем между двумя одинаковыми боковыми поверхностями, и этот объем V_1 равен $\pi(R^2-x^2)v$. Число частиц, ударившихся о боковую поверхность, равно $N_1 = \frac{\varrho}{m}V_1 = \frac{\varrho}{m}\pi(R^2-x^2)v$. Но здесь надо аккуратнее подсчитать приращение импульсов. Отразившись от стенки, частица получит приращение импульса $m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$ (рис. 3). Этот вектор надо спроектировать на ось y. Из рисунка 3 легко понять, что эта проекция равна $-2mv\cos^2\varphi$, где φ — угол наклона образующей конуса к плоскости нижнего основания. Таким образом, общее приращение импульса от всех частиц, ударившихся о боковую поверхность, равно $N_1 2mv\cos^2\varphi = 2\pi\varrho(R^2-x^2)v^2\cos^2\varphi$.

Отметим (для будущего) формулу для силы сопротивления, испытываемого боковой поверхностью усеченного конуса, получающегося при вращении вокруг оси y отрезка AB, наклоненного к оси x под углом φ с абсциссами концов, равными a и b соответственно:

$$F = K(b^2-a^2)\cos^2\varphi,\quad K = 2\pi\varrho v^2. \quad (1)$$

В результате получаем следующее выражение для сопротивления, испытываемого всем конусом:

$$F(x) = K(x^2+(R^2-x^2)\cos^2\varphi),$$
$$K = 2\pi\varrho v^2.$$

Выражение $\cos\varphi$ через x найти очень легко: $\cos\varphi = (R-x)/\sqrt{(R-x)^2+H^2}$.

Постоянный множитель K не влияет на поведение максимальных и минимальных величин, и мы его отбросим.

Теперь можно формализовать задачу об усеченном конусе.

Задача 1. *Найти минимум функции*

$$\hat{f}(x) = x^2+(R^2-x^2)\frac{(R-x)^2}{(R-x)^2+H^2} \quad (2)$$

при условии, что $0 \leqslant x \leqslant R$.

Второй вариант формализации задачи об усеченном конусе

Продолжим отрезок прямой, соединяющей точки C и F (рис. 2) до пересечения с осью y в точке S. Длину отрезка OS примем за новое переменное z. Из подобия треугольников SOC и SDF получаем $x/R = (z-H)/z$, откуда $(R-x) = RH/z$ и $x = R(z-H)/z$. Подставив эти выражения в (2), получим новое выражение для силы сопротивления (деленной на K) через новую переменную:

$$q(z) = R^2\frac{(z-H)^2+R^2}{z^2+R^2}. \quad (3)$$

При этом z изменяется от H до бесконечности. Таким образом, мы пришли к такой формализации задачи об усеченном конусе (постоянный множитель R^2 снова отбрасывается):

Задача 1′. *Найти минимум функции*

$$h(z) = \frac{(z-H)^2+R^2}{z^2+R^2} \quad (2')$$

при условии, что $z \geqslant H$.

Решение задачи 1′. Обозначим наименьшее значение функции h через m. Таким образом, $h(z) \geqslant m$ для любого $z \geqslant H$. При этом $m \leqslant h(H) = R^2/(R^2+H^2) < 1$. Сделаем очевидные преобразования:

$$h(z) \geqslant m \text{ при } z \geqslant H \Leftrightarrow,$$
$$\Leftrightarrow (z-H)^2+R^2-mz^2-mR^2 \geqslant 0$$
$$\text{при } z \geqslant H \Leftrightarrow,$$
$$z^2(1-m)-2zH+H^2+R^2(1-m) \geqslant 0 \quad (4)$$

при $z \geqslant H$.

Если вдруг окажется, что существует такое $m < 1$, при котором неравенство (4) верно для всех z и если при этом m можно найти $\hat{z} \geqslant H$, которое обращает это неравенство в равенство, то это будет означать, что задача решена. Попробуем теперь отыскать нужные m и $\hat{z}$. Если имеет место неравенство $az^2+2bz+c\geqslant 0$ для всех $\hat{z}$ и при этом $a\hat{z}^2+2b\hat{z}+c=0$, то отсюда следует, что $D=b^2-ac=0$ и $z=-b/a$ (продумайте это!). У нас $a=(1-m)$, $b=-H$, $c=H^2+R^2(1-m)$. Уравнение $D=0$ приводит к соотношению

$$D=H^2-(1-m)(H^2+R^2(1-m))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (R^2m^2-(2R^2+H^2)m+R^2)=0,$$

откуда

$$m=\frac{2R^2+H^2-H\sqrt{4R^2+H^2}}{2R^2}.$$

Знак + был отброшен, ибо то m, которое мы ищем, должно быть, как это было установлено, меньше единицы. Далее,

$$\hat{z}=-b/a=H/(1-m)=$$
$$=\sqrt{R^2+(H/2)^2}+H/2\,(>H). \quad (5)$$

В итоге нашлись такие $m<1$ и $\hat{z}>H$, что дискриминант уравнения $z^2(1-m)-2zH+H^2+R^2(1-m)=0$ равен нулю, и оно имеет единственный корень $\hat{z}\geqslant H$, то есть $h(z)\geqslant m$, $h(\hat{z})=m$. Задача 1′ решена.

Приведем ответ задачи об усеченном конусе в той форме, которую придал ему Ньютон: «Если на круговом основании $CEBH$ (рис. 2), описанном из центра O радиусом OC, требуется построить такой усеченный конус $CBFG$ с высотою OD, коего сопротивление было бы меньше сопротивления всякого другого усеченного конуса, построенного на том же основании и высоте и движущегося по оси OD в сторону D, то разделив высоту OD в точке Q пополам, продолжи OQ до S так, чтобы было $QS=QC$. S и будет вершиною искомого конуса, который усекается».

Легко убедиться, что геометрическая форма, приданная ответу Ньютоном в точности соответствует аналитической форме, заключенной в формуле (5).

Обсуждение. Получилось, что конус наименьшего сопротивления на самом деле усеченный, затупленный, а не заостренный. Ньютон при этом идет еще дальше. Он устремляет высоту H к нулю. При этом $\hat{z}$ устремляется к R и угол при основании конуса устремляется к 45°. Основываясь на этом, Ньютон делает замечание, что овальное тело следует заменять затупленным, то есть делать спереди плоскую круглую площадку, образующую угол с примыкающей к площадке поверхностью, равный 135°. «Я считаю, что это замечание,— говорит Ньютон,— может быть небесполезно при построении судов».

Задача Ньютона для ломаной

Сделаем еще один, предпоследний шаг к решению общей задачи Ньютона. Будем рассматривать не любые кривые вращения, а лишь ломаные. Для этого разделим отрезок $[0, R]$ оси Ox на N равных частей точками деления

$$x_0=0,\ x_1=\frac{R}{N},\ x_2=\frac{2R}{N},\ \ldots,\ x_N=R$$

и обозначим ординаты соответствующих вершин ломаной через y_0, y_1, ..., y_N (рис. 4). Будем предполагать, что ломаная начинается в точке $(x_0,y_0)=(0,0)$, затем может идти по оси Ox (то есть $y_0=y_1=\ldots=y_s=0$ для некоторого s, $0\leqslant s\leqslant N$), затем монотонно поднимается вверх

$$y_s<y_{s+1}\leqslant y_{s+2}\leqslant\ldots\leqslant y_N \quad (6)$$

и приходит в точку $(x_N,y_N)=(R,H)$. Ломаные, удовлетворяющие этим требованиям, назовем *допустимыми*.

Поясним, почему потребовалось *условие монотонности* (6). При его нарушении в поверхности вращения образуются «выемки», от которых некоторые шарики будут многократно отражаться, увеличивая силу сопротивления (и безнадежно усложняя ее подсчет).

Найдем теперь силу сопротивления среды F для поверхности, об-

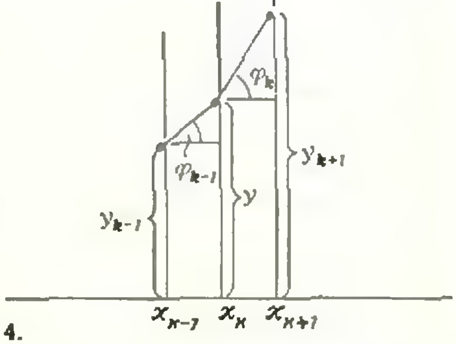


Рис. 4.

разованной вращением допустимой ломаной. Для этого, применяя формулу (1) к каждому ее звену, выразим $\cos\varphi_k$ через координаты вершин (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) (см. рис. 4) и просуммируем. Получается

$$F_л = 2K \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \cdot \frac{\Delta x_k}{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}, \tag{7}$$

где мы обозначили $K = 2\pi\varrho v^2$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{R}{N}$.

Мы не будем решать задачу минимизации силы (7), хотя для этого требуются лишь известные вам средства дифференциального исчисления — решение технически сложное, а нам для дальнейшего важна лишь постановка задачи и сама формула (7).

Формализация задачи Ньютона

Теперь мы можем подойти к задаче Ньютона в общем случае, когда поверхность вращения образована не отрезком, не ломаной, а кривой $y = f(x)$. Какие кривые мы можем рассматривать? Конечно, кривая должна начинаться в точке (0,0), затем может идти по оси Ox до некоторой точки $(b, 0)$ (где $b \geqslant 0$), затем поднимается монотонно вверх и кончается в точке (R, H). Кроме того, мы потребуем, чтобы функция f была дифференцируема во всех точках $x \in [0, R]$, кроме точки b, где угол примыкания кривой к горизонтальному участку должен быть равен 135° (вспомним замечание Ньютона «небесполезное при построении судов»). Тогда *условие монотонности* может быть записано в виде

$$f'(x) \geqslant 0 \quad x \in [0, R],\ x \neq b.$$

Кривые $y = f(x)$, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *допустимыми*.

Найдем силу сопротивления среды для тела, полученного вращением допустимой кривой $y = f(x)$ около оси Oy. Возьмем достаточно большое число N и построим допустимую ломаную, положив $y_k = f(x_k)$. Эта ломаная будет мало отличаться от нашей кривой, поэтому искомая сила сопротивления F будет мало отличаться от найденной ранее силы $F_л$ (см. (7)).

Вспомнив теперь понятие интегральной суммы и заметив, что $\Delta y_k / \Delta x_k \approx f'(x_k)$, нетрудно поверить, что при неограниченном увеличении числа N сумма (7) стремится к интегралу

$$2K \int_0^R \frac{x\,dx}{1 + (f'(x))^2} = F,$$

который и выражает искомую силу сопротивления. Так, мы пришли к формализации общей задачи Ньютона:

Среди всех допустимых функций $y = f(x)$ найти ту, для которой интеграл

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{1 + u^2} \tag{8}$$

минимален, если $u = f'(x) \geqslant 0$.

Решение задачи Ньютона

Подобных задач, конечно, вы в школьном учебнике не встречали. Мы начнем, поэтому, с более простой *вспомогательной задачи:*

Среди всех допустимых функций $y = f(x)$ найти ту, для которой выражение

$$\frac{x}{1 + u^2} + 2cu \tag{9}$$

минимально (для всех $x \in [0, R]$), если $u = f'(x)$ и $c > 0$ — константа.

Зачем решать эту задачу? А вот зачем: если найдено ее решение $y = \bar{f}(x)$, $\bar{u} = \bar{f}'(x)$, то для любой другой допустимой функции $y = f(x)$ выполняется неравенство (при всех $x \in [0, R]$)

$$\frac{x}{1 + u^2} + 2cu > \frac{x}{1 + \bar{u}^2} + 2c\bar{u}, \tag{10}$$

проинтегрировав которое на $[0, R]$ учитывая, что $u = f'(x)$, получим

$$\int_0^R u\,dx = \int_0^R \bar{u}\,dx = H,$$

откуда

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{1 + u^2} > \int_0^R \frac{x\,dx}{1 + \bar{u}^2};$$

а это значит, что $\bar{f}(x)$ (решение вспомогательной задачи (9)) является также и решением задачи Ньютона (8)!

А вспомогательную задачу, как вы наверное догадались, решить не так уж трудно. Ответом будет линия, идущая по оси Ox до точки излома $b = 4c$ и далее по кривой, точки $(x;\ y)$ которой выражаются по формулам

$$\begin{cases} x=c\left(\dfrac{1}{u}+2u+u^3\right) \\ y=c\left(\ln\dfrac{1}{u}+u^2+\dfrac{3}{4}u^4\right)-\dfrac{7c}{4} \end{cases} \qquad (11)$$

через параметр $u\geqslant 1$ (константа c определяется из условия $f(R)=H$).

Задание. Докажите это.

Указание. Рассматривая выражение (9) как функцию от u, продифференцируйте его (по u) и приравняйте к нулю:

$$\frac{xu}{(1+u^2)^2}=c. \qquad (12)$$

Это соотношение называется *дифференциальным уравнением Ньютона* и позволяет найти x (как функцию от u). Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите

$$\frac{d}{du}f(x(u))=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=u\frac{dx}{du}$$

и проинтегрируйте это выражение, чтобы найти y (константа $\frac{-7c}{4}$ определяется из замечания Ньютона: в точке излома, при $u=1$, f равно нулю).

Читатель, проверивший все наши рассуждения, может все же спросить: а как же догадаться, что нужно решать именно такую вспомогательную задачу? Секрет прост. На самом деле поиск экстремума вспомогательного выражения (9) — это простое применение так называемого *принципа максимума*, выдвинутого известным советским математиком Л. С. Понтрягиным в середине пятидесятых годов. Этот принцип дает общую схему для решения многих других задач подобного типа.

Подведем итоги

1. *Как же все-таки решить задачу Ньютона?* Как построить минимальную кривую, если ширина и высота заданы? Из выражения (11) видно, что совокупность всех кривых, подозреваемых на минимум — однопараметрическое семейство. При этом *все кривые подобны друг другу* и, в частности, подобны кривой, получающейся из (11), когда C равно, скажем, двум. Нарисуем эту кривую $y=f(x,2)$ (см. рис. 5). Она обладает тем свойством, что с любой прямой $y=kx$, $k>0$ эта кривая *пересекается один раз* (это нетрудно установить из (12)). Следует провести прямую $y=\frac{Hx}{R}$, соединяющую начало координат с точкой (R, H). Пусть эта прямая пересечет график функции $y=f(x, 2)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда, положив $\bar{C}=H/\bar{y}$, построим кривую $y=f(x, \bar{C})$, которая пройдет через нужную точку (R, H). Эта кривая в семействе (11) единственная, обладающая этим свойством. Она и будет решением задачи Ньютона: мы ведь доказали, что она действительно будет доставлять минимум в той задаче, которая была поставлена выше (см. раздел «Формализация задачи Ньютона»).

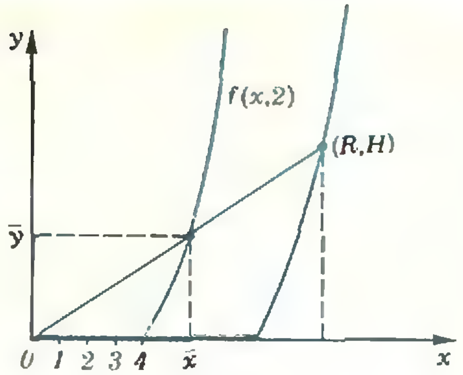


Рис. 5.

2. *Что же означает таинственная фраза Ньютона, цитированная в начале статьи, и какое отношение она имеет к решению задачи Ньютона?* На рисунке 1 красным цветом нанесены некоторые наши обозначения. Мы положили $|MN|=x$, $|MB|=y$, $|BG|=b$, угол между отрезком $[MN]$ и касательной к кривой в точке N обозначен через φ. Этот угол равен углу HGR. Далее, $\operatorname{tg}\varphi=f'(x)$, значит, $|BR|/|BG|=\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow |BR| = bf'(x)$, откуда $|GR|^2=|BG|^2+|BR|^2=b^2(1+(f'(x))^2)$. Теперь из пропорции Ньютона $(|MN| : GR| = |GR|^3 : (4|BR|\cdot|GB|^2)$ получаем

$$\frac{x}{b\sqrt{1+(f'(x))^2}}=\frac{b^3(1+(f'(x))^2)^{3/2}}{4bf'(x)b^2}\Leftrightarrow\frac{xf'(x)}{(1+(f'(x))^2)}=\frac{b}{4}. \qquad (12')$$

Получилось дифференциальное уравнение для кривой Ньютона (см. (12) для $b=4c$). Затупленность тела вращения и излом в точке G (угол там равен, как мы помним, 135°) были также предусмотрены Ньютоном. Ранее мы видели, что дифференциального уравнения (12′) и условия в точке излома достаточно для однозначного разрешения задачи Ньютона.

Итак, *задача Ньютона была решена им полностью.*

3. *К какой области математики относится задача Ньютона?* Долгое

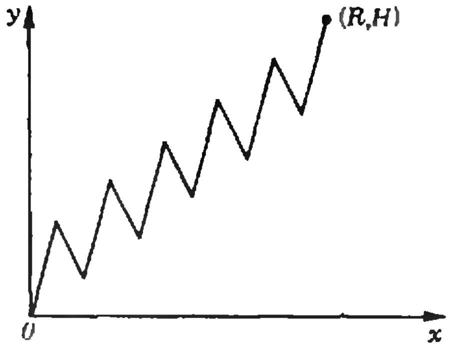


Рис. 6.

время считалось, что к вариационному исчислению: например, А. Н. Крылов, приведя процитированную вначале фразу Ньютона, сопровождает ее такими словами: «Это утверждение Ньютона всецело относится к вариационному исчислению». Далее он формализует задачу Ньютона (чуть иначе, чем мы — у него тело движется вбок, как у Ньютона, у нас — вниз) и приходит (если в его выражении заменить y на x и x на y) к задаче о минимизации интеграла

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{1+(f'(x))^2} \qquad (13)$$

при само собой разумеющихся начальных условиях $f(0)=0$, $f(R)=H$. Минимизация такого интеграла, действительно, относится к вариационному исчислению, *но без дополнительного условия* $f'(x) \geqslant 0$ *минимизировать этот интеграл бессмысленно.* Это отметил Лежандр спустя 100 лет после выхода «Начал». Действительно, выберем в качестве f ломаную, составленную из очень крутых звеньев (по типу той, которая изображена на рисунке 6). Тогда $(f'(x))^2$ будет очень велико, а интеграл (13) мал; его вообще можно сделать сколь угодно малым. Получается, действительно, как по Янгу: «чем зазубреннее профиль, тем меньше сопротивление!» Но мы отмечали уже, что *при ньютоновской постановке задачи необходимо требовать, чтобы f была монотонной,* то есть чтобы выполнялось соотношение

$$f'(x) \geqslant 0. \qquad (14)$$

Минимизация интеграла (13) *при условии* (14) *не относится к вариационному исчислению.* Ограничения типа (14), наложенные на задачи о минимизации интегралов типа (13), были охвачены теорией лишь в середине XX века.

Итак, задача Ньютона, *не являясь первой задачей вариационного исчисления, оказалась первой задачей нового раздела математики — теории оптимального управления.*

4. *Критика и апология Ньютона.* Мы опровергли уже два обвинения в адрес Ньютона: неверно, что задача Ньютона не имеет решения (оно было им найдено), неверно, что «чем зазубреннее профиль, тем меньше сопротивление» — этот факт никак не следует из ньютоновских допущений. Но, может быть, все-таки верно, что «принятый им закон физически абсурден?» Что это за редкая среда? Бывает ли такая среда? Не является ли абсурдным то обстоятельство, что тело наименьшего сопротивления затуплено? Кто это видывал торпеды или ракеты с затупленными головками?

Справедливости ради надо сказать, что ни вода, ни окружающий нас воздух, ни какая-либо иная привычная нам газообразная или жидкая среда не обладают свойствами редкой среды Ньютона. Однако физические допущения Ньютона и сама его аэродинамическая задача оказались на самом передовом крае современной науки в середине пятидесятых годов, когда настала эра сверхзвуковых и сверхвысотных летательных аппаратов. «Там вверху», среда оказалась «редкой». И замечание Ньютона о затупленных конусах оказалось-таки «небесполезным» при построении судов, а именно — космических судов. Наконец,

5. *Ошибаются ли гении?* Конечно, ошибаются. Но, надеюсь, я сумел убедить вас в том, что постановка и решение аэродинамической задачи были не заблуждением гения, а прозрением его, позволившим ему прикоснуться через три века к нашей жизни и нашим проблемам. Над этим стоит призадуматься.

Словом, не будем торопливы: может статься, что мысль Гения, кажущаяся нам его заблуждением, несет в себе отпечаток истины, еще не открывшейся нам.

задачник кванта

Задачи

М741—М745; Ф753—Ф757

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1982 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—82 и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М741, М742» или «Ф753». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М741. а) Найдите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само это число). б) Укажите все такие числа.

М. Левин

М742. На а) окружности, б) сфере радиуса 1 расположены n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.

А. Михайловский, В. Прасолов

М743. В стране N городов. а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или пароходом. Докажите, что, пользуясь лишь каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или пароходом. Докажите, что можно выбрать не менее $N/2$ городов и один из трех видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город. в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число $N/2$ бóльшим, вообще говоря, нельзя.

Л. Курляндчик, С. Охитин

М744*. В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (вершины A_1, B_1, C_1 углов, равных по величине $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, лежат, соответственно, на отрезках BC, CA и AB). Пусть A_0, B_0, C_0 — точки пересечения прямых BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и AA_1. Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$, пересекаются в одной точке.

Д. Изаак

М745. а) Задана последовательность чисел (d_n) таких, что $|d_n| \leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Докажите, что можно выбрать последовательность (s_n) из чисел $+1$ и -1 так, что для всех n

$$|d_1s_1 + d_2s_2 + \ldots + d_ns_n| \leqslant 1.$$

б) Задана последовательность троек чисел (a_n, b_n, c_n) таких, что $|a_n| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$, $|c_n| \leqslant 1$ и $a_n + b_n + c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По ней строится новая последовательность троек (x_n, y_n, z_n), в которой $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а каждая тройка (x_n, y_n, z_n) при $n \geqslant 1$ получается из предыдущей $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ прибавлением к x_{n-1} одного из чисел a_n, b_n, c_n по нашему выбору, к y_{n-1} — другого, к z_{n-1} — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа x_n, y_n, z_n будут по абсолютной величине не больше 1 или хотя бы ограничены некоторой константой?
в) Выясните аналогичные вопросы для последовательностей четверок чисел.

Н. Розов

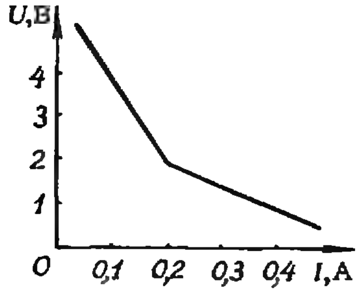


Рис. 1.

Ф753. На рисунке 1 приведена зависимость напряжения источника питания от тока нагрузки. Найти максимальную мощность, которую можно получить в нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки она достигается? Для чего может понадобиться такой источник питания и как практически осуществить такую зависимость $U(I)$?

А. Зильберман

Ф754. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость его обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 = 2$ см/с. За какое время муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника?

С. Кротов

Ф755. Спутник представляет собой легкую жесткую сферу радиуса $R = 1$ м и масса $M = 1$ кг, наполненную воздухом при давлении $p = 10^{-3}$ атм и температуре $T = 300$ К. Одновременно в стенке сферы открываются два клапана, расположенные друг от друга на расстоянии, равном радиусу сферы. Площади клапанов $S_1 = 10^{-4}$ см^2 и $S_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ см^2. Найти величину отклонения спутника от прежней траектории за время $\tau = 100$ с.

А. Стасенко

Ф756. Баллон объема $V = 2$ л содержит $m = 2$ г водорода и немного воды. Давление в сосуде равно $p_1 = 17$ атм. Сосуд нагревают так, что давление в нем увеличивается до $p_2 = 26$ атм. Сколько воды при этом испарится? Чему равны начальная и конечная температуры?
Указание. Воспользуйтесь таблицей зависимости давления насыщенных паров воды от температуры.

А. Буздин

t,°C	$p_н$, 10^5 Па
100	1
120	2
133	3
152	5
180	10

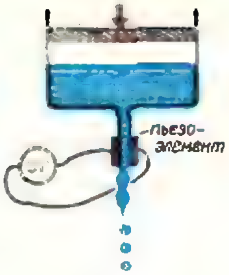


Рис. 2.

Ф757. Для получения одинаковых по размеру капель воды используется капиллярная трубка, соединенная с большим резервуаром, наполненным водой (рис. 2). Жидкость вытекает из капилляра при медленном перемещении поршня в резервуаре. Снаружи на свободном конце капилляра укреплен пьезоэлемент, присоединенный к звуковому генератору и передающий колебания струе воды. При достаточно большой амплитуде колебаний струя разбивается на совершенно одинаковые капли. Найти радиус капель, если диаметр трубки $d = 0,2$ мм, скорость вытекающей жидкости $v=2$ м/с, частота звуковых колебаний $\nu=1000$ Гц.

Ю. Чернышев

Problems

M741-M745; P753-P757

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 31, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic

M741. a) Find at least one natural number which is divisible by 30 and has precisely 30 divisors (including 1 and the number itself). b) Find all such numbers.

M. Levin

M742. A set of n points is located on a) a circle b) a sphere of radius 1. Prove that the sum of squares of all distances between them is no greater than n^2.

A. Mikhailovski, V. Prasolov

M743. There are N cities in a certain country. a) Any two cities are joined directly by plane or boat. Prove that using one of the two means of transportation (chosen once and for all) it is possible to get from any city to any other one (with possible transfers). b) Any two cities are joined directly by plane, boat or train. Prove that we can choose one of the three means of transportation and no less than $N/2$ cities so that it is possible to get from any one of the chosen cities to any other one of them by the chosen means of transportation. c) Give an example showing that in statement b) the number $N/2$ cannot be replaced by a larger one in general.

L. Kurliandchik, S. Okhitin

M744*. The triangle $A_1B_1C_1$ is inscribed in the triangle ABC so that the vertices A_1, B_1, C_1 of the angles congruent to angles A, B, C lie respectively on the lines BC, CA and AB. Let A_0, B_0, C_0 be the intersection points of the sides BB_1 and CC_1, AA_1 and CC_1, BB_1 and AA_1 respectively. Prove that the six circles circumscribed to the triangles ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$ have a common point.

D. Izaak

M745. a) Given a sequence of numbers (d_n) satisfying $|d_n| < 1$ $(n=1,2,\ldots)$, show that a sequence (s_n) of numbers equal to $+1$ or -1 may be chosen so as to have

$$|d_1s_1+d_2s_2+\ldots+d_ns_n| < 1.$$

b) A given sequence of triples of numbers (a_n, b_n, c_n) satisfying $|a_n|<1$, $|b_n|<1$, $|c_n|<1$ and $a_n+b_n+c_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$ is used to construct a new sequence of triples (x_n, y_n, z_n) for which $x_0=y_0=z_0=0$ and each triple (x_n, y_n, z_n), $n>1$, is obtained from the previous one $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ by adding one of the numbers (a_n, b_n, c_n) to x_{n-1}, another one to y_{n-1} and the remaining one to z_{n-1}. Can we always obtain a sequence (x_n, y_n, z_n) in this way sv that the absolute values of the numbers x_n, y_n, z_n are no greater than 1 or,

year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

at least, are bounded by some constant? c) Answer similar questions for sequences of quadruples of numbers.

N. Rozov

P753. The figure Рис. 1 shows the dependence of the power source's voltage on the current on the load. Find the maximal power which can be obtained on the load. For what resistance of the load is it attained? What can such a power source be used for and how can such a dependence $U(I)$ be effected in practice?

A. Zilberman

P754. An ant runs rectilinearly away from his anthill, so that his speed is inversely proportional to the distance from the anthill's centre. At the moment when the ant is at the point A, at a distance $l_1=1$m from the centre of the anthill, his velocity is $v_1=2$cm/s. How long will it take the ant to run from the point A to the point B at the distance $l_2=2$m from the anthill's centre?

S. Krotov

P755. A satellite is a light hard sphere of radius $R=1$ m and mass $M=1$ kg, filled with air under pressure $p=0{,}1$ atm and temperature $T=300$ K. Two valves located in the walls of the sphere at the distance R from each other are opened simultaneously. The areas of the valves are $S_1=1$ cm^2 and $S_2=2$ cm^2. Find how far the satellite will move away from its original trajectory in time $\tau=1$s.

A. Stasenko

P756. A receptacle of volume $V=2l$ contains $m=2$g of hydrogen and a little water. The pressure in the receptacle is $p_1=17$ atm. The receptacle is heated until the pressure increases to $p_2=26$ atm. How much water evaporates? What are the initial and terminal temperatures? Hint. Use the table giving the dependence of the pressure of saturated water vapor on temperature.

A. Buzdin

P757. A capillary pipe connected to a large reservoir filled with water (figure Рис. 2) is used to obtain drops of water of the same size. The liquid flows out of the capillary pipe when the piston moves slowly in the reservoir. Outside, on the free end of the pipe, a piezoelement is attached and connected to a sound generator so as to communicate the oscillations to the outflowing water. For a sufficient amplitude of oscillations, the flow of water slits up into absolutely identical drops. Find the radius of the drops if the diameter of the pipe is $d=0{,}2$ mm, the speed of outflowing water is $v=2$ m/s and the frequency of the sound oscillations is $\nu=1000$ Hz.

Yu. Chernyshev

Решения задач

M701—M705; Ф713—Ф717

M701. *Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник LMN. Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны $|LM|$ и $|LN|$, а угол между ними на 60° больше угла L треугольника LMN. Точно так же Марина построила свой треугольник со сторонами длины $|ML|$ и $|MN|$, угол между которыми на 60° больше $\hat{M}$,*

Первое решение. Пусть O — точка внутри треугольника LMN, из которой каждая его сторона видна под углом 120° (рис. 1; такая точка существует и единственна).

Повернем треугольник LMN вокруг точки L на 60° по часовой стрелке (рис. 2). Пусть при этом повороте точка O перейдет в O', а точка N — в N'.

Поскольку треугольники LON и $LO'N'$ конгруэнтны, и треугольник LOO' — правильный, $\widehat{MOL}+\widehat{LOO'}=\widehat{OO'L}+\widehat{LO'N'}=60°+120°=180°$; поэтому точки M, O, O' и N' лежат на одной прямой. Таким образом, $|MN'|=|MO|+|OO'|+|O'N'|=|MO|+|OL|+|ON|=S$.

Аналогично доказывается, что третьи стороны треугольников, построенных Наташей и Мариной, также равны S.

а Наташа — свой, у которого угол между сторонами $|NL|$ и $|NM|$ равен $\widehat{N}+60°$. Докажите, что третьи (новые) стороны треугольников у всех трех девочек одинаковы.

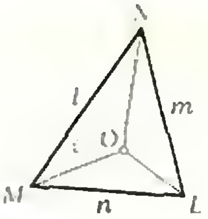


Рис. 1.

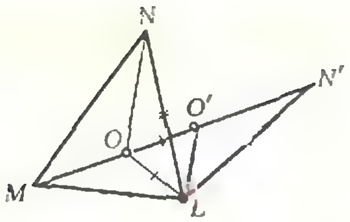


Рис. 2.

Второе решение. Пусть l, m, n — длины сторон треугольника LMN (см. рис. 1) и Δ — разность квадратов третьих сторон треугольников, построенных Людой и Мариной. Ясно, что

$$\Delta=m^2+n^2-2mn\cos(\widehat{L}+60°)-(l^2+n^2)+2ln\cos(\widehat{M}+60°)=$$
$$=m^2-l^2+2n(l\cos(\widehat{M}+60°)-m\cos(\widehat{L}+60°))=$$
$$=m^2-l^2+n(l\cos\widehat{M}-m\cos\widehat{L}+\sqrt{3}\,(m\sin\widehat{L}-l\sin\widehat{M}))=$$
$$=m^2-l^2+n(l\cos\widehat{M}-m\cos\widehat{L}),$$

поскольку по теореме синусов $l\sin\widehat{M}-m\sin\widehat{L}=0$.

А так как $\cos\widehat{L}=\dfrac{m^2+n^2-l^2}{2mn}$, $\cos\widehat{M}=\dfrac{l^2+n^2-m^2}{2ln}$, без труда получаем, что $\Delta=0$.

А. Каплан

◆

М702. *Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1=2$, $S_2=2+3=5$, $S_3=2+3+5=10$, $S_4=17$ и т. д. Докажите, что при любом n между S_n и S_{n+1} встречается точный квадрат.*

$p_{n+1}\leqslant 2k+1$
$p_n\leqslant 2k-1$
$p_{n-1}\leqslant 2k-3$
$p_{n-2}\leqslant 2k-5$
....
$p_2=3\leqslant x$
$p_1=2\quad x-2$

S_n	
2	4
5	9
10	16
17	25
28	36
41	49
58	64
77	81
100	121
129	144
160	169
197	196

Первое решение. Докажем более общее утверждение, рассмотрев вместо последовательности простых чисел последовательность (p_n) такую, что $p_1=2$, $p_2\geqslant 3$, $p_{n+1}-p_n\geqslant 2$. Докажем, что при любом n между числами s_n и s_{n+1}, где $s_n=p_1+p_2+\ldots+p_n$, встречается точный квадрат.

Предположим, что при каком-то n между числами s_n и s_{n+1} нет квадратов; то есть для некоторого k

$$k^2\leqslant s_n<s_{n+1}\leqslant(k+1)^2. \qquad (*)$$

Тогда $p_{n+1}=s_{n+1}-s_n\leqslant(k+1)^2-k^2=2k+1$, поэтому $p_n\leqslant p_{n+1}-2\leqslant 2k-1$ и т. д. — выполняются все выписанные в табличке на полях соотношения. Каким числом может быть x? Если $x=3$, то все неравенства должны превратиться в равенства (при этом $k=n$) и

$$s_{n+1}=2+p_2+\ldots+p_{n+1}>1+3+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2,$$

в противоречие с правым неравенством (*). Если же $x\geqslant 5$, то $x-2\geqslant 3$ и

$$s_n=2+p_2+\ldots+p_n<1+3+\ldots+(2k-1)=k^2,$$

в противоречие с левым неравенством (*).

Все решения, присланные читателями, так или иначе используют идею сравнения последовательности (p_n) с последовательностью $(2n-1)$, которая растет медленнее и для которой сумма первых n членов равна n^2.

Второе решение. Пусть $S_n=p_1+p_2+\ldots+p_n$ — сумма первых n простых чисел. На полях выписаны значения S_n при $n=1, 2, \ldots, 12$ и все точные квадраты, лежащие в интервалах $]S_1;\ S_2[$, $]S_2;\ S_3[$, ..., $]S_{11};\ S_{12}[$. Мы видим, что все эти интервалы содержат хотя бы по одному точному квадрату, а интервал $]S_{11};\ S_{12}[$ содержит даже два квадрата — 169 и 196. Условимся в дальнейшем называть интервал $]S_{k-1};\ S_k[$ богатым, если он содержит по крайней мере два точных квадрата.

Для решения задачи при $n\geqslant 12$ воспользуемся методом математической индукции. Пусть каждый из интервалов $]S_1;\ S_2[$, $]S_2;\ S_3[$, ..., $]S_{n-1};\ S_n[$ содержит точный квадрат. Пусть, далее, $]S_{n-k-1};\ S_{n-k}[$ — первый богатый интервал в последовательности интервалов $]S_{n-1};\ S_n[$, $]S_{n-2};\ S_{n-1}[$, $]S_{n-3};\ S_{n-2}[$, ... Пусть m^2 — максимальный квадрат, принадлежащий $]S_{n-k-1};\ S_{n-k}[$. Тогда $(m-1)^2\in\,]S_{n-k-1};\ S_{n-k}[$, а каждый из интервалов $]S_{n-k};\ S_{n-k+1}[$, $]S_{n-k+1};\ S_{n-k+2}[$, ..., $]S_{n-1};\ S_n[$ содержит ровно по одному квадрату.

Другими словами,

$$S_{n-k-1}<(m-1)^2<m^2<S_{n-k}<(m+1)^2<S_{n-k+1}<\ldots$$
$$\ldots<(m+k-1)^2<S_{n-1}<(m+k)^2<S_n<(m+k+1)^2.$$

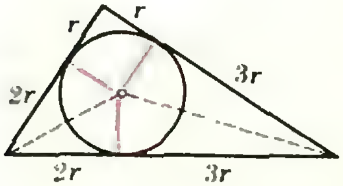
Тогда $p_{n-k}=S_{n-k}-S_{n-k-1}>m^2-(m-1)^2=2m-1$. Так как, очевидно, $n-k\geqslant 12$ и $p_{s+1}>p_s+2$ при $s\geqslant 2$, получаем $p_{n+1}>p_{n-k}+2(k+1)>2(m+k)+1$. Следовательно, $S_{n+1}=S_n+p_{n+1}>(m+k)^2+2(m+k)+1=(m+k+1)^2$. Поэтому $S_n<(m+k+1)^2<S_{n+1}$, то есть интервал $]S_n;\ S_{n+1}[$ содержит точный квадрат.

Н. Васильев, И. Жук

◆

М703. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$



Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right),\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1\right)\right\}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{x}{3(1+x^2)}=\frac{y}{4(1+y^2)}=\frac{z}{5(1+z^2)}, \qquad (1)$$

числа x, y и z имеют одинаковые знаки, причем если (x, y, z) — решение системы, то и $(-x, -y, -z)$ — ее решение, так что можно разыскивать лишь положительные решения.

Формула $\sin 2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ наводит на мысль ввести углы α, β, γ из промежутка $]0;\ \pi[$ такие, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=y$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=z$. Тогда (1) превратится в уравнения

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}. \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы получаем $\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy}$ (ясно, что $xy\neq 1$, $z\neq 0$), что в новых обозначениях имеет вид

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

или

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Последнее равенство при выбранных ограничениях на α, β, γ возможно тогда и только тогда, когда $\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$, то есть $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Итак, мы получили, что α, β и γ — углы треугольника, длины сторон которого относятся как 3:4:5 (см. (2)). Это — прямоугольный треугольник, у которого $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$ (см. рисунок), то есть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$.

Некоторые читатели решали эту систему чисто алгебраически, но такие решения значительно длиннее приведенного.

А. Вайнтроб, А. Федоров

◆

М704. *Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат (рис. 1).*

Пусть вокруг черного квадрата (см. рис. 1) описан голубой параллелограмм $ABCD$ и через все его вершины проведены красные прямые, перпендикулярные сторонам квадрата. Достаточно доказать, что при повороте на 90° вокруг центра O черного квадрата красные прямые переходят друг в друга.

Пусть $H=R_O^{90^\circ}(A)$. Поскольку стороны повернутого параллелограмма перпендикулярны сторонам исходного, $(HE)\perp(AB)$ и $(HF)\perp(BC)$. Поэтому H — точка пересечения высот треугольника EBF и, следовательно, H лежит на красной

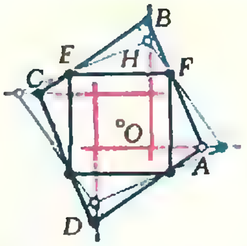


Рис. 1.

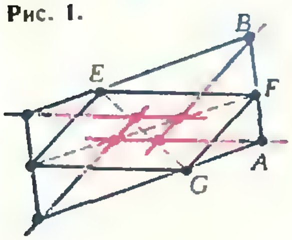


Рис. 2.

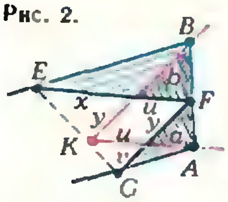


Рис. 3.

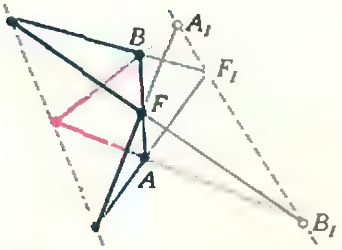


Рис. 4.

прямой, проведенной через вершину B. Таким образом, красная прямая, проведенная через точку A, переходит при повороте $R_O^{90°}$ в красную прямую, проведенную через точку B. Отсюда немедленно следует утверждение задачи.

Теорема о том, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке (мы надеемся, известная нашим читателям), не доказывается в школьном учебнике. Поэтому мы приведем еще одно решение задачи М704, хотя и не столь изящное, но тоже простое.

Это решение годится и для более общего случая, когда роль квадрата играет черный параллелограмм (рис. 2): мы докажем, что красные прямые (соответственно параллельные сторонам черного параллелограмма) образуют параллелограмм, гомотетичный черному параллелограмму.

Для доказательства достаточно проверить, что красная точка K (см. рисунок 3 — *фрагмент рисунка 2*) *лежит на* диагонали параллелограмма EG. Из подобия заштрихованных треугольников следует, что $\frac{x}{a}=\frac{b}{v}$ и $\frac{a}{y}=\frac{u}{b}$ (обозначения см. на рисунке 3). Перемножив эти равенства, получим $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$, а это и значит, что точка K лежит на EG.

Полученный результат напоминает *теорему Паппа*, которую Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен в своей замечательной (переизданной недавно по-русски) книге «Наглядная геометрия» формулируют так (с. 126—127): *если вершины замкнутой шестизвенной ломаной лежат попеременно на двух прямых и две пары ее противоположных звеньев параллельны, то и третья пара звеньев параллельна* (на рисунке 3 — как раз такая ломаная $AKBEFGA$).

На этом возможности обобщений не исчерпаны. Если «сфотографировать» конфигурацию рисунка 3 (то есть спроектировать ее из некоторой точки S, не лежащей в плоскости рисунка, *на непараллельную плоскость*), *мы получим конфигурацию Паскаля:* три пары параллельных на рисунке 3 прямых будут пересекаться на «фотографии» в трех точках одной прямой — нам удобно обозначить их A_1, F_1, B_1 (рис. 4) — и наша теорема о точках E, K, G превратиться в такую теорему: *если каждая тройка точек A, B, F и A_1, B_1, F_1 лежит на прямой, то точки $(AB_1)\bigcap(A_1B)$, $(BF_1)\bigcap(B_1F)$ и $(AF_1)\bigcap(A_1F)$ также лежат на прямой.*

Н. Васильев

М705. *На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (то есть каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).*

а) Пусть каждая карточка имеет размеры 1×2 клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя).

Останется ли это верным, если карточки б) могут иметь произвольные размеры, в) имеют размеры 1×3 клетки?*

◆

а) Мы докажем более общее утверждение: *из покрытия любого конечного множества клеток карточками размером 1×2 клетки (с выполнением условий задачи) можно выбрать часть карточек так, чтобы каждая клетка множества оказалась покрытой ровно одной карточкой.*

Рассмотрим произвольную клетку. Пусть ее покрывают карточки A_0 и A_1. Карточка A_1 покрывает еще одну клетку, которая покрыта также карточкой A_2 (A_2 может, вообще говоря, совпасть с A_0). Аналогично, карточка A_2 покрывает клетку, которую покрывает также карточка A_3, и так далее. Если очередную карточку получить нельзя, мы обрываем эту цепочку.

Ясно, что это произойдет в том случае, когда цепочка карточек замкнется, то есть когда очередная карточка окажется одной из уже выбранных. Ясно, что такой карточкой будет карточка A_0, поскольку в противном случае какая-то клетка оказалась бы покрытой трижды. Нетрудно видеть, что в полученной цепочке число карточек четно (убедитесь в этом!). Раскрасим все карточки цепочки в два цвета: с четными номерами — в один цвет, с нечетными — в другой. Легко видеть, что наше множество клеток карточками каждого цвета оказывается покрытым в один слой.

С оставшимися непокрытыми клетками множества поступаем аналогично до тех пор, пока все клетки исходного множества не будут покрыты карточками разного цвета. *Утверждение а) доказано.*

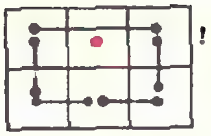


Рис. 1.

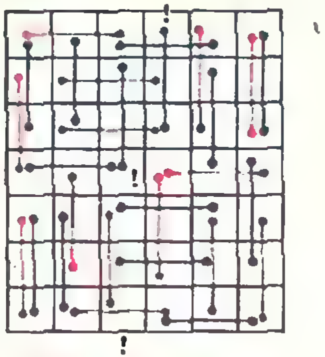


Рис. 2.

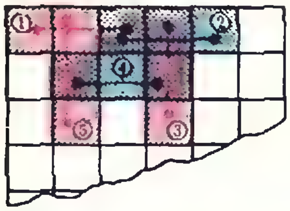


Рис. 3.

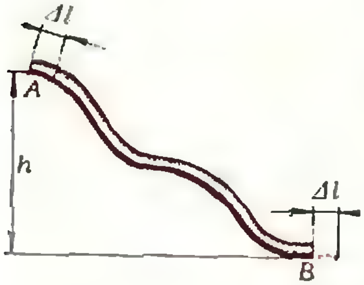
б) Ответ: нет. Соответствующий пример изображен на рисунке 1: прямоугольный лист размером 3×2 клетки покрыт в два слоя четырьмя карточками размером 1×2, одной карточкой 1×3 и одной — размером 1×1 клетки (на рисунке карточка 1×1 отмечена одной красной точкой; крайние точки карточек 1×2 и 1×3 соединены отрезками; попытка раскраски покрытия в два цвета не приводит к успеху).

в) Ответ: нет. Пример для прямоугольника 6×7 клеток, покрытого в два слоя 28 карточками 1×3 клетки, изображен на рисунке 2 (мы попытались раскрасить и его). На рисунке 3 изображен фрагмент рисунка 2 (раскрашенный иначе), на котором выделены пять «попарно зацепленных» карточек. Ни одну из этих карточек удалить нельзя. В самом деле, удалив первую карточку, мы должны оставить вторую; следовательно, должны удалить третью карточку, оставив четвертую, удалить пятую, а потому — оставить первую карточку, что приводит нас к противоречию (она имеет противоположную окраску).

Г. Гальперин,
В. Произволов

◆

Ф713. *Гибкий трубопровод длины l соединяет в пространстве точки A и B, разность высот между которыми равна h (см. рисунок). Внутри трубопровода по всей его длине лежит веревка, которую удерживают в точке A. С каким ускорением начнет двигаться веревка в первый момент времени, после того как ее отпустят? Трением между веревкой и стенками трубопровода пренебречь.*



Пусть за малый интервал времени Δt после начала движения веревка переместилась на расстояние Δl и приобрела скорость v. Так как Δt мало, можно считать, что

$$v^2=2a\cdot\Delta l, \qquad (1)$$

где a — ускорение всех точек веревки в момент начала движения.

Из закона сохранения энергии (трение отсутствует) следует, что

$$Mv^2/2=\Delta\Pi, \qquad (2)$$

где M — масса всей веревки, $\Delta\Pi$ — изменение потенциальной энергии веревки за время Δt. Очевидно, что $\Delta\Pi$ соответствует перераспределению массы веревки, в результате которого кусок длины Δl «переходит» из точки A в точку B (см. рисунок). Таким образом,

$$\Delta\Pi=\frac{M}{l}\cdot\Delta l\cdot gh. \qquad (3)$$

Из (1)—(3) находим ускорение веревки в момент начала движения:

$$a=gh/l.$$

С. Кротов

◆

Ф714. *В закрытом сосуде на поверхности воды плавает шар. Как изменится глубина погружения шара, если в сосуд накачать воздух так, чтобы давление воздуха в сосуде увеличилось в два раза?*

При равновесии равнодействующая всех сил давления, действующих на шар, равна его весу и весу вытесненной им воды; поэтому, если пренебречь сжимаемостью воды и материала шара, глубина его погружения не изменится при увеличении давления воздуха. Если же сжимаемость материала плавающего тела велика по сравнению с сжимаемостью воды, то тело будет погружаться при увеличении внешнего давления. Так происходит в известной игрушке, в которой перевернутая вверх дном пробирка плавает в наполовину заполненной водой мензурке, затянутой сверху тонкой резиновой пленкой. Если надавить на пленку пальцем, давление воздуха внутри мензурки повышается, воздух внутри пробирки, поддерживающий ее «на плаву», сжимается; в конце концов вес пробирки станет больше веса вытесненной пробиркой (и находящимся в ней воздухом) воды — пробирка начнет тонуть. Стоит отпустить палец — пробирка снова всплывет. Попробуйте сами сделать эту простую и забавную игрушку.

Е. Сурков

◆

Ф715. *Как зависит напряжение между точками A и B (рис. 1) от сопротивления резистора R?*

Построим векторную диаграмму для цепи (рис. 2). Токи, текущие через конденсатор C и резистор R, одинаковы; значит, векторы $\vec{U}_{\text{м}R}$ и $\vec{U}_{\text{м}C}$ перпендикулярны. Сумма их равна вектору $\vec{U}_{\text{м}}$; значит, конец вектора $\vec{U}_{\text{м}R}$ лежит на окружности, диаметр которой равен $|\vec{U}_{\text{м}}|$. Напряжение $U_{\text{м}r}$ на резисторе с сопротивлением r равно $U_{\text{м}}/2$. Следовательно, искомое напряжение $U_{\text{м}AB}$ численно равно радиусу построенной окружности, то есть

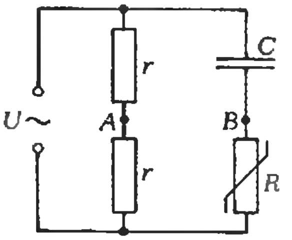


Рис. 1.

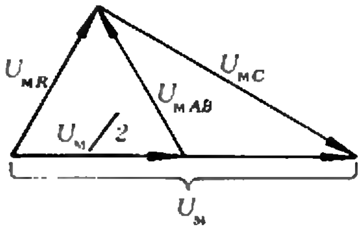


Рис. 2.

$$U_{\text{м}AB} = \frac{1}{2} U_{\text{м}}$$ и не зависит от величины R.

При изменении R меняется угол сдвига фаз между векторами $\vec{U}_{\text{м}}$ и $\vec{U}_{\text{м}AB}$, так что предложенная схема может служить фазовращателем. (Часто в радиотехнике необходимо менять фазу переменного напряжения, оставляя неизменной амплитуду. На практике вместо делителя из резисторов r обычно используют трансформатор с отводом от середины обмотки.)

А. Зильберман

◆

Ф716. *Из куска тонкой стальной ленты ширины d, в которой пробито небольшое отверстие радиуса r, сделали обруч и поставили его на стол так, что отверстие оказалось внизу. Из этого положения обруч немного сместили и предоставили самому себе. Чему равно максимальное значение скорости качения обруча?*

Описанное в условии начальное положение обруча неустойчиво. Будучи предоставлен самому себе, обруч начнет двигаться. Если трение достаточно велико, обруч поедет без проскальзывания. Скорость обруча будет максимальной в тот момент, когда его потенциальная энергия будет минимальной, то есть когда центр тяжести обруча будет в наинизшем положении. Это условие выполняется в тот момент, когда дырка окажется наверху на расстоянии D от стола, равном диаметру обруча. Нетрудно сообразить, что уменьшение потенциальной энергии обруча при переходе дырки из нижнего положения (в начале движения) в верхнее равно

$$\Delta\Pi = \Delta m \cdot gD = \frac{M\pi r^2}{\pi D d} gD = \frac{Mr^2 g}{d},$$

где M — масса всего обруча, $\Delta m = \frac{M}{\pi D d}\pi r^2$ — «масса дырки» ($\Delta m \ll M$).

Это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии обруча в тот момент, когда дырка находится наверху. Кинетическая энергия обруча складывается из энергии поступательного движения обруча как целого $Mv^2/2$ (v — скорость центра масс обруча в данный момент) и энергии вращательного движения $Mu^2/2$ (u — линейная скорость всех точек обруча).

При качении без проскальзывания $u=v$, и кинетическая энергия обруча равна Mv^2.

Таким образом,

$$Mv^2_{\max}=\frac{Mr^2g}{d},$$

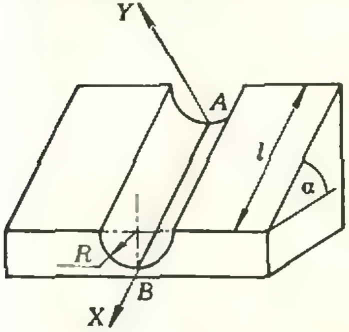
откуда

$$v_{\max}=r\sqrt{\frac{g}{d}}.$$

А. Зильберман

◆

Ф717. *Маленький шарик скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту; длина желоба равна l. Сколько раз шарик пересечет линию AB (см. рисунок), если он начал свое движение вблизи точки A?*



Разложим силу тяжести $m\vec{g}$, действующую на шарик, на две составляющие, одна из которых направлена вдоль оси желоба и равна $mg\sin\alpha$, а другая — $mg\cos\alpha\equiv mg'$ — лежит в плоскости, перпендикулярной оси. Движение шарика вдоль оси будет равноускоренным с ускорением $a=g\sin\alpha$. В плоскости, перпендикулярной оси, шарик будет совершать малые гармонические колебания с периодом

$$T=2\pi\sqrt{R/g'}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\cos\alpha}}.$$

Число пересечений траектории шарика с линией AB равно целой части отношения всего времени движения $t=\sqrt{2l/a}$ к полупериоду колебаний $T/2$:

$$n=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2l}{R}\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Е. Сурков

Научный подход

Происходящая сейчас математизация многих областей знания вооружает ученых разных специальностей мощнейшим аппаратом математики. Но не всегда этот аппарат используется по назначению.

В одной публикации весьма уважаемого Института приведен полезный пример того, как ныне «ясно» и «понятно» выражается уважающий себя инженер. Мы воспроизводим этот пример в измененном виде, доступном читателям «Кванта», но полностью сохраняя иллюстрируемую идею.

Пример этот хорошо показывает, как можно (но не нужно!) без всякой нужды псевдоматематизировать простые и ясные вещи.

Каждому молодому инженеру следует твердо усвоить, что представлять сумму двух количеств в виде

$$1+1=2 \qquad (1)$$

не является признаком «хорошего тона», и вот почему. Тот, кто изучал математику, знает, что

$$1=\lg 10,$$

$$1=\sin^2 x+\cos^2 x,$$

$$2=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Последнее соотношение короче записывают так:

$$2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Поэтому равенство (1) можно представить более научно:

$$\lg 10+(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}. \qquad (2)$$

Это выражение можно еще улучшить, если использовать соотношения

$$10=\lim_{y\to\infty}\frac{20y+a}{2y+b},$$

$$1=|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}.$$

Подставляя их в формулу (2), получаем:

$$\lg\lim_{y\to\infty}\frac{20y+a}{2y+b}+(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{2^n}. \qquad (3)$$

Очевидно, что формула (3) гораздо красивее формулы (1). А если к ней еще сделать примечание, что для тех $z=z_0$, при которых правая часть (3) не определена, ее надо заменить на

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{z\to z_0}\frac{|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{2^n},$$

то дело можно считать законченным.

Разумеется, есть и другие способы улучшения формулы (1). Каждый читатель сможет быстро найти их, если он усвоил основную идею «научного» подхода.

Л. Крыжановский

квант для младших школьников

Задачи

1. Можно ли на 24 полях обычной шахматной доски расставить крестики так, чтобы при вычеркивании любых трех горизонталей и трех вертикалей оставались невычеркнутыми не менее шести крестиков?

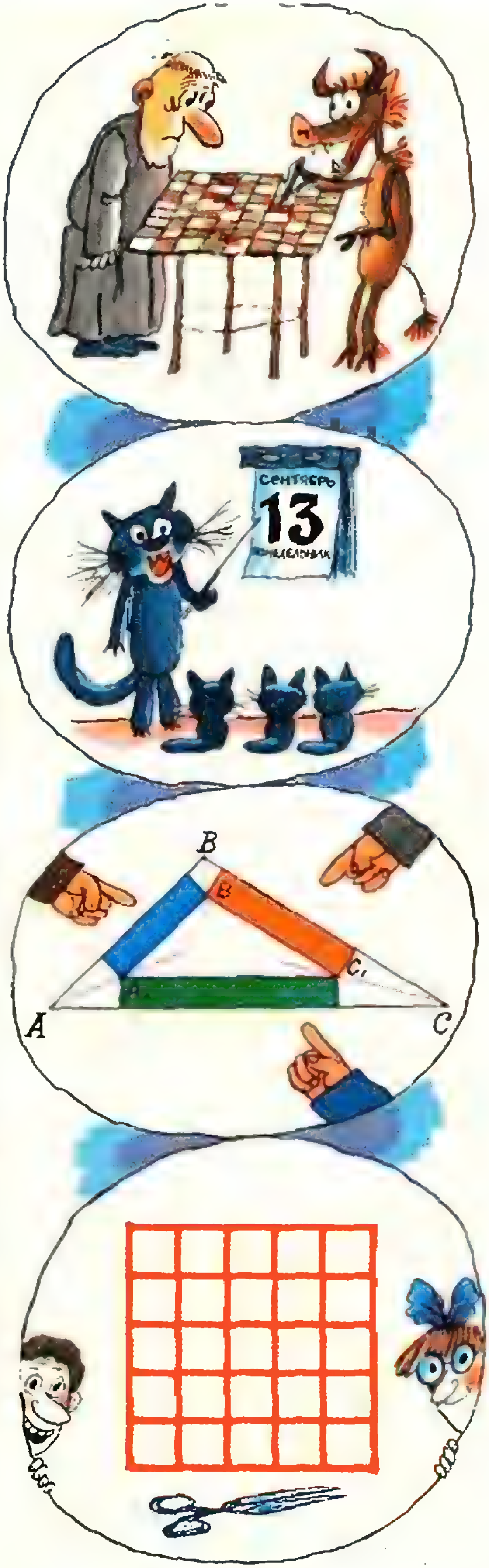
2. Пусть A — натуральное число. Обозначим через b число, образованное двумя последними цифрами числа A, через a — число, образованное остальными цифрами числа A (например, для $A=2906$ получаем $a=29$, $b=06=6$). Докажите, что число A делится на 7 тогда и только тогда, когда а) $2a+b$ делится на 7; б) $5a-b$ делится на 7.

3. Существует ли такой год, в котором тринадцатое число ни разу не является понедельником? А какое наибольшее число раз оно может быть понедельником?

4. На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямоугольнику так, что они попарно касаются вершинами (см. рисунок). Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами образовавшегося треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке.

5. Можно ли из квадрата размером 5×5 клеток вырезать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать по линиям сетки на восемь прямоугольных полосок размером 1×3 клетки?

Эти задачи нам предложили Ф. Бартенев, А. Картузов, А. Савин.



Л. Луганский

«Стойте справа, проходите слева...»

Если вы живете в большом городе, где есть метрополитен — самый удобный и надежный вид городского транспорта, то вы, конечно же, много раз слышали эту фразу, усиленную громкоговорителями, гулко звучащую под сводами тоннеля. Безусловно, многие из вас, опаздывая на какое-нибудь важное дело, не останавливались, ступив на эскалатор, а, дробно стуча каблуками по ступенькам, мчались вниз, лавируя, как слаломист, между стоящими справа и проходящими слева. Но довольно часто ваше неудержимое движение вперед где-то внизу наталкивалось на плотную людскую массу, почему-то не желающую проходить ни слева, ни справа. Возможно, вы даже заметили, что в часы пик вся движущаяся лестница сверху донизу заполнена стоящими людьми, которые, несмотря на настойчивые призывы дежурного по эскалатору, никак не хотят проходить. Давайте повременим негодовать на несознательность пассажиров, и взглянем на эту ситуацию объективным взором исследователя. Но прежде — такой пример.

Рассмотрим двужущуюся ленту (транспортер), на которой примерно на одном и том же расстоянии друг от друга лежат какие-то предметы. Пусть на единице длины ленты помещается n предметов; величину n называют концентрацией. В случае расположения предметов вдоль линии ее можно назвать также линейной плотностью. Она имеет размерность 1/м или, если хотите, 1/см, 1/км, 1/ярд — в зависимости от выбора единицы длины. Пусть, далее, лента движется со скоростью v мимо наблюдателя, который считает эти предметы. (Впрочем, роль такого наблюдателя может играть и электронный счетчик с фотоэлементом, наподобие употребляемых в автоматических турникетах на станциях метро). Возникает вопрос: сколько предметов будет регистрировать наблюдатель в единицу времени? На этот вопрос ответить очень легко. За время t мимо наблюдателя пройдет участок ленты длиной $l = vt$; на нем находится $nl = nvt$ предметов. Следовательно, за единицу времени мимо наблюдателя пройдет $nvt/t = nv$ предметов. Эта величина называется потоком и имеет размерность 1/с (или 1/мин, 1/год — в зависимости от выбора единицы времени). Мы будем обозначать поток буквой Ф (это — заглавная греческая буква «фи»). Итак,

$$\Phi = nv.$$

Теперь представим себе, что наш транспортер имеет конечную длину и что расположенные на его ленте предметы, дойдя до конца, попадают на ленту другого транспортера, движущуюся с другой скоростью v'. Очевидно, что наблюдатель, стоящий около второго транспортера, в единицу времени насчитает столько же проходящих мимо него предметов, сколько их насчитает и первый наблюдатель. Если их будет меньше, то можно ручаться, что какие-то злоумышленники где-то по дороге похищают предметы. Если же их окажется больше (что значительно менее вероятно), то это значит, что неизвестные доброжелатели подкладывают на вторую ленту дополнительные предметы. Таким образом, потоки $\Phi = nv$ и $\Phi' = n'v'$, регистрируемые обоими наблюдателями, должны быть равны друг другу:

$$nv = n'v'.$$

Отсюда сразу видно, что концентрация n' предметов на втором транспортере будет не такой, как на первом, а именно

$$n' = n\frac{v}{v'}.$$

Если скорость v' меньше скорости v, то концентрация n' будет больше концентрации n. Может даже случиться, что на ленте второго транспортера предметы не смогут помещаться без интервалов, а будут громоздиться друг на друга.

Вы, конечно, понимаете, что для наблюдателя совершенно безразлично, находятся ли предметы на ленте, движущейся со скоростью v, или же они самостоятельно движутся со скоростью v по неподвижной ленте (полу, тротуару). Важно только, что их скорость относительно наблюдателя, регистрирующего поток, равна v. Следовательно, поток есть величина, зависящая от системы координат, в которой он измеряется. Так, если наблюдатель сам находится на другой ленте, движущейся параллельно первой с такой же скоростью v, то относительная скорость $v_{\text{отн}}$, а значит, и измеряемый наблюдателем поток $\Phi = nv_{\text{отн}}$ будут равны нулю.

А сейчас самое время вернуться к вопросу о том, что же происходит на эскалаторе в часы пик. Поток пассажиров, стоящих справа, равен $\Phi_1 = n_1 v_э$, где n_1 — концентрация стоящих пассажиров, $v_э$ — скорость эскалатора. Поток пассажиров, проходящих слева, равен $\Phi_2 = n_2(v_э + v_п)$, где n_2 — концентрация идущих пассажиров, $v_п$ — скорость пешеходов относительно эскалатора, а $v_э + v_п$ — скорость идущих пассажиров относительно неподвижного наблюдателя. Естественно, что по окончании спуска обе группы пассажиров начинают двигаться с одинаковой скоростью $v_п$. При этом правый поток не претерпевает каких-либо серьезных изменений, поскольку $v_п$ приблизительно равна $v_э$. А вот пассажиры, находившиеся на эскалаторе слева, теперь движутся примерно вдвое медленнее (относительно неподвижных стен), чем раньше, и, согласно вышесказанному, концентрация пассажиров в этой группе должна возрасти примерно вдвое.

По целому ряду причин люди не любят ходить, тесно прижавшись друг к другу, поэтому левый поток сможет двигаться нормально, если люди, идущие по эскалатору, держат между собой дистанцию раза в два больше, чем при обычной ходьбе по платформе, или же если внизу поток может расширяться в стороны. В часы пик обе эти возможности, как правило, не могут быть реализованы из-за большого стечения народа. Вот почему людям на эскалаторе разумнее стоять и справа, и слева. Иначе внизу обязательно возникнет затор.

Нам кажется, что теперь вы не будете сердиться на непредвиденную задержку на эскалаторе, а постараетесь выйти из дома минут на пять раньше.

* * *

Понятие потока, конечно же, имеет отношение не только к рассмотренному случаю; оно очень широко используется в физике.

Пусть есть пучок частиц, движущихся в пространстве в одном направлении с одной и той же скоростью v. Число частиц в единице объема пучка, как и в линейном случае, тоже называется концентрацией n (или объемной плотностью) и имеет размерность $1/м^3$. Произведение $\Phi = nv$ имеет теперь размерность $1/(м^2 \cdot с)$ и равно числу частиц, проходящих ежесекундно через единицу площади сечения, перпендикулярного направлению движения пучка. Поэтому величину Φ называют плотностью потока частиц; умножив ее значение на площадь сечения пучка, мы получим полный поток частиц в пучке.

Если каждая движущаяся частица обладает каким-то свойством и это свойство «переносится» вместе с ней, то целесообразно ввести понятие плотности потока этого свойства

$$\Phi_a = anv,$$

где a — количественная характеристика данного свойства. Пусть, например, $a = m$ — масса одной частицы в потоке, тогда $\Phi_m = mnv$ — это плотность потока массы (ее размерность равна $кг/(м^2 \cdot с)$. Или,

если $a = q$ — электрический заряд, переносимый каждой частицей, то $\Phi_q = qnv$ — плотность потока электрического заряда (количества электричества). Величину Φ_q, имеющую размерность Кл/(м^2 · с), называют также плотностью электрического тока, поскольку сила электрического тока — это количество электричества, проходящее в единицу времени через поперечное сечение проводника. (Это следует также и из соображений размерностей: Кл/(м^2 · с) = (Кл/с)/м^2 = А/м^2.) Аналогично определяются и другие плотности потоков (энергии, импульса и т. д.).

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, которые помогут лучше усвоить понятия потока или его плотности.

1. *Попробуйте оценить пропускную способность автомагистрали, то есть максимальное число автомобилей, которые могут пройти по данной дороге за час.*

Такие расчеты необходимы при проектировании дорог и для правильной организации движения, особенно в больших городах и на крупнейших междугородных трассах.

Пусть магистраль двухсторонняя, и в каждом направлении движение происходит в два ряда с максимальной допустимой скоростью $v = 60$ км/ч (таковы, например, условия движения на Московской кольцевой автомобильной дороге). Нас интересует поток автомобилей, то есть число автомашин, проходящих в единицу времени мимо неподвижного наблюдателя. Используя полученные выше формулы, мы напишем $\Phi = Nnv$, где $N = 4$ — общее число рядов движения, n — число машин на единицу длины дороги, которое можно связать с дистанцией L между автомобилями: $n = 1/L$. Таким образом, $\Phi = Nv/L$. Руководства по управлению автомобилями рекомендуют держать дистанцию между автомобилями, численно равную в метрах половине скорости, выраженной в километрах в час. В нашем случае при скорости $v = 60$ км/ч $L = 30$ м, и пропускная способность автомагистрали равна

$$\Phi = N\frac{v}{L} = 8000\ 1/\text{ч}.$$

2. *Люди стоят на эскалаторе, движущемся вниз, на расстоянии $L = 1$ м друг от друга. Какой поток пассажиров зарегистрируют: а) дежурный по эскалатору, стоящий внизу; б) наблюдатель, стоящий на другом эскалаторе, движущемся вверх? Скорость движения эскалаторов принять равной $v = 2$ м/с.*

Мы уже говорили о том, что поток зависит от системы отсчета, в данном случае — от наблюдателя. Относительно дежурного по эскалатору пассажиры спускаются со скоростью, равной скорости эскалатора, поэтому

$$\Phi_1 = nv = \frac{v}{L} = 2\ 1/\text{с}.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося на эскалаторе, движущемся со скоростью v вверх, поток пассажиров будет вдвое больше, так как относительно него скорость потока $v_{\text{отн}} = 2v$, и поток

$$\Phi_2 = nv_{\text{отн}} = 2\,nv = 4\ 1/\text{с}.$$

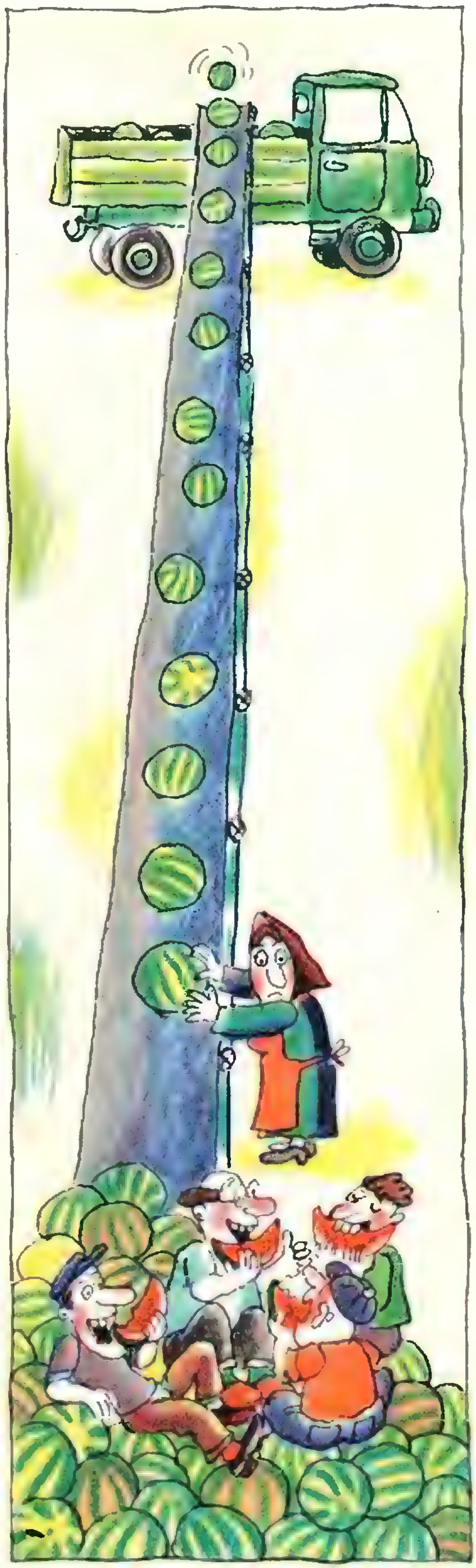
3. *Грузовую машину грузоподъемностью $M = 2$ т загружают арбузами с помощью транспортера. Средняя масса арбуза $m = 5$ кг, скорость движения транспортера $v = 0{,}5$ м/с, расстояние между арбузами на ленте $L = 0{,}75$ м. Найдите время погрузки.*

В данном случае имеем дело с потоком массы. По определению он равен $\Phi_m = mnv = mv/L$. Тогда искомое время погрузки

$$t = \frac{M}{\Phi_m} = \frac{ML}{mv} = 600 \quad \text{с} = 10 \quad \text{мин}.$$

4. *Оцените скорость движения электронов в металлическом проводнике, когда по нему протекает электрический ток.*

Будем исходить из того, что по правилам техники безопасности по проводам с естественным воздушным охлаждением разрешается пропускать электрический ток плотностью до 10 А/мм^2 $= 10^7$ А/м^2. Следовательно, речь пойдет о плотности тока, то есть о плотности потока электрического заряда $\Phi_q = qnv$, где q — заряд одного носителя количества электричества, n — концентрация носителей, v — скорость их упорядоченного движе-



ния под действием электрического поля. (Заметим, что плотность тока чаще обозначают буквой j.)

В металлах носителями электрического заряда являются свободные электроны. В любом справочнике можно найти, что заряд электрона $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. А какова концентрация n свободных электронов? Попробуем ее подсчитать. Сделаем вполне разумное предположение, что на каждый атом в металле приходится один свободный электрон, который и участвует в процессе прохождения электрического тока. Тогда n будет концентрацией атомов в металле. Чтобы ее найти, придется ввести несколько понятий, незнакомых большинству читателей этой статьи.

Известно, что число атомов в любом теле огромно, поэтому удобнее говорить не об абсолютном числе их, а об относительном. Договорились сравнивать число атомов в данном теле с числом атомов, содержащихся в 0,012 кг углерода, и называть это относительное число количеством вещества. Единицей измерения количества вещества является один моль; в моле любого вещества содержится столько же атомов, сколько их содержится в 0,012 кг углерода. Число атомов в одном моле называют числом Авогадро и обозначают N_A. Измерения дают, что $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль. Массу вещества, взятого в количестве одного моля, называют, соответственно, молярной массой и обозначают μ (греческая буква «мю»). Вот пожалуй и все, что нам понадобится.

Очевидно, что концентрация n атомов в металле (а значит, и концентрация свободных электронов) равна числу атомов N_A в моле, деленному на объем V, занимаемый молем, который, в свою очередь, равен молярной массе μ металла, деленной на его плотность ϱ:

$$n = \frac{N_A}{V} = N_A \frac{\varrho}{\mu} .$$

Для наиболее распространенного проводника — меди — $\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а $\varrho = 9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Таким образом, концентрация свободных электронов

$$n = N_A \frac{\varrho}{\mu} \approx 10^{29}\ 1/\text{м}^3,$$

и их скорость

$$v = \frac{\Phi_q}{qn} = \frac{I}{en} \approx 10^{-3}\ \text{м/с} \approx 1\ \text{мм/с}.$$

Поначалу эта цифра может показаться удивительно малой и вызвать сомнения в своей правильности. Ведь известно, например, что скорости теплового движения молекул в веществе при обычных температурах составляют сотни метров в секунду, а скорости электронов (ввиду их малой массы) должны быть еще больше. Так оно и есть на самом деле — скорости теплового движения электронов действительно велики, но никакого противоречия в этом нет. Дело в том, что найденное нами значение скорости — это так называемая дрейфовая скорость, то есть скорость медленного упорядоченного движения «электронной жидкости», отдельные «молекулы» которой (электроны) участвуют в тепловом движении с огромными скоростями.

Полученный нами результат вполне правильный. Несмотря на очень малую скорость упорядоченного движения электронов, по проводнику может течь очень большой ток. И объясняется это огромной концентрацией свободных электронов.

Е. Морозов

Оптические системы

Оптической системой принято называть совокупность различных оптических элементов: линз, зеркал, призм, плоскопараллельных пластин и т. п. Их действие основано на простейших законах геометрической оптики — на законах отражения и преломления света.

Основными элементами многих оптических систем являются тонкие линзы и плоские зеркала (именно о таких системах и пойдет речь в статье). Напомним основные результаты применения для них законов отражения и преломления света.

Для тонкой линзы справедлива формула

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

которая позволяет найти расстояние f от линзы до изображения по известному расстоянию d от предмета до линзы и фокусному расстоянию линзы F. Пользуясь этой формулой, надо аккуратно соблюдать правила знаков. Так, следует иметь в виду, что фокусное расстояние F всегда положительно для собирающей линзы и отрицательно для рассеивающей. (Именно поэтому собирающую линзу называют также положительной, а рассеивающую — отрицательной.) Расстояние d считается положительным для реального (действительного) предмета или его изображения, полученного ранее с помощью какого-то другого оптического элемента и расположенного с той же стороны от рассматриваемой линзы, что и сам предмет; если же это изображение находится с другой стороны от линзы, то расстояние нужно считать отрицательным (рис. 1). При этом положительным значениям f будут соответствовать действительные изображения в данной линзе, а отрицательным — мнимые (рис. 2).

В случае плоского зеркала изображение всегда находится на таком же расстоянии от зеркала, что и предмет, но с другой стороны от него (рис. 3).

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Почти все они в разное время предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Две тонкие линзы $Л_1$ и $Л_2$ с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены на расстоянии l друг от друга.*

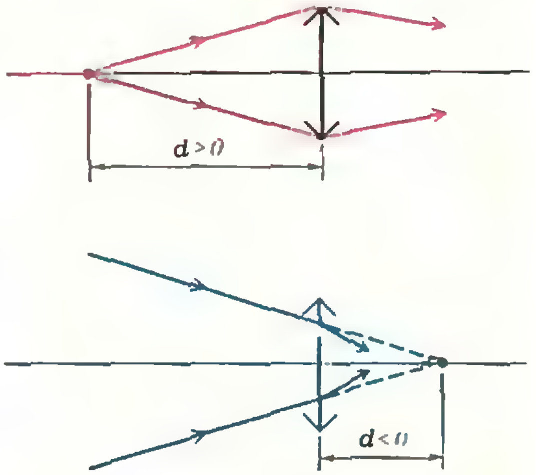


Рис. 1.

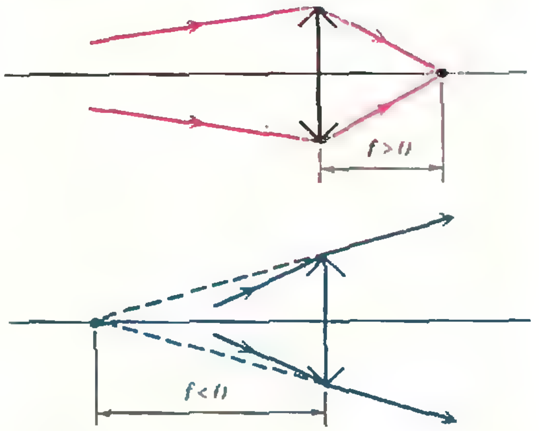


Рис. 2.

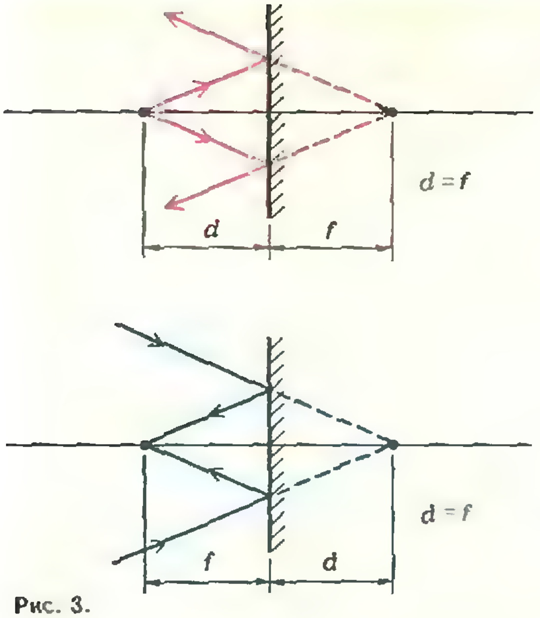


Рис. 3.

На каком расстоянии от второй линзы находится изображение S_2 предмета S, расположенного перед первой линзой на расстоянии d от нее? Какова будет оптическая сила системы этих двух линз, если расстояние l между ними станет равным нулю?

Очевидно, что решение задачи заключается в последовательном применении формулы линзы к линзам $Л_1$ и $Л_2$. Предварительно заметим, что из этой формулы простым образом выражаются не соответствующие расстояния, а обратные им величины, поэтому именно с ними и удобно оперировать. В противном случае, как показывает опыт, громоздкость вычислений часто приводит к ошибочным результатам.

Для первой линзы формула дает

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d},$$

где f_1 — расстояние до изображения S_1. Это промежуточное изображение-предмет от второй линзы находится на расстоянии $d_2=l-f_1$. Применяя формулу линзы второй раз, приходим к искомому результату:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2}-\frac{1}{d_2}=\frac{1}{F_2}-\frac{1}{l-f_1}=$$

$$=\frac{1}{F_2}+\frac{\frac{1}{f_1}}{1-l\frac{1}{f_1}}=\frac{1}{F_2}+\frac{\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}}{1-l\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}\right)}.$$

Отсюда в принципе можно найти и само расстояние f_2.

Если линзы сложены вплотную, то есть если $l=0$, то полученное выражение упрощается:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}.$$

Чтобы найти фокусное расстояние такой системы, положим $d\to\infty$. Тогда

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_{\text{системы}}}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2},$$

или

$$D_{\text{системы}}=D_1+D_2$$

— оптическая сила системы двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Этот результат можно обобщить и на случай большего числа линз.

Задача 2. *За положительной линзой с фокусным расстоянием F перпендикулярно оптической оси линзы на расстоянии l от нее расположено плоское зеркало (рис. 4). Перед линзой на расстоянии d находится точечный источник света S. Определите положение изображения.*

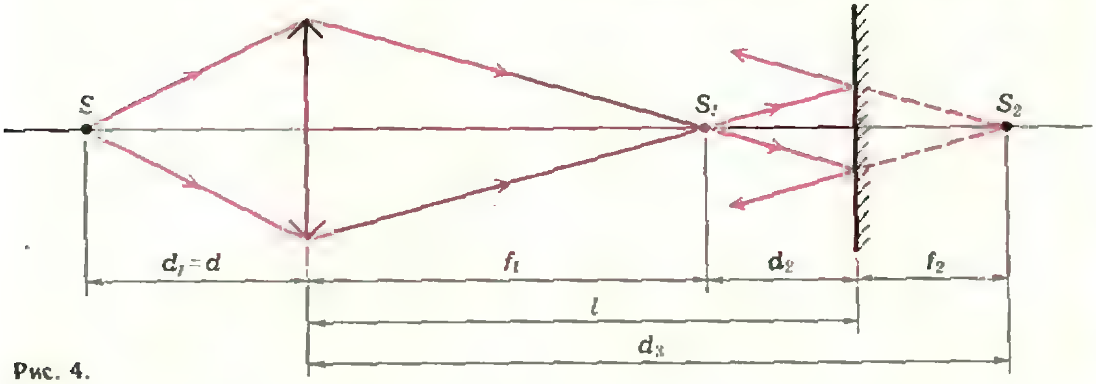


Рис. 4.

При каких значениях d изображение будет действительным и при каких — мнимым (рассмотрите случай $l=0$)?

Лучи от источника света, попав на линзу, преломляются в ней, затем отражаются от зеркала и еще раз преломляются линзой.

После первого преломления линзой лучи сойдутся в точке S_1. Величину отрезка f_1 найдем из формулы линзы:

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d}.$$

Изображением точки S_1 в плоском зеркале будет точка S_2, расположенная на таком же расстоянии от зеркала, что и точка S_1, но по другую сторону от него. Это расстояние

$$d_2=f_2=l-f_1.$$

Отразившись от зеркала, лучи снова падают на линзу, как бы исходя из точки S_2, находящейся от линзы на расстоянии

$$d_3=l+(l-f_1)=2l-f_1.$$

После второго преломления линзой лучи (или их продолжения) сойдутся на расстоянии f_3 от нее, причем

$$\frac{1}{f_3}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_3}=\frac{1}{F}-\frac{1}{2l-f_1}=$$

$$=\frac{1}{F}-\frac{\frac{1}{f_1}}{2l\frac{1}{f_1}-1}=\frac{1}{F}-\frac{\frac{1}{F}-\frac{1}{d}}{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1}=$$

$$=\frac{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)+\frac{F}{d}-2}{F\left(2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1\right)}.$$

Отсюда искомая величина

$$f_3=\frac{F\left(2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1\right)}{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)+\frac{F}{d}-2}.$$

Теперь проанализируем, когда полученное изображение будет действительным, а когда — мнимым. Очевидно, что окончательное изображение окажется мнимым, если точка S_2 находится между линзой и ее правым фокусом, то есть если $d_3<F$. Следовательно, точка S_1 должна находиться справа от зеркала на расстоянии $d_2>l-F$ от него и на расстоянии $f_1>2l-F$ от линзы. Тогда из формулы линзы получим

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{F}-\frac{1}{f_1},$$

или

$$d=\frac{Ff_1}{f_1-F}<\frac{F(2l-F)}{2(l-F)}$$

— при таких расстояниях источника S от линзы его изображение будет мнимым.

В частном случае, когда $l=0$, изображение окажется мнимым при значениях $d<F/2$ и действительным при $d>F/2$.

Задача 3. *Из стекла с показателем преломления $n=1{,}5$ сделана толстая линза. Радиус ее первой выпуклой поверхности $R_1=20$ см, радиус второй поверхности, которая может быть как выпуклой, так и вогнутой, $R_2=5$ см. Найдите толщину линзы, если известно, что параллельный пучок света линза оставляет параллельным.*

Поскольку линза толстая, формула тонкой линзы к ней не применима. Для решения задачи нам придется пользоваться непосредственно законом преломления света.

Рассмотрим параллельный пучок лучей, падающих на первую сферическую поверхность раздела двух сред параллельно главной оптической оси линзы. После преломления лучи соберутся в некоторой точке на оптической оси. Найдем положение этой точки.

Для этого выберем один луч из пучка — луч AB, удаленный от оси на расстояние h, и найдем точку S пересечения его с осью после преломления (рис. 5, *а*). Проведем радиус OB в точку падения луча. Тогда угол α будет углом падения, а β — углом преломления, причем, согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,\ \text{или}\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}.$$

Из треугольника COB

$$\sin\alpha=\frac{h}{R_1},\ \text{и}\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}=\frac{h}{nR_1}.$$

Заметим, что все оптические системы дают четкие изображения предметов, только если используются узкие приосевые пучки лучей. В данном случае это означает, что $h\ll R_1$, так что синусы углов падения и преломления можно заменить самими углами:

$$\alpha=\sin\alpha=\frac{h}{R_1},\quad \beta=\sin\beta=\frac{h}{nR_1}.$$

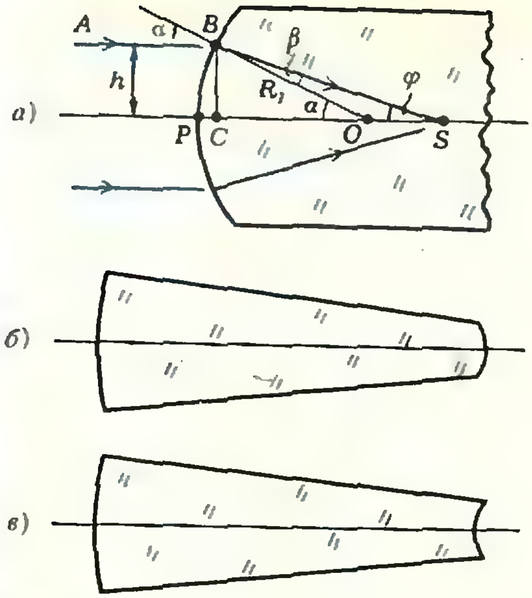


Рис. 5.

Из треугольника CSB

$$|CS| = \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{\varphi},$$

где $\varphi = \alpha - \beta = \frac{n-1}{n}\,\frac{h}{R_1}$,

следовательно,

$$|CS| = \frac{h}{\varphi} = \frac{n}{n-1}R_1.$$

С учетом того, что $h \ll R_1$, а значит, и $|PC| \ll |CS|$, можно записать

$$|PS| \approx |CS| = \frac{n}{n-1}R_1.$$

Таким образом, мы нашли положение точки пересечения параллельного пучка лучей после преломления сферической поверхностью. Другими словами, мы нашли фокусное расстояние этой поверхности:

$$F_1 = \frac{n}{n-1}R_1.$$

При каком условии после преломления второй сферической поверхностью лучи снова станут параллельными? Очевидно, что, если вторая поверхность выпуклая, падающие на нее лучи должны исходить из левого фокуса этой поверхности. Ее фокусное расстояние можно найти аналогично тому, как мы нашли фокусное расстояние первой преломляющей поверхности:

$$F_2 = \frac{n}{n-1}R_2.$$

Тогда толщина линзы

$$l = F_1 + F_2 = \frac{n}{n-1}(R_1 + R_2) = 75 \text{ см}.$$

В случае, когда вторая поверхность вогнутая, лучи после преломления будут параллельными, если на поверхность они падали сходящимся пучком так, что продолжения лучей пересекались в правом фокусе поверхности. Толщина линзы в этом случае равна

$$l = F_1 - F_2 = \frac{n}{n-1}(R_1 - R_2) = 45 \text{ см}.$$

Конфигурации обеих линз показаны на рисунках 5, *б* и *в*.

* * *

В заключение разберем задачу, представляющую большой практический интерес.

Для наблюдения удаленных предметов применяется телескопическая система (телескоп, зрительная труба, бинокль и т. п.). Рассмотрим одну из них — зрительную трубу Кеплера (рис. 6). Она состоит из длиннофокусной положительной линзы $Л_1$ (объектива) и короткофокусной положительной линзы $Л_2$ (окуляра). Если правый фокус объектива совпадает с левым фокусом окуляра, то говорят, что труба настроена на бесконечность. В этом случае параллельный пучок лучей (можно считать, что он исходит от бесконечно удаленного предмета) после преломления объективом соберется в его фокальной плоскости, а после преломления окуляром — снова станет параллельным.

При наблюдении предмета, находящегося на конечном расстоянии от зрительной трубы, его изображение в объективе будет уже не в фокальной плоскости, а дальше. Чтобы это изображение оказалось в фокальной плоскости окуляра, окуляр необходимо отодвинуть от объектива. Такой способ фокусировки зрительной трубы обладает существенным недостатком: при передвижении окуляра увеличивается длина трубы и теряется жесткость конструкции.

В современных зрительных трубах объектив и окуляр жестко крепятся на расстоянии $l = F_{об} + F_{ок}$ друг от друга, а внутрь трубы помещается еще одна тонкая длинно-

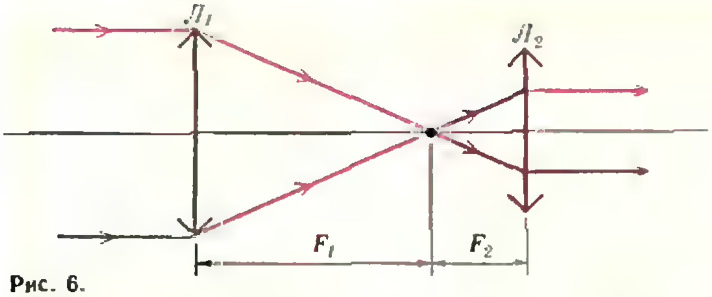


Рис. 6.

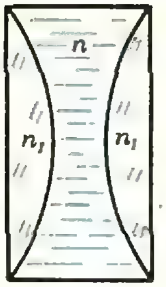


Рис. 7.

фокусная линза. Перемещением этой линзы достигается фокусировка на более или менее удаленные предметы.

Задача 4. *Найдите область фокусировки зрительной трубы с фокусирующей линзой, фокусное расстояние которой равно фокусному расстоянию объектива. В каких пределах при этом перемещается фокусирующая линза? Какова должна быть длина трубы без фокусирующей линзы, но с такой же областью фокусировки?*

Когда труба настроена на бесконечность, фокусирующая линза не должна никуда смещать изображение, создаваемое объективом; следовательно, она должна находится там, где получается это изображение, то есть в общей фокальной плоскости объектива и окуляра.

Чем дальше от этой плоскости расположить фокусирующую линзу, тем больше сместится изображение, создаваемое объективом. В предельном случае линзу можно вплотную придвинуть к объективу. Найдем, на какое минимальное расстояние d окажется при этом сфокусированной зрительная труба.

Поскольку две одинаковые линзы (фокусирующая линза и объектив) сдвинуты вплотную, их общее фокусное расстояние будет равно половине фокусного расстояния объектива, то есть $F_{об}/2$. Изображение, создаваемое системой этих линз, должно получиться на расстоянии $f=F_{об}$. Тогда из формулы тонкой линзы найдем d:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{F_{об}}=\frac{2}{F_{об}}, \text{ и } d=F_{об}.$$

Таким образом, зрительная труба может быть сфокусирована на предметы, находящиеся от трубы на расстояниях от $d=F_{об}$ до $d\to\infty$. При этом фокусирующая линза перемещается непосредственно от объектива к общей фокальной плоскости объектива и окуляра, то есть на расстояние, равное $F_{об}$.

Очевидно, что зрительная труба без фокусирующей линзы не может иметь столь большие пределы фокусировки, так как для этого длина трубы должна быть бесконечно большой.

Упражнения

1. На систему из трех линз, главные оптические оси которых совпадают, падает параллельный пучок света. Найдите положение точки пересечения лучей после прохождения системы, если фокусные расстояния линз равны $F_1=+10$ см, $F_2=-20$ см и $F_3=+10$ см, расстояние между первой и второй линзами равно $l_1=15$ см, а расстояние между второй и третьей — $l_2=6$ см.

2. Плоская поверхность плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием F покрыта хорошо отражающим слоем. На расстоянии d от линзы со стороны ее выпуклой поверхности расположен точечный источник света. Определите положение изображения. При каких значениях d изображение будет действительным и при каких — мнимым?

3. Объектив с переменным фокусным расстоянием состоит из двух одинаковых тонких плосковыпуклых линз, пространство между которыми может заполняться различными жидкостями (рис. 7). Считая объектив тонкой линзой, найдите зависимость его фокусного расстояния F от показателя преломления жидкости n и изобразите эту зависимость графически. Радиусы сферических поверхностей линз $R=20$ см, показатель преломления материала линз $n_1=1{,}5$.

4. Зачем крокодилу плоские глаза?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}>0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0 \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. \end{cases}$$

3. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ($BC\parallel AD$). На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции, $\widehat{CED}=120°$, $\widehat{ABE}-\widehat{BAE}=\alpha$. Найдите для треугольника ABE отношение периметра к радиусу вписанной окружности.

5. Отрезок DE, лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC, имеющего площадь S. В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC. Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE и известно, что $\operatorname{tg}\widehat{B'DE}:\operatorname{tg}\widehat{BDE}=l$. Через середину AD проводится плоскость P, параллельная плоскости ABC. Найдите площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ.

Вариант 2
(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{[\log_{\sqrt{5}}(x-3)]^2}{x^2-4x-5}>0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos 2x}\cdot\cos x=0 \\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

3. В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой емкости было 1000 кг смеси, а во второй — 1960 кг. В обе емкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой емкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что $kl=9-k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе емкости вместе.

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, $BD\parallel AE$, $\widehat{CAE}=2\widehat{CEA}$, $\widehat{CBD}-\widehat{CDB}=\alpha$. Найдите для треугольника ACE отношение радиуса описанной окружности к периметру.

5. Отрезок FG параллелен плоскости выпуклого пятиугольника $ABCDE$ площади S. Точки A и G лежат по разные стороны от плоскости CBF. В тетраэдр $BCFG$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой FG к расстоянию от FG до плоскости $ABCDE$. Двугранный угол BF с точками C и G на гранях равен α, а $\sin\widehat{CFB}:\sin\widehat{CFG}=l$. Через середину AF проведена плоскость P, параллельная плоскости $ABCDE$. Найдите площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDEFG$, составленного из пирамиды $FABCDE$ с вершиной F и тетраэдра $BCFG$, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCFG$ равна σ.

Вариант 3
(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{30x-9}{x-2}>25(x+2).$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cos x.$$

3. Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найдите расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

4. В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности кону-

са и другого шара. Найдите величину угла между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$[a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2}]x^2+$$
$$+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x>0$?

Вариант 4
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\log_8(x-2)=\log_2\sqrt{2x-1}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin(4x+3\pi).$$

3. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и касательными к этой параболе, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2};6\right)$.

5. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найдите расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

Вариант 5
(факультет почвоведения)

1. Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. Найдите, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

2. Решите уравнение

$$2(\lg x)^2+(1-\sqrt{2})\lg(x^2)=2\sqrt{2}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=4-x$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус AO перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9. Длина отрезка BC в два раза меньше длины отрезка AD. Найдите площадь треугольника AOB.

5. Найдите все пары чисел $(x;y)$, для которых выполнено равенство

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=$$
$$=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

Вариант 6
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_3(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1.$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y(x)=\frac{x}{2}+\sin^2 x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Сорокапроцентный раствор серной кислоты в воде слили с шестидесятипроцентным раствором, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили раствор двадцатипроцентной концентрации. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг восьмидесятипроцентного раствора серной кислоты, то получили бы раствор семидесятипроцентной концентрации. Сколько было сорокапроцентного и шестидесятипроцентного раствора серной кислоты?

4. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре описана окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина AC равна 2, длина AB равна 3 и что точка M делит отрезок AB в отношении 2:3. Найдите длину отрезка AN.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0\\ 2x^2-4x+3+y^3=0.\end{cases}$$

Вариант 7
(факультет психологии)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2\\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0.\end{cases}$$

2. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

3. Найдите такие решения уравнения

$$\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2},$$

которые удовлетворяют условию $0{,}4\pi<x<\frac{6}{7}\pi$.

4. Решите уравнение

$$\frac{4}{3}[\log_3(5x-6)^3]^2-[\log_3(5x-6)^3]\log_3 x^6=$$
$$=-6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2.$$

5. Найдите все числа a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена

$$4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2$ равно 3.

Вариант 8
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\geqslant 5.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6 см, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3 см. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$ см. N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

4. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

5. Вычислите размеры конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Две ступеньки, возвышающиеся над горизонтальной плоскостью, имеют одинаковую высоту h и находятся на расстоянии L одна от другой (рис. 1). На краю одной ступеньки лежит маленький шарик. Тело, масса которого много больше массы шарика, налетает на шарик, соударяется с ним и сталкивает его со ступеньки. Какую скорость должно иметь тело, чтобы шарик после одного подскока от горизонтальной плоскости попал на вторую ступеньку? Все соударения абсолютно упругие. Сопротивление воздуха не учитывать.

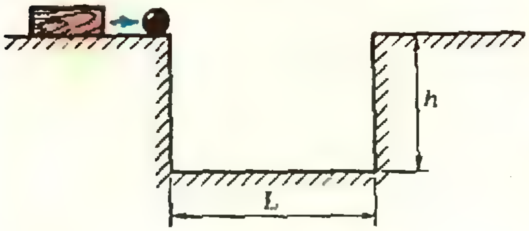


Рис. 1.

2. Маленький шарик подвешен на длинной невесомой и нерастяжимой нити. Шарик вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Период обращения равен T_1, а угол отклонения нити от вертикали — α_1. Чему будет равен период обращения, если вся система начнет ускоренно двигаться вниз с ускорением $a < g$? Угол отклонения нити при этом равен α_2.

3. Деревянный поршень прикреплен к цилиндру с помощью невесомой пружины жесткостью k (рис. 2). При движении поршня между ним и цилиндром возникает постоянная по модулю сила трения F. Пуля, летящая со скоростью $\vec{v}$, направленной вдоль оси цилиндра, попадает в поршень и застревает в нем. На сколько при этом сместится поршень? Масса пули m, масса поршня M. Цилиндр закреплен.

4. Невесомая платформа укреплена, как на ножках, на четырех одинаковых невесомых пружинах. С высоты H падает тело массой m и, попав точно в середину платформы, прилипает к ней. Чему равна амплитуда возникших при этом колебаний, если жесткость каждой пружины k?

5. Температура газов, образующихся при сгорании топлива в цилиндрах двигателя автомобиля, равна $t_1 = 800$°C; температура выхлопных газов $t_2 = 80$°C. Расход горючего на пути $s = 100$ км при скорости $v = 90$ км/ч равен $V = 10^{-2}$ м^3; теплота сгорания топлива $q = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж/м^3. Какую мощность мог бы развить двигатель, если бы он представлял собой идеальную тепловую машину, работающую с максимально возможным коэффициентом полезного действия?

6. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K сначала не замкнут. На какую величину изменится заряд конденсатора, если ключ замкнуть? Известно, что $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 15$ кОм, $C = 1$ мкФ, $\mathcal{E}_1 = 34$ В, $\mathcal{E}_2 = 9$ В. Внутренним сопротивлением источников можно пренебречь.

7. По участку $AБ$ цепи, изображенной на рисунке 4, течет ток, который изменяется по закону $i = \alpha t$. Здесь i — ток (в амперах), t — время (в секундах), $\alpha = 0{,}01$ А/с — постоянный коэффициент. Омическое сопротивление цепи $R = 0{,}01$ Ом, индуктивность $L = 0{,}01$ Гн, емкость $C = 0{,}1$ мкФ. Найдите заряд на конденсаторе в момент времени $\tau = 1$ с.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В некоторой точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α. При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке $Б$? Точки A и $Б$ находятся на прямой, параллельной индукции поля; расстояние между точками равно L. Заряд электрона e, его масса m.

9. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см находится между двумя точечными источниками на расстоянии $d = 8$ см от одного из них. Каково расстояние между источниками, если их изображения оказались в одной и той же точке?

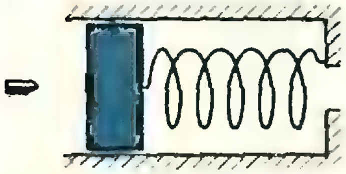


Рис. 2.

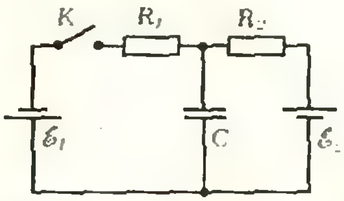


Рис. 3.

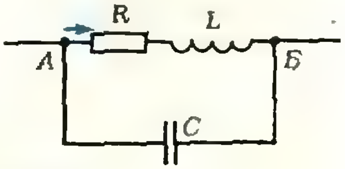


Рис. 4.

10. На сколько сместится фокус тонкой собирающей линзы, если вплотную к линзе на пути прошедших через нее лучей перпендикулярно к главной оптической оси поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=6$ мм с показателем преломления $n=1,5$? (Фокусное расстояние линзы много больше ее диаметра, поэтому тангенсы углов падения и преломления можно заменить их синусами.)

Механико-математический факультет

1. Небольшой брусок лежит на краю горизонтальной доски длиной $l=2$ м (рис. 5). Через какое время брусок соскользнет, если доска начнет двигаться по горизонтали вправо с ускорением $a=3$ м/с? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu=0,2$.

2. Два тела с массами $m_1=0,2$ кг и $m_2=0,1$ кг связаны резиновым жгутом и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Система движется под действием постоянной горизонтальной силы $F=6$ Н, приложенной к первому телу. Найдите потенциальную энергию деформации жгута, если известно, что под действием силы $F_0=1$ Н он растягивается на $x_0=5$ см. Движение считать установившимся; массой резинового жгута пренебречь; трение можно не учитывать.

3. В вертикальном цилиндре объемом $V=200$ см^3 под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T=300$ К. Масса поршня $m=50$ кг, его площадь $S=50$ см^2. Для повышения температуры газа на $\Delta T=100$ К ему было сообщено количество теплоты $Q=46,5$ Дж. Найдите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2. Трение можно не учитывать.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $r_1=60\%$ при температуре $t_1=10°$C. Какова будет относительная влажность, если температуру повысить до $t_2=100°$C, а объем под поршнем уменьшить в $k=4$ раза? Давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 равно $p_1=9$ мм рт. ст. Нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст. $=10^5$ Па. Пар можно считать идеальным газом. Массу поршня не учитывать.

5. Проекционный аппарат дает резкое изображение диапозитива на экране, удаленном от объектива на расстояние $f=4$ м. Вплотную к объективу приставили собирающую линзу с оптической силой $D=0,25$ дптр. На какое расстояние необходимо передвинуть экран, чтобы изображение осталось резким? Расстояние от диапозитива до объектива постоянно.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Зависимость модуля скорости v_1 первого тела от времени t изображается дугой полуокружности AMB (рис. 6). За время t_1 это тело прошло тот же путь, что и второе тело, двигавшееся с постоянной скоростью $v_2=50$ м/с. Найдите начальную скорость v_0 первого тела.

2. В схеме, изображенной на рисунке 7, $R_1=10$ Ом и $R_2=20$ Ом. Найдите отношение напряжений на конденсаторах емкостью C_1 и C_2.

3. Две батареи постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соединены последовательно и замкнуты на внешний резистор. Если полярность второй батареи изменить на противоположную, то количество теплоты, выделяющееся в резисторе за $t=1$ с, уменьшится в $n=9$ раз. Найдите величину $\mathcal{E}_2$, если $\mathcal{E}_1=6$ В. Внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

4. Светящиеся точки расположены на отрезке длиной l вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Середина отрезка находится на расстоянии $d=30$ см от линзы, и линза дает действительное изображение всех точек, увеличивая отрезок в $\Gamma=5,33$ раза. Определите длину l отрезка.

5. На расстоянии $d=12$ см от полюса вогнутого сферического зеркала, радиус которого $R=16$ см, поместили точечный источник света S. Зеркало разрезали на две равные части (линия разреза проходит через главную оптическую ось зеркала) и раздвинули их на расстояние $2r=1$ см симметрично относительно оптической оси (рис. 8). Найдите расстояние между изображениями источника.

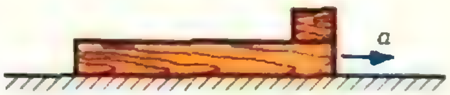


Рис. 5.

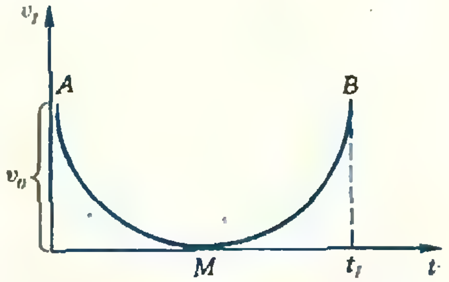


Рис. 6.

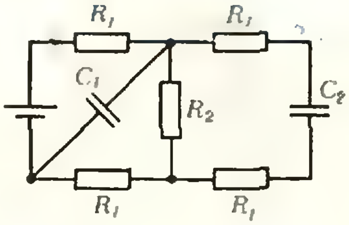


Рис. 7.

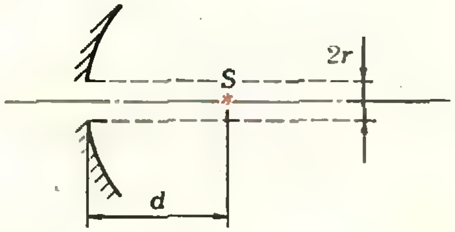


Рис. 8.

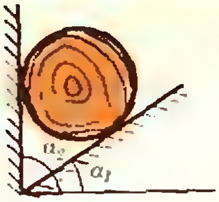


Рис. 9.

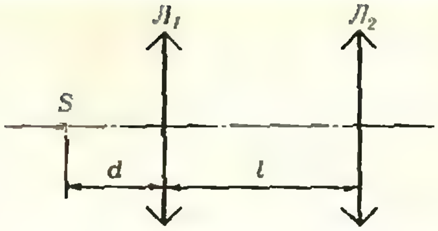


Рис. 10.

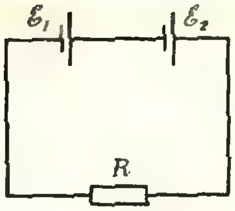


Рис. 11.

Химический факультет

1. Двугранный угол образован гладкими плоскостями, составляющими с горизонтом углы $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 90°$ (рис. 9). Внутри угла находится шар массой $m = 0{,}173$ кг. Определите силу давления шара на вертикальную плоскость.

2. Из большого резервуара откачивают воду с помощью насоса, потребляющего мощность $N = 2{,}5$ кВт. Насос соединен с гладким шлангом, наконечник которого расположен на уровне воды в резервуаре так, что струя воды выходит вертикально. Расход воды составляет $Q = 108$ м^3/ч. Какой высоты достигает струя воды? Коэффициент полезного действия насоса $\eta = 60\%$. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Влиянием обратного потока воды можно пренебречь.

3. Электрон влетает в совпадающие по направлению однородные электрическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля $E = 100$ В/м, индукция магнитного поля $B = 10^{-4}$ Тл. Скорость электрона $\vec{v}$ ($v = 10^6$ м/с) перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Найдите ускорение электрона. Его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. Расстояние между двумя собирающими линзами, имеющими общую главную оптическую ось и одинаковые фокусные расстояния $F = 10$ см, составляет $l = 40$ см (рис. 10). Точечный источник света S находится на оси на расстоянии $d = 20$ см от линзы Л$_1$. На какое расстояние сдвинется изображение источника, даваемое обеими линзами, если линзы сместить перпендикулярно оси на расстояние $h = 1$ см, причем Л$_1$ — вверх, а Л$_2$ — вниз?

5. Из окна поезда, идущего со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, фотографируют машину, движущуюся по шоссе параллельно железной дороге и в том же направлении со скоростью $v_2 = 76$ км/ч. Расстояние между железной дорогой и шоссе $d = 10$ м. Какой будет величина размытия изображения машины на пленке, расположенной в фокальной плоскости линзы объектива, фокусное расстояние которой $F = 10$ см? Время экспозиции $\Delta t = 0{,}1$ с.

Географический и геологический факультет и факультет почвоведения

1. Расположенный горизонтально закрытый цилиндр разделен на две части подвижной перегородкой. В одной части (объемом $V_1 = 220$ см^3) имеется $n_1 = 2$ моля идеального газа при температуре $t_1 = -53°$C. Сколько молей того же газа находится в другой части (объемом $V_2 = 300$ см^3), где температура $t_2 = -13°$C? Перегородка находится в равновесии.

2. В сосуде под невесомым поршнем находится $m = 56$ г азота при температуре $t_1 = 100°$C. Газ нагревается изобарически до температуры $t_2 = 200°$C. Найдите работу, совершаемую газом при этом. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. В калориметре при температуре $t_1 = 0°$C находилось $m_в = 500$ г воды и $m_л = 100$ г льда. Сколько водяного пара при температуре $t_2 = 100°$C было впущено в воду, если в результате весь лед растаял и в калориметре установилась температура $t = 30°$C? Теплоемкость калориметра $C_К = 1600$ Дж/К, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Потерями тепла пренебречь.

4. Найдите сопротивление R, при котором напряжение на зажимах второго элемента (с ЭДС $\mathcal{E}_2$) равно нулю (рис. 11). ЭДС элементов равны $\mathcal{E}_1 = 5$ В и $\mathcal{E}_2 = 3$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом.

5. Для проверки правильности показаний амперметра его включают последовательно с электролитической ванной. Какую абсолютную ошибку дает амперметр, если он показывает ток $I = 1{,}7$ А, а за время $t = 20$ мин на катоде ванны откладывается $m = 0{,}6$ г никеля? Электрохимический эквивалент никеля $k = 3 \times 10^{-7}$ кг/Кл.

Публикацию подготовили
И. Мельников, В. Петерсон,
А. Склянкин, В. Федорчук

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1
(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 4^x + 3^{2y} = 2^{x+2} \cdot 3^y - 11. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$3 + 2\cos^2 x = 8\sin x + 3\cos 2x.$$

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AB равна 2, $\hat{A}=60°$. Диагональ BD трапеции, биссектриса угла A и высота CK, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Определите длину основания CD.

4. Касательная к графику функции $y=-x^2+4x-2$ пересекает ось абсцисс в точке A, ось ординат в точке B. Известно, что $|BO|=2|AO|$, где точка O — начало координат. Найдите длину отрезка AB.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA|=\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирности 15,5%, при этом остается сыворотка жирности 0,5%. Определите, сколько творога получается из 1 т молока.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos 5x.$$

3. В треугольнике ABC $\hat{A}=45°$, $\hat{B}=75°$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках D и E. Определите площадь треугольника ABC, если $|DE|=1$.

4. Решите неравенство

$$\frac{2}{x}+3<\sqrt{41-\frac{16}{x}}.$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой имеют длину 1. Шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, CB и DB за вершину B. Определите расстояние между центрами шаров.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Работа оценивалась в зависимости от суммы набранных баллов. За задачи разной степени трудности ставилось различное количество баллов: за № 1—4, № 2—6, № 3—8, № 4—5, № 5—3. За частичное решение задачи ставилась соответствующая часть баллов. Ниже после текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее (при этом задача считалась решенной, если за нее было набрано не менее половины полного количества баллов).

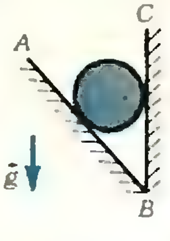
Вариант 1

1. Шар лежит в щели ABC (рис. 1), образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально. Определите угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает вес. Трение не учитывать. (84%)

2. В цилиндр, закупоренный одинаковыми плосковыпуклыми линзами (рис. 2), налита вода (ее показатель преломления равен n). Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра. Вдоль этой оси на линзу параллельным пучком падает свет. При каком расстоянии l между линзами свет выйдет из устройства снова параллельным пучком? Фокусные расстояния линз, измеренные в воздухе, равны F. Считать, что углы между лучами света и осью малы, так что для них $\operatorname{tg}\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha$. (54%)

3. На однородный стержень, оба конца которого заземлены (рис. 3), падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня в секунду попадает одно и то же число электронов. Сопротивление стержня R. Ток на участке заземления CD равен I. Найдите разность потенциалов между серединой стержня A и его концом B. (28%)

4. Оцените наибольшее давление в полной цистерне для поливания улиц при ее тормо-



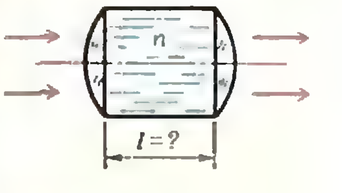


Рис. 1. Рис. 2.

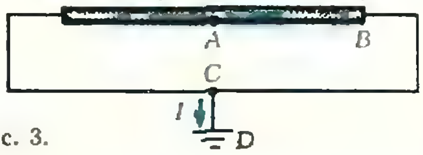


Рис. 3.

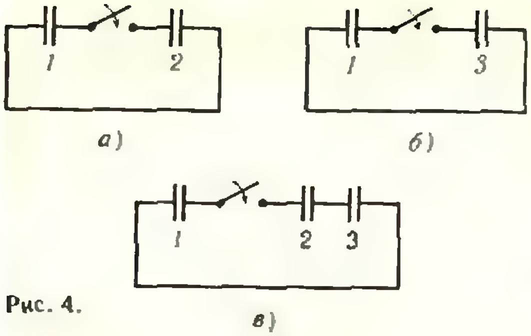


Рис. 4.

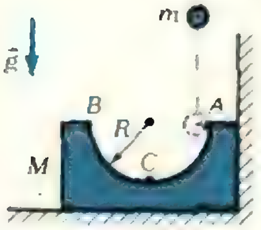


Рис. 5.

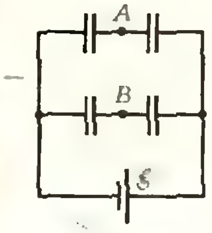


Рис. 6.

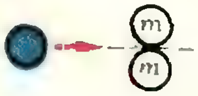


Рис. 7.

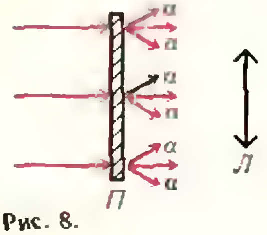


Рис. 8.

жении. При скорости $v \sim 30$ км/ч тормозной путь цистерны оказался равным $s \sim 5$ м. (70%)

5. Объясните, почему гвозди, повисшие рядом на магните, отклоняются от вертикального положения. (82%)

Вариант 2

1. На какое расстояние вверх нужно сместить поршень, чтобы слой воды (плотность воды ρ, молярная масса μ) толщиной h под ним полностью испарился? Температура T поддерживается постоянной. Давление насыщенных паров воды при этой температуре равно p. (83%)

2. Имеется три конденсатора с емкостями C_1, C_2 и C_3. Если к незаряженному конденсатору *1* (емкостью C_1) присоединить заряженный конденсатор *2* (емкостью C_2), то на конденсаторе *1* окажется заряд q_2 (рис 4,*а*). Если же к незаряженному конденсатору *1* подсоединить заряженный конденсатор *3* (емкостью C_3), то на конденсаторе *1* окажется заряд q_3 (рис. 4, *б*). Какой заряд будет на конденсаторе *1*, если к нему (незаряженному) подсоединить конденсаторы *2* и *3* (рис. 4, *в*), заряженные такими же зарядами, как и в первых двух случаях? (У конденсаторов *2* и *3* между собой соединены обкладки с противоположными знаками зарядов.) (36%)

3. Прямоугольный брусок массой M с полусферической выемкой сверху (радиус выемки R) стоит вплотную к вертикальной стенке на горизонтальной поверхности (рис. 5). С какой максимальной высоты над ближайшей к стенке верхней точкой A края выемки надо отпустить маленький шарик массой m, чтобы он не поднялся над противоположной точкой B выемки? Трением пренебречь. (38%)

4. Оцените размеры дирижабля грузоподъемностью 100 тонн, заполненного гелием. (76%)

5. После прохождения света через собирающую линзу на экране хорошо виден темный круг, окаймленный светлым кольцом. Объясните наблюдаемое явление. (45%)

Вариант 3

1. В схеме, изображенной на рисунке 6, три любые конденсатора имеют одинаковую емкость, а четвертый — в два раза большую. Найдите разность потенциалов между точками A и B, если ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$. (62%)

2. Два одинаковых шара массой m каждый покоятся, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, касающейся обоих шаров (рис. 7). Удар происходит без потерь энергии. Найдите массу налетающего шара, если после удара он остановился. Радиусы всех шаров одинаковы. (71%)

3. Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку *П* (рис. 8). Максимальный угол отклонения лучей от первоначального направления для каждой точки пластинки равен α. Какой наименьший радиус светлого пятна можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу *Л* с фокусным расстоянием F? (44%)

4. Оцените, какая масса воздуха уйдет из аудитории при повышении в ней температуры на 10 градусов. (75%)

5. Объясните, почему прекращается вращение Z-образной вертушки, на которую подано постоянное напряжение, если на нее надеть проволочный колпак, электрически соединенный с вертушкой. (29%)

Публикацию подготовили
Г. Меледин, М. Фокин

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

Задача 1. Маленький шарик подвешен на нерастяжимой невесомой нити. В начальный момент времени нить составляет угол $\varphi_0=60°$ с вертикалью, а скорость шарика равна нулю. Определите, какой угол φ с вертикалью составляет нить в тот момент времени, когда вертикальная проекция вектора скорости шарика максимальна.

Задача 2. С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс, уравнение которого $p=p_0-\alpha V$ (α — постоянная величина). Определите, на каком участке этого процесса газ получает тепло и на каком отдает. Направление процесса показано на рисунке 1.

Задача 3. В цепь синусоидального переменного тока через выпрямительную схему

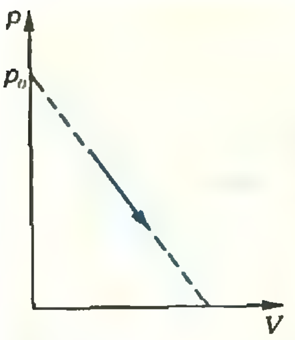


Рис. 1.

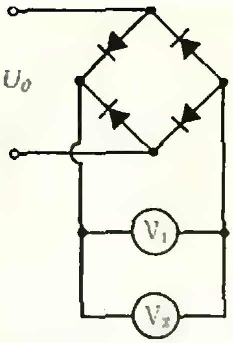


Рис. 2.

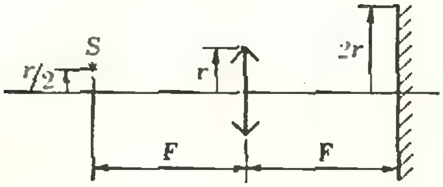


Рис. 3.

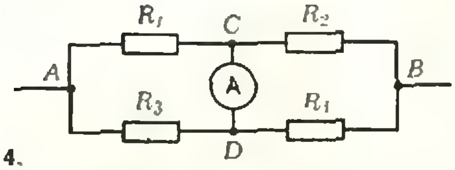


Рис. 4.

включены два вольтметра (рис. 2): V_1 — магнитоэлектрический (наблюдается поворот рамки с током в постоянном магнитном поле) и V_2 — тепловой (наблюдается удлинение проволочки, по которой течет ток). Инерционность приборов велика, так что колебания стрелок отсутствуют. Сопротивления диодов в прямом направлении пренебрежимо малы по сравнению с сопротивлениями вольтметров. Какое напряжение покажет каждый из вольтметров, если действующее напряжение $U=220$ В? Вольтметры градуированы по постоянному току.

Задача 4. Точечный источник света S находится перед тонкой собирающей линзой радиуса r в ее фокальной плоскости на расстоянии $r/2$ от оптической оси (рис. 3). В фокальной плоскости за линзой расположено плоское зеркало радиуса $2r$. Постройте изображение источника.

Теоретический вопрос. Фотоэлектрический эффект. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна. Фотоэлементы и их применение.

Вариант 2

Задача 1. Определите угловую скорость вращения двухпланетной системы. Массы планет M_1 и M_2, расстояние между их центрами R. Найдите также ускорения, с которыми движутся планеты.

Задача 2. N молей одноатомного идеального газа помещены в герметическую упругую оболочку. Упругость оболочки такова, что квадрат объема газа оказывается пропорциональным его температуре. На сколько изменится энергия, запасенная в оболочке, если медленно нагреть газ от температуры T_1 до температуры T_2? Чему равна теплоемкость системы? Теплоемкостью оболочки пренебречь, внешнее давление не учитывать.

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке 4, $R_1=15$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=30$ Ом и $R_4=40$ Ом. Определите, какой ток покажет амперметр А с пренебрежимо малым сопротивлением, если между точками A и B напряжение $U=36$ В.

Задача 4. В однородном магнитном поле движется протон, скорость которого перпендикулярна полю. Происходит упругий удар протона с покоящимся ядром атома гелия. В результате удара протон отклоняется на 90° от направления своего движения непосредственно перед соударением, причем вектор его скорости остается перпендикулярным магнитному полю. Определите, во сколько раз изменится радиус кривизны траектории протона в магнитном поле после соударения. Движение нерелятивистское, массу ядра считать равной четырем массам протона. Время соударения пренебрежимо мало.

Теоретический вопрос. Дисперсия света. Спектры излучения. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинками d, заполненный средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, включен в цепь батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Чему равна напряженность E электрического поля конденсатора, если его емкость C?

2. Определите напряжение на зажимах источника питания, если он обеспечивает в цепи ток $I=2$ А. Цепь состоит из двух параллельно включенных лампочек мощностью $P=30$ Вт каждая. Потери мощности в проводах составляют 10% полезной мощности.

3. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы. Когда он помещался в точке A, его изображение находилось в точке B, а когда источник поместили в точку B, его изображение оказалось в точке C. Зная, что $|AB|=a=10$ см и $|BC|=b=20$ см, найдите фокусное расстояние линзы.

Химический факультет

1. Две звезды одинаковой массы m движутся по окружности радиуса r, оставаясь одна против другой. Пренебрегая влиянием других небесных тел, найдите скорость движения этих звезд.

2. В лифте, поднимающемся с постоянным ускорением a, стоит ящик с песком. Камень массой m, находящийся на высоте h над поверхностью песка, начинает падать без начальной скорости (относительно лифта). Какое количество теплоты выделится при ударе камня о песок?

3. Какой заряд проходит через раствор $CuSO_4$ за время $t=10$ с, если величина тока за это время равномерно возрастает от 0 до $I=4$ А? Сколько меди выделяется при этом на катоде? Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

Публикацию подготовил
В. Бойцов

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$3^x+2(\sqrt{3})^x-3=0.$$

2. Решите неравенство

$$x-17>\frac{60}{x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin x+\sin 3x=-2.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=-\frac{\pi}{8}$, $x=\frac{\pi}{4}$ и $y=\sin 2x$.

5. Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями пирамиды, равен α. Найдите длину стороны основания пирамиды.

Вариант 2
(факультет прикладной математики и механики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x}{x+1}}-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x}}=1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x-1}>\frac{x+5}{x+1}.$$

3. Решите уравнение

$$3\cos^2 4x+4\cos^2 2x-3=0.$$

4. Прямоугольный треугольник с гипотенузой d вращается вокруг одного из катетов. Какими должны быть острые углы этого треугольника, чтобы объем тела вращения был наибольшим?

5. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_4 2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2+5x+6}>0.$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-39x^2+252x+1$ на $[5; 8]$.

5. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковое ребро перпендикуляр, равный l. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен φ.

Задачи устного экзамена

1. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

2. Что больше

а) $\sin 3$ или $\cos 3$?

б) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt{2}$?

3. Нарисуйте график функции

а) $y=\sin|2x|$;

б) $y=-2^{-|x|}$;

в) $y=\lg|x-1|-1$.

4. Докажите, что корни уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$ взаимно обратны.

5. Решите уравнение

а) $4^x+6^x=9^x$;

б) $\sin^3 x+\sin^2 x=1+\sin x$.

6. Сколько корней уравнения

$$\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$$

лежит в отрезке $[-\pi; \pi]$?

7. Решите неравенство

а) $\frac{x^2-7x+12}{x-4}>0$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+4)>-2$.

8. Вычислите $y'(0)$, если $y=\ln(2-\sqrt{2x+1})$.

9. Напишите уравнение касательной к линии $y=\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{x}{9}-\sqrt{3}x^2$ в точке с абсциссой $x_0=9$.

10. Среди всех прямоугольников с заданной площадью a найдите тот, у которого наименьший периметр.

11. Среди всех прямоугольников с заданным периметром a найдите тот, у которого наибольшая площадь.

12. Периметр кругового сектора равен l. Каким должен быть центральный угол этого сектора, чтобы его площадь была наибольшей?

13. Площадь кругового сектора равна Q. Каким должен быть центральный угол этого сектора, чтобы его периметр был наименьшим?

14. Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{1}{2}t^2+1980t+1981+4\ln(t+1)$, $t>0$. При каком значении t ее скорость будет минимальной?

15. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3$ и $y=kx+2$, будет минимальной? Вычислите эту площадь.

16. Вычислите площадь, ограниченную линиями $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

17. Квадрат со стороной a повернут вокруг своего центра на 45°. Найдите пло-

щадь общей части «старого» и «нового» квадратов.

18. Правильный треугольник со стороной a повернут вокруг своего центра на 60°. Найдите площадь общей части.

19. Докажите, что если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?

20. При каком значении a угол между векторами $\vec{x}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{y}=a\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ равен $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$?

Физика

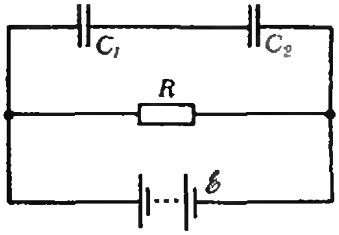
Задачи устного экзамена

1. С крыши здания высотой $H=16$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда пятая отделяется от крыши. Найдите расстояния между соседними каплями в момент удара первой о землю.

2. Посередине узкой запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной $l=0{,}1$ м. В обеих половинах трубки содержится воздух под давлением $p=76$ мм рт. ст. На какое расстояние переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально? Длина трубки $L=1$ м.

3. На сколько надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр $d=10$ м и массу $m=10$ кг, чтобы шар взлетел? Атмосферное давление $p=735$ мм рт. ст., температура $t=27$°С, молярная масса воздуха $\mu=29$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

4. Найдите напряжения на конденсаторах емкостью C_1 и C_2 в цепи, показанной на рисунке, если известно, что при коротком замыкании ток через источник возрастает в 3 раза. ЭДС источника равна $\mathcal{E}$.



5. Расстояние между электрической лампочкой и экраном $l=1$ м. При каких положениях собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1=0{,}21$ м изображение нити лампочки будет отчетливым? Будет ли изображение отчетливым, если фокусное расстояние линзы равно $F_2=0{,}26$ м?

Публикацию подготовили
А. Красная, М. Мирзахмедов, Р. Худайберганов, В. Ясколко

Информация

Семинар руководителей НОУ

Коллегия Министерства просвещения СССР, Секретариат ЦК ВЛКСМ, Президиум Всесоюзного совета научно-технических обществ, Правление Всесоюзного общества «Знание» провели 2—4 декабря 1981 года в г. Кишиневе межреспубликанский семинар-совещание руководителей и организаторов научных обществ учащихся. Целью совещания было дальнейшее совершенствование деятельности по развитию познавательной активности школьников, пропаганды среди них достижений науки, техники и производства, литературы и искусства, обобщение опыта работы научных обществ учащихся, укрепление связей школ и промышленных предприятий, вузов, научных учреждений.

На совещание приехали около 200 представителей из всех союзных республик. В программе совещания была работа секций, беседа «за круглым столом», посещение занятий школьных секций Молдавского НОУ «Винторул». На совещании выступали не только представители таких известных НОУ, как «Винторул», объединяющее школьников всей Молдавии, лауреат премии Ленинского комсомола Челябинское НОУ, Симферопольское, Волгоградское, но и руководители совсем молодых школьных НОУ.

В выступлениях участников отмечалось, что НОУ имеет очень большое значение, так как члены НОУ, работающие в секциях, связанных с вузами, НИИ, промышленными предприятиями, в дальнейшем избирают профессию, связанную с профилем их работы в НОУ. Велики возможности НОУ по части малой автоматизации на небольших предприятиях, на которых нет штатных специалистов в этой области. Эти возможности эффективно используются — между таким предприятием и секцией НОУ часто заключается договор, и члены секции разрабатывают приборы и устройства, которые затем внедряются на данном предприятии. При этом учащиеся чувствуют себя сопричастными к созидательному труду, видят результаты своей работы, ее общественно полезную направленность. Всего в ходе совещания было высказано более 100 предложений по улучшению и совершенствованию работы и руководства НОУ. Организаторы предоставили участникам семинара методическую литературу о работе НОУ Кишинева, Челябинска, Волгограда, Иванова, Ростова-на-Дону, Киева, Москвы и других городов.

Заметим, что материалы, освещающие опыт работы лучших НОУ, регулярно публикуются на страницах журналов «Математика в школе», «Физика в школе», «Народное образование», «Воспитание школьников», «Юный техник», «Техника и наука» и «Квант».

А. Виленкин

Заочная школа программирования

Двадцатый урок, опубликованный в предыдущем номере «Кванта», стал последним в трехлетнем цикле Заочной школы программирования. Наступило время оглянуться назад и подвести первые итоги.

* * *

Когда в 1979 г. в «Кванте» открылась рубрика «Искусство программирования» и был опубликован первый урок Заочной школы, мы, конечно, не знали, каков будет отклик наших читателей на это начинание. Нужно сказать, что среди прогнозов были и весьма скептические. Однако результаты превзошли самые оптимистические ожидания. Поток писем со всех уголков СССР и из-за рубежа с надписью «ЗШП, урок 1», все нарастая, прямо-таки наводнил помещение школы в Отделе информации ВЦ Сибирского отделения Академии наук, возглавляемом членом-корреспондентом АН СССР А. П. Ершовым. Пришло более 4000 писем, каждое из которых надо было тщательно проверить и быстро отправить ответ — и это без специального штата проверяющих! Тогда организаторов выручили пришедшие на помощь новосибирские юные программисты, такие же школьники, как учащиеся ЗШП, только с бо́льшим программистским стажем.

Постепенно наладилась организация проверки заданий, и, хотя штатных работников не прибавилось, нашлись в разных городах страны энтузиасты — было создано 5 региональных центров (филиалов ЗШП). Конечно, не все шло гладко — отсутствие специалиста по программированию среди редакторов журнала, огромное расстояние между редакцией и новосибирскими авторами уроков привело к определенным трудностям (в частности, к досадным опечаткам). Слишком большое число желающих учиться в ЗШП не позволило нам параллельно вести с 1980 года два курса, а с 1981 года — три, как первоначально планировалось.

Но все же мы довольны итогами. Около 1000 ребят — наш первый выпуск — в июне получат удостоверения об окончании трехгодичного курса ЗШП. Лучшим учащимся надолго запомнились Новосибирские летние школы юных программистов (см. «Квант», 1979, № 12 и 1980, № 12, а также статью Г. Звенигородского в следующем номере), где им довелось непосредственно поработать на современной вычислительной технике, и Ленинградская конференция по школьной информатике (о ней «Квант» еще напишет).

Заочная школа программирования продолжит свою работу (с осени) так же, как квантовская рубрика «Искусство программирования». В ней будут печататься материалы не только для учащихся ЗШП, но и для всех, кто интересуется программированием и вычислительной техникой. А доступные всем читателям материалы по этой тематике будут публиковаться в общем разделе журнала.

* * *

В качестве последнего материала нынешнего цикла ЗШП, мы в этом номере публикуем материал о сортировке, дополняющий Урок 19, но не поместившийся в «Кванте» № 3 из-за объема.

Сортировки по текстовым ключам
Включение и распределение

Значение упорядоченности обрабатываемой или выдаваемой из ЭВМ текстовой информации невозможно переоценить. Трудно себе представить, например, поиск в словаре, который не упорядочен по алфавиту. Обработка документации, связанной с учетом персонала (студентов, школьников, рабочих, служащих), основывается на упорядоченности, в которой ключом служит текстовый элемент *фамилия*. Поэтому в каждом вычислительном центре существуют программы сортировки, написанные на разных языках программирования. Сейчас известны многочисленные и разнообразные методы сортировки, используемые в различных условиях.

На практике сортировать приходится большие совокупности элементов. Такие программы требуют много памяти для обрабатываемых данных и расходуют много машинного времени. Неудивительно поэтому, что качеству программ сортировки уделяют самое серьезное внимание не только практики-прикладники, но и теоретики программирования.

Программы сортировки, как и многие другие сложные программы, можно оценивать с двух не совпадающих точек зрения. В тех случаях, когда программист не испытывает затруднений с размещением исходных данных, промежуточных величин и результатов в памяти ЭВМ, он стремится повысить быстродействие сортировки, то есть минимизировать время ее работы. Наоборот, если места в памяти не хватает, а машины вычислительного центра не перегружены, то главной задачей становится экономия памяти, на которую приходится идти, даже если это повлечет за собой снижение быстродействия. Многообразие методов сортировки обязано, в частности, этому постоянному спору между пространством и временем.

В «Кванте» № 2 рассматривался метод сортировки слиянием, использующий сведения об упорядоченности исходных, сливаемых файлов. Не менее часто, однако, встречаются ситуации, когда о порядке, в котором следуют значения ключей, ничего не известно. Один из методов, применяемых для упорядочения таких файлов (или массивов), называется сортировкой *включением*. Этот метод будет рассмотрен в применении к внутренней сортировке — упорядочению массивов.

Допустим, что в массиве m первые n элементов уже расположены в порядке возрастания значений ключа. Возьмем $(n+1)$-й элемент и попытаемся вставить этот элемент в соответствующую ему позицию среди первых n элементов. Эту работу можно поручить процедуре *включение* (m, n), полагая, что предварительно описан тип массива, состоящего, например, из 1000 элементов

```
type запись =record
                ключ: array [1..20] of char
                контекст: array [1..60] of char
                end;
        массив = array [1..1000] of запись;
```

а процедура *сравнение* (x, y) описана в уроке 18 («Квант» № 2)

```
procedure включение (m: массив; n: integer);
 var i, номер: integer; элемент:запись;
 begin
  номер: = 2
  while номер< =n+1 do
  if сравнение (m [номер]. ключ, m [n+1].
                                       ключ)
   then номер: = номер + 1
   else
    begin
     элемент: = m [номер]; m [номер] : =
                                   m [n + 1];
      for i: =n+1 downto номер+2 do
       m [i] : = m [i—1];
      m [номер + 1] : = элемент;
      номер: = n + 2
    end
 end;
```

После завершения процедуры *включение* (m, n) можно утверждать, что в массиве m упорядочены уже $n+1$ первых элементов.

Теперь такие же рассуждения можно повторить для $(n+2)$-го элемента, который необходимо включить с помощью процедуры *включение* $(m, n+1)$ на свое место среди $n+1$ элементов. Очевидно, задача сортировки массива m решается таким образом выполнением процедуры *включение* в цикле по n, в котором переменная n цикла имеет верхней границей число элементов массива без единицы.

Нижней границей можно считать число 2. Действительно, определить элемент с минимальным значением ключа несложно. Процедура *миним(m)* (ее описание здесь не приводится; трудолюбивый читатель сможет описать ее самостоятельно) обнаруживает в массиве *m* элемент с минимальным значением ключа и переставляет его на первое место в массиве, сохраняя при этом порядок всех остальных элементов. В таком массиве первые два элемента обязательно упорядочены. Тогда, начиная с $n=2$, можно применять процедуру *включение(m, n)*. Тот факт, что на первом месте с самого начала оказывается минимальный элемент, и позволяет переменную *номер* цикла в процедуре *включение* инициализировать значением 2.

При наличии описаний процедур *миним* и *включеие* алгоритм сортировки включением записывается

```
procedure сорт включ(var m: массив);
  var n:integer;
  begin
    миним(m);
    for n:=2 to 999 do
      включение (m, n)
  end;
```

Сортировка включением замечательна тем, что она практически не расходует дополнительной памяти: элементы массива сортируются, не выходя за пределы выделенной массиву памяти. Место для единственного элемента, куда приходится посылать элемент *m* [*номер*] на время смещения «хвостовой» части массива при очередном обращении к процедуре *включение*, безусловно, можно считать пренебрежимо малым.

Однако эта сортировка работает медленно. Алгоритм использует примерно *k* обращений к процедуре *включение* (*k* — число элементов массива). При *n*-м обращении к этой процедуре выполняется примерно *n* сравнений. В целом примерное число выполнений процедуры *сравнение* можно оценить

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{(k+1)}{2}k.$$

Алгоритм сортировки, для которого требуется сравнимое с $k^2/2$ число сравнений, нельзя назвать быстродействующим: в практических задачах число *k* бывает очень большим. Вспомним («Квант» № 2), что сортировка слиянием обходится всего лишь *k* сравнениями.

Не хотите ли попробовать построить алгоритм внешней сортировки включением (упорядочение файла) и оценить его быстродействие?

С других позиций подходит к решению задачи метод сортировки *распределением*. Этот метод вообще не использует сравнений. Он рассчитан на работу с элементами, ключи которых, подобно целым числам или словам, состоят из конечных наборов символов и имеют общий вид

$$a_1a_2\ldots a_i\ldots a_l.$$

Каждый символ здесь принадлежит конечному множеству, число *p* элементов которого сравнительно невелико (до нескольких десятков). Таким является, в частности, буквенный алфавит.

Основу сортировки методом распределения представляет цикл с переменной *i*, которая имеет начальное значение *l*, границу 1 и шаг, равный —1: сначала рассматриваются последние буквы слов-ключей, затем предпоследние и т. д. до первой. При каждом выполнении этого цикла все элементы сортируемого файла распределяются по *p* файлам — «карманам»; для буквенных текстов на русском языке $p=33$ (32 буквы плюс пробел). В файл- «карман», соответствующий букве *а*, попадают элементы, ключи которых в *i*-й позиции имеют букву *а*, в следующий «карман» попадают элементы с ключами, в *i*-й позиции которых стоит буква *б*, и т. д. Завершается каждое выполнение цикла объединением *p* файлов-«карманов» в единый файл, который служит объктом следующего выполнения цикла.

Алгоритм предполагает, что все ключи имеют одинаковую длину. Впрочем, это не является ограничением при работе с текстами: длину каждого слова можно принять равной числу *l* позиций, отведенных для значений ключа в исходном документе или в памяти ЭВМ. Если длина конкретного слова меньше *l*, то недостающие справа позиции считаются пробелами.

Показать пример сортировки текстовых ключей методом распределения довольно сложно: пришлось бы рисовать состояния 33 «карманов» на каждом из *l* этапов. Поэтому предлагается рассмотреть простую ситуацию игры «в слова». Игра состоит в том, чтобы из букв заданного слова написать возможно большее число слов (существительных в канонической форме), употребляя каждую букву в составляемом слове не с бо́льшим числом повторений, чем она употреблена в исходном слове. Участники игры выбрали в качестве исходного слово *кобра*. У одного из игроков получился такой список слов:

кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб

Этот список сортируется методом распределения. В этом конкретном случае ключи совпадают с самими элементами. Длина исходного слова определяет $l=5$ — число этапов; количество разных букв в этом

Таблица

f	*кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб*					
	карман « »	**карман *а***	**карман *б***	**карман *к***	**карман *о***	**карман *р***
l=5	*кора* *боа* *акр бок рак роба бора брак краб ро ар бак бор бар раб*					
f	*кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб*					
l=4	*боа* *акр* *бок* *рак* *ро* *ар* *бак* *бор* *бар* *раб*	*кора* *роба* *бора*	*краб*	*брак*		
f	*боа, акр, бок, рак, ро, ар, бак, бор, бар, раб, кора, роба, бора, краб, брак*					
l=3	*ро* *ар*	*боа* *краб* *брак*	*раб* *роба*	*бок* *рак* *бак*		*акр* *бор* *бар* *кора* *бора*
f	*ро, ар, боа, краб, брак, раб, роба, бок, рак, бак, акр, бор, бар, кора, бора*					
l=2		*раб* *рак* *бак* *бар*		*акр*	*ро* *боа* *роба* *бок* *бор* *кора* *бора*	*ар* *краб* *брак*
f	*раб, рак, бак, бар, акр, ро, боа, роба, бок, бор, кора, бора, ар, краб, брак*					
l=1		*акр* *ар*	*бак* *бар* *боа* *бок* *бор* *бора* *брак*	*кора* *краб*		*раб* *рак* *ро* *роба*
f	*акр, ар, бак, бар, боа, бок, бор, бора, брак, кора, краб, раб, рак, ро, роба*					

слове — пять — задает число «карманов» $p=5+1=6$. В таблице показан процесс сортировки элементов этого примера.

Тем, кто разобрался в этом простом примере, несомненно понятно будет приводимое ниже описание процедуры, реализующей сортировку методом *распределения*. Несколько предварительных замечаний. Речь идет о внешней сортировке. Поэтому предполагается, что описаны

```
type запись = record
                ключ:array [1..20] of char
                контекст: array [1..60] of char
              end;
     файл = file of запись;
```

В этой процедуре оказался удобным механизм указателей (подумайте, почему). Поэтому читателю надо внимательно отнестись к уроку 19 Заочной школы в третьем номере «Кванта». Программу помогут понять комментарии , номера которых включены в программу, и тексты приведены после нее. Итак, сортировка распределением над 33-символьным алфавитом выполняется следующей процедурой:

```
procedure сортраспред (var f:файл; l:integer);
                                                {1}
 var i, j: integer;
       карман: array [1..33] of ↑ файл;         {2}
   begin
     for j to 33 do new(карман[j]);             {3}
     for i:=l downto 1 do                       {4}
     begin
       for j to 33 do rewrite (карман[j]↑);
                                                {5}
       reset(f);                                {6}
       while NOT eof(f) do                      {7}
       begin
        write(карман[число(f↑.ключ[i])]
                                         ↑,f↑);{8}
         get (f).                               {9}
        end;
        rewrite (f).                            {10}
        for j to 33 do                          {11}
        begin
         reset (карман[j]↑);                    {12}
        while  NOT  eof(карман[j]↑)  do
        begin
          write(f, карман[j] ↑↑);               {13}
          get(карман[j] ↑)                      {14}
        end {конец  цикла,  читающего
                                        карман}
       end {конец цикла, объединяющего
                                       карманы}
     end {конец основного цикла}
 end; {конец процедуры}
```

1: *f* — сортируемый файл; *l* — длина ключа.
2:*карман* — это массив, составленный из 33 указателей (по числу промежуточных файлов, создаваемых при каждом выполнении цикла по *i*); порядок элементов массива *карман* соответствует порядку букв в алфавите *абвг...эюя*.
3: Процедура *new* создает файлы *карман [j]↑*, являющиеся указуемыми переменными по отношению к указателям *карман [j]* — элементами массива *карман* (см. урок 19).
4: Основной цикл по буквам ключа от конца к началу.
5: Очистка всех промежуточных файлов — «карманов» в цикле; стрелка справа от *карман[j]* означает, что в круглых скобках стоит не элемент массива указателей, а значение, которое этим указателем отмечается, то есть файл.
6: Начальная установка файла *f* для чтения.
7: Цикл чтения записей из файла *f*.
8: Здесь важно разобраться. В этой строке первая и третья стрелки — это обозначения буфера, а средняя символизирует значение, отмечаемое указателем. *ключ[i]* есть буква ключа, стоящая на *i*-м (справа) месте; *f↑.ключ* — поле *ключ* в буферной переменной, то есть в текущей записи файла *f*; *число(f↑.ключ[i])* — номер буквы *ключ[i]* в алфавите абвс *абвг...эюя*, процедура *число (x)*, преобразующая букву в соответствующий номер, описана в Добавлении о сортировках («Квант» № 2); *карман[число(f↑.ключ[i])]↑*– промежуточный файл «карман», определяемый соответствующим выбранной букве указателем; процедура *write* здесь переписывает буфер *f↑* в соответствующий файл — «карман».
9: Выборка очередной записи файла *f*.
10. Очистка файла *f* перед созданием его следующего поколения.
11. Цикл объединения карманов.
12: Установка кармана для чтения из него.
13: Второй параметр процедуры *write* есть буфер (правая стрелка) файла *карман[j]↑*.
14. Выборка очередного элемента из кармана.

Читателю, заинтересовавшемуся задачами упорядочения информации, можно порекомендовать для серьезного чтения третий том фундаментального труда Д. Кнута «Искусство программирования на ЭВМ». Этот том называется «Сортировки и поиск» (М., «Мир», 1978).

Ю. Первин

Поправка

В ответе на задачу 1 варианта 1 Московского института электронного машиностроения («Квант», 1982, № 2, с. 60) допущена ошибка. Правильный ответ: $\{(c;c)\}$ $(c\in R)$ при $a=0$, $\left\{(0;0),\ \left(\frac{3}{2}a;\ \frac{9}{2}a\right),\ \left(\frac{3}{4}a;\ -\frac{9}{4}a\right)\right\}$ при $a\neq 0$. В условии задачи 1 варианта 1 Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена («Квант», 1982, № 3, с. 47) пропущена опечатка: вместо $\sqrt{ab+a}$ должно быть $\sqrt{ab}+a$.

Оптические системы

1. Из системы выходит параллельный пучок лучей (система телескопическая).

2. Изображение находится от линзы на расстоянии

$$f=\frac{Fd}{2d-F}.$$

Изображение будет действительным при $d>F/2$ и мнимым — при $d<F/2$.

3. $F=\dfrac{n_1R}{2(n_1-n)}$; график зависимости F от n показан на рисунке 1. Если $n<n_1$, фокусное расстояние объектива положительное (собирающая линза); если $n>n_1$, фокусное расстояние отрицательное (рассеивающая линза); если же $n=n_1$, объектив превращается в плоскопараллельную пластинку с бесконечно большим фокусным расстоянием.

4. Поскольку наружная поверхность глаза крокодила плоская, параллельный пучок лучей не испытывает преломления на этой поверхности, независимо от показателя преломления внешней среды. Поэтому, если даже часть глаза находится в воде, а часть — в воздухе, достаточно удаленная плавающая добыча (частично она находится в воде, а частично — в воздухе) будет хорошо видна крокодилу.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант I

1. $\{5\}\cup\,]4+\sqrt{2};\ +\infty[$. Комментарий. Многие абитуриенты успешно справились с этой задачей. Однако некоторые теряли точку $x=5$, ошибочно полагая, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{x-5}\geqslant 0\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1>0,\end{cases}$$

упуская при этом из вида решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{x-5}=0\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1<0.\end{cases}$$

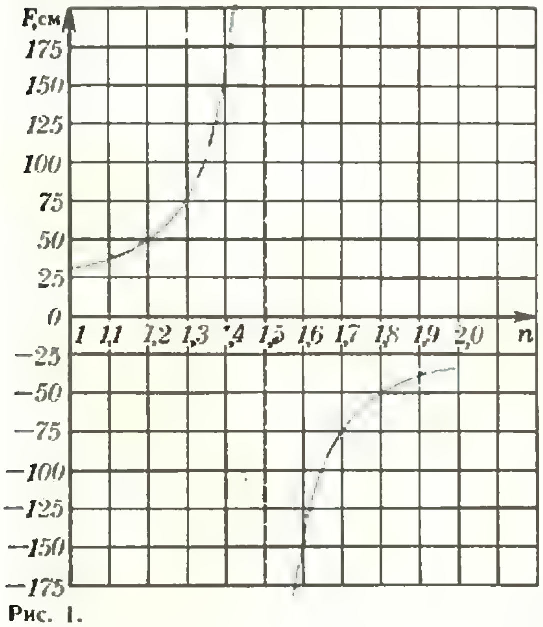


Рис. 1.

2. $\{(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi l\}$ $(k, l\in \mathbf{Z})$. Решение. Данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sin x=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos y=0\\ \sin x\geqslant 0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}$$

Первая из них, очевидно, решений не имеет, а вторая равносильна системе

$$\begin{cases}\cos y=0\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Комментарий. Некоторые абитуриенты забывали включить во вторую систему неравенство $\sin x\geqslant 0$ и поэтому получали лишние корни. Некоторые допускали ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений; это характерно и для абитуриентов, поступавших на другие факультеты МГУ.

3. $18\frac{1}{3}$ кг. Указание. Пусть a и b — количество соли в первом и втором сосудах соответственно, а x и y — количество испарившейся воды. Тогда

$$p=\frac{a}{5-x}:\frac{a}{5},\quad q=\frac{b}{20-y}:\frac{b}{20},$$

откуда

$$x=5-5/p,\quad y=20-20/q,$$

$$x+y=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\right).$$

По условию $pq=9$ и $p, q\geqslant 1$; значит, требуется найти наибольшее значение функции

$$f(p)=25-\frac{5}{p}-\frac{20p}{9}\qquad(1)$$

при $1\leqslant p\leqslant 9$. Исследованием функции при помощи производной или использованием неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим устанавливается, что наибольшее значение функции (1) на $[1;9]$ достигается при $p=3/2$.

4. $2[\operatorname{ctg}(30^\circ+a/4)+\operatorname{ctg}(30^\circ-a/4)+\sqrt{3}]$. Решение. Положим $\widehat{BAE}=\alpha$, $\widehat{ABE}=\beta$, $\widehat{BEA}=\gamma$ (рис. 2). Тогда $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\beta-\alpha=a$. Величина дуги $CBAD$ равна 240°, поскольку угол CED опирается на эту дугу. Но $BC\parallel AD$, поэтому $\smile AmB=\smile CED=120^\circ$ и угол BEA, опирающийся на дугу AmB, равен 60°. Итак, $\gamma=60^\circ$, $\beta-\alpha=a$, $\alpha+\beta=120^\circ$, откуда

$$\alpha=60^\circ-a/2,\quad \beta=60^\circ+a/2,\quad \gamma=60^\circ.\qquad(2)$$

Пусть P — периметр треугольника ABE, а r — радиус вписанной в него окружности (рис. 3). Из шести прямоугольных треугольников получаем

$$P=2r(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)),$$

откуда сразу следует ответ, если воспользоваться (2).

5. $\frac{1}{4}(S+\sqrt{2}\sigma k\sqrt{1-l})$. Решение. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$; обозначим через K, L, M, N середины ребер AC, BC, BD, AD соответственно, через H — расстояние между прямыми AB и CD и через S_1 — площадь среднего сечения $KLMN$ (рис. 4). Покажем, что объем V тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{2}{3}S_1H$.

Для этого достроим тетраэдр $ABCD$ до «клина» (треугольной призмы) $AA_1A_2BB_1B_2$, выбрав точки A_1, A_2, B_1, B_2 так, чтобы $A_1B_1 \| A_2B_2 \| AB$, $|A_1B_1|=|A_2B_2|=|AB|$ и C, D были серединами отрезков A_2B_2 и A_1B_1 соответственно (рис. 5). Тогда расстояние H от прямой AB до прямой CD равно расстоянию от любой точки прямой AB до плоскости $A_1B_1B_2A_2$, и поэтому объем V_2 клина равен $\frac{1}{2}S_2H$, где S_2 — площадь параллелограмма $A_1B_1B_2A_2$ (см. рис. 6; объем прямой призмы $A_3A_2'A_1B_3B_2'B_1$ очевидно равен $\frac{1}{2}S_2H$ и совпадает с объемом клина $AA_2A_1BB_2B_1$). Далее, из подобия $KLMN$ и $A_2B_2B_1A_1$ с коэффициентом $1/2$ имеем $S_2=4S_1$. Осталось показать, что $V_2=3V$. Пусть F — середина AB; тогда плоскость CDF разбивает тетраэдр $ABCD$ на два равных объема, каждый из которых равен $1/6V_2$ (например, $V_{CDFB}=\frac{1}{3}V_{CDFB_2B_1B}=\frac{1}{6}V_2$). Формула $V=\frac{2}{3}S_1H$ доказана.

Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{4}S+S_1$, где S_1 — площадь среднего сечения тетраэдра $BCDE$, параллельного ребрам BC и DE (которая равна площади $KLMN$), а S — дано (см. рис. 7). Объем тетраэдра $BCDE$ равен V, а расстояние между прямыми BC и DE равно H, поэтому остается вычислить V и H, чтобы найти S_1 из формулы $V=\frac{2}{3}S_1H$. Пусть r — радиус шара, вписанного в $BCDE$, s — расстояние от центра вписанного шара до прямой DE. Тогда $\frac{s}{H}=k$, $r=s\sin\frac{\alpha}{2}$, где α — величина двугранного угла при ребре DE. Значит,

$$V=\frac{1}{3}r\sigma=\frac{1}{3}s\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma=$$

$$=\frac{1}{3}kH\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma;$$

$$S_1=\frac{3}{2}\,\frac{V}{H}=\frac{1}{2}k\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma.$$

Осталось найти $\sin\frac{\alpha}{2}$. Пусть $(BF)\perp(DE)$ (рис. 8). Тогда $(B'F)\perp(DE)$. Имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{B'DE}=\frac{|B'F|}{|DF|},\quad \operatorname{tg}\widehat{BDE}=\frac{|BF|}{|DF|},$$

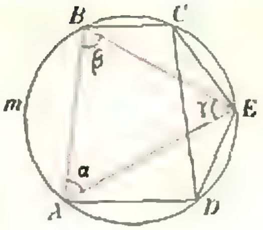


Рис. 2.

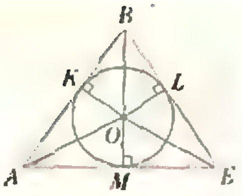


Рис. 3.

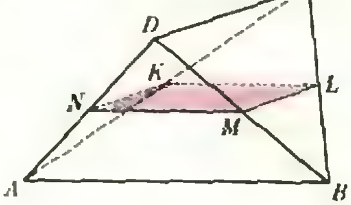


Рис. 4.

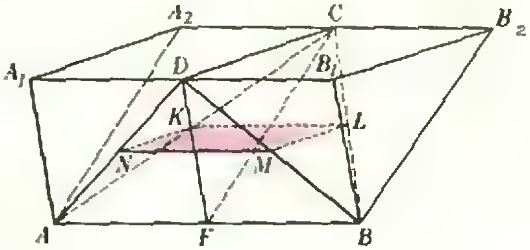


Рис. 5.

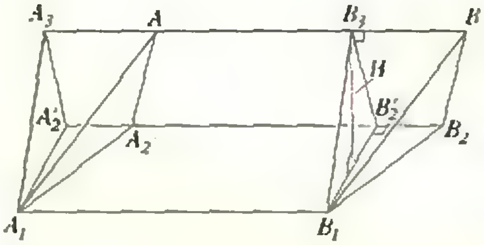


Рис. 6.

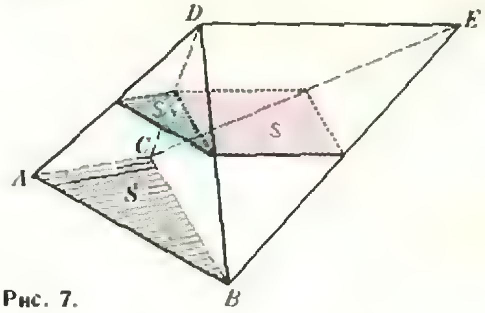


Рис. 7.

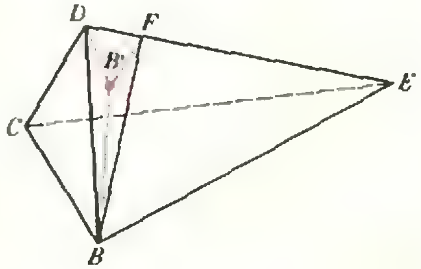


Рис. 8.

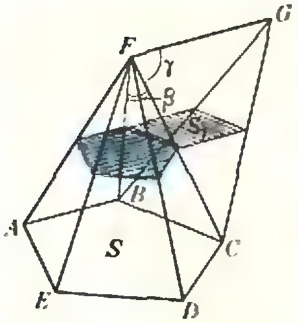


Рис. 9.

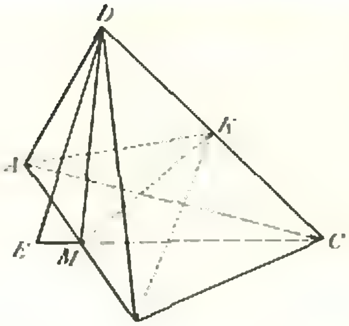


Рис. 10.

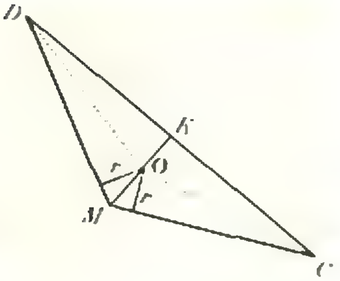


Рис. 11.

значит, $l = |B'F| : |BF| = \cos \alpha$, откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-l}}{\sqrt{2}}$$

и, наконец,

$$S_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} k \sqrt{1-l}\,\sigma.$$

Вариант 2

1. $\{4\} \cup]5; +\infty[$.

2. $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k;\ \frac{\pi}{6} + \pi l \right\}$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. 3480 кг. Указание. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции

$$f(k) = 1000(k-1) + 1960\left(\frac{9-k}{k} - 1 \right).$$

4. $\dfrac{1}{2(\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)}$.

5. $\frac{1}{4}\left(S + \sqrt{2}\,\sigma k \sqrt{1-\sqrt{1-l^2 \sin^2 \alpha}}\right)$. Указание. Решение аналогично решению задачи 5 из варианта 1. Искомая площадь сечения снова равна $S_1 + S/4$ (рис. 9). Достраивая тетраэдр $BCFG$ до клина, находим объем $BCFG$, $V = \frac{2}{3} S_1 H$, где H — расстояние между прямыми FG и BC. С другой стороны, этот объем равен $V = \frac{1}{3}\sigma r$, где r — радиус вписанного шара.

Вариант 3

1. $]-\infty; -1{,}4] \cup]2; 2{,}6]$.

2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. 20 км.

4. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}-3}{2}$. Указание. Чтобы отыскать точки экстремума функции $V = \frac{2\pi}{3} \times \dfrac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$, найдите точки экстремума функции $y = \dfrac{(1+t)^2}{t^2(1-t)}$.

5. $]-\sqrt{2}; 1[\cup [\sqrt{2}; +\infty[$. Указание. $a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2} = (a-\sqrt{2})(a^2+a-3)$; $(a^2-2)^2 - [a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2}](a+\sqrt{2}) = -(a^2-2)(a-1)$.

Вариант 4

1. $\{5\}$.

2. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{147}{8}$.

4. $\frac{9}{4}$.

5. $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$. Решение. Пусть $DABC$ — данная пирамида, $|AB| = 4$, $|DC| = 12$, $|AD| = |DB| = |AC| = |CB| = 7$ (рис. 10). Пусть M — середина $[AB]$, E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC. Тогда $MC \perp AB$ и $EM \perp AB$, то есть точки E, M и C лежат на одной прямой. Из $\triangle ACB$ находим $|MC| = 3\sqrt{5}$, а из $\triangle ADB$ находим $|DM| = 3\sqrt{5}$. В равнобедренном треугольнике DMC высота MK имеет длину $|MK| = 3$; следовательно, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 18$. С другой стороны, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}|DE| \cdot |MC|$. Отсюда $|DE| = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}|DE| \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} \cdot 6\sqrt{5} = 24$. Так как $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{5}$ и $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DBC} = 6\sqrt{13}$, сумма площадей всех граней пирамиды $S = 12(\sqrt{5}+\sqrt{13})$. Если r — длина радиуса вписанной сферы, то $V = \frac{1}{3} r \cdot S$, откуда $r = \dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$. Поскольку плоскость DMC делит пополам двугранный угол, образованный плоскостями ADC и BDC, а плоскость AKB делит пополам двугранный угол, образованный плоскостями ADB и ACB, центр O вписанной сферы лежит на $[MK]$. Основание перпендикуляра, опущенного из O на грань ADB, лежит на $[DM]$, а основание перпендикуляра, опущенного из O на грань ABC, лежит на $[MC]$. Длины этих перпендикуляров равны r (рис. 11). Искомое расстояние $|OK|$ находим из равенства $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2} r \cdot |DM| + \frac{1}{2} r \cdot |MC| + \frac{1}{2}|OK| \cdot |DC|$.

Вариант 5

1. 9.

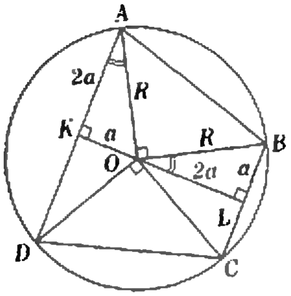


Рис. 12.

2. $\left\{10^{\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}}, 10^{\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}}\right\}$. Замечание. Догадавшись (при помощи теоремы Виета), что квадратное уравнение $t^2+(1-\sqrt{2})\,t-\sqrt{2}=0$ имеет корни $\sqrt{2}$ и -1, или применив легко проверяемое тождество $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$, ответ можно записать в виде $\left\{\frac{1}{10}, 10^{\sqrt{2}}\right\}$.

3. 4,5.

4. 22,5. Указание. Проведите через O перпендикуляр KL к BC (рис. 12). При симметрии относительно KL точка C перейдет в точку B, а точка D перейдет в точку A. Значит, $KL \perp AD$, откуда $\widehat{BOL}=\widehat{OAK}$.

5. $x=1$, $y=1+\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Указание. Положите $\cos^2\frac{x-y}{2}=t$ и решите полученное уравнение относительно t.

Вариант 6

1. $\left\{-\frac{1}{3}, 4\right\}$.

2. $\frac{\pi}{4}+1$. Решение. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]} y = \max\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}+1$.

3. 1 кг сорокапроцентного и 2 кг шестидесятипроцентного.

4. $\frac{24}{\sqrt{145}}$.

5. $\{(1; -1)\}$. Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^2=\dfrac{2x}{1+x^2} \\ 2(x-1)^2+1+y^3=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку $\frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$, из первого уравнения системы (1) $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Из второго уравнения системы (1) $y \leqslant -1$. Значит, $y=-1$, $x=1$.

Вариант 7

1. $\left\{(4; 2), \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right\}$.

2. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$.

3. $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{53}{84}\pi$, $\frac{59}{84}\pi$.

4. $\left\{\frac{3}{2}, \frac{36}{25}\right\}$.

5. $1-\sqrt{2}$, $5+\sqrt{10}$.

Вариант 8

1. $x_1=\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

2. $]-\infty; 0] \cup \left[1\frac{31}{32}; 2\right[$.

3. $\frac{27}{8}$ см². Указание. $\frac{1}{2}|AB|\cdot|AM| \times \sin\widehat{BAM}=\frac{1}{2}|BH|\cdot|BM|$ (H — основание высоты). Если h — высота треугольника BNM, то $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|BN|}{|ND|}=\frac{h}{|BH|-h}$.

4. Первый — 20, второй — 18.

5. Высота $\frac{4}{3}R$, радиус основания $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Физика

Физический факультет

1. $v=\frac{L}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

2. $T_2=T_1\sqrt{\frac{g}{g-a}\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}}$.

3. $x=-\frac{F}{k}+\sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2+\frac{m^2v^2}{k(M+m)}}$.

4. $x_м=\sqrt{\frac{mgH}{2k}+\left(\frac{mg}{4k}\right)^2}$.

5. $N=\frac{T_1-T_2}{T_1}\,\frac{qVv}{s} \approx 54$ кВт.

6. $\Delta q=q_2-q_1=-C(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\frac{R_2}{R_1+R_2}=-25{,}8$ мкКл.

7. $q=C\alpha(R\tau+L)=2\cdot 10^{-11}$ Кл.

8. $B=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{Le}n$, где $n=1, 2, 3, \ldots$

9. $l=\frac{2d^2}{2d-F} \approx 21{,}3$ см.

10. $x=d\frac{n-1}{n}=2$ мм.

Механико-математический факультет

1. $t=\sqrt{\frac{2l}{a-\mu g}} \approx 2$ с.

2. $E_п=\frac{F^2m_2^2x_0}{2(m_1+m_2)^2F_0}=0{,}1$ Дж.

3. $\Delta U=Q-\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)V\frac{\Delta T}{T} \approx 33$ Дж.

4. $r=r_1k\frac{p_1}{p_0}\,\frac{T_2}{T_1} \approx 3{,}7\%$.

5. Экран надо приблизить на $\Delta f=\frac{f^2D}{1+fD}=2$ м.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $v_0 = \frac{4v}{4-\pi} \approx 233$ м/с.

2. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2} = 1{,}5$.

3. $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = 3$ В или

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = 12$ В.

4. $l = 2\sqrt{\frac{\Gamma(d-F)^2-F^2}{\Gamma}} \approx 10$ см.

5. $x = \frac{4rd}{2d-R} = 3$ см.

Химический факультет

1. $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \approx 0{,}98$ Н.
2. $H = \frac{\eta N}{Q\varrho g} \approx 5$ м.
3. $a = \frac{q}{m}\sqrt{E^2+v^2B^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{13}$ м/с^2.
4. $a = 4h = 4$ см (в сторону смещения линзы $Л_2$).
5. $x = \frac{F(v_2-v_1)\Delta t}{d} = 1$ см.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $n_2 = n_1 \frac{V_2}{V_1} \frac{T_1}{T_2} \approx 2{,}3$ моля.
2. $A = \frac{m}{\mu} R\,(T_2-T_1) \approx 1{,}7 \cdot 10^3$ Дж.
3. $m_п = \frac{m_л\lambda + (c(m_в+m_л)+C_к)(t-t_1)}{r+c(t_2-t)} \approx$
$\approx 0{,}06$ кг.
4. $R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_2} \approx 2{,}3$ Ом.
5. $\Delta I = I_0 - \frac{m}{kt} \approx 0{,}03$ А.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{(1;1),\ (\log_2 3;\ \log_3 2)\}$.
2. $x = (-1)^k \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.
3. $4-2\sqrt{3}$. Указание. Если $M = (BD) \cap (CK)$, то $\frac{|MK|}{|KB|} = \frac{|MC|}{|CD|}$; $|CD| < |AB|$.
4. $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ или $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ или 0. Указание. Рассмотрите случаи $|AO| \neq 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ (α — угол, который данная касательная образует с осью Ox); $|AO| \neq 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = -2$; $|AO| = 0$.
5. $2\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} = \arccos\frac{1}{5} = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. Указание. Проведите через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам; обозначим через A' точку пересечения прямых, проведенных через B и C; аналогично вводятся B' и C'. Тогда угол между плоскостями $SA'C'$ и $SA'B'$ — искомый. Разные формы ответа соответствуют разным способам определения его величины.

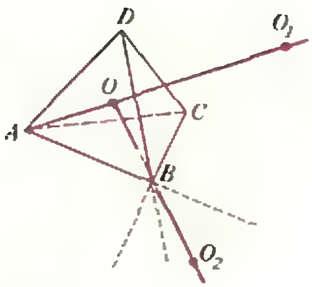


Рис. 13.

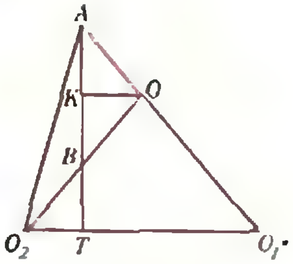


Рис. 14.

Вариант 2

1. 300 кг.
2. $x_1 = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k,\ x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$.
3. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание. $\widehat{DOE} = 60°$.
4. $]-\infty; 0[\ \cup\ [1; +\infty[$.
5. $\sqrt{2}$. Указание. Пусть O — центр шара, вписанного в данную пирамиду. Тогда центр O_1 данного шара радиуса $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ лежит на луче $[AO)$, а центр O_2 второго данного шара лежит на луче $[OB)$ (рис. 13). Вычислите радиус шара, вписанного в пирамиду. Из его величины следует, что $|AO_1| = 3|AO|$, $|OO_2| = 2|OB|$. Если $[OK]$ — высота треугольника AOB и T — такая точка на (AB), что $|KB| = |BT|$ (рис. 14), то $O_2T \perp AT$ и $O_1T \perp AT$; значит, O_2TO_1 — прямая, перпендикулярная AT. Отсюда $|O_1O_2| = 4|OK|$.

Физика

Вариант 1

1. $\widehat{ABC} = \mathrm{arctg}\,1/2 \approx 27°$.
2. Из симметрии системы следует, что после первой линзы лучи собираются в середине цилиндра. Рассмотрим луч, который падает на границу раздела стекло — вода под углом α и выходит в воду под углом преломления β (рис. 15). Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{n_{ст}} \approx \frac{\sin\alpha}{2h/l},$$

где h — расстояние от точки падения луча

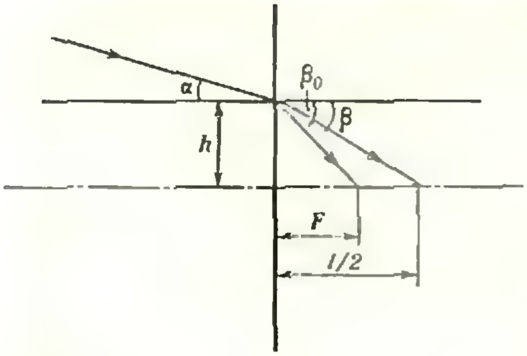


Рис. 15.

до оси, l — длина цилиндра. Для случая прохождения света из стекла в воздух можно записать

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_0}=\frac{1}{n_{ст}}\approx\frac{\sin\alpha}{h/F},$$

где β_0 — угол преломления в воздухе. Отсюда

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\beta}=n=\frac{l}{2F}\text{ и } l=2nF.$$

3. Так как электроны растекаются по стержню симметрично, в точке A ток $I_A=0$, и по мере приближения к точке B ток нарастает по линейному закону $I_l=\frac{I}{2}\frac{l}{L}$, где $L=|AB|$. Согласно закону Ома для участка цепи,

$$U_{AB}=I_{ср}\frac{R}{2}=\frac{I_A+I_B}{2}\frac{R}{2}=\frac{I}{4}\frac{R}{2}=\frac{IR}{8}.$$

4. Пусть длина цистерны $l\sim5$ м, а ее высота $h\sim1$ м. Примем для оценки, что торможение происходило с постоянным ускорением $a=v^2/2s$. Тогда «эффективное ускорение силы тяжести» равно $\vec{g}\,'=\vec{g}+\vec{a}$, и максимальное давление воды в полной цистерне при ее торможении равно

$$p=p_a+\varrho(gh+al)=p_a+\varrho\left(gh+\frac{v^2l}{2s}\right),$$

где p_a — атмосферное давление ($p_a\sim10^5$ Па), ϱ — плотность воды ($\varrho=10^3$ кг/м^3). При выбранных параметрах $p\sim1{,}4\cdot10^5$ Па.

5. Гвозди, повисшие на магните, сами становятся магнитами, причем расположение одноименных полюсов у них одинаково. В точках подвеса расталкиванию препятствует трение. Нижние концы гвоздей расходятся в соответствии с действием сил магнитного отталкивания и сил тяжести.

Вариант 2

1. $x=h\left(\frac{\varrho RT}{\mu p}-1\right)$.

2. В первом и втором случаях конденсаторы соединены параллельно; следовательно,

$$\frac{q_2}{C_1}=\frac{q_{02}-q_2}{C_2}\text{ и }\frac{q_3}{C_1}=\frac{q_{03}-q_3}{C_3}.$$

Отсюда начальные заряды на конденсаторах 2 и 3 равны, соответственно,

$$q_{02}=q_2\frac{C_1+C_2}{C_1}\text{ и }q_{03}=q_3\frac{C_1+C_3}{C_1}.$$

В третьем случае конденсатор 1 оказывается подсоединенным параллельно системе заряженных конденсаторов 2 и 3 (их соединение между собой нельзя считать последовательным, так как заряды не одинаковы):

$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_{02}-q_1}{C_2}+\frac{q_{03}-q_1}{C_3},$$

откуда заряд на конденсаторе 1 равен

$$q_1=\frac{q_2(C_1/C_2+1)+q_3(C_1/C_3+1)}{1+C_1/C_2+C_1/C_3}.$$

3. $h=Rm/M$. Указание. Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса. (Пока шарик не пройдет нижнюю точку выемки, брусок неподвижен.)

4. Выталкивающая сила, действующая на дирижабль, должна быть приблизительно равна суммарной силе тяжести груза (массой $M=10^5$ кг), оболочки и гелия. Пренебрегая массой оболочки и гелия (плотность гелия приблизительно в 7 раз (29/4) меньше плотности воздуха), получаем $F_в\sim Mg$. Выбрав самую простую форму дирижабля — сферу, найдем ее радиус:

$$R\sim\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}\sim100\text{ м}.$$

5. Пусть на линзу падает параллельный пучок света, а экран находится за линзой на расстоянии, большем двойного фокусного (рис. 16). Тогда на участки AB и EF — падает только прямой свет, на участок CD — только рассеянный линзой свет, а на участки BC и DE попадает как прямой, так и рассеянный свет. Вот почему в центре экрана виден темный круг, окаймленный светлым кольцом.

Вариант 3

1. $\varphi_A-\varphi_B=\pm\mathscr{E}/6$.

2. $M=3m/2$.

3. Параллельный пучок, падающий на линзу под углом α к главной оптической оси, собирается в фокальной плоскости в точке, отстоящей от оси на расстоянии $r=F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 17). Таким и будет наименьший радиус светлого пятна. Если же размер d линзы таков, что

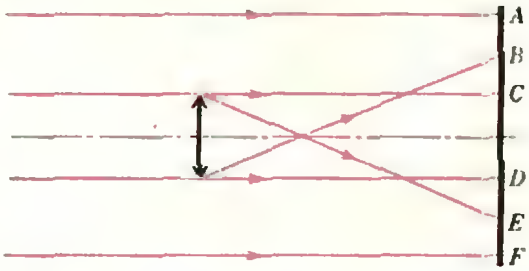


Рис. 16.

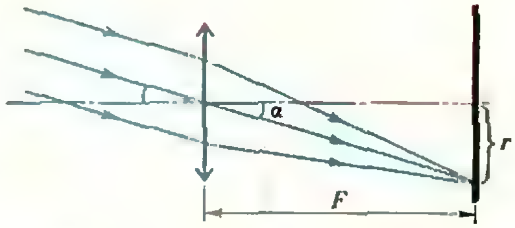


Рис. 17.

$d<F\,\mathrm{tg}\,\alpha$, минимальный радиус пятна получится, если линзу прижать к экрану вплотную.

4. Поскольку давление и объем сохраняются,

$$\frac{m-\Delta m}{\mu}R(T+\Delta T)=\frac{m}{\mu}\,RT,$$

откуда

$$\Delta m=m\frac{\Delta T}{T+\Delta T}\sim m\frac{\Delta T}{T}\sim \varrho V\frac{\Delta T}{T}.$$

Плотность воздуха $\varrho\sim1{,}3$ кг/м^3, объем аудитории $V\sim20\times20\times5$ м^3, $\Delta T=10$ К и $T\sim300$ К. Таким образом,

$$\Delta m\sim m\frac{\Delta T}{T}\sim100\ \text{кг}.$$

5. После надевания колпака разность потенциалов между ним и вертушкой становится равной нулю, и заряды перестают стекать с вертушки. Момент сил, ранее заставляющий вертушку вращаться, обращается в нуль.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Физика

Физический факультет

Вариант 1

1. $$\varphi=\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\left(\cos\varphi_0+\sqrt{3+\cos^2\varphi_0}\right)\right)=\pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right).$$

2. По первому закону термодинамики получаемое газом количество теплоты Q идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и на совершаемую газом работу A. Изменение внутренней энергии одноатомного газа равно $\Delta U=3/2R\Delta T$, а совершенная газом работа при малом изменении объема равна $A=p\Delta V$. Работа положительна во время всего процесса, а ΔU положительно лишь до тех пор, пока температура газа растет, после этого ΔU отрицательно. Когда уменьшение внутренней энергии станет равным совершенной работе, газ перестанет получать тепло и начнет отдавать его. Это произойдет в некоторой точке I, для которой выполняется условие

$$Q=\Delta U+A=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V=0.$$

Из уравнения состояния $pV=RT$ следует, что $R\Delta T=p\Delta V+V\Delta p$. В данном случае $p=p_0-aV$ и $\Delta p=-a\Delta V$, поэтому $R\Delta T=(p_0-2aV)\Delta V$, и

$$Q=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V=\left(\frac{5}{2}p_0-4aV\right)\Delta V.$$

Из условия $Q=0$ получаем для точки I

$$V_1=\frac{5}{8}\frac{p_0}{a},\ p_1=\frac{3}{8}p_0,\ T_1=\frac{15}{64}\frac{p_0^2}{aR}.$$

3. Выпрямительная схема обеспечивает протекание через вольтметры тока одного и того же направления в течение обоих полупериодов. Таким образом, напряжение на вольтметрах

$$u=U_м|\sin\omega t|,$$

где $U_м=\sqrt{2}\,U$, а период $T'=\pi/\omega$.

Показание теплового вольтметра пропорционально средней тепловой мощности, и, следовательно, будет таким же, как и без выпрямителя:

$$U_2=U=220\ \text{В}.$$

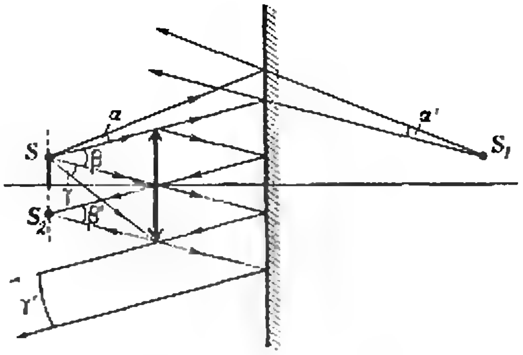


Рис. 18.

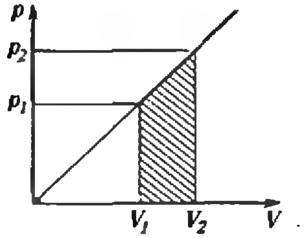


Рис. 19.

Показание магнитоэлектрического вольтметра пропорционально среднему току, то есть отношение перенесенного за период заряда q к длительности периода T'. Его показание

$$U_1=\frac{q}{T'}R=R\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\frac{U_м}{R}\sin\omega t\,dt=\frac{2U_м}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}U\approx198\ \text{В}.$$

4. Имеется три изображения источника (рис. 18): S_1 — мнимое, образованное отраженными от зеркала лучами, S_2 — действительное, образованное лучами, преломленными линзой, отраженными зеркалом и еще раз преломленными линзой, и S_3 — в бесконечности, оно образовано лучами, преломленными линзой и отраженными зеркалом.

Вариант 2

1. $\omega=\sqrt{G(M_1+M_2)/R^3}$; $a_1=GM_2/R^2$; $a_2=GM_1/R^2$ (G — гравитационная постоянная).

2. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U=\frac{3}{2}NR\Delta T=\frac{3}{2}NR\,(T_2-T_1).$$

При нагревании газа в данном процессе совершается работа (рис. 19)

$$A=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{2}=\frac{1}{2}NR\,(T_2-T_1),$$

идущая на увеличение энергии упругой деформации оболочки и совершаемая за счет полученного газом количества теплоты Q. Согласно первому закону термодинамики,

$$Q=\Delta U+A=2NR\,(T_2-T_1).$$

Отсюда теплоемкость системы

$$C=\frac{Q}{\Delta T}=2NR.$$

3. $I_A=4/15$ А. Указание. Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, напряжение между точками C и D равно нулю (см. рис. 4 в условии).

4. $R'/R=\sqrt{3/5}\approx 0{,}77$. Указание. Воспользуйтесь законами сохранения кинетической энергии и импульса для замкнутой системы протон — ядро атома гелия.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $E=\dfrac{\mathcal{E}}{d}\,\dfrac{\varrho\varepsilon\varepsilon_0}{\varrho\varepsilon\varepsilon_0+Cr}$.

2. $U=\dfrac{2P(1+k)}{l}=33$ В (здесь $k=0{,}1$).

3. $F_1=\dfrac{2ab(b-a)}{(b+a)^2}\approx 4{,}4$ см; $F_2=\dfrac{2ab(b+a)}{(b-a)^2}=$ $=120$ см. Указание. Изображение B — всегда мнимое, а изображение C может быть как действительным, так и мнимым.

Химический факультет

1. $v=\sqrt{\dfrac{Gm}{4r}}$ (здесь G — гравитационная постоянная).
2. $Q=m(g+a)h$.
3. $q=It/2=20$ Кл; $m=kq=kIt/2=$ $=6{,}6\cdot 10^{-6}$ кг $=6{,}6$ мг.

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\{0\}$.
2. $[-3;\,0[\,\cup\,[20;\,+\infty[$.
3. $\varnothing$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$

4. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
5. $\sqrt[3]{\dfrac{12Q\sqrt{-2\cos\alpha}}{\pi\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}}$.

Вариант 2

1. $\{-2\}$.
2. $]-\infty;\,-1[\,\cup\,]1;\,3]$.
3. $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{2}l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$.
4. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $\dfrac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
5. $\dfrac{8p^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=4p^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\times$ $\times\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 3

1. $\left\{\dfrac{1}{4},\,2\right\}$.
2. $]-\infty;\,-3[\,\cup\,]-2;\,+\infty[$.
3. $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $\max\limits_{[5;\,8]}y=y(8)=545$, $\min\limits_{[5;\,8]}y=y(5)=536$.
5. $\dfrac{9l^3\cdot\operatorname{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}-1}}$. Указание. Если $SABC$ — данная пирамида (S — вершина) и $AP\perp SB$, то $\widehat{APC}=\varphi$.

Задачи устного экзамена

1. $\sqrt{10}-3$. 2. а) $\sin 3$; б) $\sqrt[3]{3}$.
5. а) $\left\{\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$; б) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
6. 4. 7. а) $[3;\,4[\,\cup\,]4;\,+\infty[$; б) $]0;\,2[$.
8. -1. 9. $y=\left(\dfrac{97}{162}-18\sqrt{3}\right)x+4\dfrac{13}{18}+81\sqrt{3}$.
10. Квадрат со стороной $\sqrt{a}$. 11. Квадрат со стороной $\dfrac{a}{4}$. 12. 2. 13. 2. 14. 1. 15. $k=0$. Указание. Сравните площади для прямых $y=2$ и $y=kx+2$ $(k\neq 0)$. 16. $1-\dfrac{\pi}{4}$.
17. $2(\sqrt{2}-1)a^2$. 18. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. 19. Ромбом, когда диагонали исходного четырехугольника конгруэнтны. Квадратом, когда они вдобавок взаимно перпендикулярны. 20. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Физика

1. $l_{1-2}=7$ м; $l_{2-3}=5$ м; $l_{3-4}=3$ м; $l_{4-5}=1$ м.
2. $x\approx 0{,}22$ м.
3. $\Delta T=T\dfrac{mRT}{p\mu\pi d^3/6-mRT}\approx 6$ К.
4. $U_1=\dfrac{2}{3}\mathcal{E}\dfrac{C_2}{C_1+C_2}$; $U_2=\dfrac{2}{3}\mathcal{E}\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$.
5. Расстояние от линзы до лампочки равно

$$d=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-Fl}.$$

Если $F=F_1$, то $d_1=0{,}7$ м и $d_2=0{,}3$ м. Если же $F=F_2$, отчетливого изображения не будет.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Масса шарика 20 г, рыбки 30 г, конуса 50 г. Система приводится в равновесие либо двумя шариками, либо рыбкой и палочкой, либо шариком и двумя палочками.
2. 60 минут $=20+10+15+15$ (см. рис. 20).

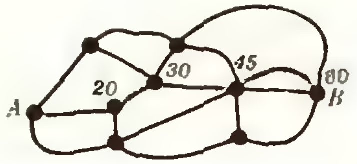


Рис. 20.

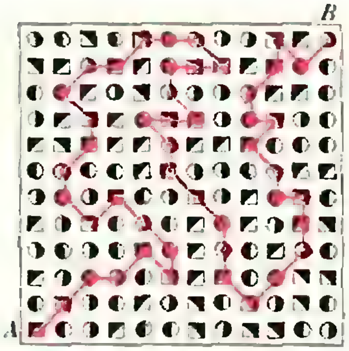


Рис. 21.

3. См. рисунок 21.

4. $4+10+5+9+8+6+7+2+1+8=60$.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 4, с. 49)

1. Оторвавшийся воздушный пузырек, прежде чем вырваться из отверстия в молочном «стороже», прокатывается по всему спиралевидному (или кольцеобразному) углублению. При этом он сливается с другими пузырьками и увеличивается в размерах. А чем больше пузырек, тем более толстую пленку на закипающем молоке он способен прорвать.

(см. «Квант» № 4, с. 59)

1. Если $a>\frac{5}{4}$, то $a=\sin^3 x+\cos x<\sin^2 x+$ $+\cos x$, откуда $\cos^2 x-\cos x+a-1$. что невозможно, поскольку дискриминант трехчлена $t^2-t+(a-1)$ неположителен.

Случай $a<-\frac{5}{4}$ аналогичен предыдущему (нужно только заметить, что $-a=-\sin^3 x-$ $-\cos x<\sin^2 x-\cos x$).

2. $\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=$

$$=\cos\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\right)\pi+\cos\left(\frac{6}{5}-\frac{6}{7}\right)\pi+$$
$$+\cos\left(\frac{9}{5}-\frac{9}{7}\right)\pi=\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)+\sin\frac{\pi}{5}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\right.$$

$\left.-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right)$; $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+$ $+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ (докажите это, домножив и разделив левую часть на $2\sin\frac{\pi}{7}$).

$$\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=$$
$$=2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}=$$
$$=2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)=$$
$$=4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}=$$
$$=4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Но $4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Докажите это, рассмотрев равенство

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=$$
$$=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\times$$
$$\times\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

и сосчитав выражения

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7},$$
$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+$$
$$+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7},$$
$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

(см. также решение задачи М725 в одном из следующих номеров «Кванта»).

3. $x=\sqrt[3]{5}$.

4. Пусть $q=\frac{m}{n}$ — знаменатель прогрессии (m и n — взаимно простые натуральные числа). Тогда первый член прогрессии имеет вид $a_1=kn^8$; следовательно, последний член равен km^8. Из неравенств $250<kn^8<7000$, $250<km^8<7000$ получаем $k=1$, $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$ или $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$. Получаем два решения:

1) $a_1=2^8$, $q=\frac{3}{2}$;

2) $a_1=3^8$, $q=\frac{2}{3}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. $4940+5940=10\,880$; $10\,579\times6=63\,474$.

2. См. рисунок 22.

3. В третьем кубике цифрами трехзначного числа могут быть либо 1, 5, 2, 6, либо 1, 3, 2, 4, либо 5, 3, 6, 4. Поскольку сумма последних четырех чисел — наибольшая, именно они должны представлять разряды сотен трехзначных чисел. Сумма разрядов сотен равна 18. Для второй «выкройки» наибольшая из возможных сумм четверок соответствующих чисел равна $17=6+4+5+2$, а для третьей — $14=1+3+6+4$. Поэтому наибольшее воз-

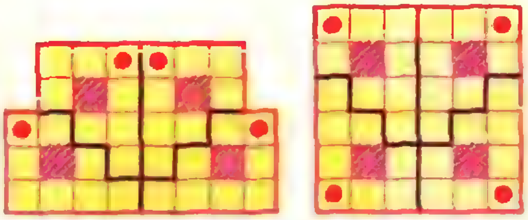


Рис. 22.

можное значение суммы всех четырех трехзначных чисел равно 1800+170+14=1984.

4. а) Можно — см. таблицу перемещений монет (П — пятак, Д — «двушка»).

б) Нельзя. Указание. Предположите, что нужное перемещение монет осуществлено

Таблица перемещений монет

ДП	ДП	ДП		ДП	ДП	ДП
	П	ДП	ДП	ДДП	ДП	ДП
ДД	П	П	П	ДДП	ДП	ДП
ДД	ДП	ДП		ПП	ДП	ДП
ДД	ДП	ДП	ДД	П	П	ПП
ДД	ДП		ДП	ДП	ДП	ПП
ДД	Д	П	П	ДДП	ДП	ПП
ДД	ДД	ДП	ДП	П	П	ПП
ДД	ДД	П		ДПП	ДП	ПП
ДД	ДД	ДД	П	ПП	П	ПП
ДД	ДД	ДД		ПП	ПП	ПП

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3. 1. Сd3. Иначе после 1...g5 слон вырвется на свободу 1...Сg8. 2. Се4 Сh7. На всей диагонали a2 — g8 слону не найти безопасного места и приходится снова прятаться в клетку. **3. Кe7+ Крa7 4. Сd3 Крb7 5. Крf2 Крb6 6. Крe3 Крb7 7. Крd4 Крb8 8. Сc2 Крb7 9. Сe4+ Крb8 10. Крe5 h4 11. Крf6 Крc7 12. Крg7 Крd6 13. Кc6 g5 14. Кр:h7 g4 15. Сh1 h3 16. Кd4** и т. д.

Задание 4. Легкие фигуры черных находятся под ударом, но как белому коню убежать от неприятельского короля? **1. Кd4+ Крc3 2. Кb5+ Крc4 3. Кd6+ Крc5.** Черный король не может становиться на одну вертикаль с конем из-за шаха ладьей снизу и поэтому вынужден преследовать коня по линии «с». **4. Кb7+ Крc6 5. Кd8+ Крc7 6. Кe6+ Крd7 7. Кf8+ Крe7 8. Кg6+ Крf7 9. Кh8+ Крg7.** Конь пойман, но короля удалось завлечь на неудобное место. **10. Л:e1 Кр:h8 11. Лh1.** Вот в чем дело. **11...g3 12. Крe3 Крg7 13. Крf4.** Ловушка для черного коня захлопнулась. **13...g2 14. Лg1 Кf1 15. Л:g2+** и **16. Лf2** с победой.

Итоги шахматного конкурса 1981 года

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), В. Белов (Фрунзе), В. Беляев (Куйбышев), Э. Бровченко (Москва), В. Воскобойник (Тирасполь), А. Гавренков (Херсон), М. Германов (с. Чаши Курганской обл.), М. Грушко (Житомир), Р. Дайтнер (с. Каменка Целиноградской обл.), А. Каган (Ташкент), Б. Калинский (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), А. Каневский (Херсон), С. Кипрушкин (Петрозаводск), М. Колдошов (с. Сырт Ошской обл.), М. Креймер (Житомир), А. Кузнецов (Ленинград), З. Курганов (Чирчик), Н. Малин (Баку), Х. Насыбуллин (Арзамас), А. Новоселов (Киров), А. Покидов (с. Ашап Пермской обл.), В. Прудников (Подольск), В. Семеняк (пос. Гвоздец Ивано-Франковской обл.), Б. Сидоров (Апшеронск), А. Скороход (Чернигов), С. Сундукова (Ишимбай), А. Тихонков (дер. Моисеевка Гомельской обл.), В. Чернов (Чебоксары).

Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются шахматно-математической литературой с автографами А. Карпова и Е. Гика.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков,
Н. Кузьмина, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

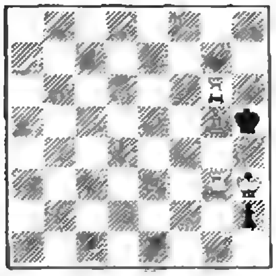
117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант» тел. 234-08-21
Сдано в набор 18.3.82 Подписано в печать 16.4.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,19 Т-06862
Цена 40 коп. Заказ 668 Тираж 180 966 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ШАХМАТНАЯ МАШИНА ВРЕМЕНИ

Когда шахматистам предлагают решить следующую миниатюру, они моментально берутся за белую ладью и удивляются, почему все так просто.

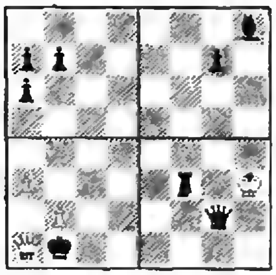


Мат в 1 ход.

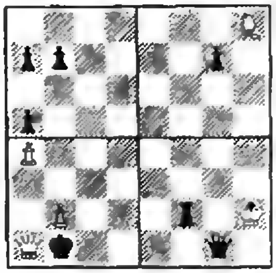
1. Лh6×? Не будем спешить с ответом. Действительно, белые могут дать мат в один ход. Но каким был последний ход черных? Черный король не мог пойти на поле h5 ни с h4, ни с g4 (шахматным королям контакты недоступны). Не мог он стоять и на поле h6, ибо тогда был невозможен предыдущий ход белых (в данной позиции за один ход двойной шах белой ладьей и пешкой не дать). Не могла ходить и пешка h2, ведь поля h3 и g3 заняты.

Итак, в данной позиции мы не можем указать ни одного предыдущего хода черных (это называется «ретропат» черных). Следовательно, предыдущий ход сделали белые, сейчас ход черных и решает **1...h1Ф×!**

Позиции, для оценки которых требуется совершить путешествие в прошлое, то есть выяснить, как они могли получиться в реальной шахматной партии, называются *ретрозадачами*, а соответствующий жанр шахматной композиции — *ретроанализом*. Главное в нем — уметь отличать возможные позиции от невозможных. Вот несколько типичных примеров «нелегальных» позиций (их можно лишь искусственно сконструировать из шахматных фигур, в настоящей партии возникнуть они не могут).

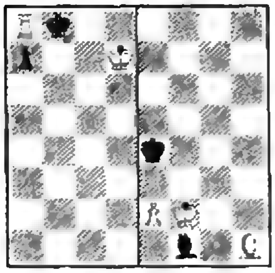


Для экономии места мы изобразили здесь сразу четыре различные невозможные конфигурации. Каждая из них ставит вопрос, на который нет ответа. Откуда появилась черная пешка на a6? Как черный слон попал на h8? Каким образом белые дали шах ферзем на a1? Могли ли черные дать двойной шах ферзем и ладьей королю на h3? Эти абстрактные позиции напоминают «невозможные объекты», которые на рисунках выглядят вполне правдоподобно, а когда начинаешь вглядываться в них внимательнее, то обнаруживаешь, что перед тобой предмет-призрак.



А вот эти позиции, незначительно отличающиеся от предыдущих, уже вполне легальны. Черная пешка с поля c7 сделала ходы **c7:b6** и **b6:a5** (другой маршрут исключен). Белая пешка дошла до поля h7 и сделала ход **h7—h8С** (слон h8 может быть только превращенным). Белый ферзь дал шах черному королю с поля a3, а черная пешка **g2** только что превратилась в ферзя с двойным шахом.

Теперь рассмотрим задачи.

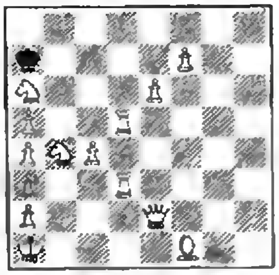


Восстановить последние ходы противников.

Слева на диаграмме белая пешка с поля b7 последним ходом взяла черную фигуру на a8 и превратилась в ладью — **b7:a8Л+**. Но какую именно фигуру взяла пешка? Легко найти, что только коня, причем он попал туда с поля c7. Справа белые могли дать шах только ходом **Крg2—f2**, а перед этим шаховали черные превращенным слоном — **f2—f1С+**.

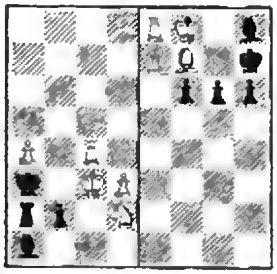
Конкурсные задания

Первым заданием этого номера является остроумная задача-шутка Н. Плаксина, которую он посвятил одному из основоположников жанра ретроанализа В. Королькову (позиция на диаграмме имеет вид буквы К).



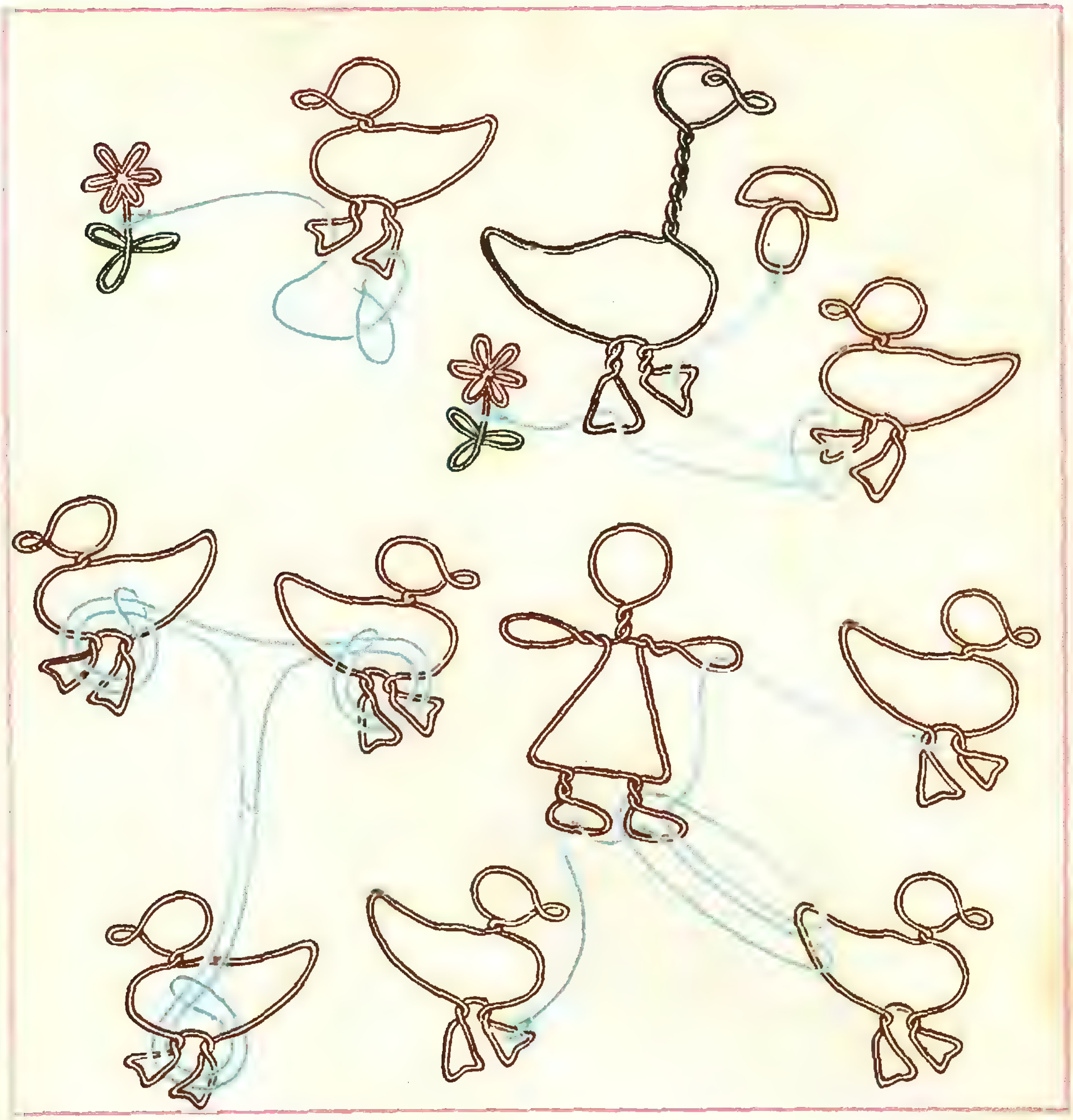
9. Добавить пешку и дать мат в 1 ход.

Второе задание — двойное.



10 а, б. Мат в 1 ход.

Срок отправки решений — 25 июля 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»).



В этих головоломках нужно освободить проволочных утят от синих веревочек, в которых они запутались. Впрочем, в правой нижней головоломке можно освободить лишь одного утенка — двое других (привязанные за ножки) не смогут убежать от девочки. Эти головоломки легко смастерить самим из обрезков проволоки и толстых ниток или шнурков. Проволока подойдет любая, но лучше взять одножильный медный провод в цветной изоляции. Будьте особенно внимательны при связывании фигурок шнурками, точно следуйте рисунку. Имейте в виду, что иногда достаточно продеть нитку не с той стороны петли — и головоломка не получится. Необходимо выдерживать правильные, точно по рисунку, пропорции фигурок и петель, длину шнурков. Например, цветочек должен быть больше лапки утенка, но меньше петли на конце шнурка.

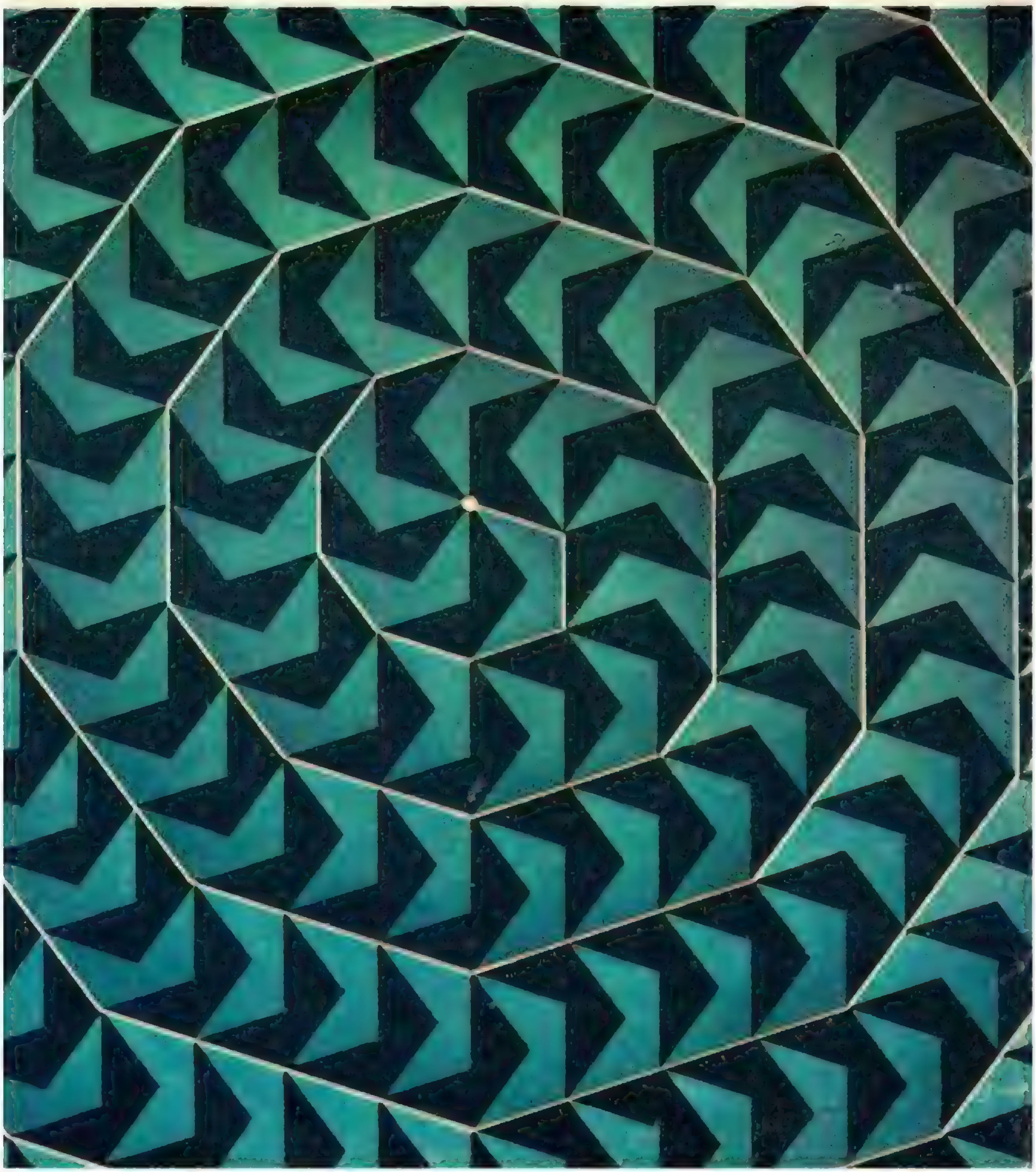
●

На первой странице обложки изображен исследовательский реактор МР Института атомной энергии имени И. В. Курчатова. Он используется для изучения свойств материалов, применяемых в атомной энергетике.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Хорошо известно, что на плоскости можно сделать паркет из правильных шестиугольников, равносторонних треугольников и квадратов, а правильными многоугольниками с пятью, семью, восемью или более сторонами заполнить плоскость без пробелов и перекрытий нельзя. Однако если слегка ослабить условие правильности, допуская многоугольники, у которых конгруэнтны стороны и углы между *прямыми, содержащими соседние стороны* (вместо углов между самими соседними сторонами), то такими невыпуклыми фигурами уже можно замостить плоскость. Для пятиугольника такая конструкция показана на рисунке. Подумайте, есть ли другие способы заполнить плоскость такими же пятиугольниками. А можно ли заполнить ее аналогичными семиугольниками?

А. Сапич, В. Чванов



НОМЕР
6

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Основан в 1970 году

КВАНТ

6
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

В номере		In this issue
Л. Асламазов, И. Кикоин. Что такое волна?	2	*L. Aslamazov, I. Kikoin.* What is a wave?
Б. Мартынов. О максимумах функции Ван-дер-Вардена	8	*B. Martynov.* On maxima of the Van der Waerden function
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
Я. Амстиславский. Необычные явления вокруг обычных источников света	15	*Ya. Amstislavski.* Unusual phenomena about usual light sources
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М746 — М750; Ф758 — Ф762	19	Problems M746 — M750; P758 — P762
Решения задач М706 — М710; Ф718 — Ф722	23	Solutions M706 — M710; P718 — P722
С. Кротов. Об оптимальных траекториях движения	30	*S. Krotov.* On optimal trajectories of motion
Список читателей, приславших правильные решения	34	List of readers who have sent correct solutions
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	35	Problems
Ф. Бартенев. Кантование кубика	36	*F. Bartenev.* Rolling cubes
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
А. Назаретов. Плоскость в пространстве	38	*A. Nazaretov.* Planes in space
И. Быстрый. О сокращении показателей	40	*I. Bystri.* Cancelling exponents
Варианты вступительных экзаменов в вузы	41	**College entrance exams**
Искусство программирования		**The art of programming**
Г. Звенигородский. VI Всесоюзная летняя школа юных программистов	54	*G. Zvenigorodski.* VI All-Union summer school for young programmers
Информация		**Information**
Заочная физико-техническая школа при МИСиС	56	Physico-technical correspondence school at the Moscow steel and alloys institute
Вечерняя физическая школа при МГУ	56	Moscow state university physics evening school
Ответы, указания, решения	57	**Answers, hints, solutions**
Смесь *(14, 53)*		**Miscellaneous** *(14, 53)*
Шахматная страничка		**The chess page**
Шахматные лестницы *(3-я с. обложки)*		Chess ladders *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982

Л. Асламазов, И. Кикоин

Что такое волна?

> *Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.*
>
> Козьма Прутков. Плоды раздумья

Понятие волны нам кажется очевидным, и мы интуитивно связываем его с каким-то движением. Бросим в воду камень — по поверхности воды побежит волна. Но если на воде в это время плавает ветка, то мы заметим, что она вовсе не смещается в направлении распространения волны, а совершает колебательное движение вверх-вниз. Что же перемещается при распространении волны? Рассмотрим несколько примеров.

Говорят, что императрица Елизавета, дочь Петра I, пожелала, чтобы торжественный момент ее коронации был отмечен артиллерийским салютом с Петропавловской крепости в новой столице — Петербурге. А по закону коронация русских царей проходила в Успенском соборе в Москве. В наше время передать любую информацию из Москвы в Ленинград просто: достаточно послать по радио сигнал, и пушка выстрелит вовремя. А тогда нужно было придумать другой способ оповещения о моменте возложения патриархом короны на голову императрицы.

И вот на всем пути (примерно 650 км) от собора в Москве до крепости в Петербурге были выстроены солдаты на расстоянии прямой видимости (около 100 м) друг от друга. Для этого, как легко подсчитать, понадобилось приблизительно 6500 солдат. У каждого солдата в руке был флажок. В момент коронования первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его движение, за ним — все остальные. Время реакции человека составляет десятые доли секунды, и, следовательно, через 10—20 минут известие о коронации дошло до артиллериста в Петропавловской крепости.

Что же перемещалось от Москвы до Петербурга? Каждый солдат остался стоять на своем месте. Единственное, что он сделал — взмахнул флажком. На научном языке можно сказать, что, подняв и опустив руку с флажком, он на некоторое время изменил свое состояние. Это изменение состояния и перемещалось вдоль цепи солдат.

Перемещение в пространстве изменения состояния называется волной.

В 1905 году в Петербурге начались забастовки, и тогда печать писала, что волна забастовок распространилась по всей России и достигла самых далеких окраин. В этом случае распространялось состояние, в котором рабочие бросали работу на промышленных предприятиях и предъявляли политические и экономические требования.

А вот пример о том, как распространяются слухи. Известно, что слух, пущенный даже одним человеком, может распространиться в городе в течение короткого времени. Оно значительно меньше времени, необходимого для того, чтобы этому человеку обойти (или обзвонить) всех людей в городе. Ясно, что носители слуха сами могут и не перемещаться. Перемещается состояние осведомленности. Так обычно и говорят — по городу распространяется волна слухов.

Разберем, наконец, физический пример. На биллиардном столе выстроена цепочка шаров (рис. 1, *а*). На нее налетает еще один шар так, что его скорость направлена вдоль цепочки. После удара налетающий шар остановится, а последний шар отскочит (рис. 1, *б*). Мы сообщаем импульс первому шару, а получает его — последний. Это происходит потому, что вдоль цепочки шаров распространяется волна деформации. При ударе первый шар сплющивается и деформирует соседний, тот — следующий и т. д. На любой промежуточный шар слева и справа действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы упругости (рис. 1, *в*), и он остается на месте. Последнему шару действующая только с одной стороны сила упругости сообщает импульс, и он отскакивает.

Такие волны деформации, распространяющиеся в упругих средах, называют звуковыми волнами. Следовательно, в результате удара по цепочке шаров пробежала звуковая волна. Она может распространяться в любом упругом теле. Например, если по закрепленному стержню (рис. 2, *а*) ударить с одного конца молотком, по стержню побежит волна деформации (звуковая волна). Когда эта волна дойдет до противоположного конца стержня, висящий там шарик отскочит (рис. 2, *б*). Аналогично можно возбудить звуковую волну в жидкости или в газе, только вместо молотка удобнее, конечно, воспользоваться поршнем.

Попытаемся подробнее разобраться в механизме распространения звуковых волн в упругих телах. В частности, выясним, от чего зависит скорость распространения волны. Сначала решим упрощенную задачу для модели упругого тела. Будем считать, что у нас имеется цепочка шариков массой m, соединенных пружинками жесткостью k (рис. 3). Размеры шариков малы по сравнению с

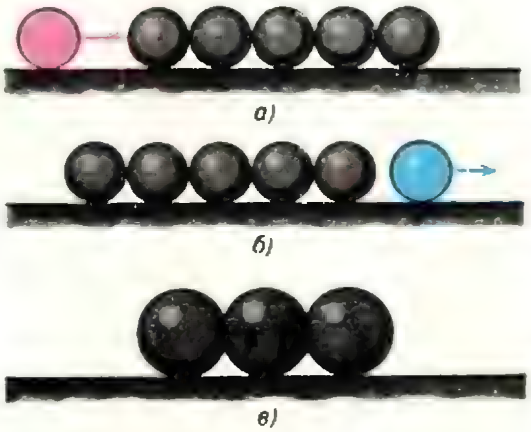


Рис. 1.

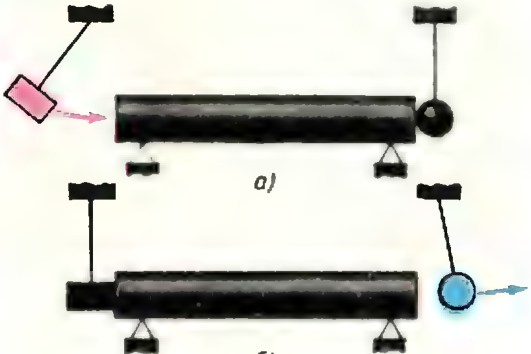


Рис. 2.

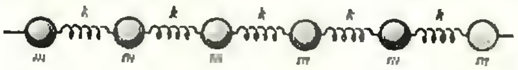


Рис. 3.

расстоянием между ними, а масса пружинок пренебрежимо мала по сравнению с массой шариков. По существу это та же цепочка биллиардных шаров, у которой мы «разделили» инертность (массу) и упругость (жесткость).

Такая модель близка к реальной ситуации в твердом теле. В кристаллической решетке атомы располагаются так, что в состоянии равновесия векторная сумма сил, действующих на каждый атом со стороны всех других, равняется нулю. При отклонении атомов от положения равновесия возникают силы притяжения и отталкивания, которые похожи на силы упругости*).

Давайте сообщим какому-либо шарику, например первому слева, импульс, направленный вдоль цепочки (толкнем его). Тогда, как и в примере с биллиардными шарами, по цепочке побежит волна упругой деформации, которая через какое-то время достигнет правого конца цепочки. Так как последний шарик связан с цепочкой пружинкой, отскочить совсем он не сможет. Растянутая пружинка вынудит его вернуться назад, а затем, вследствие своей инертности, шарик сожмет пружинку. Теперь волна деформации побежит справа налево. В таком случае говорят, что волна отразилась от конца цепочки и начала распространяться в обратном направлении. По тем же причинам она отразится от противоположного конца и т. д. Эти отраженные волны усложнят наше рассмотрение, и, чтобы избавиться от них, рассмотрим «бесконечную» (то есть без концов) цепочку. Ее можно реализовать, замкнув цепочку из большого числа шариков в кольцо (рис. 4). По такой «бесконечной» цепочке волна упругой деформации будет двигаться по кругу без отражений, пока не затухнет.

Отклоним один из шариков от положения равновесия (например, сместим по часовой стрелке) и отпустим. Тогда под действием подсоединенных к нему пружин положение шарика в пространстве будет периодически изменяться. Такое движение называют колебательным.

Колебания играют важную роль в природе и технике. Колебательное движение совершает маятник в часах; в бытовых электроприборах колеблются сила тока и напряжение; смена дня и ночи, времен года — это тоже колебательный процесс, обусловленный движением Земли. Все вращающиеся механизмы вызывают колебания фундамента, которые необходимо обязательно учитывать при конструировании.

Простейший тип колебательного движения — это гармоническое колебание, когда смещение тела от положения равновесия меняется со временем по закону

$$\alpha = \alpha_м \sin(2\pi t/T) = \alpha_м \sin 2\pi\nu t = \alpha_м \sin\omega t,$$

где в случае кольцевой цепочки α — угловое отклонение шарика от положения равновесия. Как видно, гармоническое колебание характеризуется двумя величинами (параметрами): максимальным отклонением (амплитудой) $\alpha_м$ и периодом колебаний T (промежутком времени, через который колебание полностью повторяется). Частота ν равна числу колебаний в единицу времени, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$ вводится для упрощения математической записи колебательного движения, а величина $\varphi = \omega t$, определяющая положение шарика в данный момент времени t, называется фазой колебаний.

Приведем пример. Пусть шарик совершает полное колебание за время $T = 4$ с, в начальный момент он находится в положении равновесия, а его максимальное отклонение $\alpha_м = 0{,}1$ рад. Тогда, если он совершает гармонические колебания, то зависимость отклонения от времени дается формулой

$$\alpha = 0{,}1 \sin(\pi t/2).$$

В момент $t_1 = 1$ с фаза колебаний равна $\varphi_1 = \pi/2$, в момент $t_2 = 2$ с фаза

---

*) На далеких расстояниях между атомами действуют преимущественно силы притяжения, а на близких — силы отталкивания (квантовая механика запрещает атомам проникать друг в друга). Лишь при некотором, равновесном, расстоянии (примерно равном размеру атома) силы взаимодействия между атомами обращаются в нуль.

$\varphi_2=\pi$, в момент $t_3=3$ с фаза $\varphi_3=3\pi/2$ и т. д.

Частота колебаний (а значит, и период, и циклическая частота) зависит от свойств системы. Так, циклическая частота колебаний шарика массой m, присоединенного к пружинке жесткостью k_0, равна (см. «Приложение» к статье)

$$\omega_0=\sqrt{k_0/m}. \qquad (*)$$

Состояние колебательного движения может распространяться в пространстве. Например, в нашей цепочке все шарики будут повторять колебания первого, но только с некоторым опозданием. В состоянии максимального отклонения от положения равновесия каждый следующий шарик будет находиться позже, чем предыдущий. Точно так же, когда первый шарик снова вернется в положение равновесия, соседний еще будет отклонен и вернется в положение равновесия с запозданием.

Запаздывание колебаний во времени математически описывается с помощью сдвига по фазе. Угловое смещение шарика с номером n дается формулой

$$\alpha_n=\alpha_м\sin(\omega(t-\Delta t_n))=\alpha_м\sin(\omega t-\Delta\varphi_n).$$

Величина $\Delta\varphi_n=\omega\Delta t_n$ называется сдвигом фазы (Δt_n — время запаздывания колебаний n-го шарика). В таком случае каждый шарик в цепочке совершает гармоническое колебание. У всех шариков амплитуда колебаний $\alpha_м$ и циклическая частота ω — одинаковые, но сдвиги фазы $\Delta\varphi_n$ — разные. Чем больше расстояние до n-го шарика, тем больше запаздывание и, следовательно, тем больше сдвиг фазы.

На рисунке 5 показаны графики колебательных движений, сдвинутых по фазе на $\Delta\varphi_1=\pi/8$, $\Delta\varphi_2=\pi$ и $\Delta\varphi_3=15\pi/8$ по отношению к колебанию, изображенному пунктиром. В первом случае фазовый сдвиг мал, и шарики колеблются почти что в такт. Во втором случае наступает полный разнобой: при максимальном отклонении одного шарика другой шарик также максимально отклонен, но в противоположную сторону. В таком случае говорят, что шарики колеблются в противофазе. Наконец, в третьем случае сдвиг фаз близок к 2π. Как видно, шарики опять начинают колебаться почти что в такт. Это и понятно, ведь 2π — период синуса, и колебания, сдвинутые по фазе на величину, кратную 2π, просто совпадают.

Так как сдвиг фазы колебаний шариков в цепочке при увеличении расстояния между ними растет, то ясно, что на некотором расстоянии он станет равным 2π и шарики будут колебаться в такт (в унисон). Это расстояние называется длиной волны λ.

Сколько длин волн может укладываться на длине цепочки? Так как начало и конец цепочки соединены (кольцо!), то ясно, что — только целое число длин волн. Ведь первый и последний шарики совпадают и, следовательно, должны колебаться одинаково. Если длина цепочки L ($L=Na$, где a — расстояние между шариками в положении равновесия, а N — их число), то самая длинная волна, которая может рас-

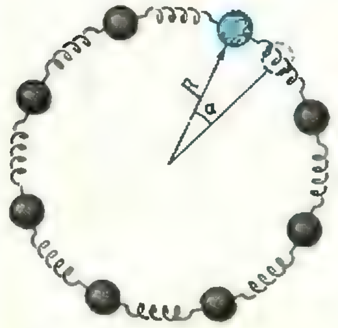


Рис. 4.

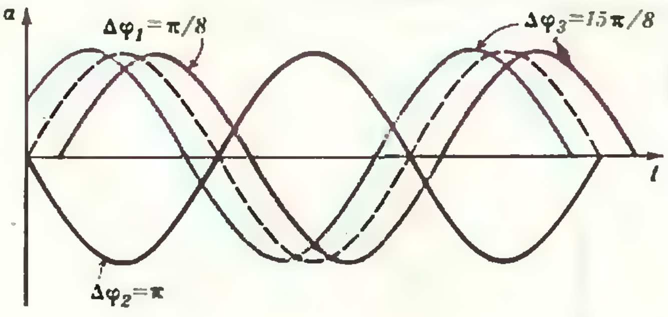


Рис. 5.

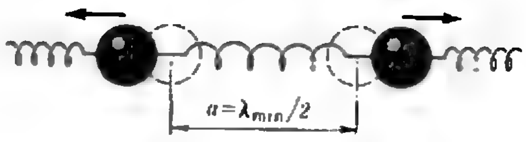


Рис. 6.

пространяться в цепочке, имеет длину $\lambda_1=L$. Следующая, более короткая, — $\lambda_2=L/2$, следующая — $\lambda_3=L/3$ и т. д. Какая же самая короткая волна может распространяться в цепочке?

Чем меньше длина волны, тем больший сдвиг фаз приходится на соседние шарики. Максимальный «разнобой» происходит при сдвиге фаз между соседними шариками, равном π. В таком случае шарики колеблются в противофазе (рис. 6), и соответствующая длина волны $\lambda_{min}=2a$.

Давайте рассчитаем, с какой частотой происходят колебания, соответствующие минимальной длине волны (это позволит оценить скорость распространения волны в цепочке). Если положить, что средний шарик колеблется по закону

$$\alpha_n=\alpha_м \sin\omega t,$$

то колебания предыдущего шарика описываются формулой

$$\alpha_{n-1}=\alpha_м \sin(\omega t+\pi),$$

а последующего —

$$\alpha_{n+1}=\alpha_м \sin(\omega t-\pi).$$

Зная, как движутся концы пружин, легко найти, как зависит от времени их деформация, и по закону Гука $F=kx$ рассчитать силы упругости, действующие на средний шарик. Результирующая сила

$$F=kx_м(\sin(\omega t-\pi)-\sin\omega t+\sin(\omega t+\pi)-\sin\omega t)=-4kx_м\sin\omega t,$$

где $x_м=R\alpha_м$ — максимальное линейное отклонение шарика (R — радиус кольца, в которое замкнута цепочка). Как видно, средний шарик колеблется так, как если бы он был присоединен к одной пружинке, но с учетверенной жесткостью. Подставляя в формулу (*) значение $k_0=4k$, получаем, что при распространении по цепочке волны с минимальной длиной $\lambda_{min}=2a$ частота колебаний $\omega=2\sqrt{k/m}$. Это — максимальная частота колебаний шариков в замкнутой цепочке.

В реальном твердом теле также имеется максимальная частота, с которой могут колебаться атомы.

Какова при этом скорость распространения волны? Если частота колебаний ω, то их период $T=2\pi/\omega$. При скорости распространения v волна за время T проходит путь $l=vT=2\pi v/\omega$. Этот путь и равен длине волны, так как сдвинутые во времени на период T колебания будут происходить в фазе. Таким образом,

$$\lambda=vT=2\pi v/\omega,$$

и, следовательно,

$$v=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=\frac{2}{\pi}a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

А каковы скорость распространения и частота колебаний для волн с большей длиной? Их можно подсчитать, например, таким же способом (хотя это и несколько более сложная задача). При этом оказывается, что с увеличением длины волны частота колебаний уменьшается, а скорость распространения волны увеличивается, но незначительно. Для больших длин волн ($\lambda\gg a$) скорость распространения становится постоянной и равной

$$v_0=a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Так что выведенное нами выражение с хорошей точностью дает величину скорости распространения волн в цепочке связанных шариков и для других длин волн.

Вернемся к твердому телу. Чем определяется скорость распространения в нем звуковых волн? Проведя аналогию с цепочкой шаров, можно понять, что скорость зависит от упругих свойств материала, массы атомов, из которых состоит вещество, и расстояния между ними. Чем меньше расстояние между атомами и чем больше их масса, тем больше плотность вещества ϱ. Жесткость k в нашей модели можно считать пропорциональной модулю Юнга E. Точная формула для скорости звука в твердом теле такова:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Например, для стали с помощью этой формулы получаем $v \approx 5000$ м/с. Так нам удалось разобраться в явлении распространения звука в упругих телах, то есть в распространении колебаний смещений атомов, из которых состоят эти тела.

В пространстве могут распространяться колебания и других физических величин. Если периодически изменяются значения напряженности электрического и индукции магнитного полей, то говорят, что распространяется электромагнитная волна. Могут распространяться колебания температуры — температурные волны, колебания индукции магнитного поля в веществе — волны намагничивания и т. д. Образно говоря, все здание современной физики пронизывают разные типы волн.

Приложение

Представим себе, что пружина надета на стержень AB, расположенный по диаметру кольца (рис. 7). Один конец пружины связан с шариком, а второй закреплен у края стержня A. Шарик может свободно перемещаться вдоль стержня, причем в состоянии равновесия он находится в центре кольца O. Приведем кольцо во вращение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω_0. Тогда шарик отклонится от центра. Если его смещение равно r, то со стороны пружины на шарик будет действовать сила, равная по закону Гука $F = k_0 r$ и направленная к центру кольца. Согласно второму закону Ньютона, эта сила должна создавать центростремительное ускорение $a_ц = \omega_0^2 r$:

$$m\omega_0^2 r = k_0 r.$$

Следовательно, для того чтобы шарик находился в устойчивом состоянии при вращении кольца, необходимо, чтобы скорость вращения была равна $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$.

При этом проекция шарика на неподвижную ось совершает гармоническое колебание с циклической частотой, равной угловой скорости вращения. Например, $x = r \sin \omega_0 t$. Таким образом, частота гармонических колебаний шарика массой m на пружинке жесткости k_0 определяется формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}.$$

Упражнения

1. «Почувствовать», что такое волна, можно, сделав следующее упражнение. Встаньте в круг, возьмитесь за руки и пусть один из вас присядет и выпрямится, следующий за ним сделает это с некоторым запозданием, следующий — с бо́льшим запозданием и т. д. Тогда по кругу побежит волна. От чего зависит скорость распространения такой волны?

2. Длина воздушной линии передачи $l = 3000$ км. Частота напряжения $\nu = 50$ Гц. На какую долю периода сдвинуты колебания напряжения в начале и конце этой линии? Найдите также сдвиг фазы.

3. Оцените время соударения τ стальных шариков, имеющих диаметр $d = 0{,}01$ м. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2.

4. Для создания сильных магнитных полей П. Л. Капица использовал следующую установку. Ротор генератора, вращающийся в магнитном поле статора, резко останавливается. При этом в роторе наводилась большая ЭДС индукции. Ротор был замкнут на катушку с малым сопротивлением, так что в цепи возникал сильный импульс тока, создающий в катушке рекордное по тем временам магнитное поле (с индукцией около 30 Тл). Почему катушку, в которой находился исследуемый образец, приходилось помещать далеко от генератора? Оцените требуемое минимальное расстояние l между генератором и катушкой, если опыт длился $\Delta t = 0{,}01$ с, а пол в лаборатории — бетонный.

5. Модель молекулы углекислого газа CO_2 — три шарика, соединенных пружинками и расположенных в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать колебания разных типов, показанные на рисунке 8. Найти отношение частот этих колебаний.

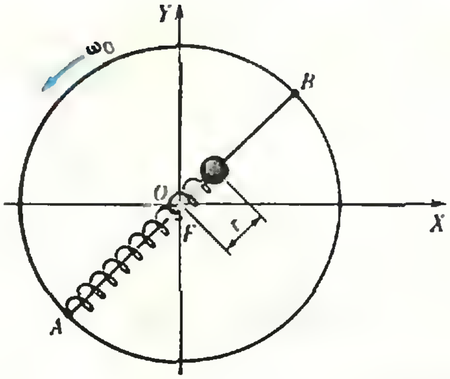


Рис. 7.

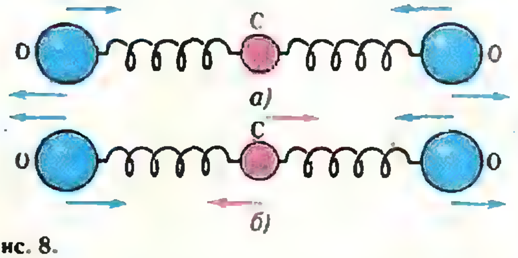


Рис. 8.

Б. Мартынов

О максимумах функции Ван-дер-Вардена

Функция, которой мы займемся

Школьники девятого и десятого классов знают, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 19). Знают они и то, что обратное не верно: например, функция $y=|x|$ непрерывна при $x=0$ (и в любой другой точке), но не имеет производной при $x=0$. Вообще, всякая функция, график которой в некоторой точке имеет «уголок», не дифференцируема в этой точке. Ясно, что легко построить функцию, которая на отрезке, скажем, $[0; 1]$ имеет бесконечное количество «уголков» (на рисунке 1 изображен кусок графика такой функции; полностью его нарисовать, конечно, невозможно).

Однако все такие функции, а также другие известные вам непрерывные функции все-таки дифференцируемы в «большинстве» точек.

Долгое время после изобретения дифференциального исчисления математики думали, что непрерывные функции являются, как правило, дифференцируемыми. Поэтому, когда в шестидесятых годах прошлого века немецкий математик Карл Вейерштрасс опубликовал пример *функции, непрерывной в каждой точке прямой и не имеющей производной ни в одной точке**), в математическом мире возник переполох.

«Каким образом интуиция могла обманывать нас до такой степени?» — спрашивал французский математик Анри Пуанкаре. Еще энергичнее реагировал французский математик Шарль Эрмит, сказавший, что он «с ужасом и омерзением отворачивается от этой жалкой язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной».

Пример Вейерштрасса был весьса сложным. Значительно более простой пример уже в нашем веке построил голландский математик Б. Л. Ван-дер-Варден. Функцией Ван-ден-Вардена мы и займемся.

Мы начнем ее построение с функции φ_0, график которой показан на рисунке 2. Функция φ_0 непрерывна в каждой точке прямой и периодическая (с периодом 1), $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant \frac{1}{2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, график функции φ_0 симметричен относительно любой вертикальной прямой вида $x=\frac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. В точках $x=\frac{k}{2}$ функция φ не дифференцируема.

Функция $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\varphi_0(2x)$ (ее график показан синим цветом на рисунке 3*)) не имеет производной в точках $x=\frac{k}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$, функция $\varphi_2(x)=\frac{1}{2^2}\varphi_0(2^2x)$ («синий график»

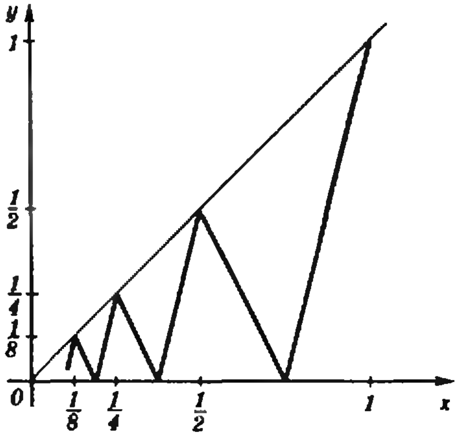


Рис. 1.

---

*) Первый пример такого рода лет за сорок до Вейерштрасса построил чешский математик и философ Бернгард Больцано, но его пример стал известен позже вейерштрассовского.

*) На этом и следующих рисунках графики рисуются на отрезке $[0; 1]$, но функции считаются определенными на всей прямой: вне отрезка $[0; 1]$ они продолжаются «по периодичности» (с периодом 1).

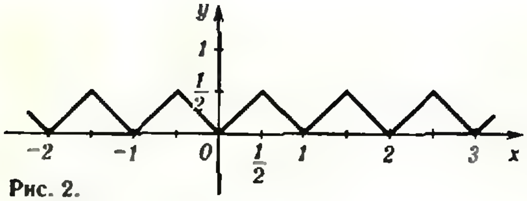


Рис. 2.

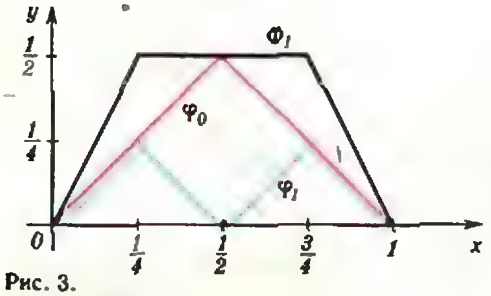


Рис. 3.

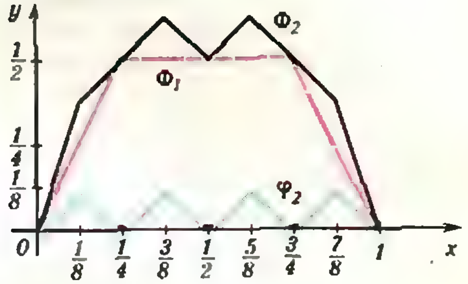


Рис. 4.

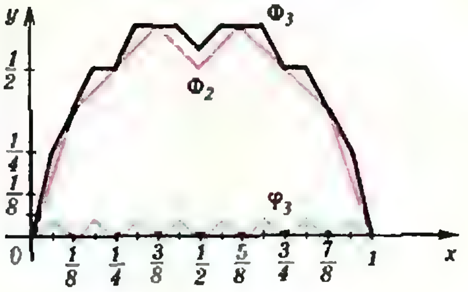


Рис. 5.

на рисунке 4) — в точках $x=\frac{k}{8}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Для любого $n\in\mathbf{N}$ положим $\varphi_n(x)=\frac{1}{2^n}\varphi_0(2^nx)$ (на рисунке 5 синим цветом показан график функции φ_3). Функция φ_n непрерывна в каждой точке прямой и не дифференцируема при $x=\frac{k}{2^{n+1}}$ $(k\in\mathbf{Z})$. Кроме того, $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

Мы видим, что точки недифференцируемости функций φ_n с увеличением n располагаются все гуще и гуще.

А что, если все функции φ_n сложить? Есть основания надеяться, что «сумма» уж во всяком случае будет непрерывна в каждой точке и не дифференцируема в точках вида $x=\frac{k}{2^n}$ $(k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N})$. К сожалению, мы не знаем, что такое сумма бесконечного числа слагаемых.

Поэтому мы поступим так: образуем последовательность функций

$$\Phi_n(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)$$

(таким образом, $\Phi_{n+1}(x)=\Phi_n(x)+\varphi_{n+1}(x)$; см. рис. 3—5) и докажем, что при любом x существует $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$.

Для доказательства нам понадобится теорема Вейерштрасса, утверждающая, что монотонная ограниченная последовательность имеет предел («Алгебра и начала анализа 9», п. 32).

Из $\varphi_{n+1}(x)\geqslant0$ следует $\Phi_{n+1}(x)\geqslant\Phi_n(x)$ — последовательность $(\Phi_n(x))$ монотонна. Поскольку

$$\Phi_n(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1,$$

последовательность $(\Phi_n(x))$ ограничена. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ существует. Обозначим этот предел через $\Phi(x)$. Таким образом, на всей числовой оси определена функция Φ. Она периодическая (с периодом 1), $0\leqslant\Phi(x)\leqslant1$ при всех $x\in\mathbf{R}$, график функции Φ симметричен относительно любой прямой $x=\frac{k}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ — все это легко следует из свойств функции φ_0 и свойств предела. Построить график функции Φ невозможно: на рисунках 3—5 видно, как «накапливаются» точки, в которых график функции Φ_n имеет «уголок», то есть точки, где эти функции не имеют производной.

Непрерывность построенной функции

Функция Φ непрерывна в каждой точке прямой.

Интуитивно это довольно ясно: если бы у Φ в некоторой точке x_0 был разрыв, то при достаточно большом

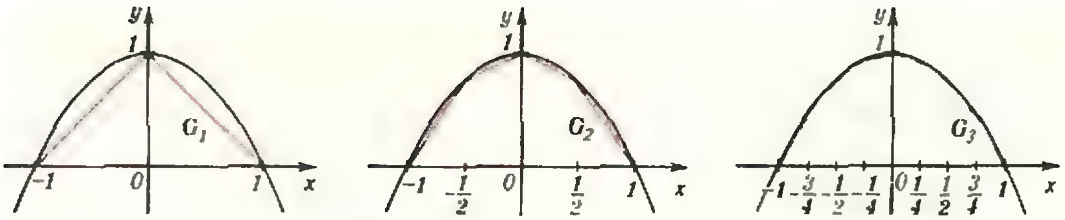


Рис. 6.

$n \in \mathbf{N}$ примерно такой же разрыв был бы в точке x_0 у Φ_n, а Φ_n непрерывна на всей прямой. Приводимое ниже доказательство уточняет эти соображения.

Изучим сначала разность $r_n(x) = \Phi(x) - \Phi_n(x)$ (здесь x фиксировано, n — переменная).

$$\Phi_{n+m}(x) - \Phi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots \\ \ldots + \varphi_{n+m}(x).$$

Ясно, что

$$0 < \Phi_{n+m}(x) - \Phi_n(x) < \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \ldots + \\ + \frac{1}{2^{n+m+1}} = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_{n+m}(x) = \Phi(x)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi_n(x)$.

$$0 < r_n(x) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Теперь можно перейти к доказательству непрерывности функции Φ в произвольной точке $x_0 \in \mathbf{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности

$$|\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)| = |\Phi_n(x_0+h) + r_n(x_0+h) - \\ - \Phi_n(x_0) - r_n(x_0)| < \\ < |\Phi_n(x_0+h) - \Phi_n(x_0)| + |r_n(x_0+h)| + \\ + |r_n(x_0)|,$$

Но $|r_n(x_0)| < \frac{1}{2^{n+1}}$ и $|r_n(x_0+h)| < \frac{1}{2^{n+1}}$; поэтому

$$|\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)| < \\ < |\Phi_n(x_0+h) - \Phi_n(x_0)| + \frac{1}{2^n}.$$

При достаточно большом n

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция Φ_n, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна в точке x_0. Следовательно, за счет выбора $\delta > 0$ можно добиться того, что при $|h| < \delta$

$$|\Phi_n(x_0+h) - \Phi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При выбранном δ

$$|\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)| < \varepsilon,$$

а это и доказывает непрерывность функции Φ в точке x_0.

Недифференцируемость построенной функции

Функция Φ не дифференцируема ни в одной точке прямой.

На первый взгляд это может показаться очевидным: с ростом n множество точек недифференцируемости функции Φ_n становится все гуще и гуще, поэтому естественно ожидать, что «в пределе», то есть для функции Φ, оно заполнит всю прямую. Однако это наивное рассуждение неверно, как показывает пример функции

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x),$$

где функции G_1, G_2, G_3 показаны на рисунке 6. Очевидно, $G(x) = 1 - x^2$ — функция, дифференцируемая в любой точке.

Доказывая от противного, допустим, что для некоторого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ существует $\Phi'(x_0)$.

«Зажмем» x_0 в последовательности двоичных приближений по недостатку и по избытку:

$$\frac{s_k}{2^{k+1}} < x_0 < \frac{s_k+1}{2^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ s_k \in \boldsymbol{Z}).$$

Положим $\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}}$, $\beta_k = \frac{s_k+1}{2^{k+1}}$. Тогда

$$\alpha_k \leqslant x_0 < \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = x_0. \tag{2}$$

Из (1)

$$0 < \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k} < 1$$

$$0 < \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} < 1.$$

Отсюда, из (2) и из легко проверяемого тождества

$$\frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} - \Phi'(x_0) = \\ = \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k}\left[\frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(x_0)}{\beta_k - x_0} - \Phi'(x_0)\right] + \\ + \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}\left[\frac{\Phi(x_0) - \Phi(\alpha_k)}{x_0 - \alpha_k} - \Phi'(x_0)\right]$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \Phi'(x_0).$$

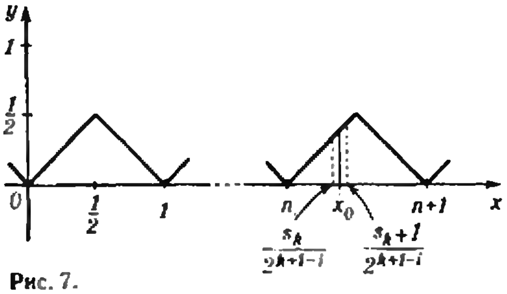


Рис. 7.

Покажем теперь, что на самом деле $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не существует — это и будет желанное противоречие. Из определения функции Φ_n

$$\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

При $i>k$ $2^{i-k-1}\in Z$. Поэтому при таких i

$$\varphi_0(2^i\alpha_k)=\varphi_0(2^{i-k-1}s_k)=0,$$
$$\varphi_0(2^i\beta_k)=\varphi_0(2^{i-k-1}(s_k+1))=0.$$

Значит,

$$\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не зависит от n. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

При $i\leqslant k$

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$
$$=\frac{\varphi_0\left(\frac{s_k+1}{2^{k+1-i}}\right)-\varphi_0\left(\frac{s_k}{2^{k+1-i}}\right)}{\frac{1}{2^{k+1-i}}}.$$

Но функция φ_0 на отрезке $\left[\frac{s_k}{2^{k+1-i}};\frac{s_k+1}{2^{k+1-i}}\right]$ является линейной (рис. 7). Отношение в правой части представляет из себя угловой коэффициент соответствующей прямой, то есть оно равно $+1$ или -1. Значит,

$$\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=p\cdot 1+q\cdot(-1),$$

где $p+q=k+1$. Число $p\cdot 1+q\cdot(-1)$ имеет ту же четность, что и $p\cdot 1+q\cdot(-1+2)=$ $=p\cdot 1+q\cdot 1=(p+q)\cdot 1=(k+1)\cdot 1=k+1$. Следовательно, отношение $\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ четно при нечетном k и нечетно при четном k. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не существует.

Отыскание максимума

Докажем, что наибольшее значение $M=\max\limits_{R}\Phi(x)=\max\limits_{[0;\,1]}\Phi(x)$ равно $\frac{2}{3}$ и определим множество точек, где оно достигается*). Стандартный метод здесь не применим: не можем же мы приравнять к нулю производную, которой не существует.

$$\Phi_n(2x)=\varphi_0(2x)+\varphi_1(2x)+\ldots+$$
$$+\varphi_n(2x)=\varphi_0(2x)+\frac{1}{2}\varphi_0(2^2x)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2^n}\varphi_0(2^{n+1}x)=2\left[\frac{1}{2}\varphi_0(2x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^2}\varphi_0(2^2x)+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\varphi_0(2^{n+1}x)\right]=$$
$$=2[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_{n+1}(x)]=$$
$$=2[\Phi_{n+1}(x)-\varphi_0(x)]=$$
$$=2\Phi_{n+1}(x)-2\varphi_0(x).$$

Перейдем к пределу при $n\to\infty$:

$$\Phi(2x)=2\Phi(x)-2\varphi_0(x).\qquad(3)$$

Интересно отметить, что существует единственная неотрицательная на всей числовой прямой функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (3), — попробуйте доказать это самостоятельно.

Из того, что 1 — период функции Ф, следует, что $\bar{x}$ *тогда и только тогда является точкой максимума функции* Ф, *когда точкой максимума является дробная часть* $\{\bar{x}\}\in[0;1]$.

Поэтому займемся множеством E точек максимума на отрезке [0; 1]. Пользуясь симметрией графика функции Ф относительно прямой $x=\frac{1}{2}$, а также равенством (3), найдем $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Докажем, что $E\subset\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$. В самом деле, пусть $\tilde{x}\in E$ и $\tilde{x}\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда из $\Phi(\tilde{x})=M$, $\Phi(2\tilde{x})\leqslant M$, $\frac{2}{3}=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant M$ и из равенства (3) следует

---

*(В дальнейшем мы, расходясь с учебником, будем называть такие точки *точками максимума*, а само наибольшее значение — *максимумом*.

$$\Phi(2\bar{x})=2\Phi(\bar{x})-2\varphi_0(\bar{x})=$$
$$=2\Phi(\bar{x})-2\bar{x}=2M-2\bar{x}\leqslant M$$
$$\bar{x}\geqslant\frac{M}{2}\geqslant\frac{1}{3}.$$

Из симметрии графика функции Φ относительно прямой $x=\frac{1}{2}$ следует, что на промежутке $\left]\frac{2}{3};1\right]$ точек максимума нет.

Докажем теперь, что $M=\frac{2}{3}$. Снова применим равенство (3):

$$\Phi(4x)=2\Phi(2x)-2\varphi_0(2x)=$$
$$=2[2\Phi(x)-2\varphi_0(x)]-2\varphi_0(2x)=$$
$$=4\Phi(x)-4\varphi_0(x)-2\varphi_0(2x)$$
$$\Phi(x)=\varphi_0(x)+\frac{1}{2}\varphi_0(2x)+$$
$$+\frac{1}{4}\Phi(4x)=\Phi_1(x)+\frac{1}{4}\Phi(4x).$$

Функция Φ_1 на отрезке $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$ постоянна и равна $\frac{1}{2}$ (рис. 3), поэтому на этом отрезке

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Phi(4x). \qquad (4)$$

Поскольку $\bar{x}\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\subset\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$, к $\bar{x}$ можно применить равенство (4):

$$M=\Phi(\bar{x})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Phi(4\bar{x})\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}M$$
$$M\leqslant\frac{2}{3}.$$

Вспомнив, что $M\geqslant\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$, окончательно найдем $M=\frac{2}{3}$. Кроме того, $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

Для дальнейшего докажем, что *если $\bar{x}$ — точка максимума, то $4\bar{x}$ — точка максимума; если $4\bar{x}$ — точка максимума и $\{\bar{x}\}\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$, то $\bar{x}$ — точка максимума.* Для доказательства заметим, что равенство (4) верно для всех x, для которых $\{x\}\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$ (проверьте!). Пусть $\bar{x}$ — точка максимума. Тогда $\{\bar{x}\}\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\subset\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$. Значит,

$$\frac{2}{3}=M=\Phi(\bar{x})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Phi(4\bar{x})$$
$$\Phi(4\bar{x})=\frac{2}{3}=M.$$

Пусть теперь $4\bar{x}$ — точка максимума и $\{\bar{x}\}\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$. Тогда $\Phi(4\bar{x})=M=\frac{2}{3}$ и

$$\Phi(\bar{x})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Phi(4\bar{x})=\frac{2}{3}=M.$$

Множество точек максимума

Выясним структуру множества E.

Наверное, если бы Эрмит знал, как сложно оно устроено, он отвернулся бы от функции Ван-дер-Вардена с еще большим омерзением. С другой стороны, кто знает — быть может, красивое и тонкое строение этого множества привлекло бы Эрмита к исследованию недифференцируемых функций.

Две точки множества E мы знаем: $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; мы знаем также, что $E\subset\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Далее, множество E замкнуто. Это означает следующее: если имеется сходящаяся последовательность из точек множества E, то предел этой последовательности также принадлежит E. Докажем это. Пусть $x_n\in E$ $(n=1,2,3,\ldots)$, то есть $\Phi(x_n)=M$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$; тогда из непрерывности функции Φ в точке $\bar{x}$ следует, что $\Phi(\bar{x})=\Phi(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(x_n)=M$, то есть $\bar{x}\in E$.

Из доказанного в конце предыдущего пункта и того, что 1 — период функции Φ, следует, что если x — точка множества E, то и точки $\frac{1}{4}+\frac{x}{4}=\frac{x+1}{4}$, $\frac{2}{4}+\frac{x}{4}=\frac{x+2}{4}$ принадлежат E. Таким образом, исходя из точек $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, можно построить много точек множества $E:\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$ и т. д.

Легко видеть, что все числа вида

$$x=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\ldots+\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{4^n}\cdot\frac{a_{n+1}}{3},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — либо единицы, либо двойки, являются элементами множества E. Поскольку

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots,$$

такое x можно представить в виде

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+2}} + \ldots$$

или, по аналогии с десятичными дробями, в виде бесконечной периодической четверичной дроби с периодом длины 1:

$$x = 0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+1}\ldots = \\ = 0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\alpha_{n+1}).$$

Так как множество E замкнуто, любое число

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{4^{n+2}} + \ldots$$

где α_i — либо единицы, либо двойки, принадлежит множеству E. В самом деле, для каждого такого x можно найти последовательность (x_n) элементов из E, сходящуюся к x; например, если

$$x_n = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \left(0 < x - x_n < \frac{1}{4^{n+1}}\right)$.

Таким образом, множество E содержит все числа, в представлении которых $0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ в виде бесконечной четверичной дроби все цифры α_i — либо единицы, либо двойки (на рисунке 8 изображены четверичные разложения чисел $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{11}{12}$).

Докажем теперь, что других чисел E не содержит. Пусть в четверичной записи числа $x \in E$ на каком-либо месте после запятой имеется цифра 0, то есть $x = 0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0 \alpha_{n+2}\ldots$; тогда

$$\{4^n x\} = 0{,}0\alpha_{n+2}\ldots \in E.$$

Но $0,\ 0\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots < 0{,}033\ldots = 3\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{1}{4}$ и, значит, точка $\{4^n x\}$ не принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$, содержащему E.

Если в четверичной записи числа $x \in E$ имеется цифра 3, то есть $x = 0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 3 \alpha_{n+2}\ldots$, то

	$\frac{1}{12}$	$= 0{,}0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$
	$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$	$= 0{,}0\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ldots$
	$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$	$= 0{,}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$
V	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$	$= 0{,}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$
V	$\frac{5}{12}$	$= 0{,}1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ldots$
	$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$	$= 0{,}2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$
V	$\frac{7}{12}$	$= 0{,}2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$
V	$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$	$= 0{,}2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ldots$
	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$	$= 0{,}3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$
	$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$	$= 0{,}3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots$
	$\frac{11}{12}$	$= 0{,}3\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ldots$

Рис. 8.

$$\{4^n x\} = 0{,}3\alpha_{n+2}\ldots \in E,$$

а этого быть не может, так как $0{,}3\alpha_{n+2}\ldots > 0{,}3 = \frac{3}{4}$.

Геометрически множество E может быть получено следующим образом: разделим отрезок $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ на 4 одинаковые части и выбросим внутренние точки двух средних частей и середину отрезка (рис. 9). Каждый из оставшихся отрезков опять разделим на 4 одинаковые части и снова выбросим внутренние точки двух средних частей и середину отрезка, и так далее. То, что остается после всех выбрасываний, — это множество точек, в четверичной записи которых есть лишь цифры 1 и 2 (докажите самостоятельно), то есть множество E.

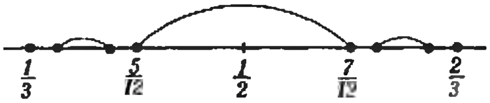


Рис. 9.

Приложение

Редакция предлагает пример всюду непрерывной, нигде не дифференцируемой функции, который построил тбилисский десятиклассник Лаша Эпремидзе (см. «Квант», 1982, № 4, «XIII конференция юных математиков в Батуми»).

Искомая функция f опять получается как предел некоторой последовательности функций $\{f_n\}$:

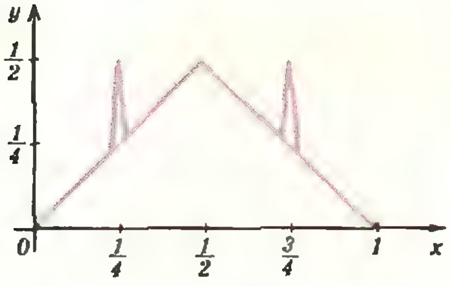


Рис. 10.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Функции f_1 совпадает с функцией φ_0 из статьи (рис. 2). Функция f_2 получается (на отрезке [0; 1]) из функции f_1 «выпячиванием» в точках $\frac{m}{2^2}$ $(m=1, 3)$ «уголков», для которых

$$f_2\left(\frac{m}{2^2}\right)=f_1\left(\frac{m}{2^2}\right)+\frac{1}{2^2}$$

и модуль угловых коэффициентов сторон больше 2 (рис. 10). Функция f_{k+1} получается (на отрезке [0; 1]) из функции f_k «выпячиванием» в точках $\frac{m}{2^{k+1}}$ $(m=1,3,5, \ldots, 2^{k+1}-1)$ «уголков», для которых

$$f_{k+1}\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)=f_k\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}$$

и модуль угловых коэффициентов сторон больше $k+1$.

Докажите нужные свойства функции f!

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!

В задаче 3 варианта I Московского электротехнического института связи («Квант», 1982, № 1) предлагалось решить неравенство

$$\frac{9x-15}{19}<\int_0^x \frac{dy}{(y+1)^2}-1.$$

Я полагаю, что ответ $]-\infty; -1[$, указанный в «Кванте» (с. 63), не верен. Правда, формальное интегрирование дает этот ответ, но ведь при любом $x_0<-1$ подынтегральная функция $\frac{1}{(x+1)^2}$ не является непрерывной на отрезке $[x_0; 0]$ (она разрывна при $x=-1$); поэтому интеграл $\int_0^{x_0} \frac{dy}{(y+1)^2}$ не существует. Прав ли я?

Н. П. Ратников,
учитель математики

Вы правы: по определению интеграла, данному в школьном учебнике («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 60), для существования интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ требуется, чтобы подынтегральная функция f была непрерывна на отрезке с концами a, b (то есть на $[a; b]$ при $a<b$ и на $[b; a]$ при $a>b$).

Ответ, указанный в «Кванте», получается при чересчур формальном интегрировании, не учитывающем условий, при которых верна формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Эта формула верна, если функция f непрерывна на $[a; b]$ и $F'(x)=f(x)$ всюду на $[a; b]$. Поэтому

$$\int_0^x \frac{dy}{(y+1)^2}=-\frac{1}{y+1}\Big|_0^x \qquad (*)$$

только при $x>-1$ и данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{9x-15}{19}<-\dfrac{1}{y+1}\Big|_0^x-1 \\ x>-1. \end{cases}$$

Правильный ответ в задаче: $\varnothing$.

Между прочим, из (*) следует

$$\int_x^0 \frac{dy}{(y+1)^2}=\frac{1}{x+1}-1.$$

При $x<-1$ получаем парадоксальный результат: интеграл от положительной функции, то есть вроде бы площадь, отрицателен (напомним, что $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь при $a<b$ и $f(x)\geqslant 0$ на $[a; b]$).

Для тех, кто знаком с понятием несобственного интеграла, заметим, что при $x_0<-1$ интеграл $\int_0^{x_0} \frac{dy}{(y+1)^2}$ не существует: он расходится.

Я. Амстиславский

Необычные явления вокруг обычных источников света

Наверное, каждому доводилось наблюдать так называемые венцы — разноцветные кольца, окружающие удаленный источник света, например Солнце, Луну или уличный фонарь. Их возникновение связано с явлением дифракции света — огибания световыми волнами различных препятствий.

О дифракционных венцах написано немало, и это не удивительно. Они очень красивы, получить их довольно несложно и с их помощью можно проводить весьма тонкие измерения, причем в условиях скромной домашней лаборатории. Можно ожидать, что и читателям «Кванта» эта тема будет небезынтересной.

Что представляет собой изображение звезды в телескопе?

Представьте себе, что вы смотрите в телескоп на звездное небо. Из геометрической оптики известно, что параллельный пучок света, идущий от бесконечно удаленного источника, попав в объектив, должен сфокусироваться в одном из побочных фокусов объектива, создав там точечное изображение источника. Однако в действительности это не так.

Из-за дифракции света на краях оправы объектива изображение звезды получается в виде светлого кружка, окаймленного цветными кольцами (рис. 1). Оказывается, размер полученной дифракционной картины существенно зависит от диаметра оправы объектива. Если с помощью диафрагмы уменьшить диаметр светового пучка, попадающего в объектив, светлое пятно и окружающие его кольца увеличиваются (рис. 2).

Чем отличаются множество отверстий от одного и непрозрачный шарик от прозрачного отверстия?

А что, если диафрагму заменить экраном с большим числом отверстий, имеющих строго одинаковые размеры, но распределенных по поверхности экрана совершенно хаотически (рис. 3)?

В этом случае происходит наслоение огромного числа одинаковых первичных дифракционных картин, и суммарная картина сильно изменяется. Во-первых, она гораздо сильнее освещена в целом. Во-вторых, появляется дифракционный узор в виде слабо заметной лучистой структуры. Наконец, в-третьих, в центре появляется изображение источника света. Такую картину и называют венцом.

Описанный экран для получения венцов изготовить не так-то просто, да в этом и нет необходимости. Оказывается, в дифракционной картине не произойдет заметных изменений, если непрозрачный экран с множеством одинаковых круглых отверстий заменить прозрачным экраном, покрытым большим числом одинаковых непрозрачных шариков аналогичных размеров. В качестве подобного экрана с успехом может быть использо-

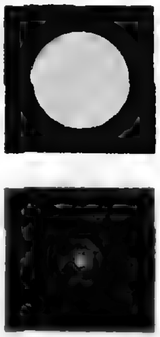


Рис. 1.

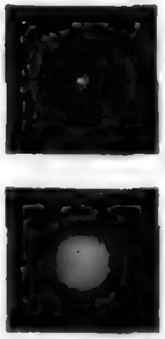


Рис. 2.

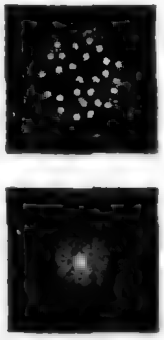


Рис. 3.

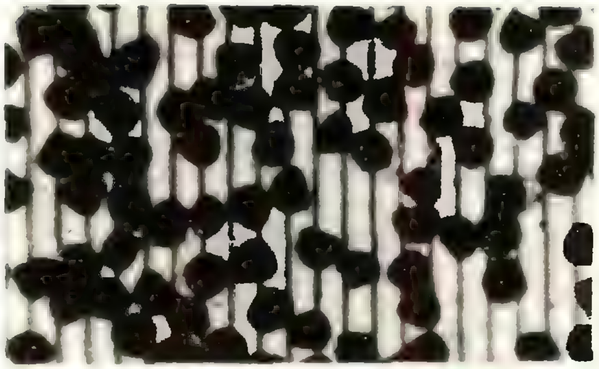


Рис. 4.

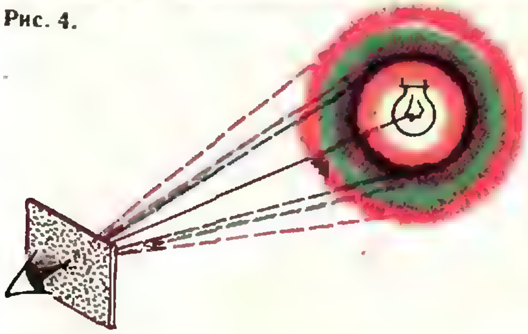


Рис. 5.

вана обыкновенная стеклянная пластинка, запыленная ликоподием — желтым порошком из непрозрачных шарообразных спор плауна (рис. 4; здесь приведена микрофотография дифракционной решетки с периодом 0,02 мм, покрытой ликоподием).

Как изготовить хороший препарат?

Для приготовления препарата вам понадобятся две стеклянные пластинки размером в четверть тетрадного листа и ликоподий. Ликоподий можно купить в аптеке, а в качестве пластинок удобно использовать отмытые от эмульсии фотопластинки размером 9×12 см.

На поверхность чистой пластинки наносят капельку машинного или растительного масла (можно крупицу жира, маргарина, сливочного масла или вазелина — что попадет под руку) и размазывают ее тонким слоем. Затем чистой тряпочкой аккуратно протирают смазанную поверхность до прозрачности. Остающийся при этом тончайший слой жира служит клейкой основой для удержания частиц покрытия. На обработанную поверхность насыпают небольшое количество (с наперсток) ликоподия, пластинку наклоняют и, постукивая по краю, добиваются ссыпания порошка к ее основанию. На пластинке остается широкий след в виде достаточно плотного и однородного слоя ликоподия. Затем изменяют наклон пластинки и добиваются ссыпания порошка в другом направлении. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока вся поверхность пластинки не окажется покрытой подобным слоем. Затем пластинку ставят ребром на стол, положив под нее лист бумаги, и, постукивая нижним краем пластинки по столу, избавляются от излишков ликоподия. Правильно запыленная пластинка не должна быть ни слишком плотной, ни слишком прозрачной. По виду она напоминает матовое стекло средней плотности.

Если покрытие оказалось неудачным — не беда. Его легко стереть и воспроизвести заново. Однако обращаться с ним надо аккуратно.

При желании сохранить препарат для многократного пользования поступают следующим образом. Запыленную пластинку кладут на стол покрытием вверх, на нее накладывают бумажную рамку шириной 0,5—1 см, вырезанную по размерам пластинки, покрывают второй (чистой) пластинкой тех же размеров и оклеивают по краям полосками черной бумаги. Полученный прибор можно с успехом использовать в любой момент, когда появится желание полюбоваться красивой дифракционной картиной или показать ее друзьям.

Дифракционные венцы — картина впечатляющая

Если через запыленную пластинку посмотреть на какой-нибудь яркий источник света не очень больших угловых размеров, то можно наблюдать описанные выше дифракционные венцы (рис. 5). При этом не нужны никакие оптические приборы: роль объектива играет хрусталик глаза. Дифракционная картина создается на сетчатке глаза, но воспринимается нами в той плоскости, в которой виден источник света.

Источником может быть диск Луны на чистом ночном небе, наблюдаемый с улицы или через окно комнаты

Дифракционные венцы, наблюдаемые вокруг различных удаленных источников света.

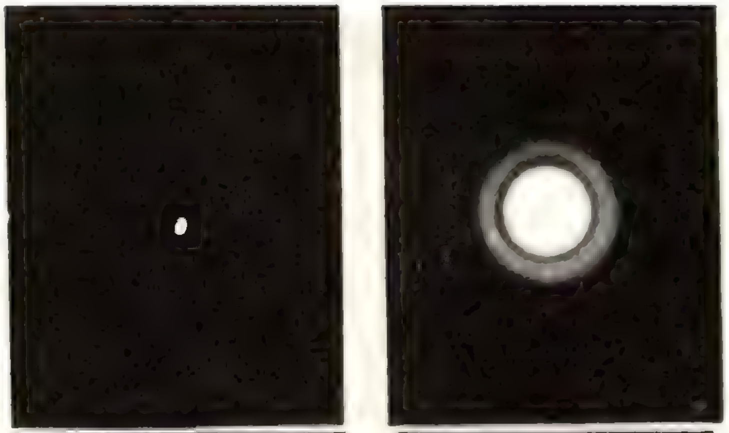


Рис. 6. Диск Луны и его дифракционное изображение.

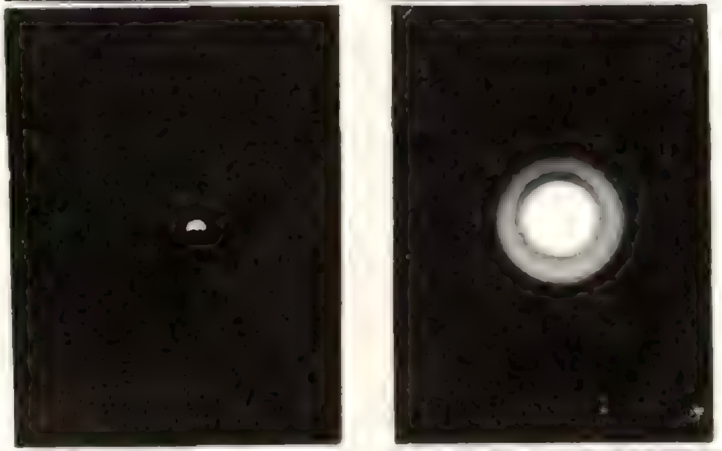
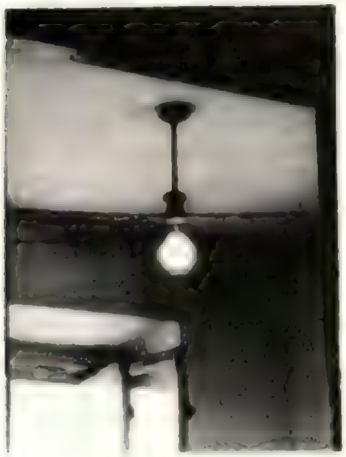
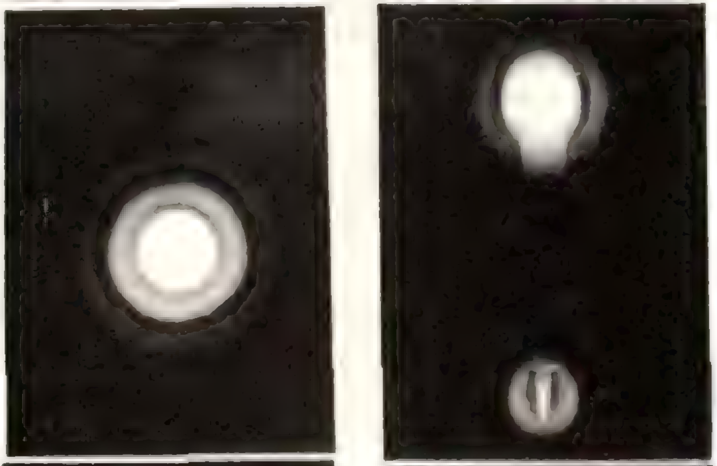


Рис. 7. Венцы вокруг уличного фонаря.





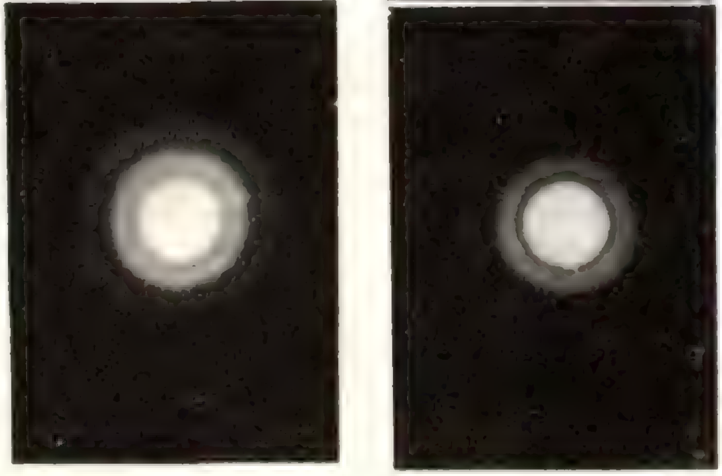


Рис. 8. Лампа накаливания и изображение ее раскаленной спирали.

Рис. 9. Дифракционное изображение пламени свечи.

Рис. 10. Венцы вокруг Солнца.

при выключенном свете (рис. 6). Или уличный фонарь, удаленный на несколько десятков метров (рис. 7). Или раскаленная спираль лампы накаливания, наблюдаемая в комнате с расстояния 2—3 м (рис. 8); лучше, если лампа расположена так, что луч зрения оказывается в плоскости спирали. Или, наконец, пламя свечи (или даже — спички) на расстоянии вытянутой руки в тёмном помещении (рис. 9; внизу видно отражение пламени от поверхности полированного стола).

Можно любоваться и венцами вокруг Солнца. Если светило находится достаточно низко над горизонтом, его рассматривают непосредственно через пластинку (рис. 10, *а*; восходящее Солнце сфотографировано в проеме между домами). В случае Солнца, высоко поднятого над горизонтом, к запыленной пластинке надо добавить засвеченную фотопластинку или закопченное стекло (рис. 10, *б*).

Все фотографии, приведенные на рисунках 6—10, были сделаны обычным фотоаппаратом через красное стекло, запыленное ликоподием. Гораздо красивее дифракционная картина, наблюдаемая в белом свете. В центре картины находится светлый круг с оранжево-красным окаймлением на периферии и изображением источника света в средней части. Этот круг виден под углом около 3°, что почти в шесть раз больше углового диаметра Луны или Солнца (30′). К центральному кругу прилегают два ярких окрашенных дифракционных кольца. Присмотревшись, можно увидеть лучистую структуру картины; более отчетливо она проявляется при меньших размерах источника света. Любопытно, что, если отвлечься от этой структуры и от наличия изображения источника, наблюдаемая картина очень напоминает дифракционное изображение звезды в телескопе, правда воспроизведенное с огромным увеличением.

Насладившись красивыми картинками дифракционных венцов, подумайте над природой этого явления. Может быть, в этом вам помогут следующие книги:

1. М. Миннарт. «Свет и цвет в природе». (М., «Наука», 1969, с. 222.)
2. Р. В. Поль. «Оптика и атомная физика». (М., «Наука», 1966, с. 149.)
3. «Опыты в домашней лаборатории». (М., «Наука», серия «Библиотечка «Квант», выпуск 4, с. 125.)

Приложение. Чему равна длина световой волны?

В самом начале статьи было сказано, что с помощью дифракционной картины можно проводить весьма тонкие измерения. Например — длины волны света. Покажем, как это можно сделать.

Как показывают наблюдения и расчеты, подавляющая часть света, проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого кружка (который обычно и принимают за дифракционное изображение источника). Размеры его связаны с диаметром отверстия d и длиной световой волны λ соотношением

$$d \sin \varphi = 1{,}22\, \lambda,$$

где φ — угловой радиус первого темного кольца, а значит — и центрального светлого кружка. Отсюда, зная d и φ, можно найти λ.

Это же соотношение справедливо и для дифракционной картины, полученной с помощью стеклянной пластинки, запыленной ликоподием. Диаметр d частиц ликоподия нетрудно оценить по микрофотографии дифракционной решетки с периодом 0,02 мм. Из рисунка 4 видно, что $d \approx 0{,}03$ мм $\approx 3 \cdot 10^{-5}$ м.

Для определения угла φ поступим следующим образом. Из черной бумаги изготовим диафрагму с тремя сделанными иглой проколами: центральным, диаметром 5—7 мм, и двумя боковыми, расположенными симметрично относительно центрального и удаленными друг от друга на заданное и точно вымеренное расстояние a, например $a = 3$ см.

В качестве источника света воспользуемся карманным фонариком. Прикроем его стекло сделанной диафрагмой так, чтобы центральное отверстие оказалось как раз напротив лампочки, и положим на него осколок красного стекла. Глядя на лампочку через запыленную пластинку, удалимся от источника на такое расстояние L, при котором первое темное кольцо видимой глазом дифракционной картины будет проходить через боковые проколы в диафрагме. В этом случае

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{a/2}{L} = \frac{a}{2L}$$

(мы воспользовались тем, что для малых углов синусы углов можно заменять их тангенсами).

Таким образом, длину волны λ можно вычислить по формуле

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{1{,}22} \approx \frac{da}{2{,}44L}.$$

Можно решить и обратную задачу. Полагая длину волны известной (для красного света $\lambda = 0{,}65$ мкм), нетрудно определить диаметр частиц ликоподия. Проделайте это самостоятельно.

задачник кванта

Задачи

М746 — М750; Ф758 — Ф762

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М746, М747» или «Ф758». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М746. Бумажный квадрат складывается пополам по некоторой прямой l, проходящей через его центр, в (невыпуклый) девятиугольник. Как нужно провести прямую l, чтобы:
а) полученный девятиугольник имел наибольшую площадь?
б)* В нем помещалась окружность наибольшего возможного радиуса (рис. 1)?

К. Вульфсон

М747. а) Сумма n чисел равна 0, сумма их модулей равна a. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше $2a/n$.
б)* Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ выбрана точка O так, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$ равна нулевому вектору, а сумма их длин равна d. Докажите, что периметр этого n-угольника не меньше $4d/n$.
в)* Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых n)?

В. Прасолов

М748. а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (*Внутренней областью параболы* мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола — см. рис. 2)
б)* В пространстве расположено несколько непересекающихся конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли все пространство. (*Конусом* мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)

О. Кузьминых

М749* а) Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2};$$

при каком условии это неравенство превращается в равенство?

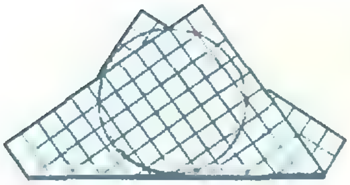


Рис. 1.

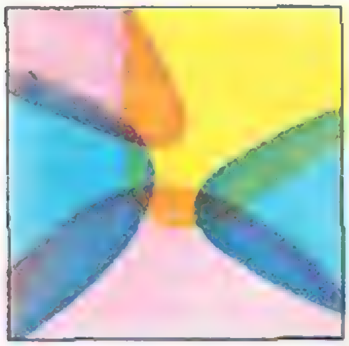


Рис. 2.

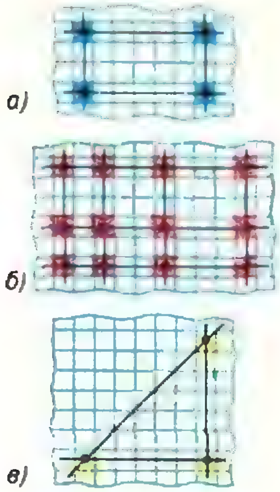


Рис. 3.

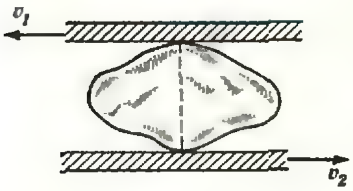


Рис. 4.

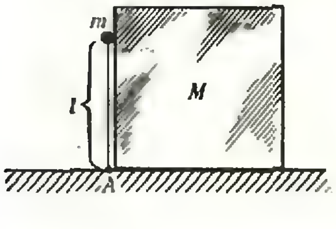


Рис. 5.

б) Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant 2,$$

причем равенство возможно только при $n=4$.
в) Докажите, что при $n>4$ неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком n число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

А. Прокопьев

М750. Докажите, что, как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в N цветов, найдутся

а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета (а стороны идут параллельно линиям сетки — по вертикальным и горизонтальным прямым — рис. 3, *а*);

б) l горизонтальных и m вертикальных прямых, которые пересекаются в центрах lm клеток одного цвета (l и m — любые натуральные числа — рис. 3, б);

в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого — центры клеток одного цвета, при $N=2$ (рис. 3, *в*);

г)* то же для $N=3$.

С. Беспамятных

Ф758. Жесткая заготовка зажата между двумя параллельными направляющими, движущимися в горизонтальном направлении со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 4). В некоторый момент времени точки касания заготовки с направляющими лежат на прямой, перпендикулярной векторам $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Какие точки заготовки имеют в этот момент скорости, равные по абсолютной величине v_1 и v_2?

С. Кротов

Ф759. Невесомый стержень длины l с небольшим грузом массы m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 5) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массы M. От небольшого толчка система приходит в движение. При каком соотношении между m и M стержень в момент «отрыва» от тела M будет составлять с горизонтом угол $\alpha=\pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость тела M? Трением пренебречь.

К. Сергеев

Ф760. В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1=20$ г гелия, влетает со скоростью $v=100$ м/с стальной шарик массы $m_2=1$ г. Найти изменение температуры в сосуде. Удары шарика о стенки сосуда и атомов о шарик считать абсолютно упругими.

Р. Александров

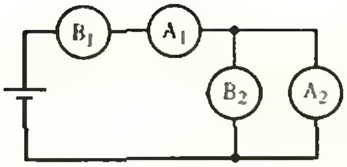


Рис. 6.

Ф761. Схему собирают из батарейки, двух одинаковых амперметров и двух одинаковых вольтметров (рис. 6). Амперметры A_1 и A_2 показывают, соответственно, $I_1 = 1{,}1$ мА, $I_2 = 0{,}9$ мА; вольтметр B_2 показывает $U_2 = 0{,}25$ В. Что показывает вольтметр B_1? Чему равно напряжение батареи?

З. Рафаилов

Ф762. На рисунке 7 приведена вольтамперная характеристика лампы накаливания, номинальное напряжение которой $U_н = 220$ В, номинальная мощность $P_н = 100$ Вт. Лампу подключают к сети переменного тока (220 В, 50 Гц) последовательно с конденсатором емкости $C = 10$ мкФ. Определить ток в лампе и напряжение на ней. Считать, что в течение периода сетевого напряжения температура нити практически не меняется.

А. Зильберман

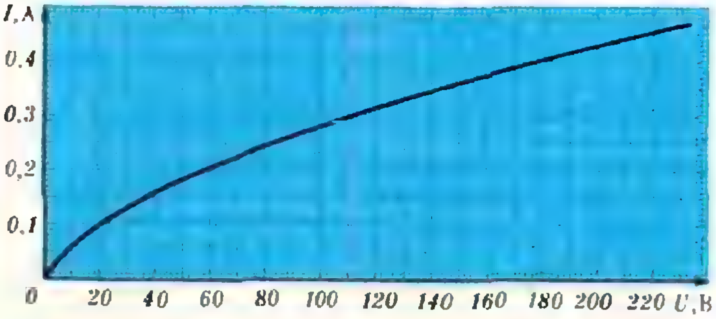


Рис. 7.

Problems

M746 — M750; P758 — P762

M746. A paper square is folded in half along a line l, passing through its centre, into a (non-convex) nine-sided polygon. How should the line l be chosen in order to:

a) make the area of the polygon maximal?

b)* construct a circle of maximal radius contained in the polygon (see figure Рис. 1)?

K. Vulfson

M747. a) The sum of n numbers is zero, the sum of their absolute values is a. Prove that the difference between the largest and smallest number is no less than $2a/n$.

b)* The point O is chosen inside the polygon $A_1A_2 ... A_n$ so that the sum of vectors $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + ... + \vec{OA_n}$ is the zero vector and the sum of their lengths is d. Prove that the polygon's perimeter is no less than $4d/n$.

c)* Can this estimate be improved (for certain n)?

V. Prasolov

M748. a) Can a finite number of parabolas be placed on the plane so that their inner domains cover the entire plane? (The *inner domain* of a parabola is the convex figure bounded by it — see figure Рис. 2).

b)* Several non-intersecting cones are placed in space. Show that they cannot be moved so as to cover the entire space. (By a *cone* here we mean the unbounded convex figure obtained by rotating an angle about its bissector).

O. Kuzminykh

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 31, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Моск-

ва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M749*. a) Prove that if x_1, x_2, x_3 are positive numbers, then

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}>\frac{3}{2};$$

under what conditions does this inequality become an equality?
b) Prove that if x_1, x_2, ..., x_n are positive numbers, then

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}>2,$$

the equality being possible only if $n=4$.
c) Prove that for $n>4$ the inequality in b) is exact in the sense that the number 2 in the right hand side cannot be replaced by a larger one for any n.

A. Prokopiev

M750. An infinite sheet of paper is divided into identical squares by horizontal and vertical lines. Each of the squares is painted in one of N colours. Prove that there exist
a) a rectangle with vertices in the centres of four squares of the same colour and sides parallel to those of the squares (see figure Рис. 3*а*);
b) l horizontal and m vertical lines which intersect in ml centres of squares of the same colour (l and m are arbitrary positive integers; figure Рис. 3*б*);
c) an isoceles right triangle whose vertices are centres of squares of the same colour, if $N=2$ (Рис. 3*в*);
d)* same question for $N=3$.

S. Bespamiatnykh

P758. A rigid sample is held between two parallel directing planes moving horizontally with velocities $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$ (see figure Рис. 4). At a certain moment of time the points where the sample touches the planes are on a line perpendicular to vectors $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$. What points of the sample will then have velocities whose absolute value is v_1 and v_2?

S. Krotov

P759. A. weightless rod of length L with a small mass m at its extremity is fixed by a hinge at the point A (see figure Рис. 5) and stands vertically touching a solid of mass M. A small push sets the system into motion towards the left. For what relation between m and M will the rod make an angle $\alpha=\pi/6$ with the horizontal direction when it "detaches" itself from the solid? What will the velocity of the solid be at that moment? Friction is negligible.

K. Sergeev

P760. A little steel ball of mass $m_2=1$g flies into a thermoisolated receptacle, containing $m_1=20$ g of helium, with velocity $v=100$m/s. Find the change of temperature in the receptacle. The reflections of the ball against the walls of the receptacle and against the atoms are assumed to be absolutely elastic.

R. Alexandrov

P761. An electric circuit consists of a battery, two identical amperemeters and two identical voltmeters (see figure Рис. 6). The amperemeters A_1 and A_2 show respectively $I_1=1.1$ mA, $I_2=0.9$ mA the voltmeter B_2 shows $U_2=0.25$V. What is the showing of the voltmeter B_1? The voltage of the battery?

Z. Rafailov

P762. The figure Рис. 7 shows the volt-ampere characteristic of an incandescent lamp whose nominal voltage is $U_н=220$V and nominal power $P_н=100$W. The lamp is connected in succession with a condensator of capacity $C=10\mu F$ to a household circuit (220 V, 50 Hz). Determine the current in the lamp and the voltage on it. It is assumed that during one period of the alternative current in the circuit the filament's temperature does not change.

A. Zilberman

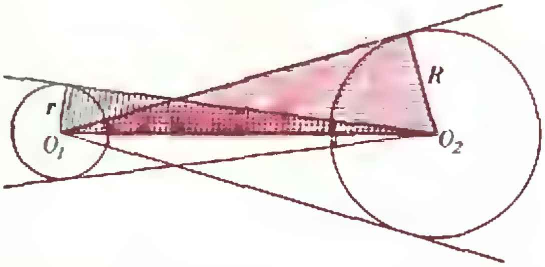
Решения задач

М706 — М710; Ф718 — Ф722

М706. *Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями (на рисунке эти хорды показаны красным цветом), имеют одинаковые длины.*

Из подобия соответствующих треугольников (см. рисунок) легко находим, что каждая хорда имеет длину $\frac{2Rr}{|O_1O_2|}$.

И. Клумова



◆

М707. *Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, где занимаются не менее 2/3 этого класса.*

Если в одном из кружков занимается весь класс, то все доказано. Пусть ни в одном из кружков весь класс целиком не занимается. Рассмотрим один из кружков (назовем его *кружком № 1*) и одного из учеников, занятого в этом кружке (назовем его *учеником A*). Поскольку в кружке № 1 весь класс целиком не занят, найдется ученик B, не занимающийся в этом кружке. По условию задачи существует кружок № 2, где занимаются вместе ученики A и B. Поскольку и этот кружок не охватывает весь класс, существует ученик C, который в него не входит. Но ученик A занимается только в кружках № 1 и № 2, поэтому ученик C занимается вместе с учеником A в кружке № 1. Тогда должен существовать кружок № 3, где занимаются вместе ученики B и C. Рассмотрим любого другого ученика D (если в классе есть еще ученики, кроме учеников A, B и C). Если бы ученик D не занимался ни в кружке № 1, ни в кружке № 2, то для него не нашлось бы общего кружка с учеником A. Если бы D не занимался в кружках № 1 и № 3, то он не занимался бы вместе с учеником C. Наконец, если бы D не занимался в кружках № 2 и № 3, то у него не было бы общего кружка с учеником B. Таким образом, каждый ученик класса должен быть занят в двух из трех рассмотренных кружков. Обозначив через y_1, y_2 и y_3 число учеников в кружках № 1, № 2 и № 3 соответственно, получим $y_1+y_2+y_3=2y$, где y — число всех учеников в классе. Ясно, что хотя бы одно из чисел y_1, y_2, y_3 должно быть не меньше $\frac{1}{3}\cdot 2y$.

А. Сидоренко

◆

М708. *На сторонах выпуклого четырехугольника площади S вне его построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырехугольника площади S_1. Дока-*

Из рисунка 1 видно, что площадь S_1 нового четырехугольника $MNPQ$ (M, N, P и Q — центры квадратов, построенных на сторонах данного четырехугольника $ABCD$) равна сумме площадей четырех заштрихованных розовых четырехугольников (с вершинами, соответственно, в центрах двух соседних квадратов и серединах двух соседних сторон исходного

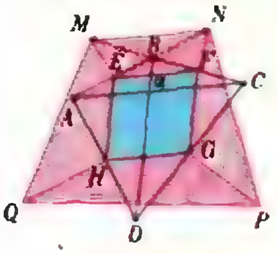


Рис. 1.

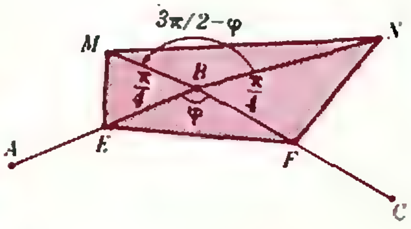


Рис. 2.

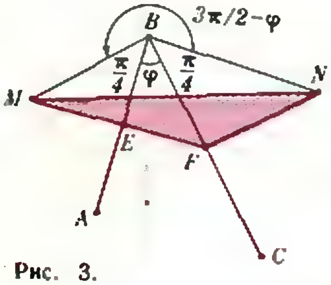


Рис. 3.

жите, что а) $S_1 > 2S$; б) $S_1 = 2S$ в том и только в том случае, когда диагонали исходного четырехугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

четырехугольника) и голубого параллелограмма (с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника). Найдем, чему равна площадь одного такого розового четырехугольника — например, четырехугольника $EMNF$ (см. рис. 1).

Обозначим через φ угол при вершине B исходного четырехугольника. Заметим, что

$$S_{EMNF}=S_{EBF}+S_{EMB}+S_{FNB}\pm S_{MBN},$$

причем знак «+» берется, если $\frac{3\pi}{2}-\varphi<\pi$ (рис. 2), то есть $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, и знак «—», если $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ (рис. 3). Подсчитав алгебраическую сумму последних трех слагаемых, найдем

$$S_{EMNF}=S_{EBF}+\frac{|AB|^2}{8}+\frac{|BC|^2}{8}+\frac{|AB|\cdot|BC|}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)=$$
$$=S_{EBF}+\frac{1}{8}\left(|AB|^2-2|AB|\cdot|BC|\cos\varphi+|BC|^2\right)=$$
$$=S_{EBF}+\frac{|AC|^2}{8}$$

(мы воспользовались теоремой косинусов для треугольника ABC).

Проведя аналогичные вычисления для остальных розовых четырехугольников, окончательно получим, что

$$S_1=S+\frac{1}{4}\left(|AC|^2+|BD|^2\right).$$

Но $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\sin\alpha$ (α — угол между диагоналями AC и BD), так что $\frac{1}{4}\left(|AC|^2+|BD|^2\right)>\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|>S$ и $S_1>2S$, — мы решили задачу а).

Поскольку последние неравенства превращаются в равенства в том и только в том случае, когда $|AC|=|BD|$ и $\sin\alpha=1$, то есть $(AC)\perp(BD)$, мы попутно получаем утверждение б).

П. Гусятников

◆

М709. *Пол комнаты, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом 60°. Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположение другим (рис. 1). Докажите, что а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое; б) из расположения плиток рисунка 2 нельзя получить расположение рисунка 3 менее чем за 1000 операций.*

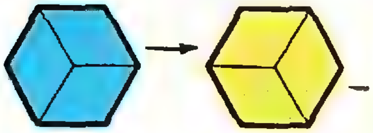


Рис. 1.

Автор задачи *А. Смирнов* предложил замечательную пространственную интерпретацию, которая делает решение задачи почти очевидным.

Представим себе куб размерами $k\times k\times k$, разбитый на k^3 кубиков $1\times1\times1$. Уложим его в «открытую коробку», склеенную из трех квадратов $k\times k$ с общей вершиной A, и посмотрим на него по направлению диагонали HA (рис. 4). Мы увидим рисунок 3. Если же высыпать из коробки все кубики (но считать, что на внутренних стенках коробки осталась сетка $k\times k$ — «следы» от кубиков), то мы увидим рисунок 2. Вообще, если снять сверху лишь часть из k^3 кубиков, то мы увидим как раз такую картину, о которой говорится в условии задачи (где $k=10$): шестиугольник, разбитый на $3k^2$ одинаковых ромбов (с острым углом 60°)*). При этом ромбам каждого из трех типов — стороны которых параллельны определенным двум сторонам шестиугольника (на рисунках 5, 6 и 7 эти ромбы показаны белым, светло-голубым и темно-голубым цветом) — соответствуют грани кубиков, параллельные определенной паре граней большого куба; отсюда ясно, что соответствие между разбиениями шестиугольника на ромбы и соответствующими «частичными»

---

*) Разумеется, при проектировании куба на плоскость, перпендикулярную диагонали, длины ребер и параллельных им отрезков в определенное число раз уменьшаются (а именно, умножаются на $\sqrt{2/3}$ — проверьте!), но мы надеемся, что отсутствие коэффициента не вызовет недоумения читателей, — ведь нас интересуют лишь расположения кубиков, а не размеры.

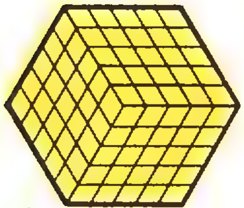


Рис. 2.

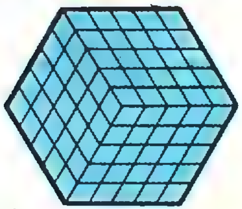


Рис. 3.

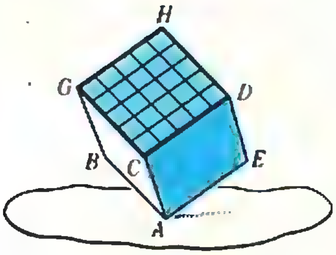


Рис. 4.

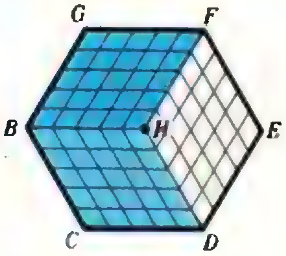


Рис. 5.

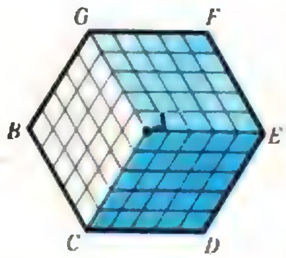


Рис. 6.

заполнениями коробки взаимно однозначно. Операция, указанная на рисунке 1, — это просто добавление кубика $1\times1\times1$ в свободное «гнездо» или вынимание такого кубика, на котором не лежат другие. (Например, на рисунке 7 происходит добавление кубика в «гнездо», обведенное красной линией.)

Теперь все утверждения задачи допускают вполне осязаемое обоснование (если не верите, сделайте модель!). Чтобы перейти от рисунка 2 к рисунку 3, нужно класть кубики в коробку по одному — и, разумеется, уложить их все можно самое меньшее за k^3 ходов (большее число ходов может получиться, если вынимать уже уложенные кубики). Если имеется два расположения ромбов: одному соответствует заполнение C_1, а другому — заполнение C_2 кубиками, то перейти от одного к другому можно любым из двух способов: либо сначала «спуститься» к рисунку 2 — вынуть все кубики, а затем уложить нужные C_2 кубиков, либо «подняться» до полного куба (рис. 3), а затем вынуть лишнее. Нетрудно проверить, что в случае $C_1+C_2<k^3$ первый, а в случае $(k^3-C_1)+(k^3-C_2)<k^3 \Leftrightarrow C_1+C_2>k^3$ второй способ гарантирует переход от C_1 к C_2 не более чем за k^3 ходов. (Впрочем, наша модель позволяет указать для любых двух заполнений C_1 и C_2 точное «расстояние» $\varrho(C_1, C_2)$ между ними — наименьшее число ходов, за которое можно перейти от одного к другому. Оно равно числу кубиков, на которое различаются C_1 и C_2, то есть число кубиков C_1, которые лежат выше C_2, плюс число кубиков C_2, которые лежат выше C_1.)

Заметим, что «выход в пространство» для решения этой задачи не обязателен: многие читатели изложили (по существу, то же) решение, не выходя из плоскости, примерно так. Заметим, что ромбы, у которых имеется хоть одна «горизонтальная» сторона (голубые ромбы обоих оттенков на наших рисунках), образуют k полосок, каждая из которых ведет от верхней к нижней стороне шестиугольника и состоит из $2k$ ромбов. При этом рисунок 5 соответствует случаю, когда все полоски максимально смещены вправо, рисунок 6 — влево, а переход (рис. 7) позволяет на одной полоске в одном месте «изгиб вправо» заменить «изгибом влево» — сдвинуть на 1 ровно одну из пересекаемых полоской сторон ромбов. Теперь остается ввести какую-либо числовую оценку «смещения полосок» (аналогичную числу C кубиков в пространственной модели), и решение задачи доводится до конца так же, как и выше.

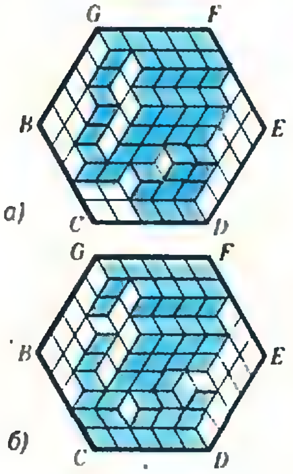


Рис. 7.

Н. Васильев

◆

М710. *Существует ли последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такая что (при всех $n=1, 2, \ldots$)*

а) $a_n<2(\sqrt{3})^n$;
б) $a_n<10(1,5)^n$;
в) $a_n<n^{10}$;
г) $a_n<1000n^{7/2}$;
д) $a_n<1000n^{3/2}$?

Самый очевидный пример последовательности различных натуральных чисел, ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, — прогрессия $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$: у нее каждый член на 1 больше суммы предыдущих. Но она растет слишком быстро.

Основная идея построения всех нижеследующих примеров, показывающих, что ответы на вопросы а) — г) положительные, — составлять последовательность «пачками». В примерах а), б) с показательным ростом числа в пачках можно взять растущими примерно по геометрической прогрессии, а количество чисел в пачке — постоянным; в примерах со степенным ростом длины пачек, как и их первые числа, очень быстро растут.

а) Пусть $a_{2m-1}=3^m-1$, $a_{2m}=3^m$. Очевидно,

$$(2+3)+(8+9)+\ldots+(3^{m-1}-1+3^{m-1})<$$
$$<2(3+9+\ldots+3^{m-1})=3^m-3$$

меньше 3^m-1; поэтому ни одно из чисел 3^m-1 и 3^m не равно сумме предыдущих. При этом $a_1=2$ и $a_n<3^{(n+1)/2}<2(\sqrt{3})^n$ при всех n. (В этом примере в каждой «пачке» всего два числа.)

$a_n<2\cdot(\sqrt{3})^n$:

2, 3,
8, 9,
26, 27,
80, 81,
242, 243,
..., ...,

б) Последовательность (a_n) будем строить тоже по пачкам. m-я пачка ($m=1, 2, \ldots$) будет содержать 16 чисел:

$$15\cdot 361^{m-1},\quad 16\cdot 361^{m-1},\ \ldots,\ 30\cdot 361^{m-1}.$$

Таким образом, $a_n=361^{m-1}(14+r)$, где m и r выбираются из условия $n=16(m-1)+r$, $m=1, 2, \ldots$, $r=1, 2, \ldots, 16$.

Заметим, что сумма всех чисел в пачках с первой до $(m-1)$-й равна

$$(15+16+\ldots+30)+(15\cdot 361+\ldots+30\cdot 361)+\ldots+$$
$$+(15\cdot 361^{m-2}+\ldots+30\cdot 361^{m-2})=$$
$$=360+360\cdot 361+\ldots+360\cdot 361^{m-2}=361^{m-1}-1.$$

Допустим, что какое-то число a из m-й пачки представимо в виде суммы $b_1+\ldots+b_k$ нескольких меньших членов $b_1, \ldots, b_k$ нашей последовательности. Поскольку $a>361^{m-1}$, среди чисел $b_1, \ldots, b_k$ есть хоть одно из m-й пачки. Рассмотрим два случая.

1°. *Среди чисел* $b_1, \ldots, b_k$ *ровно одно из* m-*й пачки;* можно считать, что это b_1. Но равенство $a-b_1=b_2+\ldots+b_k$ невозможно, так как, с одной стороны, $a-b_1$, как разность чисел m-й пачки, не меньше 361^{m-1}, а с другой стороны, $b_2+\ldots+b_k$, как сумма чисел из пачек с номерами меньше m, не превосходит $361^{m-1}-1$.

2°. *Среди чисел* $b_1, \ldots, b_k$ *больше одного лежит в* m-*й пачке.* Тогда равенство $a=b_1+\ldots+b_k$ невозможно, так как сумма двух любых различных чисел m-й пачки уже больше любого третьего числа этой пачки.

$a_n\leqslant 10\cdot(1,5)^n$:

15, 16, ..., 30,
$15\cdot 361$, ..., ..., $30\cdot 361$,
$15\cdot 361^2$, ..., ..., $30\cdot 361^2$,
... ...

Таким образом, ни одно из чисел a_n не представимо в виде суммы других членов построенной последовательности.

Поскольку $361^{m-1}\leqslant(1,5)^{16(m-1)}$ и $14+r\leqslant 10\cdot(1,5)^r$ ($r=1, \ldots, 16$), получаем

$$a_n=361^{m-1}(14+r)\leqslant(1,5)^{16(m-1)}\cdot 10\cdot(1,5)^r=10\cdot(1,5)^n$$

— условие б) выполнено.

в), г). Построим последовательность (a_n), ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такую, что при всех n одновременно $a_n\leqslant n^{10}$ и $a_n\leqslant 100n^{7/2}$.

Сначала положим $b_m=10^{5^{m-2}}$ для всех натуральных $m\geqslant 2$, то есть $b_2=10$, $b_3=100\,000$, b_4 равно единице с 25 нулями, и т. д.

Последовательность (a_n) опять будем строить «по пачкам». Первую пачку возьмем состоящей из одного числа — единицы. В качестве m-й пачки при $m\geqslant 2$ возьмем арифметическую прогрессию с первым членом $2b_m+1$, разностью $2b_m$ и числом членов, равным $b_m^2/2$:

$$2b_m+1,\quad 4b_m+1,\ \ldots,\ b_m^3+1.$$

Оценим сумму чисел m-й пачки

$$\frac{(2b_m+1)+(b_m^3+1)}{2}\cdot\frac{b_m^2}{2}=$$
$$=\frac{b_m^5+2b_m^3+2b_m^2}{4}<\frac{b_m^5}{2}<b_m^5-b_m=b_{m+1}-b_m.$$

Таким образом, сумма чисел в пачках от 1-й до m-й включительно меньше

$$1+(b_3-b_2)+\ldots+(b_{m+1}-b_m)=b_{m+1}-b_2+1<b_{m+1};$$

Допустим, что некоторое число a из m-й пачки ($m\geqslant 2$) представимо в виде суммы некоторых других членов построенной последовательности. Так как сумма всех чисел в пачках с номерами, меньшими m, меньше $b_m<2b_m+1\leqslant a$, среди этих членов последовательности найдется несколько чисел из m-й пачки; обозначим их $c_1, \ldots, c_k$. Остальные члены нашей суммы обозначим через $d_1, \ldots, d_l$:

$$a=c_1+\ldots+c_k+d_1+\ldots+d_l.$$

Так как сумма первых b_m чисел m-й пачки равна

$$(2b_m+1)+(4b_m+1)+\ldots+(2b_m^2+1)=b_m^3+b_m^2+b_m>b_m^3+1,$$

то есть больше наибольшего числа m-й пачки, и, следовательно, больше a, мы получаем, что $k<b_m$. Поэтому

$$r=k+(d_1+\ldots+d_l)<b_m+(d_1+\ldots+d_l)<2b_m.$$

Но $a-r=(c_1+\ldots+c_k)-k=(c_1-1)+\ldots+(c_k-1)$. Поскольку каждое число из m-й пачки при делении на $2b_m$ дает в остатке 1, числа c_1-1, c_2-1, ..., c_k-1 делятся на $2b_m$, так что $a-r$ делится на $2b_m$. Так как при этом $r<2b_m$, r равно остатку от деления a на $2b_m$, то есть $r=1$; значит, $k+d_1+\ldots+d_l=1$, что невозможно. Отсюда заключаем, что ни один член построенной последовательности (a_n) не равен сумме нескольких других.

Проверим теперь, что $a_n\leqslant 100n^{7/2}$ при любом n.

При $n=1$ это очевидно. Если a_n лежит во второй пачке, то $a_n\leqslant 1001<100\cdot 2^{7/2}\leqslant 100n^{7/2}$. Пусть a_n лежит в m-й пачке и $m\geqslant 3$. Представим a_m в виде $2kb_m+1$ $(1\leqslant k\leqslant b_m^2/2)$ и рассмотрим два случая.

1°. $k\leqslant b_{m-1}^2$.

Тогда

$$a_n\leqslant 2b_{m-1}^2b_m+1<3b_{m-1}^2b_m=3b_{m-1}=3\cdot 2^{7/2}\cdot(b_{m-1}^2/2)^{7/2}$$

Но $b_{m-1}^2/2<n$, поскольку $b_{m-1}^2/2$ — число членов в $(m-1)$-й пачке. Поэтому $a_n\leqslant 3\cdot 2^{7/2}\cdot n^{7/2}<100n^{7/2}$.

2°. $k>b_{m-1}^2$.

Ясно, что номер a_n в m-й пачке не превосходит его номера в последовательности, то есть $k\leqslant n$. Поэтому

$$a_n=2kb_m+1<3kb_m=3k(b_{m-1}^2)^{5/2}<3k\cdot k^{5/2}\leqslant 3n^{7/2}.$$

Таким образом, неравенство $a_n\leqslant 100n^{7/2}$ доказано для всех n. Неравенство $a_n\leqslant n^{10}$ при $n=1$ и $n=2$ проверяется непосредственно, и при $n>2$ вытекает из того, что

$$a_n\leqslant 100n^{7/2}<3^{13/2}\cdot n^{7/2}\leqslant n^{13/2}\cdot n^{7/2}.$$

Для экономии места мы не стали приводить более простые примеры последовательностей, дающие решение задачи в), но не решающие задачу г).

д) Ответ на этот вопрос отрицателен: такой последовательности не существует.

Докажем, что хотя бы один член последовательности (a_n) такой, что $a_n<100n^{3/2}$ при всех $n=1, 2, \ldots$ равен сумме нескольких других. (Конечно, число 100 здесь можно заменить любой константой; от показателя $3/2$ в нашем доказательстве нужно, чтобы он был меньше $(\sqrt{5}+1)/2$.)

Рассмотрим прямоугольную таблицу с 10^{30} строками и 10^{18} столбцами. Присвоим ее строкам номера от $10^{30}+1$ до $2\cdot 10^{30}$, а столбцам — номера от 1 до 10^{18}. На пересечении n-й строки и k-го столбца напишем число $c_{n,k}=(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_n$. Оно не превосходит $a_1+\ldots+a_{10^{18}}+a_{2\cdot 10^{30}}\leqslant 100+100\cdot 2^{3/2}+\ldots+100\cdot(10^{18})^{3/2}+100\cdot(2\cdot 10^{30})^{3/2}<100\cdot(10^{18})^{3/2}\cdot 10^{18}+100\cdot(10^{30})^{3/2}\cdot 2^{3/2}=10^{47}+10^{47}\times 2^{3/2}<4\cdot 10^{47}$.

Так как в таблице выписано 10^{48} чисел, каждое из которых может принимать менее $4\cdot 10^{47}$ значений, какие-нибудь два из этих чисел совпадают. Пусть, например, $c_{n,k}=c_{m,l}$. Поскольку в n-й строке все числа различны, $n\neq m$. Можно считать, что $n>m$ (случай $m>n$ аналогичен). Равенство $c_{n,k}=c_{m,l}$ означает, что

$$(a_1+\ldots+a_k)+a_n=(a_1+\ldots+a_l)+a_m,$$

откуда $k<l$ и $a_n=(a_{k+1}+\ldots+a_l)+a_m$. Так как при этом $l\leqslant 10^{18}<m$, получаем, что a_n представляется в виде суммы нескольких других членов последовательности.

Конечно, зазор между $(\sqrt{5}+1)/2$ и $7/2$ еще довольно велик. Может быть, кому-либо из читателей удастся его сократить. По-видимому, пока лучшая оценка снизу чем $C\cdot n^{(\sqrt{5}+1)/2}$, неизвестна.

Как нам сообщил венгерский математик П. Эрдеш, в свое время он тоже занимался задачей о последовательностях (a_n), в которых ни одно число не равно сумме неко-

$a_n\leqslant n^{10}$ и $a_n\leqslant 100n^{7/2}$.

$$\begin{array}{cccc} & & 1, & \\ 21, & 41, & \ldots, & 1001 \\ 200\,001, & 400\,001, & \ldots, & 10^{15}+1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

торых предыдущих, и получил для них оценки другого типа; в частности, он доказал, что сумма ряда $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots$ не превосходит 103. (Позднее было доказано, что эта сумма не превосходит 6.)

С. Конягин

Ф719.*) *Маленькому тяжелому шарику массы m, имеющему заряд q, сообщают начальную скорость v_0, направленную вертикально вверх. Шарик находится в однородном горизонтальном электростатическом поле, напряженность которого равна E. Пренебрегая сопротивлением воздуха и зависимостью ускорения свободного падения от высоты, определить минимальную скорость шарика в процессе его движения.*

◆

На шарик действуют две постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $q\vec{E}$ со стороны электростатического поля. Следовательно, шарик будет двигаться с постоянным ускорением

$$\vec{a}=\vec{g}+\frac{q}{m}\vec{E}.$$

Вектор $\vec{a}$ составляет с горизонтом угол α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{g}{Eq/m}=\frac{mg}{Eq}.$$

Скорость же шарика будет все время меняться и по величине, и по направлению. Через время t после начала движения модуль скорости

$$v_t=\sqrt{\left(\frac{qE}{m}t\right)^2+(v_0-gt)^2};$$

вектор $\vec{v}_t$ составляет с вертикалью угол β_t такой, что

$$\operatorname{tg}\beta_t=qEt/m(v_0-gt).$$

Скорость шарика будет минимальная в тот момент времени τ, когда проекция ускорения $\vec{a}$ на направление скорости $\vec{v}_\tau$ будет равна нулю, то есть когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_\tau$ будут перпендикулярны. Угол, который составит в этот момент вектор $\vec{v}_\tau$ с вертикалью, будет равен α. Из условия $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta_\tau$ найдем τ:

$$\tau=\frac{m^2gv_0}{m^2g^2+q^2E^2}.$$

Минимальная скорость шарика в процессе движения равна по величине

$$v_{\min}=v_\tau=v_0\frac{qE}{\sqrt{q^2E^2+m^2g^2}}.$$

Б. Буховцев

Ф720. *Однородный брусок массы M длины l начинает двигаться вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальный участок длины l наклонной плоскости занят близко расположенными катками в виде трубок массы m и радиуса $r \ll l$ (рис. 1), которые вращаются без трения в подшипниках. Остальной участок наклонной плоскости гладкий. Найти зависимость ускорения бруска от перемещения вдоль плоскости.*

◆

Запишем уравнение движения бруска для момента времени, когда перемещение бруска вдоль наклонной плоскости равно x $(x<l)$:

$$Ma_x=Mg\sin\alpha-f_{\text{тр}}N(1-x/l), \qquad (1)$$

где $N=l/2r$ — полное число катков на участке длины l, $N(1-x/l)$ — число катков, с которыми соприкасается брусок в данный момент, $f_{\text{тр}}$ — абсолютная величина силы трения, действующей на брусок со стороны каждого катка.

Каждому катку, соприкасающемуся с бруском, сила трения $f_{\text{тр}}$ сообщает в данный момент тангенциальное ускоре-

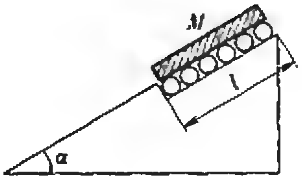


Рис. 1.

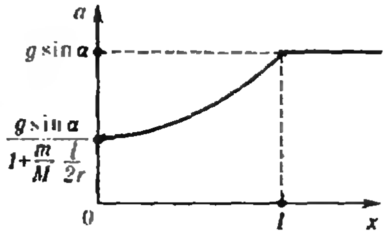


Рис. 2.

---

*) Решение задачи Ф718 — в статье С. Кротова на с. 30.

ние, равное по абсолютной величине a_x (брусок не проскальзывает по каткам), то есть

$$f_{тр} = ma_x. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем зависимость ускорения бруска от перемещения вдоль наклонной плоскости (для $x<l$):

$$a_x = \frac{g \sin \alpha}{1+\frac{m}{M}\,\frac{l}{2r}\left(1-\frac{x}{l}\right)}.$$

При $x>l$ брусок перестает касаться катков и скользит по наклонной плоскости с ускорением

$$a = g \sin \alpha.$$

Общий вид зависимости $a(x)$ представлен на рисунке 2.

А. Стасенко

◆

Ф721. *Равномерно заряженный по поверхности лист из диэлектрика, имеющий форму равнобедренного прямоугольного треугольника, сложили пополам. При этом была совершена работа A против сил электростатического поля. Какую работу надо совершить, чтобы сложить пополам полученный треугольник?*

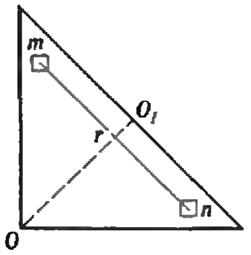


Рис. 1.

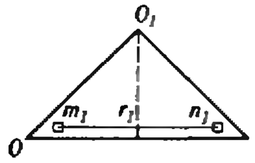


Рис. 2.

Пусть Q — заряд на поверхности начального (не сложенного ни разу) треугольника площади S, A_0 — электростатическая энергия, которой обладает этот заряд. Эта энергия складывается из электростатических энергий попарного взаимодействия отдельных заряженных участков треугольника.

Рассмотрим два малых участка m и n треугольника, находящихся на расстоянии r друг от друга (см. рис. 1). Пусть s — площадь каждого участка; заряд каждого участка, очевидно, равен $q = \frac{Q}{S}s$. Электростатическая энергия взаимодействия этих участков

$$a_0 \sim q^2/r = Q^2\frac{s}{Sr}.$$

Посмотрим, как изменится эта энергия после первого сложения треугольника. Из рисунка 2 видно, что на сложенном треугольнике участки, подобные m и n, — это участки m_1 и n_1. Заряд на сложенном треугольнике будет по-прежнему Q, площадь треугольника станет $S_1 = S/2$, расстояние между площадками, как нетрудно понять, станет $r_1 = r/\sqrt{2}$, а площади их — $s_1 = s/2$. Таким образом, энергия взаимодействия площадок станет

$$a_1 \sim q_1^2/r_1 = Q^2\frac{s_1}{Sr_1} = a_0\sqrt{2}.$$

Поскольку те же рассуждения относятся к любой паре площадок, электростатическая энергия сложенного заряженного треугольника станет

$$A_1 = A_0\sqrt{2}.$$

Изменение энергии $\Delta A_1 = A_1 - A_0$ равно работе A, затраченной при сложении треугольника, то есть

$$A_1 - A_0 = A_0(\sqrt{2}-1) = A$$

При повторном сложении треугольника его электростатическая энергия станет

$$A_2 = A_1\sqrt{2}.$$

Изменение энергии $\Delta A_2 = A_2 - A_1$ равно работе A_x, которую затратили при сложении. Таким образом,

$$A_x = A_2 - A_1 = A(\sqrt{2}-1) = A_0\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1) = A\sqrt{2}.$$

О. Савченко

◆

Ф722. *Плоский конденсатор находится в магнитном поле, которое перпендикулярно плоскости пластин. Расстояние между пластинами d, вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Внутри конденсатора около отрицательно заряженной пласти-*

Рассмотрим движение электронов как суперпозицию двух движений: прямолинейного движения вдоль оси Z (направление оси Z совпадает с направлением вектора индукции $\vec{B}$) и движения в плоскости, перпендикулярной оси Z.

Со стороны электрического поля на электрон действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$, сообщающая ему ускорение, направленное вдоль оси Z (вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси Z) и равное по абсолютной величине *ны расположен источник медленных электронов, испускающий электроны в разных направлениях. При каком напряжении между пластинами электроны будут фокусироваться на положительно заряженной пластине? От чего зависит размер «пятна»?*

$$a_z = eE/m = eU/md.$$

В проекции на плоскость, перпендикулярную оси Z, траектория электрона — окружность; центростремительное ускорение, которое электрону сообщает сила, действующая на него со стороны магнитного поля, равно по абсолютной величине

$$a_{\text{ц с}} = v_\perp^2/R = eBv_\perp/m,$$

где $v_\perp$ — проекция скорости электрона на плоскость, R — радиус окружности. Период обращения электрона по окружности равен

$$T = 2\pi R/v_\perp = 2\pi m/eB.$$

Для электронов с различными начальными скоростями (с различными значениями $v_\perp$) проекции траекторий на выбранную плоскость — семейство окружностей, «выходящих» из одной точки плоскости и «возвращающихся» к ней через время nT, где $n=0, 1, 2, \ldots$

Чтобы пучок электронов сфокусировался в «точку» на положительной пластине, время пролета между пластинами должно равняться nT. Исходя из этого условия и надо подобрать напряжение $U_ф$.

Если проекция начальной скорости электрона на ось Z равна v_{0z}, то условие фокусировки можно записать так:

$$d = v_{0z}nT + \frac{a_z n^2T^2}{2} = v_{0z}nT + \frac{eU_ф}{2md}n^2T^2.$$

Видно, что определяемое этим условием напряжение зависит от начальной скорости электронов, так что сфокусировать электроны в «точку» невозможно. Но по условию задачи источник испускает медленные электроны. Поэтому в предыдущей формуле можно пренебречь слагаемым $v_{0z}nT$, малым по сравнению с $eU_ф n^2T^2/2md$, и считать, что условие фокусировки —

$$d = \frac{eU_ф n^2T^2}{2md} = \frac{2\pi^2n^2U_ф m}{eB^2d}.$$

Отсюда находим $U_ф$:

$$U_ф = \frac{ed^2B^2}{2\pi^2n^2m}.$$

Из-за различия в начальных скоростях времена пролета электронов между пластинами немного отличаются от nT. Это означает, что в плоскости, перпендикулярной оси Z, часть электронов за время nT не успевает вернуться в «исходную» точку, а часть — немного проскакивает ее. Поэтому на положительной пластине образуется не точка, а пятно. Размер этого пятна растет с увеличением разброса начальных скоростей электронов. Подумайте, почему с ростом числа n фокусировка делается хуже.

Вторая причина «уширения» пятна — взаимное отталкивание электронов. Мы учитывали только действие на электроны внешних полей и пренебрегли взаимодействием электронов. Пока плотность электронов мала, это допустимо. Однако при увеличении тока источника пространственный заряд между пластинами растет и может вообще нарушить фокусировку.

И. Воробьев

С. Кротов

Об оптимальных траекториях движения

Многим из вас приходилось решать задачи на определение оптимальных траекторий движения — задачи типа «определить траекторию, по которой — при определенных условиях движения — из точки A в точку B можно добраться за минимальное время». В настоящей заметке мы расскажем о методе, позволяющем к задачам подобного рода подходить с единых позиций.

Начнем с простой задачи. Представим себе мальчика, оказавшегося в некоторый момент времени t_0 посреди ровного поля в точке A. Нам известно, что из этой точки A он может перемещаться со скоростью v в любом направлении (мы подразумеваем, что условия передвижения мальчика из точки A одинаковы по всем направлениям). Поставим следующий вопрос: где может оказаться мальчик через небольшой интервал времени Δt?

Будем считать, что на протяжении этого интервала времени мальчик, начав двигаться, не меняет курса, и скорость его остается неизменной. В этом случае ответ очевиден: мальчик может оказаться в любой точке окружности с центром в начальном положении — в точке A — и радиуса $v \cdot \Delta t$.

Предположим теперь, что мальчик в процессе движения может в любой момент времени в любой точке своей траектории мгновенно менять произвольным образом направление скорости, сохраняя ее неизменной по величине (в данном случае нам придется наделить мальчика сверхъестественной силой). И в этом случае ответ на вопрос задачи достаточно прост: так как длины всех возможных траекторий мальчика равны $v \cdot \Delta t$, конец произвольной траектории может оказаться в любой точке круга радиуса $v \cdot \Delta t$ с центром в точке A. Это следует из того факта, что перемещение мальчика, то есть расстояние между началом и концом произвольной траектории по прямой, по абсолютной величине не больше длины самой траектории, равной $v \cdot \Delta t$. Таким образом, область достижимости (назовем так множество точек поля, где может оказаться мальчик к моменту времени $t_0+\Delta t$) будет представлять собой круг радиуса $v \cdot \Delta t$. Обратим внимание на то, что для любой внутренней точки области достижимости (например, точки B на рисунке 1) можно указать бесконечное число траекторий, по которым мальчик мог бы в нее попасть. Для любой же точки границы области достижимости (например, точки C на рисунке 1) существует единственная траектория «попадания» (в точку C — по радиусу AC).

Если в дальнейшем (при $t>t_0+\Delta t$) условия передвижения мальчика по полю остаются прежними, то и в последующие моменты времени границы области достижимости будут также представлять собой окружности (с центром в точке A). Границу области достижимости назовем фронтом всевозможных перемещений, или просто фронтом. В предыдущем рассмотрении фронт представлял собой окружность, радиус которой увеличивался со скоростью v. Такая простая форма фронта была связана с тем, что условия передвижения мальчика из точки A (и из любой точки области достижимости) во все стороны были одинаковы. Нетрудно заметить, что и в более общем случае передвижения фронт обладает следующими свойствами:

1) рано или поздно фронт пройдет через любую точку (имеются в виду точки, куда вообще можно попасть);

2) ни при каком способе перемещения нельзя оказаться дальше фронта в соответствующий момент времени;

3) для каждой точки фронта можно указать, как правило, единственную траекторию, оканчивающуюся в ней;

4) при определении фронта в последующие моменты времени (то есть при определении изменения фронта с течением времени) все точки исходного фронта одновременно будут выступать в роли точки A, так что в любой момент времени фронт будет представлять собой огибающую множества окружностей, центры которых лежат на исходном фронте, а радиусы определяются условиями «разбегания» из соответствующих точек фронта (рис. 2);

5) возьмем два положения фронта — M и M', разделенные интервалом времени Δt (см. рис. 2). Для любой точки E фронта M существует единственная точка E' фронта M', в которую можно добраться за время Δt; траектория движения при этом единственная. Во все другие точки фронта M' из точки E можно добраться лишь за бо́льшие времена.

Изложенный выше метод рассмотрения движения путем построения перемещающегося с течением времени фронта может быть с успехом применен при решении задач на определение оптимальных траекторий движения. Если

1) мы знаем, как меняется фронт с течением времени, то есть умеем его строить в каждый момент времени,

2) умеем выделять из всего множества траекторий движения ту, которая приводит в произвольную точку фронта,

то задача определения оптимальной траектории перемещения решается следующим образом: устанавливаем вид фронта с течением времени, определяем момент времени, когда фронт достигнет интересующей нас точки, строим траекторию, реализующую попадание именно в эту точку фронта.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим одну вспомогательную задачу.

Задача. *Мальчик живет на берегу OP залива MOP (рис. 3). Берега залива образуют угол α. Дом мальчика — в точке A. Расстояние от дома до берега равно h, а расстояние от дома до точки O (см. рис. 3) равно l. Мальчик ловит рыбу с берега OM. На каком расстоянии от точки O он должен выбрать место для рыбалки, чтобы добираться до этого места от дома за минимальное время? Чему*

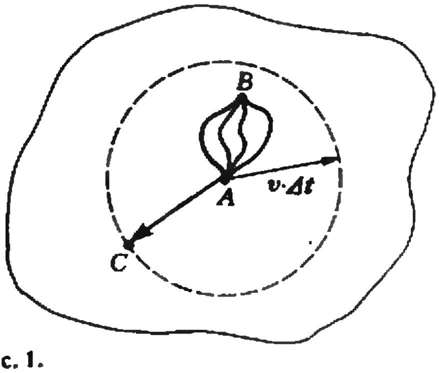


Рис. 1.

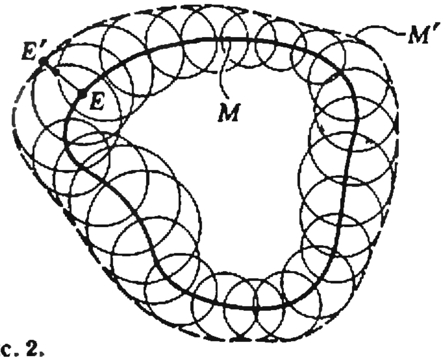


Рис. 2.

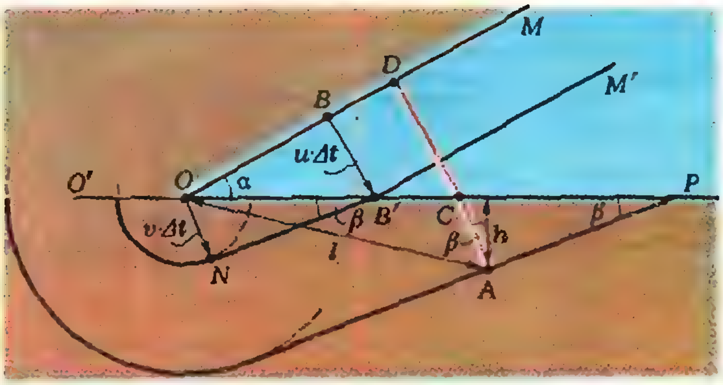


Рис. 3.

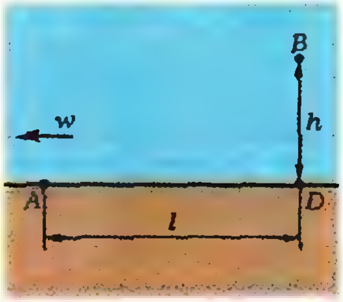


Рис. 4.

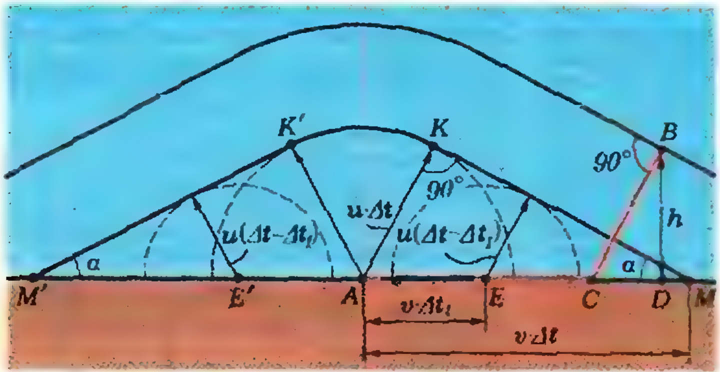


Рис. 5.

равно это время, если по берегу мальчик идет со скоростью v, а по заливу плывет на лодке со скоростью u?

Представим себе линию берега OM фронтом возможных перемещений в исходный момент времени t_0. Учитывая условия передвижения мальчика, построим фронт спустя небольшой промежуток времени Δt. Нетрудно убедиться, что фронт будет представлять собой кривую $O'NB'M'$, состоящую из дуги окружности радиуса $|ON|=|OO'|=v\cdot\Delta t$, участка NB' касательной к этой окружности в точке N, составляющей угол β с берегом OP, и участка $B'M'$ прямой, находящейся на расстоянии $|BB'|=u\cdot\Delta t$ от исходного фронта. Длина отрезка OB' равна, с одной стороны, $(u\cdot\Delta t)/\sin\alpha$ (из $\triangle OBB'$); а с другой стороны, $|OB'|=(v\cdot\Delta t)/\sin\beta$ (из $\triangle ONB'$). Из этих соотношений следует, что $v/\sin\beta=u/\sin\alpha$, то есть $\sin\beta=(v/u)\sin\alpha$.

Очевидно, что время ΔT (от момента t_0), через которое фронт пройдет через точку A, и есть искомое в задаче минимальное время. Оптимальная траектория движения мальчика связывает соответственные точки исходного фронта и фронта, проходящего через точку A. Построим эту траекторию.

Из точки A восставим перпендикуляр AC к фронту; C — точка пересечения перпендикуляра с берегом OP (см. рис. 3). Из точки C опустим перпендикуляр на исходный фронт (на берег OM). Точка D пересечения этого перпендикуляра с фронтом OM и есть искомая точка на берегу OM, которую мальчику надо выбрать местом рыбалки. Расстояние от точки O до точки D равно

$$|OD|=|OC|\cos\alpha=(\sqrt{l^2-h^2}-h\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha=$$

$$=\left(\sqrt{l^2-h^2}-h\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}}\right)\cos\alpha.$$

Минимальное время, которое мальчик будет тратить на дорогу из A в D, равно

$$\Delta T=\frac{|AC|}{v}+\frac{|CD|}{u}=$$

$$=\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{u}\sin\alpha+\frac{h}{uv}\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}.$$

Перейдем теперь к решению задачи Ф718. Напомним ее условие.

Ф718. *На берегу реки, скорость течения которой равна w, в точке A находится мальчик. Он может бежать по берегу со скоростью v и плыть по реке со скоростью u (относительно воды), причем $u<w$. Определить, на каком расстоянии x от точки A находится та точка C берега, откуда мальчик должен начать плыть, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время. Расстояние BD от бакена до берега равно h, расстояние AD равно l (рис. 4).*

Рассмотрим сначала случай, когда скорость реки равна нулю и мальчик может плыть со скоростью u относительно берега.

Построим фронт спустя время Δt после начала ($t_0=0$) движения мальчика. Если бы мальчик сразу начал плыть, то он оказался бы в любой точке полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ с центром в точке A (рис. 5). Если бы он только бежал вдоль берега, то оказался бы в точках M или M'. Наконец, если бы мальчик часть времени Δt_1 бежал по берегу, а время $\Delta t_2=\Delta t-\Delta t_1$ плыл, то он оказался бы в любой точке полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t_2=u(\Delta t-\Delta t_1)$ с центром в точке E (E'), рас-

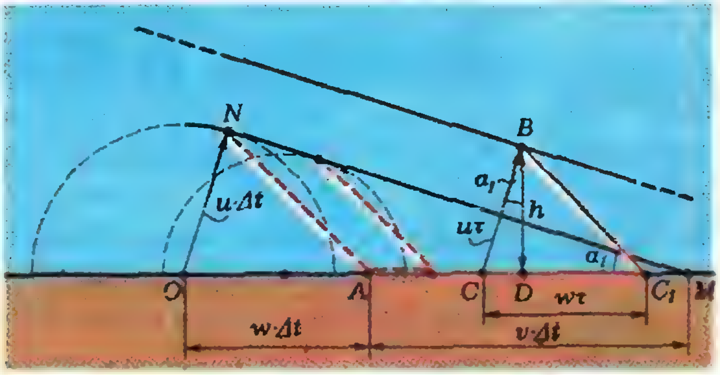


Рис. 6.

стояние от которой до точки A равно $|AE|=v\cdot\Delta t_1$ ($|AE|=|AE'|$). Нетрудно убедиться, что к моменту времени Δt фронт будет представлять собой кривую $M'K'KM$, где $M'K'$ и KM — касательные к полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ с центром в точке A. Эти касательные составляют с берегом угол α такой, что $\sin\alpha=u/v$. (Вообще фронт будет представлять собой кривую $M'K'KM$ и дугу окружности радиуса AM (AM') с центром в точке A, лежащей на берегу. Но нас интересует только та часть фронта, которая лежит в области «река».) В любой другой момент времени фронт будет подобен построенному нами фронту $M'K'KM$.

Теперь понятно, как найти оптимальную траекторию попадания (то есть траекторию попадания за наименьшее время) из точки A в точку B реки, находящуюся на расстоянии h от берега. Эта траектория будет представлять собой ломаную ACB (см. рис. 5), отрезок CB которой перпендикулярен фронту, проходящему через точку B. Точка C — та точка берега, из которой мальчик должен начать плыть. Если расстояние вдоль берега от точки A до точки B равно $|AD|=l$, то

$$|AC|=|AD|-|CD|=l-h\operatorname{tg}\alpha=$$
$$=l-h\frac{u}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

Теперь учтем, что, по условию задачи, скорость течения реки $w\neq 0$. Как будет выглядеть фронт через время Δt от начала движения? Очевидно, что точка M фронта (см. рис. 5) останется на месте; центр полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ сместится от точки A влево (по направлению w) на расстояние $|AO|=w\cdot\Delta t$. Фронт в области «река» будет представлять собой кривую $M'N'NM$ (на рисунке 6 показана часть NM фронта); касательная MN составляет с берегом угол α_1 такой, что

$$\sin\alpha_1=u/(w+v).$$

По существу построение точек участка MN фронта мы разбиваем на два этапа: для каждой точки M_i берега, в которой мальчик оказывается через время Δt_i, мы строим «вспомогательный фронт» — границу той области реки, в которой мальчик может оказаться через время $\Delta t-\Delta t_i$. Эта граница — полуокружность радиуса $u\cdot(\Delta t-\Delta t_i)$ с центром в точке M_i. Затем мы смещаем эти полуокружности влево (по направлению w) на расстояние, равное $w\cdot(\Delta t-\Delta t_i)$. Касательная ко всем таким смещенным полуокружностям и есть участок MN фронта.

Следовательно, чтобы попасть из точки A в точку B за наименьшее время, мальчик должен начать плыть из той точки C_1 берега, которая находится справа от точки C (см. рис. 6) на расстоянии $|CC_1|=w\tau$, где τ — время, в течение которого мальчик будет плыть. (Понятно, что отрезок C_1B оптимальной траектории должен быть параллелен отрезку AN.) Расстояние между точками A и C_1 равно

$$x=|AC_1|=|AD|+|DC_1|=l+|DC_1|.$$

Найдем длину отрезка DC_1:

$$|DC_1|=|CC_1|-|CD|=w\tau-h\operatorname{tg}\alpha_1;$$

из $\triangle BDC$ находим

$$\frac{h}{u\tau}=\cos\alpha_1\Rightarrow\tau=\frac{h}{u\cos\alpha_1}=$$
$$=\frac{h}{u}\,\frac{(w+v)}{\sqrt{(w+v)^2-u^2}}$$

(напомним, что $\sin\alpha_1=u/(w+v)$ $\cos\alpha_1=\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}$); таким образом

$$|DC_1|=\frac{hw}{u\cos\alpha_1}-\frac{h\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}=$$
$$=\frac{h(w^2-u^2+wv)}{u\sqrt{(w+v)^2-u^2}}.$$

Итак, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время, мальчик должен начать плыть из точки C_1, находящейся от точки A на расстоянии

$$x=l+h\frac{(w^2-u^2+wv)}{u\sqrt{(w+v)^2-u^2}}.$$

Рассмотренный нами метод решения кинематической задачи путем построения фронта всевозможных перемещений основывается на хорошо известной физической картине распространения возмущения в среде; фронт при этом является реальной границей той области, куда дошло возмущение к данному моменту времени. Нетрудно видеть, что при отыскании оптимальных траекторий мы воспользовались тесной взаимосвязью, существующей между фронтом и лучами, а именно тем фактом, что луч является линией, по которой возмущение распространяется за наименьшее время. Принцип построения фронта, который мы предложили, является ни чем иным, как принципом Гюйгенса — методом построения фронта распространения волнового возмущения.

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М696 — М705 (сведения о решивших задачи М691 — М695, предлагавшиеся на XV Всесоюзной олимпиаде школьников, публиковаться не будут) и Ф708 — Ф722 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **М696, М698 — М701.** Остальные задачи решили: *В. Акимов* (Москва) **02 — 04;** *М. Алексеев* (Москва) **02 — 04;** *А. Аляев* (п. Пачелма Пензенской обл.) **04;** *С. Амшинский* (Ленинград) **97, 02, 04;** *М. Арамян* (Ереван) **02;** *А. Асланян* (Ереван) **02 — 04;** *Б. Банканашвили* (с. Кехиджвари ГССР) **97;** *А. Беренштейн* (Москва) **03;** *Ю. Беспалов* (Шостка) **02 — 04;** *И. Бинус* (Пенза) **04;** *А. Борискин* (Москва) **03;** *Г. Виннер* (Свердловск) **97, 02;** *И. Гайович* (Киев) **03;** *М. Гараев* (Физули) **97, 03, 04;** *А. Гохберг* (Донецк) **97, 04;** *Д. Грибанов* (Суворов) **02, 04;** *О. Гринив* (Киев) **97, 03 — 05;** *О. Гулин* (Черкассы) **97;** *И. Цимитров.* (Ямбол, НРБ) **03, 04;** *О. Дранко* (Киев) **97;** *А. Дубицкас* (Таураге) **97, 03, 04;** *М. Дуйсекулов* (Аркалык) **02;** *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **04;** *М. Елисеев* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **97, 04, 05;** *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **97, 02 — 04;** *И. Жуков* (Ленинград) **03, 04;** *В. Завадникова* (Киев) **03;** *В. Ивлев* (Джезказган) **04;** *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **97, 03, 04;** *К. Игнатьев* (Москва) **02 — 04;** *И. Итенберг* (Ленинград) **97, 02;** *А. Казмерчук* (Киев) **02 — 04;** *Д. Калюжный* (Одесса) **97, 02;** *Д. Камунтавичюс* (Вильнюс) **03;** *А. Карпович* (Киев) **97, 02;** *А. Кернерман* (Киев) **97, 02, 04;** *А. Киселев* (Ташкент) **97;** *В. Кисиль* (Одесса) **97, 02, 04, 05;** *Е. Клебанов* (Горловка) **97, 02 — 04;** *А. Колосов* (Дзержинск Горьковской обл.) **03, 04;** *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **02, 03;** *А. Корсуков* (Ачинск) **97, 02;** *Д. Коршунов* (Новосибирск) **97, 02;** *В. Кратофиль* (Киев) **97;** *И. Кудряшов* (Ленинград) **97, 02;** *И. Куйда* (Запорожье) **03;** *Ю. Куприков* (Подольск) **03, 04;** *Л. Лейцин* (Чернигов) **97, 02 — 05;** *О. Мазуров* (Новосибирск) **03;** *С. Макаронов* (Волжский Волгоградской обл.) **04;** *Д. Макаров* (п. Черноголовка, Московской обл.) **02;** *С. Мамедов* (Баку) **97, 03, 04;** *Д. Мамедьяров* (Баку) **04;** *Г. Масловский* (Бельцы) **97, 04;** *А. Матевос* (Ереван) **03;** *Е. Мендрелюк* (Могилев-Подольский) **03;** *В. Москаленко* (Минеральные Воды) **03;** *В. Мотин* (Ленинград) **97;** *Б. Мурзахметов* (Джезказган) **02, 04;** *Ю. Николаевский* (Харьков) **97, 02 — 04;** *А. Никонов* (Кировград) **97, 02, 04, 05;** *О. Нотыч* (Киев) **03, 04;** *М. Овецкий* (Донецк) **97, 03, 04;** *Р. Овчарек* (Щецин, ПНР) **97;** *О. Огурцова* (Ленинград) **97;** *Д. Орлов* (Владимир) **02 — 04;** *Р. Оруджев* (Баку) **97, 02, 03;** *А. Пайак* (Лодзь, ПНР) **97;** *Г. Перельман* (Ленинград) **97, 02 — 05;** *Д. Першеев* (Москва) **97, 02;** *А. Полторацкий* (Ленинград) **02;** *В. Поярков* (Николаев) **97, 03, 04;** *А. Родионов* (Москва) **02;** *В. Романов* (Москва) **02 — 04;** *В. Светлицкий* (Запорожье) **04;** *Ф. Серженко* (Запорожье) **03;** *А. Сикса* (Киев) **03 — 05;** *А. Сохет* (Харьков) **03, 04;** *Э. Степанян* (Баку) **04;** *Р. Тедеев* (Цхинвали) **03;** *А. Тижка* (Краков, ПНР) **03;** *С. Тилцов* (Киев) **02 — 04;** *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **97, 02 — 05;** *О. Третьяков* (Омск) **02;** *Ю. Трофимчук* (Калиновка Винницкой обл.) **03;** *Г. Труков* (Москва) **97, 03, 04;** *Ю. Тутин* (Запорожье) **03;** *Е. Тюрин* (Вильнюс) **97, 03 ;** *Р. Угриновский* (Хмельник) **97, 03, 04;** *Т. Утепов* (Алма-Ата) **04;** *Н. Федин* (Омск) **03;** *С. Хирман* (Киев) **97;** *А. Хохлов* (Москва) **97, 02, 03;** *Г. Христофорова* (Воронеж) **03;** *П. Цветков* (Подольск) **02 — 05;** *В. Цолов* (Панагюриште, НРБ) **02, 03;** *С. Чудинова* (Тюмень) **04;** *В. Шабунин* (п. Хохольский Воронежской обл.) **02, 04;** *И. Шапчев* (Ямбол, НРБ) **03, 04;** *З. Шебзухов* (Москва) **97, 03, 04;** *А. Шигарев* (Сибай) **04;** *В. Шириков* (Москва) **97, 03;** *М. Шуклин* (Пермь) **97;** *Ф. Эфендиев* (Баку) **97;** *С. Юровский* (Мытищи) **04;** *В. Ярош* (Ленинград) **97, 02 — 04;** *Э. Ясиновый* (Куйбышев) **03, 04.**

Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф711, Ф713 и Ф719.** Остальные задачи решили: *Е. Абедимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) **08, 09, 17, 20;** *А. Айрапетян* (Ереван) **12, 18;** *И. Алексеев* (Москва) **08 — 10, 12, 14 — 16, 18, 21, 22;** *Э. Алиев* (Баку) **08, 17, 22;** *З. Али-заде* (Баку) **14;** *С. Амшинский* (Ленинград) **12;** *М. Арамян* (Ереван) **12, 18;** *А. Асланян* (Ереван) **14, 16, 18;** *А. Астахов* (Железнодорожный) **08, 09, 12, 14, 17, 18, 20;** *А. Бабаев* (Баку) **08, 09, 12, 14, 17, 18, 20;** *Э. Багдасарян* (Баку) **14, 17;** *Я. Базалий* (Донецк) **08 — 22;** *Г. Баранов* (Донецк) **08, 16;** *О. Бендер* (Запорожье) **08 — 10;** *Ю. Беспалов* (Киев) **08 — 22;** *М. Бродицкий* (Кишинев) **18;** *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) **09, 10, 12, 15—17;** *В. Бумагин* (Саратов) **18, 20 — 22;** *А. Буриченко* (Новосибирск) **14, 16;** *В. Васильев* (Таганрог) **14;** *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) **15, 17;** *Б. Вейцман* (Одесса) **08 — 10, 12, 14 — 17, 18, 20 — 22;** *А. Витыньш* (Рига) **08, 09;** *С. Вознюк* (Харьков) **16, 17;** *С. Выгран* (Запорожье) **14, 16, 20;** *И. Гавриков* (Москва) **21, 22;** *К. Григоришин* (Запорожье) **09, 10, 12, 15, 18, 20 — 22;** *И. Гурович* (Одесса) **08, 09, 15, 20 — 22;** *А. Дешковский* (Барановичи) **14;** *И. Доценко* (Москва) **08, 10, 12, 15, 16, 18, 21, 22;** *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **14 — 16, 20, 21;** *В. Евстратов* (Ленинград) **08 — 10, 12, 15, 16, 18;** *С. Егоров* (Новодвинск) **09;** *М. Жяконис* (Каунас) **08 — 10, 14 — 16, 20;** *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **20, 21;** *Ю. Зандаров* (Кургантепа) **16, 17;** *Н. Запускалов* (Магнитогорск) **17;** *Е. Ильмер* (Ленинград) **16;** *В. Иосифов* (ст. Выселки Краснодарского кр.) **09;** *Л. Йосипов* (Киев) **17;** *Г. Кадышев* (Москва) **20;** *Е. Касперский* (Москва) **08 — 10;** *С. Кастелли* (Болград) **18;** *М. Козуб* (Киев) **08;** *В. Комов* (Александров) **08, 09, 12, 14 — 17;** *Д. Короткин* (Ленинград) **15;** *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **14, 16 — 18;** *Г. Костылин* (Минск)

(Окончание см. на с. 57).

Квант для младших школьников

Задачи

1. Число $\overline{ab}$ ($a>b$, $b\neq 0$) таково, что разность $\overline{ab}-\overline{ba}$ — точный квадрат. Найдите все двузначные числа, обладающие этим свойством.

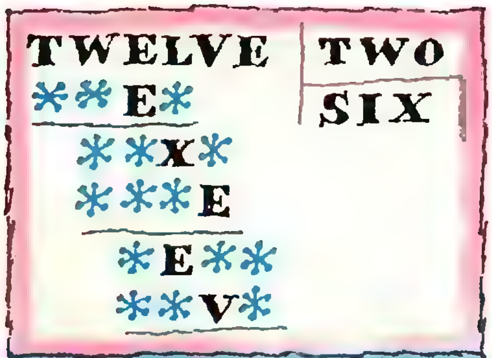
А существуют ли трехзначные числа с аналогичным свойством: $\overline{abc}-\overline{cba}$ ($a>c$) — точный квадрат?

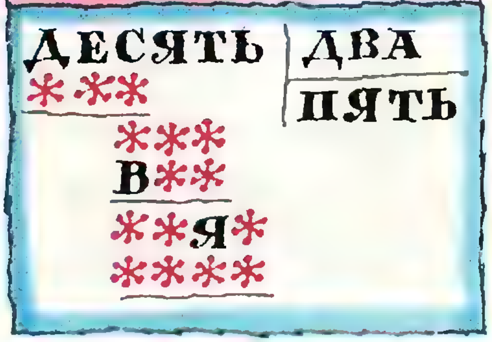
2. В ребусах, изображенных на рисунке (по-английски two — это *два*, six — *шесть*, twelve — *двенадцать*), одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Звездочки могут быть любыми цифрами. Расшифруйте эти ребусы.

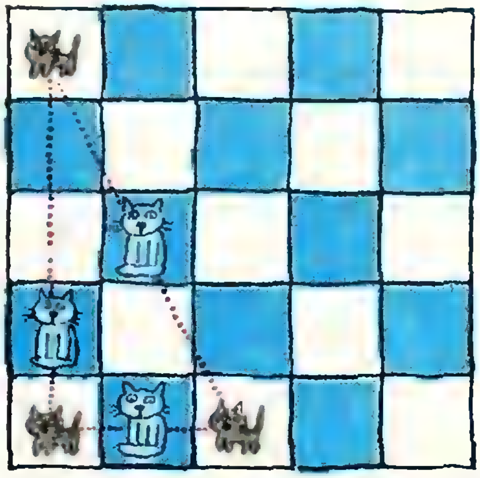
3. У Тани и Наташи, взятых вместе, волос на голове на 40 больше, чем у Пети и Васи, а у Тани и Пети — на 20 больше, чем у Наташи и Васи. «Если бы у меня,— подумал Иван Иванович, их сосед,— выросло столько волос, сколько их у Тани, а потом еще три раза по столько, сколько у Пети, то их у меня стало бы столько, сколько у Васи и трех Наташ, вместе взятых». Какого цвета волосы у Ивана Ивановича?

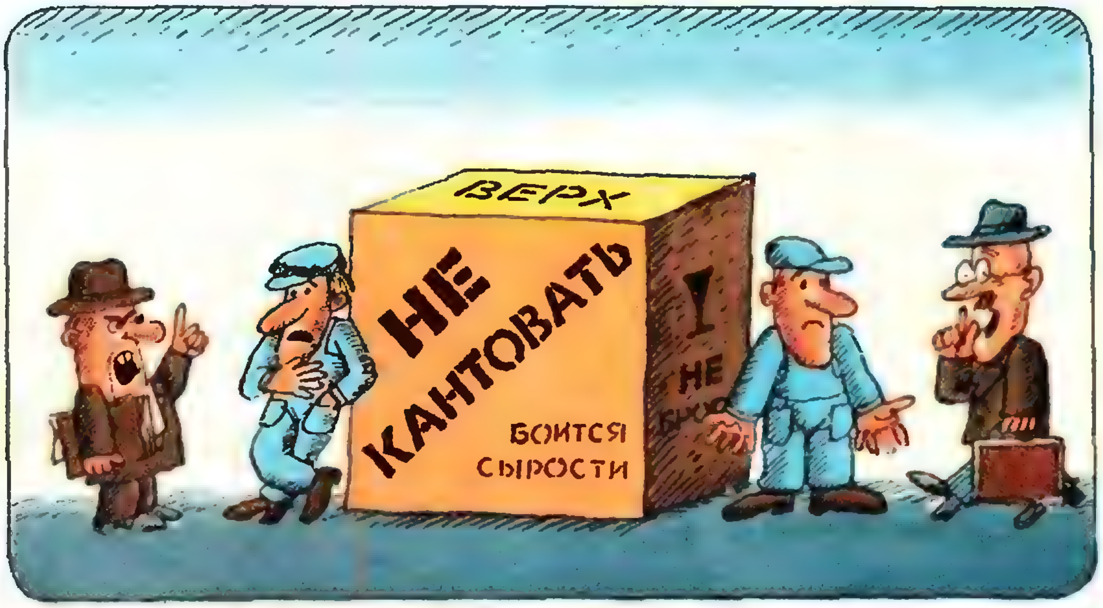
4. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит либо котенок, либо кошка (на рисунке котята — черные, а кошки — белые). Если на прямой между двумя котятами находится кошка, то котята не видят друг друга. Какое наибольшее количество котят можно расположить в клетках квадрата так, чтобы ни один котенок не видел остальных котят?

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, Э. Рекстин,
С. Сефибеков, Д. Фукс









Ф. Бартенев

Кантование кубика

Природа говорит языком математики. Даже бросание игральной кости или обычного детского кубика таит в себе немало математических неожиданностей. Но чтобы научиться читать книгу природы, нужно не только смотреть, но и наблюдать. Однако и этого мало: нужно научиться экспериментировать.

Для опытов с кубиком нам потребуется «квадратная сетка» — лист бумаги, разграфленный на квадраты, равные граням кубика. По квадратной сетке мы будем катать наш кубик.

Кубик вырисовывает свою развертку

Положим кубик на квадрат с центром M (рис. 1); а затем повернем кубик на 90° вокруг его ребра AB, совпадающего со стороной квадрата сетки. Кубик ляжет новой гранью на квадрат с центром N. Этот поворот (*кантование*) можно задать стрелкой MN. Выполним пять последовательных кантований, определяемых ломаной $MNRSPQ$. При перемещении кубик соприкоснется последовательно с шестью квадратами сетки, которые образуют голубой многоугольник, показанный на рис. 1. Проверьте экспериментом, что при этом каждая грань коснется сетки по одному разу, и поэтому голубой многоугольник является *разверткой* кубика.

Нетрудно показать, что ломаная $MNKLHT$ тоже определит развертку кубика, но отличающуюся от первой.

Задача 1. *Используя кантование, найдите опытным путем еще две развертки кубика, отличные от указанных на рисунке 1.*

Задача 2. *На рисунке 2 изображена одна и та же игральная кость в двух различных положениях. Какая ее грань содержит четверку?*

Задача 3. *Игральная кость находится на нижнем левом угловом поле сетки 3×10 (3 столбца из 10 клеток) в таком начальном по-*

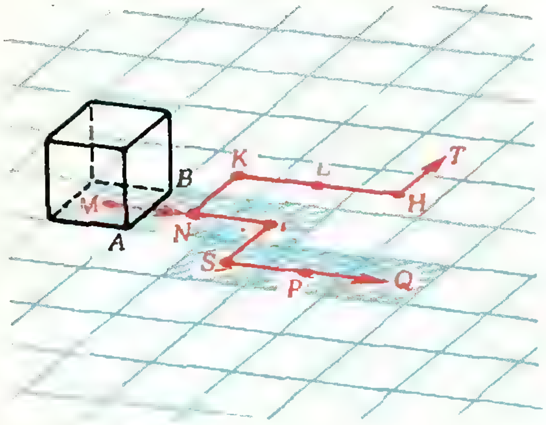


Рис. 1.

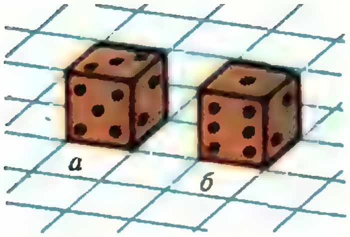


Рис. 2.

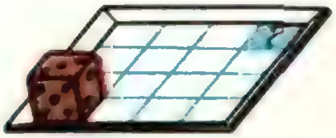


Рис. 3.

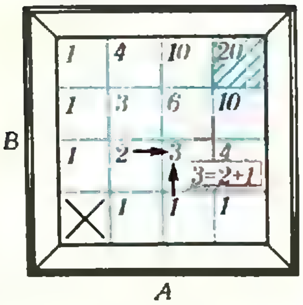


Рис. 4.

ложении, как на рисунке 2, а. Может ли кость обойти все поля сетки, если запрещается класть грань с тройкой на какое-либо ее поле?

Кубик раскрашивает плоскость

Обратимся теперь к кубикам с разноцветными гранями. Будем считать, что каждая грань кубика окрашивает в соответствующий цвет то поле сетки, с которым она соприкасается. На каждом квадрате кубику разрешается побывать только один раз. Разберем теперь такую задачу: *может ли кубик с разноцветными гранями кантованием раскрасить сетку 4×4 так, чтобы на ней не было двух одноцветных соседних квадратов?*

Особенности рассматриваемых ситуаций легче всего выявить опытным путем, рассматривая вначале сетки меньших размеров.

При обходе сетки 2×2 первый и последний квадраты всегда будут и соседними и одноцветными. Значит, при кантовании нельзя делать «крутые» повороты типа $RNKL$ (рис. 1). Но без таких «крутых» поворотов нельзя обойти сетку 3×3, а также сетку 4×4. Значит, требуемую раскраску получить нельзя.

Задача 4. *Решите предыдущую задачу для сетки 5×5.*

Задача 5. *Может ли кубик с разноцветными гранями кантованием обойти все клетки сетки 4×5 так, что сетка окажется раскрашенной только в пять цветов?*

Катаем игральную кость

Рассмотрим несколько задач, в которых речь вновь будет идти об игральной кости, изображенной на рисунке 2. Условимся о правилах, по которым будет кантоваться кость (кубик). Договоримся, что в каждом случае кость находится в начальном положении, представленном на рисунке 2,*а*; кость можно кантовать только вправо и вверх; на каждом поле сетки кость может находиться только один раз.

Начнем с такого примера: *игральная кость в своем начальном положении находится на левом нижнем поле сетки 4×4; Можно ли перекантовать ее по нашим правилам в верхнее правое угловое поле так, чтобы кость лежала на нем гранью, содержащей тройку (рис. 3)?*

И в этом случае целесообразно вначале рассмотреть сетки 2×2 и 3×3. Опыт покажет, что гранью, содержащей тройку, кубик будет соприкасаться только с теми квадратами, которые расположены на третьей вертикали или третьей горизонтали, считая снизу. Естественно, что нужно дать отрицательный ответ на вопрос задачи.

Разберем последний пример с игральной костью: снова, как на рисунке 3, *имеется квадратная сетка 4×4, на левом нижнем квадрате которой лежит кубик; сколькими различными способами кубик можно перекантовать на каждое поле сетки (по нашим правилам)?*

Прежде чем смотреть ответ на рисунке 4, поэкспериментируйте с кубиком. Подметили ли вы закономерность, указанную на этом рисунке: число в каждом поле равно сумме (двух) чисел, расположенных непосредственно под и непосредственно слева от этого поля?

Задача 6. *Игральная кость находится в начальном положении на нижнем левом поле сетки 4×4. На какие поля сетки можно перекантовать ее так, чтобы она вновь находилась в начальном положении? Решите задачу для сетки 5×5.*

А. Назаретов

Плоскость в пространстве

В § 45 пособия «Геометрия 9—10» доказывается, что график любого уравнения первой степени*) $ax+by+cz+d=0$ есть плоскость, перпендикулярная вектору с координатами $(a; b; c)$.

Отсюда вытекает, что плоскости, заданные уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \qquad (2)$$

параллельны тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda c_1$.

Очевидно, плоскости с уравнениями (1), (2) совпадают тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda c_1$, $d_2=\lambda d_1$.

Подчеркнем еще раз. Переход от уравнения первой степени к плоскости (его графику) однозначен: каждое уравнение первой степени является графиком единственной, вполне определенной плоскости. (Поэтому говорят «плоскость с уравнением $ax+by+cz+d=0$» или даже «плоскость $ax+by+cz+d=0$».) Обратный же переход — от плоскости (в координатном пространстве) к уравнению — совсем не однозначен: каждая плоскость может быть задана бесчисленным множеством уравнений; если плоскость Δ является графиком уравнения $ax+by+cz+d=0$, то она является также графиком любого уравнения $(\lambda a)x+(\lambda b)y+(\lambda c)z+(\lambda d)=0$. Каждое из этих уравнений называется *уравнением плоскости* Δ.

В том же параграфе пособия доказывается, что в координатном пространстве каждая плоскость есть график некоторого уравнения первой степени.

В частности, уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной (ненулевому) вектору $\vec{n}=(a; b; c)$, имеет вид $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$.

Если решение задачи 28 к тому же параграфу, изложенное в пособии, повторить «в общем виде», мы получим, что расстояние от точки $K(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$ равно

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 1 (МГМИ, 1981). *Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку M* (3; 2; 4).

Плоскость, перпендикулярная оси Ox, перпендикулярна вектору с координатами (1; 0; 0). Поэтому искомое уравнение имеет вид $1(x-3)+0(y-2)+0(z-4)=0$ или $x-3=0$, $x=3$. Впрочем, последнюю форму ответа можно сообразить и непосредственно.

Задача 2 (МИЭТ, 1981). *Найдите расстояние между параллельными плоскостями* $x-y+2z-4=0$ *и* $x-y+2z-10=0$.

Искомое расстояние равно, очевидно, расстоянию от произвольной точки плоскости $x-y+2z-4=0$, например от точки $K(0; 0; 2)$, до плоскости $x-y+2z-10=0$. По готовой формуле получаем ответ $\sqrt{6}$.

Задача 3 (МИИВТ, 1980). *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки* $M(0; 1; 0)$, $N(1; 1; 1)$ *и* $K(0; 0; 1)$.

Пусть $ax+by+cz+d=0$ — искомое уравнение. Подставив в него координаты точек M, N, K, получаем систему трех уравнений с четырьмя

---

*) Напомним, что уравнение $ax+by+cz+d=0$ называется *уравнением первой степени*, если по крайней мере один коэффициент при переменных отличен от нуля, то есть $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

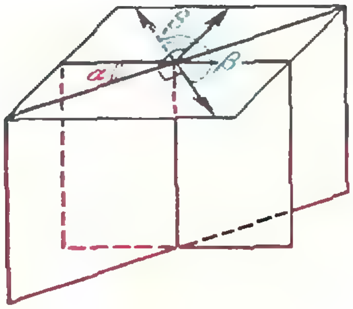


Рис. 1.

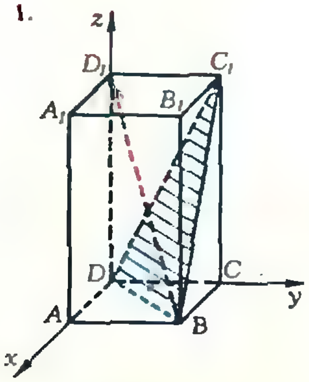


Рис. 2.

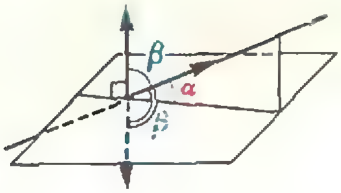


Рис. 3.

неизвестными:

$$\begin{cases} b+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

Отсюда $b=-d$, $c=-d$, $a=d$. Значит, искомое уравнение имеет вид $dx-dy-dz+d=0$ или (поскольку a, b и c одновременно не равны 0, $d\neq 0$) $x-y-z+1=0$.

Задача 4 (МГМИ, 1981). *Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку M(3; 2; 4).*

Плоскость, проходящая через ось Ox, содержит, например, точки (1; 0; 0) и (2; 0; 0) — задача свелась к предыдущей. Можно, впрочем, и сразу сообразить, что уравнение плоскости, проходящей через ось Ox, имеет вид $by+cz=0$.

Задача 5 (МИФИ, 1978). *Точки $A(1;0;3)$, $B(-1;3;4)$ и $C(1;2;1)$ принадлежат плоскости α. При каком значении k точка $M(k;2;5)$ тоже принадлежит плоскости α?*

Находим уравнение плоскости ABC (задача 3) и подставляем в него координаты точки M. Несколько короче, пользуясь компланарностью векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AM}$, разложить вектор $\vec{AM}$ по векторам $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$: $\vec{AM}=\mu\vec{AB}+\nu\vec{AC}$; переписав это векторное равенство в координатной форме, получим систему трех уравнений с тремя переменными μ, ν, k.

Задача 6 (МИХМ, 1981). *Найдите угол между плоскостями $-3y+z+2=0$ и $2y+z-5=0$.*

Искомый угол α мы найдем при помощи угла β между векторами, перпендикулярными к данным плоскостям. Углы α и β могут не совпадать. По определению («Геометрия 9—10», § 38) $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$. Угол же β между векторами по определению («Геометрия 9—10», § 24) заключен между 0° и 180°. Очевидно (рис. 1), $\alpha=\beta$ или $\alpha=180°-\beta$. Поэтому $\cos\alpha=|\cos\beta|$.

Задача 7 (МИСиС, 1980). *Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$ и $C(3;2;1)$, и плоскостью, проходящей через точки $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$ и $D(3;1;2)$.*

Сначала находим уравнения плоскостей ABC и ABD (задача 3), затем — угол между ними (задача 5).

Задача 8 (МИИВТ, 1981). *В правильной четырехугольной призме отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найдите угол между диагональю BD_1 призмы и плоскостью BC_1D.*

Введем систему координат, как показано на рисунке 2, и положим $|AB|=a$. Далее последовательно находим координаты точек B, C_1 и D, уравнение плоскости BC_1D (задача 3), координаты точки D_1 и вектора $\vec{BD_1}$.

(Окончание см. на с. 52)

И. Быстрый

О сокращении показателей

В ныне действующем учебном пособии «Алгебра 8» (М., «Просвещение», издания 1979 г. и позже) *корнем n-й степени из a* называется такое число, n-я степень которого равна a. (Здесь n — произвольное натуральное число, в частности 1.)

Поэтому у положительного числа a при четном n имеются два корня n-й степени из a — положительный (именно он обозначается через $\sqrt[n]{a}$) и отрицательный ($-\sqrt[n]{a}$). При нечетном n у любого числа a имеется один корень (он обозначается через $\sqrt[n]{a}$). Наконец, при любом натуральном n $\sqrt[n]{0}=0$.

Сокращение показателей для неотрицательных a не вызывает никаких затруднений: $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ (п. 26 упомянутого пособия). А вот для произвольных a (в частности, когда a — выражение, содержащее переменную) дело обстоит хитрее. Вы хорошо знаете, что $\sqrt{a^2}=|a|$ (здесь $m=n=1$, $k=2$). В общем случае,

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\begin{cases}\sqrt[n]{|a|^m}, & \text{если } mk \text{ четно и } m \text{ нечетно}\\ \sqrt[n]{a^m} & \text{во всех остальных случаях}\end{cases}\qquad(1)$$

Например, $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{|a|}$ и $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{|a|}$ (равенство $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$ верно только при $a>0$, хотя оба выражения $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[3]{a}$ определены при любом a!).

Покажем, как применяется правило сокращения показателей на примере системы иррациональных уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8\end{cases}\qquad(2)$$

При любых x и y $\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=\sqrt[6]{(x+y)^3}\times\sqrt[6]{(x-y)^2}$ (почему?). По (1) $\sqrt[6]{(x+y)^3}=\sqrt{x+y}$, $\sqrt[6]{(x-y)^2}=\sqrt[3]{|x-y|}$. Поэтому система (2) равносильна системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=8\end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8\end{cases}\qquad(3)$$

$$\begin{cases}x-y<0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=-8\end{cases}\qquad(4)$$

Система (3) равносильна системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8\end{cases}\qquad(5)$$

система (4) — системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=-8\end{cases}\qquad(6)$$

Системы (5), (6) подсказывают подстановку $u=\sqrt{x+y}$, $v=\sqrt[3]{x-y}$.

Решая вспомогательную систему

$$\begin{cases}u+v=6\\ u\cdot v=8\end{cases}$$

получаем два решения: $u_1=4$, $v_1=2$ и $u_2=2$, $v_2=4$. Решая системы

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=4\\ \sqrt[3]{x-y}=2\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x+y}=2\\ \sqrt[3]{x-y}=4\end{cases}$$

получаем два решения системы (5): (12; 4), (34; −30).

Решая вспомогательную систему

$$\begin{cases}u+v=6\\ u\cdot v=-8\end{cases}$$

получаем тоже два решения: $u_3=3+\sqrt{17}$, $v_3=3-\sqrt{17}$ и $u_4=3-\sqrt{17}$, $v_4=3+\sqrt{17}$. Но система

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17}\\ \sqrt[3]{x-y}=3+\sqrt{17}\end{cases}$$

решений не имеет (почему?), а система

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=3+\sqrt{17}\\ \sqrt[3]{x-y}=3-\sqrt{17}\end{cases}$$

имеет решение $(103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})$. Это решение будет единственным решением системы (6).

Объединяя решения систем (5) и (6), получаем три решения системы (2): $\{(12;4),\ (34;-30),\ (103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})\}$.

Упражнения

1. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-3)(x^2-4x+3)}-4\sqrt{(x-4)(x^2-5x+4)}=1-x$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[6]{x^2-2x+1}=2.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}-\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}<\sqrt{2x^2+3x+1}.$$

От редакции. В п. 74 ныне действующего учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», издания 1979 г. и позже) в качестве решений системы (2) даются только пары (12; 4), (34; −30). Это связано с тем, что во время его создания в пособии «Алгебра 8» (М., «Просвещение», 1978) было принято определение корня, по которому при $a<0$ выражение $\sqrt[n]{a}$ (например, $\sqrt[3]{-8}$) не имело смысла. При таком определении корня пара $(103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})$ не являлась решением системы (2), так как $(103-19\sqrt{17})-(-77+25\sqrt{17})<0$.

Следует понимать, что математические определения являются в какой-то мере условными, а выбор того или иного варианта обуславливается его естественностью, удобством на практике.

Разумеется, на предстоящих вступительных экзаменах безопаснее исходить из определения, изложенного в последнем издании пособия.

Поправка

В статье Л. Понтрягина «Комплексные числа» («Квант», 1982, № 3) в доказательство формулы (11) по вине редакции вкрались опечатки, затрудняющие его понимание. Мы воспроизводим в исправленной форме эту часть доказательства (с. 5—6): «Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$iz=i\cdot(x+iy)=x\cdot i+y(-1)=xR_\alpha(1)+yR_\alpha(i)=R_\alpha(x\cdot 1+y\cdot i)=R_\alpha(x+iy)=R_\alpha(z).$$

Таким образом, формула (11) доказана при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ получаем

$$z\cdot i=iz=R_\alpha(z)=R_\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=R_\alpha\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=R_\alpha(i).\qquad(12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z=i$.»

Кроме того, в статье того же автора «Основная теорема алгебры» («Квант», 1982, № 4) по вине типографии на с. 9 напечатано $\overline{f(\bar{z})}=f(\bar{z})$ вместо правильного $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. В окружности радиуса r на расстоянии $\frac{r}{8}$ от центра проведена хорда. В меньший из образованных сегментов помещены две окружности одинакового радиуса так, что они касаются одна другой и каждая из них касается данной окружности и проведенной хорды. Определите радиус этих двух окружностей.

2. $SABC$ — треугольная пирамида, P — середина ребра AB, Q — точка пересечения медиан грани SBC. Разложите вектор $\overrightarrow{PQ}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{SC}$.

3. Решите уравнение

$$\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\sin^2\frac{x}{2}-\cos x\right]^{\frac{1}{2}}=3\cos x.$$

4. При каком значении параметра c из промежутка $[1; 4]$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=|x-c|-\frac{c^2-c+1}{c^2-3c+3}$, будет наибольшей? Когда эта площадь будет наименьшей? Чему равны обе эти площади?

Вариант 2
(физический и радиофизический факультеты)

1. В прямой круговой конус вписан шар радиуса R. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен $\frac{3}{5}R$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2. Решите неравенство

$$\log_{3-x}\frac{1}{|x|}>1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}\\ x-y=\frac{4\pi}{3}.\end{cases}$$

4. При каком a площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x^2$ и прямой $y=a$, равна $\frac{20\sqrt{2}}{3}$?

Вариант 3
(экономический факультет)

1. При каких значениях k кривые $y=2x^2$ и $y=k\cdot\ln x$ имеют одну общую точку?

2. Решите уравнение

$$16\cdot 9^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\sin^2 x-\frac{7}{2}\sin 2x+\frac{7}{2}\right)}=1.$$

3. Решите неравенство

$$|\log_{\sqrt{2}}x-2|-|2-\log_2 x|>1.$$

4. Одна вершина равностороннего треугольника совпадает с вершиной квадрата, а две другие его вершины лежат на сторонах квадрата. Сторона квадрата равна $\sqrt{2\sqrt{3}+3}$ см. Найдите площадь треугольника.

Вариант 4
(географический факультет)

1. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны b, а острый угол равен α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x.$$

3. Решите неравенство

$$\lg(9^{\lg x}+1)>\lg\frac{10}{3}+\lg x\cdot\lg 3.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{2}(\sin x+\sqrt{1-\cos^2 x})$ на промежутке $[0; \pi]$ и осью абсцисс.

Задачи устного экзамена

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию
а) $\log_{xy}|x|>1$;
б) $\log_{|xy|}x^2<2$.

2. Пусть $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. При каких a и b выполняется равенство $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$?

3. Вычислите $x_1^4+x_2^4$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-5x-1=0$.

4. Сколько корней имеет уравнение
а) $x^4+x^3=10$?
б) $3^{|x|}\cdot|2-|x||=1$?
в) $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$?

5. При каких a уравнение
а) $x^3+ax+2=0$;
б) $x^2\cdot e^x=a$;
в) $|\ln x|-ax=0$;
имеет три корня?

6. Решите уравнение
а) $3^x+1-|3^x-1|=2\log_5|6-x|$;
б) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$;
в) $2\pi\cdot\cos x=|x|-|x-\pi|$.

7. Решите неравенство
а) $\sqrt{25-x^2}<\frac{12}{x}$;
б) $\log_{\frac{1+x^2}{2|x|}}(5-x^2)>0$.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y^2|=1 \\ |x|-|y|=1. \end{cases}$$

9. Исходя из определения предела последовательности, докажите, что последовательность $a_n=\frac{n^2+1}{n^2+2}$ имеет предел 1.

10. Найдите промежутки монотонности и точки экстремумов функции $y=||2-x^2|-2|$ Постройте график этой функции.

11. Найдите промежутки монотонности и точки экстремумов функции а) $y=x\cdot e^{-3x}$, б) $y=\frac{x}{\ln x}$.

12. Докажите, что функция $y=3x^4-4x^3+6x^2+ax+b$ при любых a и b имеет только одну экстремальную точку.

13. В какой точке промежутка $]0; \frac{\pi}{2}[$ функция $y=\operatorname{tg} x+\frac{3}{4}\operatorname{ctg} x$ принимает наименьшее значение?

14. Для каких значений параметра a функция $y=(\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+a^2)^3\cdot\operatorname{tg} x$ достигает наименьшего значения на промежутке $]0; \frac{\pi}{2}[$ в точке $x=\frac{\pi}{3}$?

15. При каком значении параметра a минимальное значение функции $y=x^2-4ax-a^4$ наибольшее?

16. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx.$$

17. Вычислите объем пространственной фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=1-e^{-|x|}$ и прямой $y=\frac{2}{3}$.

18. Точки M и N — середины сторон AC и BC треугольника ABC, а точки M_1 и N_1 — середины сторон A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{NN_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ компланарные. Докажите это.

19. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Прямая l, параллельная (CM), пересекает прямые BC, CA и AB, соответственно, в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

20. Если длины сторон треугольника $a<b<c$ образуют арифметическую прогрессию, то $ac=6rR$, где r и R — соответственно, радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите это.

21. Через точку B хорды AB проведена к окружности касательная, а из точки A на нее опущен перпендикуляр AC. Докажите, что величина $\frac{|AB|^2}{|AC|}$ не зависит от хорды AB.

22. Предположим, что в n-угольник можно вписать окружность. Пусть r — радиус этой окружности, а P — периметр n-угольника. Докажите, что площадь n-угольника $S=\frac{1}{2}Pr$.

23. Если в многогранник можно вписать шар, то его объем V и площадь его поверхности S связаны соотношением $V=\frac{1}{3}Sr$ (r — радиус вписанного шара). Докажите это.

24. Если точка $(x; y; z)$ лежит на плоскости $x+y+z=3$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant 3$. Докажите это.

Публикацию подготовили
В. Вышенский, Н. Перестюк,
А. Самойленко

Ростовский государственный университет им. М. А. Суслова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(отделение математики
механико-математического факультета)

1. В равнобедренную трапецию с тупым углом величины α вписана окружность радиуса r. Найдите длину окружности, описанной около той же трапеции.

2. Напишите уравнения касательных к графику функции $y(x)=-x^2-2x$, если известно, что касательные проходят через точку с координатами $(0; a)$.

3. Решите уравнение

$$5\sin\frac{x}{2}+\cos x-3=0.$$

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$, где M — середина ребра CC_1.

Вариант 2

(отделения механики и прикладной математики
механико-математического факультета)

1. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

2. Два тела совершают прямолинейное движение по законам $s_1(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+4$, $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+12t+3$, где t — время в секундах, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — пути в метрах, пройденные, соответственно, первым и вторым телами. В какой момент времени, считая от $t=0$, скорость движения первого тела будет в четыре раза меньше скорости второго тела?

3. Решите уравнение

$$\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+3}{x-3}} 4<2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{x+3}\right).$$

Вариант 3

(физический факультет)

1. Цилиндр, высота которого имеет длину H, а радиус основания равен r, вписан в конус. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса, при которой объем конуса будет наименьшим.

2. Решите уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg} x\cdot\cos 2x.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{\log_{0,3}|x-2|}{|x|}}.$$

4. Упростите выражение

$$f(x, y)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\times$$
$$\times\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и вычислите при $x=9$, $y=0,04$.

Вариант 4
(экономический факультет)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда имеет длину d и образует с двумя смежными боковыми гранями конгруэнтные углы, величина которых равна α. Найдите объем параллелепипеда и укажите значение α, при котором этот объем будет максимальным.

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x-\sin x+1=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\frac{4x^2-1}{x}<1.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

Вариант 5
(геолого-географический факультет)

1. Найдите длину высоты цилиндра максимального объема, если цилиндр вписан в шар радиуса R.

2. Решите уравнение

$$3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt[5]{x+x^2-2x^3}.$$

Публикацию подготовили
Н. Карапетянц, Н. Коваленко,
В. Шутько

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Сечение конуса, параллельное его основанию, проходит через центр описанного около конуса шара. Объем отсеченного конуса равен половине объема конуса. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

2. Исследуйте и постройте график функции $y=3x^2-x^3$.

3. Найдите знаменатель и сумму семи членов геометрической прогрессии, если $a_1=36$, $a_7=\frac{4}{81}$.

4. Решите уравнение

$$25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125.$$

5. Решите неравенство

$$\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x<6.$$

Вариант 2
(физический факультет)

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $|AB|=|CD|=a$ см. Диагональ делит угол при нижнем основании, величина которого равна α, пополам. Найдите площадь трапеции.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

3. Решите систему

$$\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2}\\ x\cdot y=27.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}=1.$$

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}<3^{-x}.$$

Вариант 3
(геологический факультет)

1. Дан тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно a. Через вершину B и середину ребер AD и DC проведена плоскость. Найдите периметр фигуры, получающейся в сечении.

2. Исследуйте функцию $y=(5+\cos x)\times\times(12-\cos x)$ на экстремум.

3. Найдите величину x, если

$$\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}\cdot x-2}{0,35}\right)\cdot 2,8-1\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=35.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\sin x+\sin 2x<0.$$

Вариант 4
(планово-экономический факультет)

1. В треугольнике ABC проведите прямую A_1B_1, параллельную основанию AB, так, чтобы площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ оказалась наибольшей (C_1 и D_1 лежат на AB).

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2x+8$ и осью абсцисс.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-x-y=6\\ x-2y=3.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$2\sin^2 x-3\cos x=3.$$

5. Решите уравнение

$$x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=10^{-\frac{2}{3}}.$$

Публикацию подготовил
Б. Алиев

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Физика

Задачи устного экзамена

1. С горы, высота и основание которой равны $h=2$ м и $l=5$ м соответственно, скатываются санки и останавливаются, пройдя по горизонтали расстояние $s=35$ м от основания горы. Определите коэффициент трения, считая его постоянным на всем пути.

2. Велосипедист должен проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли», радиус которой $R=8$ м. С какой высоты он должен начать разгон, чтобы не упасть в верхней точке петли?

3. Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Коэффициент трения между лестницей и стеной $\mu_1=0{,}5$, а между полом и лестницей $\mu_2=0{,}4$. Определите наименьший угол наклона лестницы, при котором она еще может оставаться в равновесии.

4. С какой высоты должно упасть тело, плотность которого $\rho=0{,}4$ г/см^3, чтобы погрузиться в воду на глубину $H=6$ см? Сопротивлением воды и воздуха можно пренебречь.

5. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дробинка, чтобы при ударе о неупругую стену она расплавилась? Температура дробинки перед ударом $t_1=27$°С. Считать, что кинетическая энергия дробинки полностью идет на изменение ее внутренней энергии. Температура плавления свинца $t_2=327$°С, удельная теплоемкость $c=140$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda=0{,}25\cdot10^5$ Дж/кг.

6. Баллон емкостью $V=0{,}04$ м^3 наполнен сжатым воздухом при температуре $t=20$°С до давления $p=4{,}63\cdot10^7$ Н/м^2. Какой объем воды можно вытеснить этим воздухом из цистерны подводной лодки в море на глубине $H=30$ м, если температура воды $t_в=5$°С и плотность морской воды $\rho=1030$ кг/м^3?

7. Нагреватель кипятильника состоит из двух секций сопротивлением $R=4$ Ом каждая. Кипятильник питают от аккумуляторной батареи, ЭДС которой $\mathscr{E}=12$ В. Вода в кипятильнике закипает за одно и то же время как при последовательном, так и при параллельном соединении элементов нагревателя. Определите силу тока, проходящего через аккумулятор при коротком замыкании.

8. Напряжение на шинах электростанции $U_0=100$ кВ. Расстояние до потребителя $l=500$ км. Станция должна передать потребителю мощность $P=100$ кВт. Потери напряжения не должны превышать 5% ($k=0{,}05$). Вычислите ток в проводах, сечение проводов и массу меди, необходимой для проводки. Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}17\cdot10^{-7}$ Ом·м, плотность меди $\rho_0=8960$ кг/м^3.

9. Какова истинная глубина реки, если при определении на глаз в вертикальном направлении глубина ее кажется равной $h=2$ м? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

10. Медный шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим излучением, длина волны которого $\lambda=2\cdot10^{-7}$ м. До какого максимального потенциала зарядится шарик, излучая фотоэлектроны? Работа выхода электрона с поверхности меди $A=4{,}5$ эВ. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с; заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ кл.

Публикацию подготовили
Н. Беляев, Ю. Кирочкин,
В. Приходько

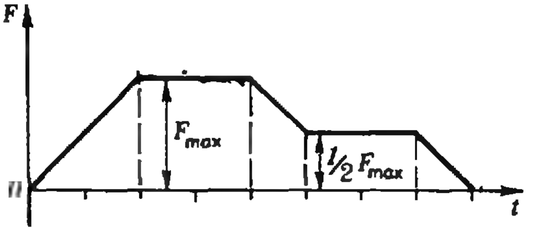
Ворошиловградский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко

Физика

Задачи устного экзамена

1. Сравните среднюю скорость поршня двигателя мотоцикла Иж-Юпитер-3 в режиме максимальной мощности ($n=5300$ об/мин) с максимальной скоростью движения мотоцикла ($v_{max}=125$ км/ч). Ход поршня $s=58$ мм.

2. Сила F, действующая на тело в горизонтальном направлении, изменяется так, как показано на рисунке. Ее максимальное значение в два раза больше силы трения скольжения. Постройте график изменения скорости тела с течением времени, если начальная скорость $v_0=0$.



3. Идеальный газ переводят изотермически из состояния *1* в состояние *2* ($V_2<V_1$), затем его переводят изобарно в состояние *3* и возвращают изохорно в состояние *1*. Положительную или отрицательную работу совершает газ в каждом из процессов и целиком за цикл? Имеет ли место теплообмен между газом и окружающей средой?

4. На сколько градусов нагреется стальная пластинка размером 5×5 см при сверлении в ней отверстия с подачей $l=0{,}5$ мм/об, если вращающий момент $M=8$ Н · м. Считать, что на нагревание пластинки идет половина выделяемого при сверлении количества теплоты. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг · К), плотность $\rho=7{,}8\times10^3$ кг/м^3.

5. Два постоянных и один переменный резисторы подключаются к источнику с напряжением $U=6$ В один раз параллельно друг другу, другой — последовательно. Сопротивление каждого постоянного резистора $r=2$ Ом, сопротивление переменного $R=1$—3 Ом. Какая схема позволяет в большем диапазоне изменять силу тока путем изменения сопротивления переменного резистора?

Чему равна чувствительность каждой из схем (в амперах на ом)? Сопротивление проводов не учитывать.

6. При каком соотношении сопротивлений внешнего и внутреннего участков цепи с источником постоянного тока во внешнем участке будет выделяться максимальная мощность?

7. Энергия ионизации молекул воздуха $E_и=2{,}4\cdot10^{-20}$ Дж. Вызовет ли ионизацию воздуха электрон, летящий со скоростью $v=2{,}5\cdot10^6$ м/с, если его масса $m=9{,}1\times\times10^{-31}$ кг?

8. Два электрона влетают в однородные магнитные поля с индукциями $B_1=0{,}1$ Тл и $B_2=0{,}2$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Сравните периоды их обращения по окружностям, описываемым в магнитных полях.

9. В фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см находится точечный источник света. На расстоянии $l=1$ м от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси помещен экран. Сравните освещенности в центре светового пятна на экране без линзы и с линзой. Потерями света пренебречь.

10. Сколько фотонов видимого света излучает за 1 секунду 75-ваттная лампа накаливания, если считать, что в видимый свет переходит $\eta=1/25$ часть потребляемой лампой энергии? Длину волны видимого света принять равной $\lambda=5{,}5\cdot10^{-7}$ м. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Проказа, В. Ромбах

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(физико-математический факультет)

1. Два куска латуни имеют массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, боковые стороны которого имеют длину a и образуют угол α. Двугранные углы при всех сторонах основания равны β. Определите площадь полной поверхности пирамиды.

3. Дано: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

4. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=2+x-x^2$.

Вариант 2
(факультет общетехнических дисциплин)

1. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и возвратилась назад, затратив на обратный путь на 40 мин. меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

2. В конус с углом φ между образующей и плоскостью основания вписан шар. Определите отношение объема конуса к объему шара.

3. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$ и $x=2$.

5. Решите уравнение

$$2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=150.$$

Публикацию подготовили
С. Левищенко, З. Слепкань

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(факультет прикладной математики)

1. Решите неравенство

$$8^{x+\frac{1}{3}}-9\cdot4^x+2^{x+2}>0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}3x)-1=\log_2(\operatorname{tg}3x).$$

3. Постройте график функции $y=2\cos^2x+\sin^2x$. Найдите точки пересечения этого графика с прямой $y=\dfrac{5}{4}$.

4. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углами величиной 45°. Вершина конуса совпадает с точкой S, окружность основания конуса касается плоскости основания пирамиды, и центр этой окружности лежит на ребре $[SA]$. Найдите наибольшее возможное значение объема такого конуса.

5. Найдите все значения $a\in\mathbf{R}$, при которых уравнение

$$a^3+a^2\cdot|a+x|+|a^2x+1|=1$$

имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

Вариант 2
(экзамен по алгебре и началам анализа на остальных факультетах)

1. Дайте определение равносильных уравнений. Сформулируйте и докажите обратную теорему Виета.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+8}=2x+1.$$

3. Решите неравенство

$$|\log_x 4+1|<3.$$

4. Постройте график функции $y=(1-x)\times(1+x)^2$ на отрезке $[-2; 2]$. В каких точках этого графика надо провести к нему касательные, чтобы они проходили через точку $(-1; 0)$?

5. При каких значениях $a\in\mathbf{R}$ найдутся такие значения $b\in\mathbf{R}$, что числа $4+25^b$, a, 5^{-b} будут являться последовательными членами геометрической прогресии?

Вариант 3
(экзамен по геометрии и тригонометрии на остальных факультетах)

1. Выведите формулу объема конуса.

2. Докажите тождество

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$4\sin^2 x-4\cos x\cdot\cos 3x=1.$$

4. Векторы $\vec{a}=(3; 1)$ и $\vec{b}$, лежащие на координатной плоскости, имеют равные длины. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если длина вектора $\vec{b}-2\vec{a}$ равна $\sqrt{26}$ и вектор $\vec{b}-2\vec{a}$ составляет с осью Oy острый угол.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют равные длины. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB, и точка K — середина $[CD]$. Найдите величину угла между прямыми (MO) и (KN).

Задачи устного экзамена
(факультет прикладной математики)

1. Разность двух натуральных чисел равна 21, а наименьшее общее кратное первого числа и утроенного второго числа равно 180. Найдите эти числа.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y} \\ x+8y=\sqrt{x-y-9}. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\cos 3x+\sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)=-2.$$

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите длину этой окружности.

5. Пирамида задана координатами своих вершин S (0; 0; 2), A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), C (0; 1; 0). Найдите координаты точки M, лежащей на оси z, и координаты точки N, лежащей в плоскости (SBC), если известно, что $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$.

Физика

Образцы задач письменного экзамена

1. Прямолинейное движение тела вдоль оси X описывается зависимостью: $x=-6t^5+30t$, где x измеряется в метрах, t — в секундах. Найдите зависимости скорости и ускорения тела от времени. Что произойдет с телом через $\tau=1$ с от начала движения?

2. Христиан Гюйгенс считал: если шар на невесомой и нерастяжимой нити вращается в вертикальной плоскости, то нить должна обязательно выдерживать силу, равную, по крайней мере, ушестеренной силе тяжести шара. Верно ли это утверждение?

3. В цилиндрический сосуд налита ртуть и поверх нее — масло. Масса масла в 2 раза меньше массы ртути. Сосуд заполнен до высоты $h=30$ см. Определите давление на дно сосуда, если плотность ртути $\varrho_1=13{,}6\times10^3$ кг/м³, а плотность масла $\varrho_2=0{,}9\times10^3$ кг/м³.

4. В салоне самолета объемом $V=600$ м³ при полете поддерживаются температура $t_1=20$°C и относительная влажность $\varphi_1=60\%$. При посадке самолета температура в салоне возросла до $t_2=30$°C. Сколько воды необходимо испарить, чтобы влажность осталась прежней? Давление насыщенных паров при температурах t_1 и t_2 равно, соответственно, $p_{н1}=2352$ Н/м² и $p_{н2}=4214$ Н/м².

5. В сосуде находится одноатомный газ при температуре $t=17$°C и давлении $p=1$ атм. Объем сосуда $V=3$ л. Газ изохорически нагревают на $\Delta t=100$°C. Определите изменение внутренней энергии газа. Какое количество теплоты было передано газу в этом процессе?

6. Какой заряд прошел через сечение проводника, если известно, что электрический ток в этом проводнике равномерно возрастал от нуля до $I=5$ А в течение $t=10$ с?

7. Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}=1{,}5$ В замкнут на сопротивление $R=3$ Ом. При этом по цепи протекает ток $I=0{,}15$ А. Определите ток короткого замыкания.

8. В камере Вильсона, помещенной в однородное магнитное поле с индукцией $B=1{,}5$ Тл, альфа-частица, влетая перпендикулярно направлению поля, оставляет след в виде дуги окружности радиусом $R=2{,}7$ м. Найдите импульс и кинетическую энергию частицы. Масса альфа-частицы $m=6{,}7\cdot10^{-27}$ кг, ее заряд $q=3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл.

9. Предмет находится на расстоянии $d=40$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Определите местоположение изображения. Полностью охарактеризуйте изображение.

10. Атом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое испускает последовательно два кванта с длинами волн $\lambda_1=40510$ Å и $\lambda_2=972{,}5$ Å (1 Å$=10^{-10}$ м). Определите изменение энергии атома водорода. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
В. Виноградов, В. Закалюкин

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(первый экзамен)

1. Найдите x, если

$$\frac{x\cdot(\sqrt[4]{4})^3}{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}=4^2\cdot\frac{1}{(\sqrt[6]{4})^3}.$$

2. Решите уравнение
$$\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5.$$

3. Решите уравнение
$$\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}-12=0.$$

4. Решите уравнение
$$\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}.$$

5. Решите уравнение
$$\lg 8-\lg(x+7)=\lg 2-\lg\sqrt{x+7}.$$

6. Вычислите A, если $A=2^B$ и
$$B=3\log_3 9-4\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{8}.$$

7. Найдите середину отрезка, в котором выполнено неравенство
$$2x^2-7(\sqrt{x})^2<4.$$

8. Дано: $\cos 3\alpha=\frac{1}{4}$. Вычислите $A=49\,\mathrm{ctg}^2\left(6\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

9. Найдите 25-й член арифметической прогрессии 3, 8, ...

10. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найдите боковую сторону.

Вариант 2

(второй экзамен)

1. Найдите в градусах, если $45°<x<90°$ и
$$\sin(270°+3x)=\cos 5x.$$

2. Вычислите значение производной $f'(0)$ для
$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}+\frac{5}{2}x.$$

3. Найдите на отрезке $[-1;2]$ наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x)=(x+1)^2(x-2)+2.$$

4. Вычислите интеграл
$$\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\pi}{\cos^2\pi x}\right)dx.$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$.

6. Даны вершины треугольника A (0; 0), B (1; −3), C (2; −2). Найдите квадрат длины его медианы, проведенной из вершины B.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

1. С высоты $h=100$ м над поверхностью Луны вертикально вниз брошено тело с начальной скоростью $v_0=2$ м/с. Через сколько времени тело достигнет поверхности Луны? Ускорение свободного падения на Луне $g_Л=1{,}6$ м/с^2.

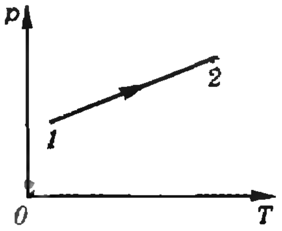
2. Чтобы тело массой $m=5$ кг не соскальзывало с вертикальной стены, его следует придавить к ней с минимальной силой $F=500$ Н, направленной перпендикулярно плоскости стены. Найдите коэффициент трения тела о стену. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. На одном конце неподвижной длинной тележки массой $m_т=20$ кг стоит человек массой $m_ч=60$ кг. С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью $v=2$ м/с относительно тележки?

4. На какой глубине в воде давление в 5 раз больше атмосферного, которое равно $p=10^5$ Па? Плотность воды $\varrho=10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

5. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы $m=0{,}1$ кг воды, взятой при температуре $T=273$ К, довести до кипения и обратить в пар? Температура кипения воды $T_к=373$ К, удельная теплоемкость $c=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования $r=22{,}6\cdot10^5$ Дж/кг. Ответ дать в кДж (1 кДж $=10^3$ Дж).

6. При нагревании газа получена зависимость давления от абсолютной температуры, приведенная на рисунке. Как изменился при этом объем газа? Укажите номер правильного ответа: 1) увеличился, 2) не изменился, 3) уменьшился, 4) для решения задачи данных недостаточно.



7. Расстояние от точечного заряда увеличилось в 7 раз. Во сколько раз уменьшилась напряженность электрического поля в данной точке?

8. Два проводника включены в цепь параллельно; сопротивление первого проводника в 10 раз больше второго. Найдите отношение мощности, потребляемой первым проводником, к мощности, потребляемой вторым.

9. Определите длину волны света, энергия кванта которого $W=3{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с. Ответ дать в нанометрах (1 нм $=10^{-9}$ м).

10. Перед двояковыпуклой линзой с фокусным расстоянием $F=1$ м находится предмет высотой $h=2$ м на расстоянии $d=3$ м. Найдите высоту изображения предмета.

Публикацию подготовили
О. Мишина, Ю. Рябов, А. Соловьев,
А. Тимофеев

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Доказать тождество

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$$

2. Выражение

$\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$

представить в виде произведения.

3. Построить график функции $y=\frac{|x|}{x}$.

4. Решить уравнение

а) $\lg(2^x+x-41)=x(1-\lg 5)$;

б) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}\\(x+y)\cdot 2^{y-x}=3.\end{cases}$$

6. Решить неравенство

а) $0{,}11^{\log_3\frac{4x-1}{3x+2}}>1$;

б) $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$.

7. Найти

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|}$.

8. Найти наибольший объем треугольной пирамиды $MABC$, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($|AB|=|BC|$), если $[MB]\perp(ABC)$ и $|MA|=\sqrt{3}$.

9. Вычислить объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$ и осью абсцисс, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Груз массой $m=50$ кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы $F=500$ Н, направленной под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}5$. Определите ускорение движения груза.

2. Шарик, привязанный нитью к подвесу, описывает в горизонтальной плоскости окружность, имея постоянную скорость. Определите скорость шарика и период его вращения по окружности, если длина нити $l=1$ м, и ее угол с вертикалью составляет $\alpha=45°$.

3. Деревянный брусок лежит на наклонной плоскости. С какой силой нужно прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он оставался на ней в покое? Масса бруска $m=4$ кг, длина наклонной плоскости $l=1$ м, высота $h=0{,}6$ м. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu=0{,}4$.

4. Два шара массой $m_1=4$ кг и $m_2=6$ кг скреплены стержнем, масса которого $m_3=2$ кг. Определите положение общего центра масс, если радиус первого шара $R_1=6$ см, второго $R_2=8$ см, длина стержня $l=30$ см.

5. Тело массой $m=100$ кг поднимают постоянной силой на высоту $h=15$ м в течение $t=10$ с. Определите работу этой силы. Начальная скорость тела равна нулю.

6. Объем пузырька воздуха по мере всплывания его со дна озера на поверхность увеличивается в три раза. Какова глубина озера?

7. Стальной брус при температуре $t_1=0°$C помещен вплотную между каменными неподвижными стенами. Найдите напряжение материала бруса при температуре $t_2=20°$C. Коэффициент линейного расширения стали $\alpha=1{,}1\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$; модуль Юнга $E=2\cdot10^{11}$ Н/м^2.

8. На окружности радиусом $R=6$ см на одинаковом расстоянии друг от друга расположены три заряда: $q_1=q_2=2/3\cdot10^{-8}$ Кл и $q_3=-2/3\cdot10^{-8}$ Кл. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.

9. Два проводника, соединенных параллельно, имеют сопротивление $R_1=6$ Ом и $R_2=10$ Ом. При прохождении через них тока в первом проводнике выделяется количество теплоты $Q_1=4\cdot10^4$ Дж. Определите, какое количество теплоты выделится за это время во втором проводнике и в обоих проводниках, соединенных последовательно (при том же напряжении).

10. Вогнутое зеркало дает увеличенное изображение. Увеличение $\Gamma=3$. Расстояние между предметом и его изображением $l=30$ см. Определите фокусное расстояние зеркала.

Публикацию подготовили
Ю. Мещеряков, Ю. Морозов, В. Смирнов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Рабочий A может окончить некоторую работу на 5 дней позже, чем рабочий B, и на 9 дней позже, чем рабочий C. Рабочие A и B, работающие вместе, могут окончить эту работу за столько дней, за сколько ее может закончить рабочий C. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может закончить эту работу?

2. Решите уравнение

$$\sin 2x-\sin x=\cos x-\frac{1}{2}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\ln(2x)-x^2+x$ на промежутке $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

4. Вычислите (сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-\frac{x^2}{2}$,

$y=2-x$, $y=\frac{1}{2}$.

5. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной b, а одно из боковых ребер образует равные углы и со сторонами основания. Известно, что в параллелепипед можно вписать шар, касающийся всех его граней. Найдите длину бокового ребра параллелепипеда и радиус вписанного шара.

Вариант 2

1. Определите бесконечную геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма равна 0,125 суммы прогрессии, составленной из квадратов ее членов.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 2x}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(x+\frac{5}{3}\right)=1-\log_2 3x.$$

4. Вычислите (сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=4-x$, $x=1$.

5. В сферу вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписана правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания принадлежат боковым ребрам пирамиды. Длина высоты призмы равна b, а ребро ее основания имеет длину $2b$. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это наименьшее значение радиуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела брошены с одной и той же скоростью под углом α и $(\pi/2-\alpha)$ к горизонту. Определите отношение наибольших высот подъема этих тел.

2. Чаша в форме полусферы радиусом $R=0{,}8$ м вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Вместе с чашей вращается шарик, лежащий на ее внутренней поверхности. Расстояние от шарика до нижней точки чаши равно ее радиусу. Определите угловую скорость вращения чаши.

3. Из баллона объемом $V=10^{-3}$ м³, наполненного водородом, происходит утечка газа. Вначале давление в баллоне было $p_1=1{,}5\cdot10^7$ Па, а температура $t_1=17$°C. Через некоторое время давление упало до $p_2=1{,}2\cdot10^7$ Па, а температура повысилась до $t_2=27$°C. Найдите массу вытекшего газа. Молярная масса водорода $\mu=2\cdot10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

4. Сосуд с маслом, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon=5$, помещен в вертикальное однородное электрическое поле. В масле находится во взвешенном состоянии алюминиевый шарик диаметром $d=3$ мм, имеющий заряд $q=10^{-7}$ Кл. Определите напряженность электрического поля, если плотность алюминия $\varrho_a=2{,}6\cdot10^3$ кг/м³, а масла $\varrho_м=0{,}9\cdot10^3$ кг/м³.

5. Никелирование пластины с поверхностью $S=100$ см² продолжается $t=4$ ч при токе $I=0{,}4$ А. Атомная масса никеля $A=58{,}7\cdot10^{-3}$ кг/моль, его валентность $n=2$, а плотность $\varrho=8{,}9\cdot10^3$ кг/м³. Определите толщину слоя никеля, который покроет за это время пластину. Постоянная Фарадея $F=9{,}65\cdot10^4$ Кл/моль.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}05$ Тл находится проволочный контур, плоскость которого перпендикулярна магнитному полю. Площадь контура $S=20$ см². Контур присоединен к баллистическому гальванометру. При повороте контура в положение, когда его плоскость параллельна магнитному полю, через гальванометр проходит заряд $q=2\cdot10^{-4}$ Кл. Найдите сопротивление всей цепи.

7. На нижнюю поверхность горизонтальной плоскопараллельной пластины с показателем преломления $n=1{,}5$ нанесли черную точку. Наблюдатель, смотрящий сверху, видит эту точку на расстоянии $l=2$ см от верхней поверхности. Определите толщину пластины.

8. Высота предмета $H=5$ см. Выпуклая линза дает на экране изображение этого предмета высотой $h_1=15$ см. Не трогая линзы, предмет отодвинули на $l=1{,}5$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение предмета, но теперь — высотой $h_2=10$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Радиус первой орбиты электрона в атоме водорода $r_1=0{,}53$ Å. Найдите напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на этой орбите. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м (1 ангстрем = 1 Å = 10^{-10} м.)

10. Определите энергию, которая выделяется при делении одного ядра урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при делении всех ядер, содержащихся в уране массой $m=1$ г, выделяется энергия $E=8{,}2\cdot10^{10}$ Дж. Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили
Н. Гладков, Л. Паршев

2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В конусе сумма длин высоты и образующей равна 4 дм. Какова должна быть длина образующей конуса, чтобы его объем был наибольшим?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^3-x$ в точке с абсциссой, равной (-1). Вычислите площадь фигуры, ограниченной этой касательной и графиком функции.

3. Решите уравнение

$$1+2\cdot\log_{x+2}5=\log_5(x+2).$$

4. Представьте в виде произведения $1-\cos 1+\sin 1$.

Вариант 2

1. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой апофема $2\sqrt{3}$ дм.

2. Найдите числа A и B такие, чтобы функция вида $f(x)=A\cdot\sin 2x+B$ удовлетворяла условиям $f'(0)=4$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx=3$.

3. Решите неравенство

$$\log_x 2\cdot\log_{2x} 2\cdot\log_2(4x)\geqslant 1.$$

4. Решите уравнение

$$4\sin^4 x+\sin^2 2x=1.$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Архимедова сила для жидкостей и газов.

2. Фотоэлектрический эффект. Исследования А. Г. Столетова по фотоэлектрическому эффекту. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна. Фотоэлементы и их применение.

3. В сосуд, содержащий $m_1=500$ г воды при температуре $t=15°\text{C}$, бросили $m_2=50$ г мокрого снега. Температура воды в сосуде понизилась на $\Delta t=5°\text{C}$. Сколько воды было в снеге? Потерями тепла пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

4. Какого сечения надо взять медный провод для устройства линии от электростанции до потребителя, расположенного на расстоянии $l=1$ км, чтобы передать потребителю мощность $P=8$ кВт? Напряжение на станции $U=130$ В, допустимая потеря напряжения на линии $k=8\%$. Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м.

Вариант 2

1. Сложение сил. Момент силы. Условие равновесия тела с неподвижной осью вращения.

2. Явление термоэлектронной эмиссии. Электрический ток в вакууме. Электронные лампы — диод и триод. Использование диода для выпрямления переменного тока. Электронно-лучевая трубка.

3. Полый шар с жесткой оболочкой, масса которой $m=10$ г, наполнен водородом. Объем водорода $V=10$ л. Температура водорода и окружающего шар воздуха $t=0°\text{C}$. Найдите давление водорода в шаре, если результирующая подъемная сила шара равна нулю. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, молярная масса воздуха $\mu_в=29\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

4. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1=20$ см и $F_2=10$ см. Расстояние между линзами $l=30$ см. Светящаяся точка находится на расстоянии $d=30$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

Вариант 3

1. Абсолютная и относительная влажность.

2. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры излучения. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Пуля массой $m=10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v=600$ м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой $M=10$ кг и застряла в нем, углубившись на $l=20$ см. Найдите среднюю силу сопротивления дерева движению пули.

4. Однородный медный шар диаметром $d=1$ см помещен в масло. Плотность масла $\rho_0=800$ кг/м^3. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Напряженность электрического поля направлена вертикально вверх и равна $E=36\,000$ В/м. Плотность меди $\rho=8600$ кг/м^3.

Вариант 4

1. Тепловые двигатели. Физические основы их работы. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2. Электролиз. Законы Фарадея для электролиза.

3. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha=30°$. По ней пускают снизу вверх тело, которое в течение $t_1=2$ с проходит расстояние $l=16$ м, после чего соскальзывает вниз. Сколько времени длится соскальзывание тела вниз? Каков коэффициент трения между поверхностью и телом?

4. Высота пламени горелки $h=2{,}5$ см. Линза дает на экране изображение этого пламени высотой $H_1=7{,}5$ см. Не трогая линзы, горелку отодвинули на $l=2$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение пламени, но теперь высотой $H_2=5$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 5

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Понятие об абсолютном нуле температуры. Абсолютная температурная шкала. Уравнение состояния идеального газа.

2. Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, фотоэмульсионный метод.

3. На гладкой горизонтальной плоскости лежали два шара, между которыми находилась сжатая пружина. Затем пружине дали возможность распрямиться, вследствие чего шары приобрели некоторые скорости. Вычислите их, зная, что массы шаров равны $m_1=2$ кг и $m_2=4$ кг, а энергия сжатой пружины $E=6$ Дж. Массу пружины не учитывать.

4. Два резистора сопротивлением $R=200$ Ом каждый подключаются к источнику тока сначала последовательно, а затем параллельно. Мощность, выделяемая на каждом резисторе, оказалась одинаковой в обоих случаях. Найдите ЭДС источника, если при последовательном соединении резисторов ток в цепи $I=0{,}5$ А.

Публикацию подготовили
Б. Алешин, М. Блохина

Московский технологический институт легкой промышленности

Математика

Письменный экзамен

Вариант

1. Упростите и вычислите при $x=3$ выражение
$$\frac{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}+\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}{1+\sqrt[6]{x}}\cdot\sqrt{x}.$$

2. Определите значение первого члена арифметической прогрессии, если ее разность составляет 25% от значения последнего члена, являющегося девятнадцатым. Значение разности прогрессии равно 12.

3. Решите уравнение
$$\frac{x^2-3{,}5x+1{,}5}{x^2-x-6}=0.$$
Ответ запишите в виде десятичной дроби.

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

5. Решите уравнение
$$x-1=\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее целое положительное значение x, удовлетворяющее неравенству
$$\sqrt{x^2+16x+64}>20.$$

7. Из A в B со скоростью 3,6 км/ч вышел пешеход; через 1 ч 15 мин навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 4,8 км/ч. Чему равно расстояние AB, если второй пешеход прибыл в A одновременно с приходом первого в B?

8. Три пионерских звена собрали для библиотеки 65 книг. Первое звено собрало на 10 книг меньше, чем второе, а третье — 30% того числа книг, которые собрали первое и второе звено вместе. Сколько книг собрало второе звено?

9. В магазин привезли 1600 кг яблок. В первый день было продано 30% всех яблок. Во второй день — 40% от оставшегося на второй день количества яблок. В третий день было продано 25% от оставшегося на третий день количества яблок. Сколько яблок осталось в магазине после трех дней продажи?

10. Решите уравнение
$$5^{2x}\cdot6^{2x}=900.$$

11. Решите уравнение
$$\log_4 2^{4x}=2^{\log_2 4}.$$

12. Найдите целое число, удовлетворяющее неравенству
$$\log_{0.3}(4x+1)<\log_{0.3}(x^2+4).$$

13. Упростите выражение
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin(x+60^\circ)}$$
до числового ответа с двумя знаками после запятой, учитывая правила округления.

14. Вычислите без таблиц с тремя знаками после запятой
$$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$$

15. Найдите корень уравнения
$$3\operatorname{tg}^2 2x+\sqrt{3}\operatorname{ctg}(270^\circ+2x)=0,$$
принадлежащий интервалу $]0^\circ, 90^\circ[$; вычислите его в градусах.

16. Найдите наименьший корень уравнения
$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}4x=0,$$
принадлежащий интервалу $]0^\circ; 90^\circ[$; ответ запишите в градусах.

17. Определите периметр трапеции с отношением оснований 8:3, если тангенсы углов при большем основании равны 4/3 и 3/4, а высота трапеции равна 12 единицам.

18. В круг вписаны правильный треугольник и квадрат. Найдите с точностью до третьего знака после запятой, используя правила округления, отношение площади треугольника к площади квадрата, приняв $\cos 30^\circ=0{,}866$

19. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если известны ее объем 36 и высота 4.

20. Определите объем шара, вписанного в цилиндр, высота которого равна диаметру основания. Объем цилиндра 128π. Принять $\pi=3{,}14$. Ответ запишите в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой, используя правила округления.

Публикацию подготовил *В. Юргов*

Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через вершину конуса под углом φ к его основанию проведена плоскость сечения. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно d и составляет половину образующей. Найдите объем конуса

2. Решите уравнение
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi-\sin^2 x\right).$$

3. Решите уравнение
$$\lg(3^{2\sqrt{x+5}-x}-4)=1-\lg 2.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$ и $y=3+4x-x^2$.

Вариант 2

1. Высота правильной треугольной призмы равна h. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол α. Найдите полную поверхность призмы.

2. Решите неравенство

$$1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.$$

3. Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$ и $y=0$.

4. Докажите тождество

$$\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$$

Задачи устного экзамена

1. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна —22. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 3069?

2. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-2)}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5-\log_2 x}=3-\log_2 x.$$

4. Найдите решения уравнения $\cos^2 x=1$, для которых $x^2<20$.

5. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha$ удовлетворяет условию

$$25\cos^2\alpha+5\cos\alpha-12=0$$

и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

6. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x+5}+\frac{x}{x-1}<\frac{2x^2+5x}{x^2+4x-5}.$$

7. На кривой $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ найдите точку, касательная в которой параллельна прямой $y=2x-1$.

8. Точка движется по закону $s(t)=-2t^2+8t+7$ до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. Найдите пройденный при этом путь.

9. Вычислите интеграл $\int\limits_0^3(3x-x^2)\,dx$ и объясните его геометрический смысл.

10. Даны точки $A(2;1;-1)$, $B(3;2;-1)$ и $C(3;1;0)$. Найдите величину угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Публикацию подготовил

Э. Поповский

Плоскость в пространстве

(Начало см. на с. 38)

На этот раз искомый угол α мы найдем при помощи угла β между вектором, перпендикулярным к (BC_1D), и вектором $\vec{BD_1}$. По определению («Геометрия 9—10», § 37) $0°\leqslant\alpha\leqslant90°$. Очевидно (рис. 3 на с. 39), $\alpha=90°-\beta$ или $\alpha=90°-(180°-\beta)=\beta-90°$. Поэтому $\sin\alpha=|\cos\beta|$. Ответ. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Задача 9 (МИФИ, 1981). *Уравнения плоскостей* α *и* β *есть* $2x+3y+4z-8=0$ *и* $4x+y+3z-6=0$, $p=\alpha\cap\beta$. а) *Определите координаты точки пересечения прямой* p *с плоскостями* xOy *и* yOz. б) *Определите величину угла между прямой* p *и плоскостью* xOz.

Координаты точки $A=p\cap xOy$ являются решением системы

$$\begin{cases}2x+3y+4z-8=0\\4x+y+3z-6=0\\z=0.\end{cases}$$

Координаты точки $B=p\cap yOz$ — решением системы

$$\begin{cases}2x+3y+4z-8=0\\4x+y+3z-6=0\\x=0.\end{cases}$$

Теперь, если α — искомый угол и β — угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{n}=(1;0;1)$, то $\sin\alpha=|\cos\beta|$. Ответ. а) $A(1;2;0)$, $B(0;0;2)$. б) $\arcsin\frac{2}{3}$.

Упражнения

1 (МИНХ, 1980). Точка $P(2;-1;1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости.

2 (МИНХ, 1980). Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2;-3;3)$ параллельно плоскости xOy.

3 (МИНХ, 1979). Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;0;0)$ и $B(0;0;4)$ и параллельной оси Oy.

4 (МЭСИ, 1981). Вычислите расстояние от плоскости $2x+2y-z+15=0$ до сферы $x^2+y^2+z^2-4=0$.

5 (МИФИ, 1978). Даны четыре точки: $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. а) Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости. б) Определите величину угла между прямыми (AC) и (BD).

6 (МИСиС, 1980). В пространстве даны векторы $\vec{MA}=(2;1;-1)$, $\vec{MB}=(-2;3;5)$ и $\vec{MC}=(3;5;1)$. Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями, проходящими, соответственно, через векторы $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ и $\vec{MA}$, $\vec{MC}$.

«Советы» абитуриентам

Поступление в вуз состоит из двух событий: первое — выбор института, второе — сдача вступительных экзаменов.

Выбор института

Здесь следует искать золотую середину между возможностью осчастливить человечество на выбранном поприще и желанием заниматься делом, интересным себе самому. В идеальном случае желание и возможность совпадают. Рассмотрим пример, когда они, казалось бы, противоречат друг другу.

Ваша способность читать стихи в манере Качалова и говорить голосом Папанова ясно указывают дорогу на театральные подмостки. А вы во время чтения баллады Жуковского представляете себе крыло самолета и формулу другого Жуковского. И вообще вам нравится складывать, вычитать, умножать, делить, извлекать корни, логарифмировать и вычислять проценты. В этом случае можно порекомендовать институт, готовящий специалистов по бухгалтерскому учету для культурно-просветительных учреждений.

Выбор вуза можно производить на основе опроса общественного мнения — в масштабах семьи, класса, школы и т. п. Причем, если вам все одинаково интересно, то поступайте в тот институт, который рекомендует большинство опрашиваемых, а если все одинаково неинтересно — то не утруждайте себя сдачей вступительных экзаменов.

Экзамены

При сдаче экзамена в принципе возможны следующие четыре ситуации.

1. Экзаменуемый и экзаменатор хорошо знают вопрос. Этот случай встречается достаточно редко, поэтому его рассмотрение интереса не представляет. Экзаменуемый рассказывает, экзаменатор слушает и они расстаются довольные собой и друг другом.

2. Экзаменуемый и экзаменатор плохо знают вопрос. Что будет говорить при этом абитуриент, существенного значения не имеет. Важно только не отклоняться от темы. При ответе необходимо внимательно следить за выражением лица экзаменатора. Ответ следует закончить за мгновение до того, как в его глазах промелькнет понимание или, боже сохрани, интерес.

При ответе не следует опровергать общеизвестные истины. Например, не нужно долго настаивать на том, что сумма углов треугольника больше 180°. После непродолжительной дискуссии согласитесь с мнением экзаменатора. И трижды подумайте, прежде чем говорить, что вы имели в виду треугольник на сфере, так как экзаменатор может заинтересоваться сферической геометрией.

При ответе на дополнительные вопросы будьте осторожны с фразой: «У нас в учебнике этого нет». Экзаменатор может вытащить учебник и вы окажетесь в невыгодном положении — экзаменатор сможет пользоваться учебником, а вы — нет.

3. Экзаменуемый знает вопрос хорошо, а экзаменатор плохо. Случай встречается так редко, что еще ждет своего исследователя. Абитуриенту можно рекомендовать рассказать только самую суть, не останавливаясь на подробностях, чтобы не привить экзаменатору комплекса неполноценности.

4. Экзаменуемый знает вопрос плохо, а экзаменатор хорошо. Наиболее часто встречающаяся ситуация.

Если вашей целью является тройка, то попытайтесь убедить экзаменатора, что заданный вопрос — ваш любимый и вы знаете так много, что «жаль драгоценного времени уважаемого экзаменатора». Кроме того, вам «мешает говорить радость по поводу того, что на вступительных экзаменах выпала возможность побеседовать со специалистом на свою любимую тему». Лучше всего заставить экзаменатора высказаться по данному вопросу, а вам в этом случае надо только восторженно поддакивать.

Если вам не удалось убедить экзаменатора в своей заинтересованности данным вопросом — попытайтесь его разжалобить. Но плакать не надо — экзаменатор и не такое видел. Вы можете сказать, что этот институт закончили ваши прадедушка, дедушка, бабушка, отец, мать и два дяди (здесь можно показывать семейные фотографии и свою в детстве), что вся семья собралась сейчас у выхода и ждет вашей высокой оценки. К хорошему эффекту приводит фраза: «Не можете же Вы поставить мне двойку в той самой аудитории, в которой познакомились мои дедушка с бабушкой!»

Получить четыре при рассматриваемой ситуации гораздо труднее, чем три. Если экзаменатор хочет поставить вам двойку или тройку — попросите дополнительный вопрос и надолго задумайтесь. Когда экзаменатор снова подойдет к вам с вопросом «Ну как?»— махните рукой и с сожалением (обязательно с сожалением!) выдавите: «Ладно, ставьте четыре». Иногда ставят.

Пятерку в рассматриваемой ситуации можно получить очень редко и только на первом экзамене. Магическая фраза звучит так: «Я знаю, что все равно не пройду по конкурсу, но я не хочу позора. Пусть у меня будет хотя бы одна пятерка». Попытка на следующем экзамене убедить экзаменатора, что нехорошо ставить отметку, отличную от 5, после того как «Ваш коллега высоко оценил мои знания на предыдущем экзамене», к желаемому эффекту не приводит.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные ситуации. Ваша задача теперь состоит только в том, чтобы определить, к какому именно случаю следует отнести вашу ситуацию. Кстати, если вы быстро и безошибочно определяете уровень знаний экзаменатора,— может быть, вам лучше стать психологом или криминалистом.

Мы надеемся, что при поступлении в вуз вам не придется вспоминать наши рекомендации, приводимые в пунктах 2, 3, 4.

Ни пуха, ни пера!

П. Бернштейн

Г. Звенигородский

VI Всесоюзная летняя школа юных программистов

Уже дважды в нашем журнале публиковались материалы о Всесоюзной летней школе юных программистов (1979, № 12 и 1980, № 12). Сегодня мы публикуем рассказ об очередной Летней школе, проводившейся с 25 июля по 10 августа 1981 г. Вместе с лучшими учениками Заочной школы программирования на нее были приглашены победители конкурса, объявленного нашим журналом в № 1 за 1981 г.

Половину контингента Шестой школы составляли ребята, уже знакомые с техническими возможностями Вычислительного центра по прошлой Летней школе и почти год работавшие над программами, которые им хотелось опробовать на ЭВМ за две короткие недели Летней школы. А среди «новичков» большинство составляли призеры конкурса программистских работ («Квант», 1981, № 1). Не удивительно поэтому, что общий уровень Летней школы намного вырос.

Как и в прошлые годы, научная конференция Летней школы проходила в два приема: 28 июля выступали докладчики, имевшие возможность еще до Летней школы отладить на ЭВМ свои программы, а 7 августа — те, кто смог поработать с машиной только во время Летней школы.

Научим ЭВМ учебным языкам!

Сильнейшие работы школьников были посвящены задачам системного программирования; в основном описывались реализации учебных языков. Новосибирские десятиклассницы *Наташа Глаголева* и *Оля Хорошевская* рассказали о новых, самостоятельных реализациях языков Робик и Рапира. Эти языки (и имена докладчиц) хорошо знакомы читателям нашего раздела. Девятиклассник *Женя Забокрицкий* (Ленинград) за время Летней школы успел разработать на языке Алгол-ГДР интерпретатор команд учебной ЭВМ mix, описанной Д. Кнутом в книге «Искусство программирования». *Феликс Толстов* (Свердловск, 7 кл.) рассказал о двух интерпретаторах для машины Поста: один из них он разработал в Свердловске (на ЭВМ МИР-2, язык аналитик), а второй успел написать и отладить в Новосибирске (ЭВМ БЭСМ-6, язык сетл). *Ася Салихова* (Новосибирск, 10 кл.) рассказала о первом этапе реализации учебного языка форс-1 для студентов, разработанного в Московском университете, а *Миша Черкашин* (Обнинск, 8 кл.) подготовил комплект процедур для работы с текстами в учебных программах на фортране.

Конечно, не все системы, реализацией которых занимались школьники, предназначены для обучения. *Виталий Цикоза* и *Женя Налимов* (Новосибирск, 10 кл.) занимались вполне производственным, хотя и довольно необычным языком, описывающим интегральную микросхему. И совсем уж экзотическим языком занимался *Женя Каленкович* (Новосибирск, 10 кл.): язык этот был предназначен для анализа музыкальных произведений.

Программа для микроЭВМ

Наш журнал уже не раз писал о том, как быстро возрастает роль микроЭВМ в самых разных областях применения вычислительной техники. Но писать для этих машин программы куда труднее, чем для машин других классов. Большие операционные системы и трансляторы с языков высокого уровня здесь развернуть трудно — памяти не хватает. Программист, переходящий с больших ЭВМ на «микро», лишается преимуществ языков высокого уровня. Но это не испугало юных программистов — немало работ было посвящено именно микроЭВМ. *Женя Яблонский* и *Олег Бойченко* (Москва, 10 кл.) разработали для такой машины программу редактирования текста на экране терминала. *Вита Волкова* (Новосибирск, 7 кл.) подготовила по заказу одного из отделов ВЦ СО АН комплекты процедур для вычисления стандартных математических функций: синуса, косинуса, логарифма и т. д. Для каждой функции она составляла несколько разных процедур: с использованием ряда Тейлора, многочленов Чебышева, с применением формул приведения или без них. А новосибирские школьницы *Аня Вайнштейн* (6 кл.), *Света Урюпина* (7 кл.) и *Женя Васенева* (8 кл.) провели большую работу по проверке точности и скорости работы этих процедур.

Павел Земцов (Новосибирск, 7 кл.) доложил о реализованной им на «Электронике-60» графической системе, напоминающей по возможностям «НУ ПОГОДИ», о которой мы рассказали в «Кванте» № 12 за 1980 г. А наш гость из Чехословакии — выпускник гимназии *Рихард Гавлик* рассказал о целой серии графических и игровых программ для мини-ЭВМ. И еще одну графическую программу — «Дисней» — описал в докладе *Леонид Кузин* (Новосибирск, 10 кл.). Программа позволяет формировать рисунки из звездочек или любых других символов на тех ЭВМ, где нет графопостроителя.

ЭВМ в школе, в цехе, в лаборатории...

Многие школьники посвятили свои доклады решению задач «промышленного» направления. *Катя Левина* (Саранск, 10 кл.) подготовила две программы для расчета профиля кулачковых механизмов. Семиклассник *Максим Гусев* и восьмиклассница *Лариса Жма-*

кина из Московской областной школы музыкантских воспитанников представили тщательно разработанную программу для контроля за сбытом электроэнергии: машина производит все расчеты с абонентами и даже сама печатает письма-напоминания для должников.

Программа *Марины Глушковой* (Омск, 9 кл.) позволяет рассчитать нормативную трудоемкость изготовления детали и определить расценку на ее изготовление. *Женя Музыченко* (Новосибирск, 8 кл.) подготовил программу для начисления зарплаты педагогам, с учетом числа учебных часов по расписанию, количества замен уроков, изменения ставки в зависимости от педагогического стажа и т. д. А самая юная участница школы — десятилетняя москвичка *Маша Бубнова* — составила программу, которая проверяет качество поверхности деталей и выдает рекомендации по их дальнейшей обработке.

Несколько докладов было посвящено моделированию химических процессов. Впрочем, только один из них, подготовленный группой десятиклассниц из Куйбышева (докладывала *Наташа Наварова*), имел производственное значение. Три другие программы предназначались для решения химических уравнений по правилам, изучаемым в школе. Самой интересной из них была программа *Гули Абдрахмановой* (пос. Курайли Актюбинской области, 10 кл.) «Моделирование гидролиза солей».

Больше всего докладов собрали две заключительные секции конференции: «Применение ЭВМ в учебном процессе» и «Моделирование игр». Многие доклады были подготовлены новичками. Машину обучали самым разным играм — от угадывания двузначного числа до международных шашек и даже шахмат. А иногда машина сама начинала обучать и экзаменовать участников и даже преподавателей Летней школы. Диалоговую программу, проверяющую знания по разным предметам, разработала уральская делегация (докладывал *Андрей Габбасов*, Уфа, 9 кл.).

3,14159265358979323846264338327950288419...

А теперь несколько слов о докладах, ближе к «чистой» математике, чем к программированию. *Сергей Баталов* (Арзамас, 10 кл.) выступал на конференции дважды. В первом докладе он рассказал о вычислении математических констант (π, e, $\lg e$) с высокой точностью. Англичанин Вильям Шенкс потратил 20 лет жизни на вычисление 707 десятичных знаков π, из которых только 527 оказались правильными. Шенкс опубликовал свои результаты в 1873 году. В наши дни десятиклассник Сергей Баталов затратил два месяца на разработку и отладку программы, а вычислительная машина — чуть больше часа на работу по этой программе. Результат — 50 тысяч знаков.

Во втором докладе Сергей рассказал о работе, выполненной за время Летней школы. Нашим читателям, вероятно, знаком трехчлен Эйлера x^2-x+41. При натуральных x от 1 до 40 значениями этого трехчлена будут простые числа. Сергей разработал программу для поиска других трехчленов, позволяющих получить подряд не менее 40 простых чисел. Работая с этой программой, он получил еще два трехчлена, формирующих по 40 чисел: трехчлен $4x^2-162x+1681$ позволяет получить те же числа, что и трехчлен Эйлера, но в другом порядке, а $9x^2-249x+1763$ выдает другую последовательность простых чисел.

Три десятиклассника — *Игорь Морылев* из Киева, *Леонид Либкин* и *Илья Шкроб* из Москвы, работая независимо друг от друга, решали одну и ту же задачу: обучить ЭВМ дифференцированию сложных функций, записанных в виде текстовых формул. Их программы, хотя и основаны на разных принципах, работают одинаково хорошо, и жюри конкурса так и не смогло отдать предпочтение какой-либо из них.

Летняя школа окончена — Летняя школа продолжается

...И вот догорел прощальный костер. 10 августа член-корреспондент АН СССР Андрей Петрович Ершов вручил награды победителям конкурса.

Но Школа на этом не закончилась!

Вместе с гостями Академгородка отправились в дальний путь две «десантные группы» новосибирцев. Отправились проводить занятия и конференции, которые стали прямым продолжением VI Летней школы.

В состав одной из таких групп вошли десятиклассницы *Наташа Глаголева* и *Аня Шкляева* и семиклассница *Вита Волкова*. Они поехали в пионерлагерь «Таежный», что в восьмидесяти километрах от Красноярска вниз по Енисею, где в это время проходила Краевая летняя школа по естественным наукам. Девочкам предстояло принять участие в организации факультатива по программированию для участников этой Школы, в проведении конференции школьников. Одиннадцать школьников стали участниками второй «десантной» группы, которая выехала в г. Ангарск (Иркутская область). Там состоялась встреча учащихся двух школ юных программистов — Ангарской и Новосибирской.

Ангарская школа юных программистов организована на базе Ангарского электромеханического завода (АЭМЗ) и межшкольного учебно-производственного комбината. Первые свои задачи ребята решают на ЭВМ «Минск-32», на ней они получают основные навыки операторской работы. Большой интерес вызвали у новосибирцев две программы, разработанные ангарчанами: с помощью одной из них «Минск-32» воспроизводит музыкальные мелодии, а результат работы другой программы — портрет Джоконды, нарисованный на АЦПУ.

Новосибирские школьники провели для ангарчан консультации по графической системе Шпага, рассказали о ее новых возможностях и помогли ребятам составить первые рисующие программы. В Ангарске пока нет своего графопостроителя и эти программы новосибирские школьники забрали с собой, чтобы поставить на ЭВМ, отладить и послать ангарским друзьям получившиеся рисунки.

Заочная физико-техническая школа при МИСиС

При Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов организуется новое отделение Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа. Занятия в ЗФТШ (МИСиС) начнутся с 15 октября 1982 года.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы будет организована следующим образом. Шесть-семь раз в год учащимся будут рассылаться контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные в ЗФТШ (МИСиС) контрольные работы будут проверяться прикрепленными преподавателями и, вместе с оценками и комментариями, отправляться учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов будут разосланы материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах обучение строится так, что студенты уже с 3—4 курса приобщаются к самостоятельной научной работе как на самих кафедрах института, так и в базовых академических и отраслевых научно-исследовательских институтах. Работая над курсовыми и дипломными работами, которые обычно входят в план научных исследований соответствующих кафедр, студенты широко используют возможности институтского вычислительного центра. Он оборудован мощными современными ЭВМ, позволяющими работать с ними в режиме прямого диалога с помощью дисплея.

Поступив в Московский институт стали и сплавов, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела и сверхпроводимости, созданием и исследованием современных сплавов с новыми физическими и химическими свойствами, металловедением, рентгенографией, физикой и химией поверхности, физикой полупроводников, вычислительной математикой и многими другими интересными и актуальными проблемами. В лабораториях МИСиС материалы с новыми свойствами исследуются в широком диапазоне температур — от окрестности абсолютного нуля до нескольких тысяч градусов — и давлений — от сверхвысокого вакуума до десятков тысяч атмосфер.

В 1982/83 учебном году в ЗФТШ (МИСиС) начинают работать восьмые и девятые классы. Для зачисления в них необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справки нужно выслать не позднее 1 октября по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ.

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, В-34, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

08, 12, 16, 17; *В. Криман* (Винница) 14, 16, 17; *С. Крюковский* (Владивосток) 12, 20, 22; *А. Кубышкин* (Киев) 08, 10, 15, 16, 18, 20; *А. Кудрявцев* (Нефтекамск) 08, 14, 20, 21; *А. Кузнецов* (Сыктывкар) 14; *О. Кузьмин* (Ташкент) 22; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 14, 17, 20, 22; *И. Ласкин* (Алексин) 10; *А. Латынин* (Киев) 09; *И. Липшиц* (Винница) 16, 17; *М. Маловичко* (Северодонецк) 08 — 10, 12, 16, 17; *Х. Матчанов* (Хорезмская обл. Уз. ССР) 09; *А. Миленин* (Люберцы) 09, 10, 12, 15 — 17; *А. Мильман* (Одесса) 16, 17; *А. Мингалеев* (Уфа) 09, 12; *В. Молчанов* (Киев) 12; *П. Морозов* (Тула) 14 — 17, 20 — 22; *Д. Мукушев* (с. Арнат Семипалатинской обл.) 16, 17; *Б. Мурзахметов* (Джезказган) 14, 18, 20; *Ю. Наливайко* (Краслава) 20; *К. Немченко* (Донецк) 08, 20; *К. Никамов* (Салават) 14 — 18, 20; *Л. Никитин* (Великие Луки) 08, 15, 18, 20, 22; *Е. Обелец* (Запорожье) 16, 17, 20; *Д. Овечкин* (Набережные Челны) 08, 16; *К. Панкратов* (Куйбышев) 18; *В. Пентегов* (Киев) 08 — 11, 12, 14 — 17, 20 ,22; *С. Пильтяй* (Ангарск) 08, 09, 12, 14, 16 — 18, 20, 22; *А. Пироженко* (Мытищи) 08 — 22; *Е. Поланкер* (Ереван) 16; *М. Половинченко* (Киев) 09, 14, 16; *И. Примак* (Винница) 14, 16; *М. Пустильник* (Свердловск) 09, 12, 17, 21, 22; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) 08 — 10, 12, 14 — 16, 18, 20 — 22; *М. Рахманов* (Новосибирск) 08, 09, 12, 15, 16, 20 — 22; *М. Розенвайн* (Киев) 09, 10, 16; *Л. Ростока* (Хуст) 10, 22; *Л. Салахова* (Сумгаит) 09, 17; *Ю. Самохин* (Москва) 08, 09, 16; *Д. Свирида* (Москва) 08 — 10, 12, 14 — 17, 20 — 22; *С. Сейдаханова* (Алма-Ата) 22; *Ф. Серженко* (Запорожье) 09, 10; *С. Симанов* (Долгопрудный) 20; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) 15, 16, 20, 22; *И. Сираков* (Ямбол, НРБ) 08, 09, 17, 20; *С. Сипливец* (Волгоград) 20, 22; *С. Сириченко* (Киев) 14, 18; *М Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) 08, 12, 20 — 22; *С. Смук* (Киев) 21; *И. Соколова* (Феодосия) 18; *С. Соломко* (Мелеуз) 08, 09, 12, 16; *Ю. Талденко* (Сумы) 08, 09, 12, 18, 21; *А. Терещенко* (Киев) 09, 12 — 18, 20, 22; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 08, 12, 14, 17, 18, 20; *О. Третьяков* (Омск) 09, 12, 15; *Г. Трунов* (Москва) 08, 09, 12, 15, 16; *Н. Федин* (Омск) 08, 14 — 16, 18, 20, 21; *В. Фельдман* (Саратов) 16, 21, 22; *А. Хельвас* (Киев) 09, 12, 16, 20, 22; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 12, 14, 15, 22; *Т. Христофорова* (Воронеж) 14; *С. Черкас* (Минск) 08, 20, 22; *С. Черниведкий* (Глазов) 16; *А. Шатов* (Киев) 08, 12, 14, 20 — 22; *Л. Шейнкман* (Москва) 17, 18; *Р. Шигалов* (Казань) 18; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз. ССР) 17, 20; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) 10, 16, 17; *А. Шугай* (Запорожье) 09, 14 — 16; *М. Шуклин* (Пермь) 08, 09, 12, 14, 17, 20, 21; *Ю. Щедрин* (Брянск) 14, 16, 22; *Б. Юдин* (Люберцы) 16, 20, 22; *В. Ярош* (Ленинград) 08 — 10, 14 — 16.

Ответы, указания, решения

Плоскость в пространстве

1. $2x-y+z-6=0$.
2. $z-3=0$.
3. $x+z-4=0$.
4. 3.
5. б) $\frac{\pi}{2}$.

6. $\arccos\frac{3\sqrt{330}}{55}$. Решение. В задаче, очевидно, подразумевается двугранный угол с ребром (MA), гранями которого являются полуплоскость плоскости MAB, содержащая точку B, и полуплоскость плоскости MAC, содержащая точку C (рис. 1). Чтобы найти нужный угол, спроектируем вектор $\vec{MB}$ на $\vec{MA}$:

$$\vec{MB_1}=\frac{|\vec{MB}|\cos(\widehat{\vec{MB},\vec{MA}})}{|\vec{MA}|}\vec{MA}. \qquad (*)$$

Домножая числитель и знаменатель на $|\vec{MA}|$, получаем $\vec{MB_1}=\frac{\vec{MB}\cdot\vec{MA}}{|\vec{MA}|^2}\vec{MA}=\frac{-6}{6}\vec{MA}=-\vec{MA}=(-2;-1;1)$ (таким образом, рисунок 1 оказался в каком-то смысле неверным: на самом деле, вектора $\vec{MB_1}$ и $\vec{MA}$ противоположно направлены; однако это никоим образом не влияет на верность равенства $(*)$); далее находим вектор $\vec{MB_2}=\vec{MB}-\vec{MB_1}=(0;4;4)$; тогда $\vec{MB_2}\perp\vec{MA}$ и точка B_2 лежит на грани рассматриваемого двугранного угла. Аналогично находим вектора $\vec{MC_1}=\frac{\vec{MC}\cdot\vec{MA}}{|\vec{MA}|^2}\vec{MA}=\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$ (таким образом, на рисунке 1 есть еще одна неточность: на самом деле, $|\vec{MC_1}|>|\vec{MA}|$; это опять-таки не влияет на верность наших выкладок; если у вас есть потребность, сделайте верный рисунок) и $\vec{MC_2}=\vec{MC}-\vec{MC_1}=\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$. Угол между векторами $\vec{MB_2}$ и $\vec{MC_2}$ — искомый. $\cos(\vec{MB_2},\ \vec{MC_2})=\frac{\vec{MB_2}\cdot\vec{MC_2}}{|\vec{MB_2}|\cdot|\vec{MC_2}|}=\frac{3\sqrt{330}}{55}$.

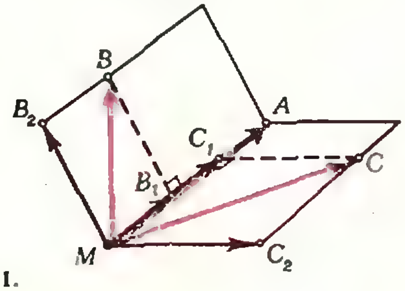


Рис. 1.

О сокращении показателей

1. $\left\{1, 5, \frac{191-\sqrt{281}}{50}\right\}$. Указание. $\sqrt{u^2}=|u|$.

2. $\{-7, 1\}$. Указание. $\sqrt[6]{u^2}=\sqrt[3]{|u|}$; $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$.

3. $\left[-2; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$. Указание. $2(2\pm\sqrt{4-x^2})=(\sqrt{2+x}\pm\sqrt{2-x})^2$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-|\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}|<\sqrt{2(2x^2+3x+1)};$$

которое равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 2\sqrt{2-x}<\sqrt{2(2x^2+3x+1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ 2\sqrt{2+x}<\sqrt{2(2x^2+3x+1)}. \end{cases}$$

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{3}{8}r$. Указание. См. рис. 2.

2. $\vec{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. Указание. См. § 22 пособия «Геометрия 9—10».

3. $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

4. $\max\limits_{[1;4]} S(c)=S(2)=9$, $\min\limits_{[1;4]} S(c)=S(1)=1$.

Вариант 2

1. $\frac{45}{4}\pi R^2$.

2. $\left]\frac{3-\sqrt{13}}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3. $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; -\frac{7}{6}\pi+\pi k\right)\right\}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

4. $\sqrt[3]{100}$.

Вариант 3

1. $k\leqslant 0$ и $k=4e$.

2. $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

3. $\left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]2\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$.

4. 3 см^2.

Вариант 4

1. $\frac{2}{3}b^3\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

2. $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\frac{\pi}{5}l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

3. $\left]0; \frac{1}{10}\right] \cup [10; +\infty[$.

4. 2.

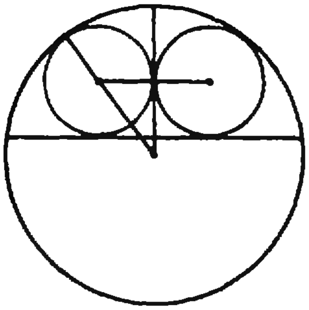


Рис. 2.

Задачи устного экзамена

2. $a\in]-1; 1[$, $b\in]-1; 1[$. 3. $\frac{943}{81}$. 4. а) 2. Указание. Нарисуйте график функции $y=x^4+x^2-10$; б) 4; в) 4. 5. а) $a<-3$; б) $0<a<\frac{4}{e^2}$; в) $0<a<\frac{1}{e}$. 6. а) $\{1, 11\}$; б) $\left\{\frac{1}{10}, 2, 1000\right\}$; в) $\left\{-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}, \pm\frac{2}{3}\pi-2\pi k\ (k\in\mathbf{N}), \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\ (l\in\mathbf{N})\right\}$. 7. а) $]0; 3] \cup [4; 5]$; б) $[-2; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2]$. 8. $\{(-1; 0), (1; 0), (2; -1), (2; 1), (3; -2), (3; 2)\}$. 10. Промежутки убывания $]-\infty; -2]$, $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; 2]$, промежутки возрастания $[-2; -\sqrt{2}]$, $[0; \sqrt{2}]$ и $[2; +\infty[$, точки минимума $x=-2$, $x=0$ и $x=2$, точки максимума $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$. 11. а) На $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$ возрастает, $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума, на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ убывает. б) Промежутки убывания $]0; 1[$ и $]1; e]$, $x=e$ — точка минимума, $[e; +\infty[$ — промежуток возрастания. 12. Указание. Исследуйте y'. 13. $\arccos\sqrt{\frac{4}{7}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\pm\sqrt{2}$. 15. 0. 16. $\frac{\pi}{2}$. 17. $\frac{2\pi}{9}(8-5\ln 3)$. 18. **Указание.** $\vec{MM_1}=\vec{NN_1}$. 19. Указание. $\vec{CA}+\vec{CB}=2\vec{CM}$. 20. Указание. Площадь треугольника $S=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{abc}{4R}$. 21. Указание. $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{ABC}$ (K — точка пересечения диаметра, проходящего через A, с окружностью). 24. Указание. $x^2+y^2+z^2$ — это квадрат расстояния от начала координат до точки $(x; y; z)$.

Ростовский государственный университет им. М. А. Суслова

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2\pi r}{\sin^2\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. Указание. Пусть O_1 — центр вписанной окружности, $O_1M\parallel AD$ (обозначения — на рис. 3), $MO_2\perp AB$; тогда O_2 — центр описанной окружности. $|AD|+|BC|=2|AB|$.

2. При $a<0$ искомых касательных не существует, при $a=0$ существует одна касательная $y=-2x$, при $a>0$ — две: $y=-2(\sqrt{a}+1)x+a$ и $y=-2(-\sqrt{a}+1)x+a$.

3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

4. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Вариант 2

1. $2\arcsin\frac{\sqrt{3\cos^2 a+1}}{2}$.

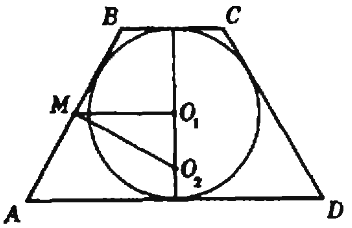


Рис. 3.

2. $\frac{5}{2}$ с.

3. $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\ x_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

4. $]3;\ 9[$.

Вариант 3.

1. $2\operatorname{arctg}\frac{r}{2H}$.

2. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

3. $[1;\,2[\ \cup\ ]2;\,3]$.

4. $f(x, y)=y+\sqrt{xy}$, $f(9;\ 0{,}04)=0{,}64$.

Вариант 4

1. $V=d^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\sqrt{\cos 2\alpha}$, объем максимален при $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $x_1=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k,\ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

3. $\left]-\frac{1}{2};\,-\frac{1}{4}\right]\cup\left]\frac{1}{2};\,1\right]$.

4. $\frac{2}{3}$.

Вариант 5

1. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

2. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_2=-\operatorname{arctg}3+\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

3. $\left]-\infty;\,-\frac{1}{2}\right]\cup[0;\,1]$.

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

3. $q=\frac{1}{3}$, $S_7=53\frac{79}{81}$.

4. 9.

5. $]0;\,27[$.

Вариант 2

1. $a^2\sin\alpha\cdot(1+\cos\alpha)$ см^2.

2. $\frac{2}{3}$.

3. $\{(3;\,9),\ (9;\,3)\}$.

4. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{21}-4)+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

5. $[-2;\,2[$.

Вариант 3

1. $a\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$.

2. Точки экстремума: $x=2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$ — точки максимума (в них $y=66$) и $x=\pi+2\pi l$ $(l\in\mathbf{Z})$ — точки минимума (в них $y=52$).

3. $5\frac{1}{12}$.

4. $\{(5;\,2)\}$.

5. $\left]\frac{2}{3}\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right[\ \cup\ \left]\frac{4}{3}\pi+2\pi l;\ 2\pi+2\pi l\right[\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

Вариант 4

1. $[A_1B_1]$ — средняя линия.

2. 36.

3. $\left\{(3;\,0),\ \left(-\frac{1}{3};\,-\frac{5}{3}\right)\right\}$.

4. $x_1=\pi+2\pi k,\ x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

5. $\left\{100,\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Физика

1. $\mu=\frac{h}{l+s}\approx 0{,}05$.

2. $H=2{,}5\ R=20$ м.

3. $\alpha_{\min}=\operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}=45^\circ$.

4. $h=H\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)=9$ см (здесь $\varrho_0=1$ г/см^3 — плотность воды).

5. $v=\sqrt{2(c(t_2-t_1)+\lambda)}\approx 366$ м/с.

6. $V_в=V\left(\frac{pT_в}{(p_0+\varrho gH)T}-1\right)\approx 4{,}3$ м^3 (здесь $p_0=10^5$ Н/м^2 — атмосферное давление).

7. $I=\mathcal{E}/R=3$А.

8. $I=\frac{P}{U_0(1-k)}=1{,}05$ А; $S=\frac{2P\varrho l}{k(1-k)U_0^2}\approx$ $\approx 3{,}6\cdot 10^{-6}$ м^2; $m=2\varrho_0 lS\approx 32\,256$ кг.

9. $H=nh=2{,}66$ м.

10. $\varphi=\frac{hc}{e\lambda}-\frac{A}{e}\approx 1{,}7$ В (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Ворошиловградский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко

Физика

1. $\frac{v_{ср}}{v_{\max}}=\frac{2sn}{v_{\max}}\approx 0{,}3$.

2. См. рис. 4.

3. На участке *1—2* совершаемая газом работа отрицательна ($A<0$) и от газа отводится некоторое количество теплоты окружающей среде ($Q<0$). Аналогично, на участке *2—3* $A>0$ и $Q>0$; на участке *3—1* $A=0$ и $Q<0$; в процессе *1—2—3—1* $A>0$ и $Q>0$.

4. $\Delta T=\frac{\pi M}{c\varrho Sl}\approx 5{,}6$ К.

5. В первом случае изменение тока ($\Delta I_1=4$ А) больше, чем во втором ($\Delta I_2\approx 0{,}34$ А). Чувствительность первой схемы равна $\left(\frac{\Delta I}{\Delta R}\right)_1=$

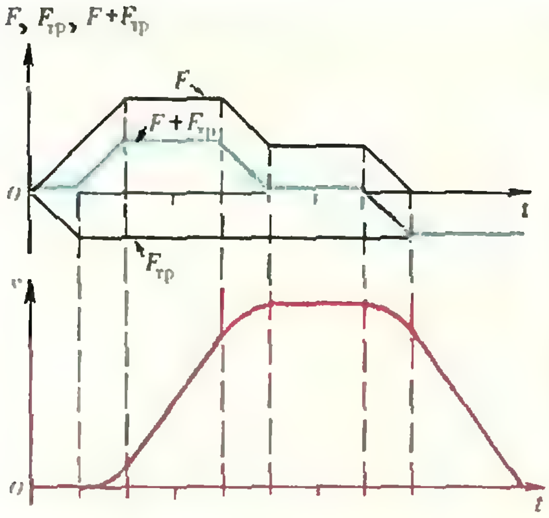


Рис. 4.

$=2$ А/Ом, второй — $\left(\frac{\Delta I}{\Delta R}\right)_2\approx 0{,}17$ А/Ом.

6. Сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи должны быть равны.

7. $E=mv^2/2\approx 2{,}8\cdot 10^{-18}$ Дж $>E_и$; следовательно, ионизация произойдет.

8. $T_1/T_2=B_2/B_1=2$.

9. $\frac{E_2}{E_1}=\frac{(F+l)^2}{F^2}=121$.

10. $N=\frac{\eta P t\lambda}{hc}\approx 8\cdot 10^{18}$ (здесь $t=1$ с и $P=75$ Вт).

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. 25%.
2. $\frac{a^2\cdot\sin\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)$.
3. $\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$.
4. Точка минимума $x=-1$, точка максимума $x=3$.
5. 4,5.

Вариант 2

1. 10 км/ч.
2. $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{4\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}$.
3. Точка минимума $x=3$.
4. $\frac{1}{2}$.
5. $\{3\}$.

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$.
2. $x_1=\frac{1}{8}\pi+\pi k$, $x_2=\frac{3}{8}\pi+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.
3. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $\frac{\pi\sqrt{3}}{108}a^3$. Указание. Возьмем на ребре SA произвольную точку K — центр основания конуса. Если в плоскости SAC провести через K перпендикуляр к SA и через точку M пересечении этого перпендикуляра с $[AC]$ провести прямую l, параллельную (BD), то плоскость, проходящая через (KM) и l, будет перпендикулярна $[SA]$ и, тем самым, будет плоскостью основания конуса. Под *окружностью, касающейся плоскости,* подразумевается окружность, имеющая с этой плоскостью одну общую точку. Очевидно, окружность Окр. $(K; |KM|)$ касается плоскости $ABCD$.
5. $]-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right]$. Указание.

Данное уравнение равносильно уравнению $|a^2x+1|+|a^3+a^2x|=(a^2x+1)-(a^3+a^2x)$. Уравнение $|u|+|v|=u-v$ равносильно системе

$$\begin{cases} u\geq 0\\ v\leq 0.\end{cases}$$

При $a\neq 0$ рассмотрите случаи $0<a<1$, $-1<a<0$, $a=-1$ и $a<-1$.

Вариант 2

2. $\{1\}$.
3. $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup[2;+\infty[$.
4. $(0;1)$ и $(-1;0)$.
5. $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$.

Вариант 3

3. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $(1;3)$.
5. $\arccos\sqrt{\frac{2}{6}}$. Указание. $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{ON}+\vec{NA}+\vec{OD})$.

Задачи устного экзамена

1. 36, 15. Решение. Любой общий делитель искомых чисел a и b является общим делителем чисел $НОК(a, 3b)=180$ и $a-b=21$. Поэтому числа a, b не имеют общих делителей $(\neq 1)$, кроме 3. Следовательно, общими делителями чисел a и $3b$ могут быть только числа 3 и 9. Легко видеть, что НОК двух чисел равно произведению любого из этих чисел на недостающие делители другого числа. Поэтому, если наибольший общий делитель чисел a и $3b$ равен 3, то $180=a\cdot\frac{3b}{3}$. Если наибольший общий делитель чисел a и $3b$ равен 9, то $180=a\cdot\frac{3b}{9}$. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} ab=180\\ a-b=21,\end{cases}$$

не имеющую целочисленных решений. Во втором случае получаем систему

$$\begin{cases} ab=540\\ a-b=21.\end{cases}$$

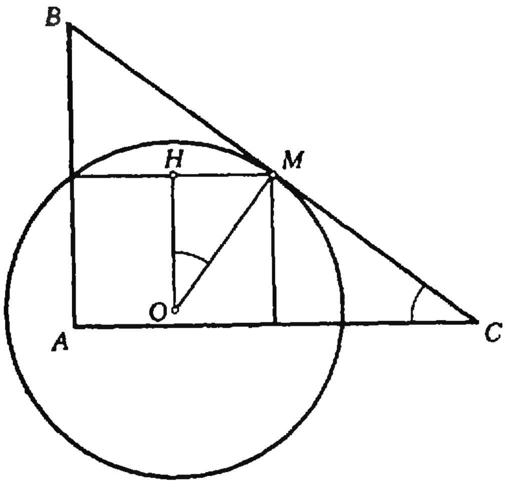


Рис. 5.

имеющую единственное решение $a=36$, $b=15$, удовлетворяющее всем условиям задачи.

2. $\{(8; -1)\}$. Указание. Из первого уравнения $\sqrt{x-y}<3$, из второго $x-y-9>0$, $x-y>9$, $\sqrt{x-y}>3$.

3. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 3x=-1\\ \sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)=-1.\end{cases}$$

4. $\frac{10\pi}{3}$ см. Указание. Данный треугольник ABC подобен треугольнику OHM (обозначения — на рис. 5).

5. $M\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Указание. Вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен биссектрисе первого координатного угла плоскости xOy.

Физика

1. $v(t)=x'(t)=-30t^4+30$; $a(t)=v'(t)=x''(t)=-120t^3$; $x(\tau)=24$ м; $v(\tau)=0$; $a(\tau)=-120$ м/с^2.
2. Утверждение верно.
3. $p=\frac{3\varrho_1\varrho_2 gh}{\varrho_1+2\varrho_2}\approx 7$ кПа.
4. $\Delta m=\frac{\varphi_1}{100\%}\frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_{н2}}{T_2}-\frac{p_{н1}}{T_1}\right)\approx 4{,}6$ кг.
5. $\Delta U=Q=\frac{3}{2}\frac{pV}{T}\Delta T\approx 155$ Дж.
6. $q=It/2=25$ Кл.
7. $I_к=\frac{\mathcal{E}I}{\mathcal{E}-IR}=0{,}21$ А.
8. $p=qBR\approx 1{,}3\cdot 10^{-18}$ кг·м/с; $E=q^2B^2R^2/(2m)\approx 1{,}3\cdot 10^{-10}$ Дж.
9. $f=\frac{dF}{d-F}=40$ см; изображение действительное, перевернутое и одного размера с предметом.
10. $\Delta E=hc\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\approx 13$ эВ.

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Вариант 1

1. 1. 2. $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. 3. $\{76\}$. 4. $\{1\}$. 5. $\{9\}$. 6. $\frac{3}{2}$. 7. 2. 8. 15. 9. 123. 10. 12.

Вариант 2

1. 67,5°, 90°. 2. 2. 3. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=2$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-2$. 4. $-\frac{3}{4}$. 5. 4,5. 6. 4.

Физика

1. $t=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2g_Л h}}{g_Л}=10$ с.
2. $\mu=\frac{mg}{F}=0{,}1$.
3. $v_т=\frac{m_ч v}{m_ч+m_т}=1{,}5$ м/с.
4. $h=\frac{4p}{\varrho g}=40$ м.
5. $Q=cm(T_к-T)+rm=268$ кДж.
6. Правилен первый ответ.
7. Напряженность электрического поля уменьшилась в 49 раз.
8. $P_1/P_2=0{,}1$.
9. $\lambda=\frac{hc}{W}=550$ нм.
10. $H=h\frac{F}{d-F}=1$ м.

Московский архитектурный институт

Математика

2. $\frac{\log_m A\cdot\log_n A\cdot\log_p A}{\log_{mnp} A}$. 4. а) $\{-41\}$; б) $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\pm\arccos\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi l$ $(k, l\in\mathbb{Z})$. 5. $\{(7; 5)\}$. 6. а) $\left]\frac{1}{4}; 3\right[$; б) $[-2; 2[$. 7. а) 2; б) $2\sin 2$. 8. $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{1}{2}\pi^2$.

Физика

1. $a=\frac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{m}\approx 6{,}3$ м/с^2.
2. $v=\sqrt{gl/\cos\alpha\sin\alpha}\approx 2{,}6$ м/с; $T=2\pi\sqrt{l(\cos\alpha)/g}\approx 1{,}7$ с.
3. $F=\frac{mg}{l}\left(\frac{h}{\mu}-\sqrt{l^2-h^2}\right)\approx 27{,}4$ Н.
4. Центр масс системы находится на $x=\frac{m_2(l/2+R_2)-m_1(l/2+R_1)}{m_1+m_2+m_3}=4{,}5$ см правее центра стержня.
5. $A=mh(g+2h/t^2)=15\,150$ Дж.
6. $h=\frac{2p_0}{\varrho g}\approx 20{,}4$ м (здесь $p_0=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

7. $\sigma=E\alpha(T_2-T_1)=4{,}4\cdot10^7$ Н/м².

8. $E=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0R^2}\approx3{,}3\cdot10^4$ В/м.

9. $Q_2=Q_1\frac{R_1}{R_2}=2{,}4\cdot10^4$ Дж;

$Q_3=Q_1\frac{R_1}{R_1+R_2}=1{,}5\cdot10^4$ Дж.

10. $F=\frac{\Gamma l}{\Gamma^2-1}=11{,}25$ см (заметим, что изображение может быть как действительным, так и мнимым).

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. A — за 15 дней, B — за 10, C — за 6.

2. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

3. $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}y=y(1)=\ln 2$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}y=y(2)=2(\ln 2-1)$.

4. $\frac{1}{24}$.

5. $\frac{b}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{2}\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}$. Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед и $\widehat{A_1AB}=\widehat{A_1AD}=\alpha$. Если через центр вписанного шара провести плоскость, перпендикулярную $[BC]$, сечение параллелепипеда этой плоскостью — ромб.

Вариант 2

1. ÷ 12, 6, 3, ...

2. $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

3. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

4. $4\ln 2-2{,}5$.

5. $\min R=R(3b)=\frac{9}{4}b$. Указание. $\frac{|SO_1|}{|SO_2|}=\frac{|O_1P|}{|O_2Q|}$, и $|O_1A|^2=|O_1S|\cdot|O_1T|$ (обозначения см. на рис. 6).

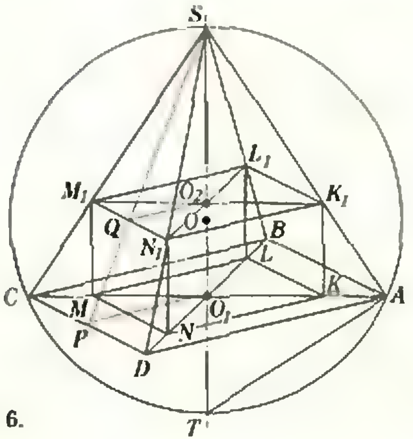


Рис. 6.

Физика

1. $h_1/h_2=\mathrm{tg}^2\alpha$.

2. $\omega=\sqrt{\frac{g}{R\cos 60^\circ}}=5$ с⁻¹.

3. $\Delta m=\frac{V\mu}{R}\left(\frac{p_1}{T_1}-\frac{p_2}{T_2}\right)\approx0{,}003$ кг.

4. $E=\frac{\pi d^3\varepsilon g(\varrho_в-\varrho_м)}{6q}=1{,}2\cdot10^4$ В/м.

5. $d=\frac{AIt}{Fn\varrho S}\approx19{,}7$ мкм.

6. $R=\frac{BS}{q}=0{,}5$ Ом.

7. $d=nl=3$ см.

8. $F=\frac{h_1h_2l}{H(h_1-h_2)}=9$ см.

9. $E=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0r_1^2}\approx5{,}1\cdot10^{11}$ В/м;

$W_к=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0r_1}\approx2{,}2\cdot10^{-18}$ Дж $\approx13{,}6$ эВ.

10. $E_0=E\frac{\mu}{N_Am}\approx3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж ≈200 МэВ (здесь $\mu=235$ г/моль — молярная масса данного изотопа урана).

2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Математика

Вариант 1

1. 3.

2. $y=2x+2$; $\frac{27}{4}$.

3. $\left\{-\frac{9}{5}, 23\right\}$.

4. $2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 2

1. $16\sqrt{3}$.

2. $A=2$, $B=\frac{3}{2\pi}$.

3. $\left[\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right[\cup\left]1;2^{\sqrt{2}}\right]$.

4. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Физика

Вариант 1

3. $m_в=\frac{m_2(c(t-\Delta t)+\lambda)-m_1c\Delta t}{\lambda}\approx0{,}025$ кг.

4. $S=\frac{2\varrho lP}{k(1-k)U^2}\approx2{,}2\cdot10^{-4}$ м².

Вариант 2

3. $p=\frac{p_0V\mu_в-mRT}{V\mu_{вод}}\approx3{,}2\cdot10^5$ Па.

4. $f=\frac{F_2(F_1(d+l)-dl)}{d(F_2-l)+F_1(d+l-F_2)}=7{,}5$ см.

Вариант 3

3. $F_c = \frac{mMv^2}{2l(m+M)} \approx 6250$ Н.

4. $q = \frac{(\varrho - \varrho_0)\pi d^3 g}{6E} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Вариант 4

3. $t_2 = t_1\sqrt{\frac{l}{g t_1^2 \sin\alpha - l}} = 4$ с;

$\mu = \frac{2l}{g t_1^2 \cos\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha \approx 0{,}36$.

4. $F = 6l = 12$ см.

Вариант 5

3. $v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1+m_2)}} = 2$ м/с;

$v_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2} = 1$ м/с.

4. $\mathcal{E} = 3IR = 300$ В.

Московский технологический институт легкой промышленности

Математика

1. 3. **2.** −168. **3.** {0,5}. **4.** −1. **5.** {2}. **6.** 13. **7.** 18 км. **8.** 30. **9.** 504. **10.** {1}. **11.** {2}. **12.** 2. **13.** 0,67. **14.** 0,125. **15.** 15°. **16.** 30°. **17.** 90. **18.** 0,650. **19.** 48. **20.** 267,95.

Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{1}{3}\pi d^3 \cdot \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^3\varphi}$.
2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.
3. {4}.
4. 9.

Вариант [illegible]

1. $6\sqrt{3}\,h^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha\,(\mathrm{ctg}\,\alpha + 1)$.
2. $[1; 6]$.
3. π.

Задачи устного экзамена

1. 9 или 31. **2.** $]2; 3[\,\cup\,]3; 4]$. **3.** {2}. **4.** $\{-\pi, 0, \pi\}$. **5.** $-\frac{24}{25}$. **6.** $]-\infty; -5[\,\cup\,]1; +\infty[$. **7.** $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$. **8.** 15. **9.** 4,5. **10.** $\frac{\pi}{3}$.

Вторая страница обложки

(см. «Квант» № 5)

Утенок и цветок. Петлю, завязанную на конце шнурка, протяните вдоль шнурка, затем через правую лапку утенка и далее до цветка. Проденьте цветок сквозь петлю и вытяните шнурок из лапок утенка.

Утенок и гусь. Петлю, охватывающую лапку утенка, протяните вдоль шнурка через левую лапу гуся к грибку. Пропустите грибок через петлю и вытяните ее обратно к утенку. Теперь потяните петлю вверх, пропустите через нее утенка и освободите шнурок из лапки утенка.

Трое утят. Петлю, стягивающую лапки любого утенка, проведите вдоль параллельных шнурков и пропустите через эту петлю двух остальных утят. Первый утенок будет освобожден. Так же освобождают от шнурков остальных утят.

Маша и утята. Петлю, охватывающую левую ножку Маши, протяните вдоль шнурка через ее правую туфельку. Пропустите левого утенка сквозь петлю и вытащите ее через правую туфельку обратно. Теперь протяните петлю вдоль шнурка через левый рукав Машиного платья и проденьте в нее верхнего утенка. Вытащив петлю через левый рукав и левую туфельку, вы освободите одного утенка.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

Задание 5. 1. Фс2! Л:c4 2. Ке4×; 1... С:c4 2. Ке6×; 1... К:c4 2. Са7×. Не проходит 1. Фа2? К:c4! и мата нет.

Задание 6. 1. Лf8! с угрозой 2. Лс8 и 3. Л:c6×; 1... С:b3 2. Ла8 Сс4 3. d4×; 1... Кb3 2. fe Кd4 3. Сb4×.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Можно — см. рисунок 7.
2. Утверждение а) следует из равенства $2a + b = (100a + b) - 98a$, утверждение б) — из равенства $5a - b = 105a - (100a + b)$.
3. Нетрудно составить таблицы дней недели, выпадающих на тринадцатое число каждого месяца в зависимости от дня недели, выпадающего на 13 января, отдельно для високосного (таблица 1) и невисокосного (таблица 2) годов.

Таблица 1

Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
пн	чт	пт	пн	ср	сб	пн	чт	вс	вт	пт	вс
вт	пт	сб	вт	чт	вс	вт	сб	пн	ср	вт	пн
ср	сб	вс	ср	пт	пн	ср	вс	вт	чт	ср	вт
чт	вс	пн	чт	сб	вт	чт	пн	ср	пт	чт	ср
пт	пн	вт	пт	вс	ср	пт	вт	чт	сб	пт	чт
сб	вт	ср	сб	пн	чт	сб	ср	пт	вс	сб	пт
вс	ср	чт	вс	вт	ср	чт	пт	сб	пн	вс	сб

Таблица 2

Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
пн	чт	чт	вс	вт	пт	вс	ср	вс	вт	сб	пн
вт	пт	пт	пн	ср	сб	пн	чт	пн	ср	вс	вт
ср	сб	сб	вт	чт	вс	вт	пт	вт	чт	пн	ср
чт	вс	вс	ср	пт	пн	ср	сб	ср	пт	пн	ср
пт	пн	пн	чт	сб	вт	чт	вс	чт	сб	вт	чт
сб	вт	вт	пт	вс	ср	пт	пн	чт	сб	вт	чт
вс	ср	ср	сб	пн	чт	сб	ср	сб	пн	пт	вс

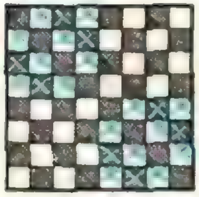


Рис. 7.

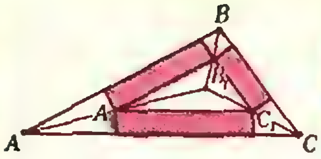


Рис. 8.

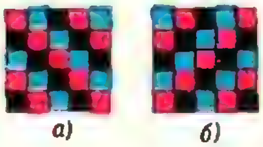


Рис. 9.

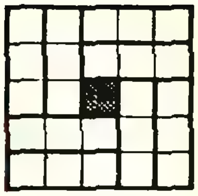


Рис. 10

Изучив таблицы, мы видим, что в любом году тринадцатое число хоть раз является понедельником, а наибольшее число раз — 4.

4. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны стороны (рис. 8); следовательно, они гомотетичны. Прямые, соединяющие их вершины, пересекаются в центре гомотетии.

5. Раскрасим клетки квадрата в три цвета двумя способами (см. рисунок 9): В обоих случаях одна клетка, окрашенная красной краской, оказывается лишней, поскольку при укладке прямоугольника 1×3 закрываются все три цвета. Но красная краска в обоих случаях на одном и том же месте стоит лишь в центре квадрата. Значит, из нашего квадрата можно вырезать лишь центральную клетку. Как разрезать получившуюся фигуру, показано на рисунке 10.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, П. Кузьмина, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21
Сдано в набор 17.04.82. Подписано в печать 28.05.82
Печать офсетная
Бумага 70÷108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд.-л. 7,50 Т-12031
Цена 40 коп. Заказ 953. Тираж 181 270 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

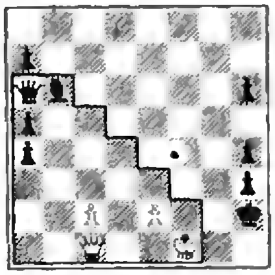
Шахматная страничка Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ШАХМАТНЫЕ ЛЕСТНИЦЫ

Почти в каждой книге по шахматной композиции можно найти раздел, посвященный геометрическим мотивам на шахматной доске. В этом нет ничего удивительного. Ведь фигуры перемещаются по определенным линиям, и часто в точках пересечения этих линий происходит «взрыв», в результате которого одна из сторон неминуемо гибнет. В задачах и этюдах нередко наблюдаются совершенно четкие траектории, по которым передвигаются ферзь, ладья или король.

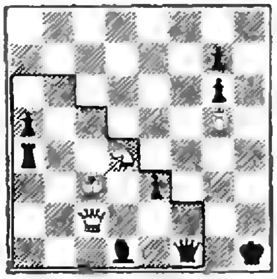
Один из самых популярных жанров шахматной композиции называется «систематическое движение фигур». Он объединяет задачи и этюды, в которых фигуры несколько раз прогуливаются по одним и тем же маршрутам, всякий раз возвращаясь с прогулки с определенными завоеваниями. Маршруты могут быть весьма разнообразными — лестницы, винты, карусели, змейки, окружности, квадраты, треугольники, ромбы и другие. Наш сегодняшний рассказ — о шахматных лестницах.

По самым высоким и крутым лестницам ходит ферзь.



Г. Надарейшвили, 1946 г. Выигрыш.

1.Фf4+. Ферзь попал на лестницу. **1...Крh1 2.Фe4+ Крh2 3.Фe5+ Крh1 4.Фd5+ Крh2 5.Фd6+ Крh1 6.Фc6+ Крh2 7.c4!** Поднявшись на самый верх лестницы, можно сделать и передышку. **7...Крg3! 8.Фf3+.** Ферзь быстро сбежал на нижнюю ступеньку лестницы. **8...Крh2 9.Фf4+.** Впереди новый подъем. **9...Крh1 10.Фe4+ Крh2 11.Фe5+ Крh1 12.Фd5+ Крh2 13.Фd6+ Крh1 14.Фc6+ Крh2 15.e3!** Последний отдых, ферзь готовится к третьей прогулке по лестнице. Спуск на этот раз будет проходить медленнее. **15...a3 16.Фd6+ Крh1 17.Фd5+ Крh2 18.Фe5+ Крh1 19.Фe4+ Крh2 20.Фf4+ Крh1 21.Фf3+ Крh2 22.Фf2+ Крh1 23.Фg1×.**

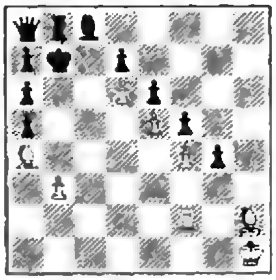


П. Подольный, 1953 г. Выигрыш.

И в этом этюде ферзь трижды прогуливается по лестнице — вверх, вниз и снова вверх. Однако лестница здесь еще более длинная.

1—8. Фe4 — e5 — d5 — d6 — c6 — c7 — b7 — b8 + Крh1 — h2 — h1 9.Фh8+. На этот раз ферзь работает без отдыха. Покинув лестницу, он тут же спохватывается и возвращается на нее. **9...Сh5 10—18. Фa8 — b8 — b7 — c7 — c6 — d6 — d5 — e5 — e4+ Крh2 — h1 — h2 19.Фh4+ Фh3 20.Фf4+ Крh1.** Белый ферзь снова на лестнице, он начинает свое третье и решающее восхождение. **21—28. Фe4 — e5 — d5 — d6 — c6 — c7 — b7 — b8+ Крh1 — h2 — h1 29.Фb1+ Крh2 30.Фg1×.**

В следующем этюде два основных варианта решения, и в обоих возникает лестница — либо для ладьи (первый вариант), либо для короля (второй вариант).



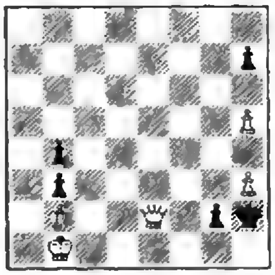
Т. Кок, 1938 г. Выигрыш.

1.Сg1 g3 2.Крg2 Крb6+ 3.Лf3+ Крb7 4.Лe3+ Крb6+ 5.Лe4+ Крb7 6.Лd4 Крb6+ 7.Лd5+ Крb7 8.Лc5 Крb6+ 9.Лc6++ Крb7 10.Лc7×!

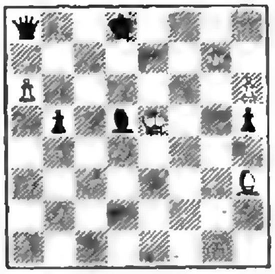
Вторая лестница чуть длиннее: 2...gf 3.Кр : f2 Крb6 4.Крe2+ Крb7 5.Крe3 Крb6 6.Крd3+ Крb7 7.Крd4 Крb6 8.Крc4+ Крb7 9.b4 ab 10.Кр : b4 a5+ 11.Кр : a5 a6 12.Сd1 и 13.Сf3×.

Заметим, что «геометрические» этюды ввиду четкости их решений часто могут быть превращены в задачи с условием — мат во столько-то (много!) ходов.

Конкурсные задания

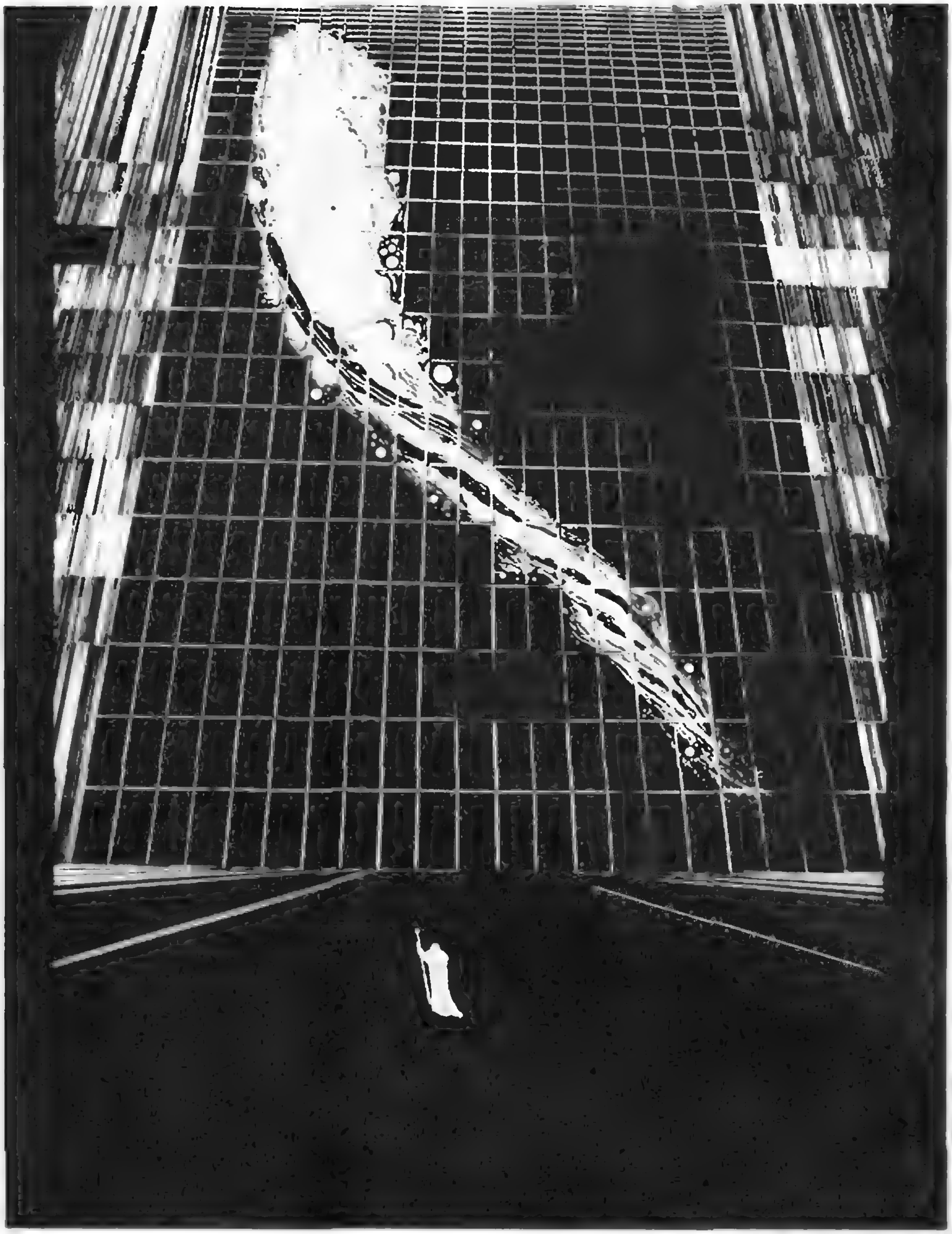


11. Выигрыш.



12. Выигрыш.

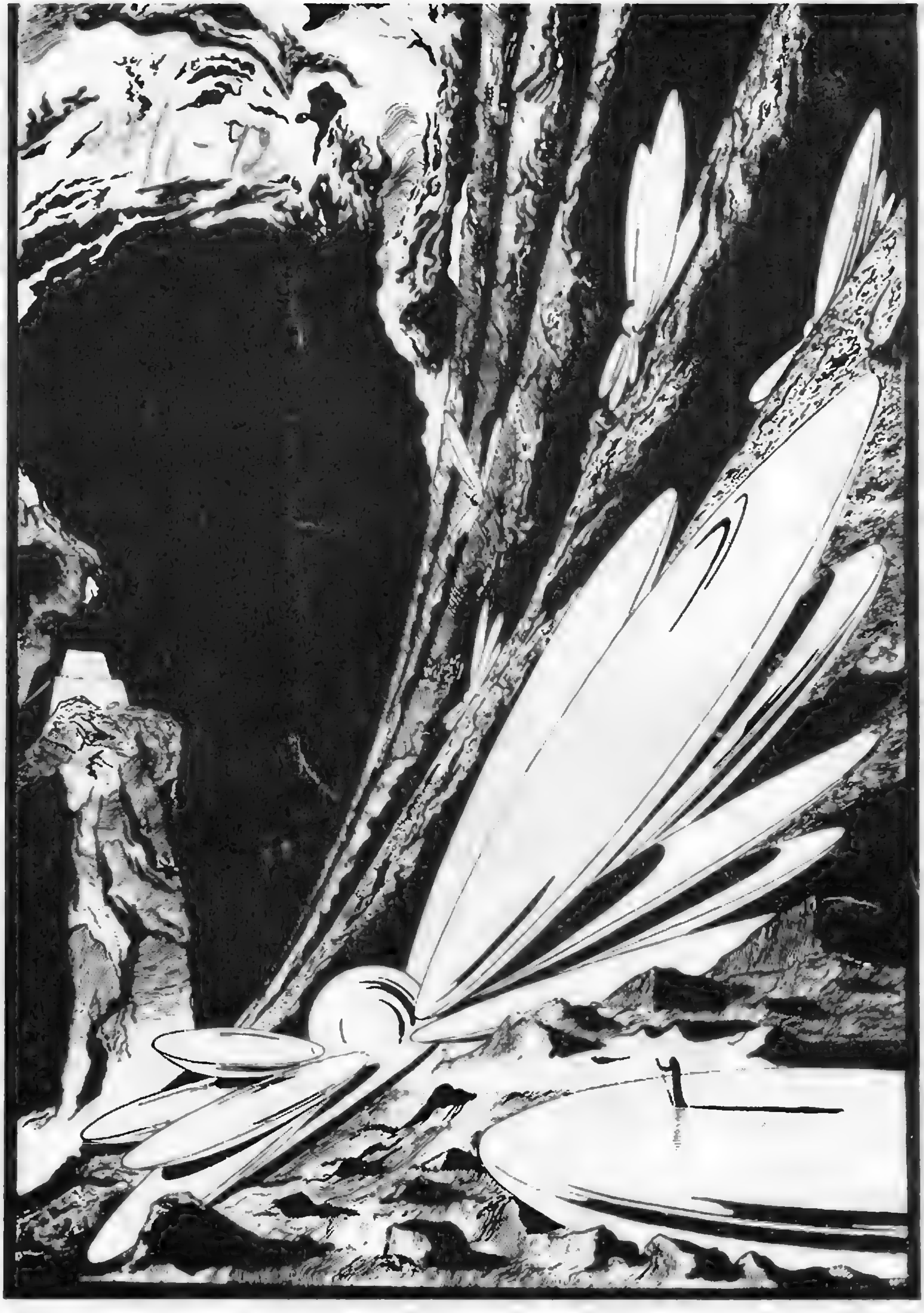
Срок отправки решений — 25 августа 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).



В апреле этого года в Москве, в Центральном Доме художника проходила выставка «Ученые рисуют». Среди представленных на ней работ большой интерес вызвала графика доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко, математика, известного своими исследованиями по дифференциальной геометрии и топологии. Здесь мы помещаем репродукцию работы А. Т. Фоменко, названной им «Диаграмма Герцшпрунга — Рессела», а на четвертой странице обложки — репродукцию работы «Линзовые пространства».

На первой странице обложки помещена фотография дифракционной картины от круглого отверстия (фото — А. Щуки). В качестве источника света был использован гелий-неоновый лазер, дающий монохроматический свет красного цвета.

О некоторых опытах по дифракции, которые вы сможете провести самостоятельно в вашей домашней лаборатории, рассказано в этом номере журнала в статье Я. Амстиславского «Необычные явления вокруг обычных источников света».



На этой странице обложки мы помещаем репродукцию работы «Линзовые пространства» А. Т. Фоменко. Репродукция еще одной его работы помещена на второй странице обложки.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

НОМЕР
7

Московское математическое общество
Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады

Основан в 1970 году

Квант

7
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

В. Тадеев. Простые, двойные, гармонические 2 *V. Tadeev.* Simple, double, harmonic

Л. Марочник. Кометы 10 *L. Marochnik.* Comets

Г. Меледин, В. Сербо. Конденсация света в вещество 19 *G. Meledin, V. Serbo.* Condensation of light into mattee

В. Дубровский. Алгоритм волшебного кубика 22 *V. Dubrovski.* An algorithm for the magic cube

В. Сурдин. Солнечное затмение 31 июля 1981 года 26 *V. Surdin.* The solar eclipse of July 31, 1981

Математический кружок **Mathematics circle**

А. Ходулев. Расселение фишек 28 *A. Khodulev.* Resettling chips

Лаборатория «Кванта» **Kvant's lab**

Л. Микаэлян. Домашние опыты с поляризованным светом 32 *L. Mikaelian.* Experiments in polarized light at home

Задачник «Кванта» **Kvant's problems**

Задачи М751—М755; Ф763—Ф767 39 Problems M751—M755; P763—P767

Решения задач М711—М720; Ф723—Ф732 42 Solutions M711—M720; P723—P732

А. Зильберман. Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением 54 *A. Zilberman.* A source with "negative" inner resistance

«Квант» для младших школьников **Kvant for younger school children**

А. Савин. Веселая викторина 56 *A. Savin.* An amusing quizz

Практикум абитуриента **College applicant's section**

Л. Баканина. Законы сохранения при ядерных превращениях 58 *L. Bakanina.* Conservation laws in nuclear reactions

Ответы, указания, решения 62 **Answers, hints, solutions**

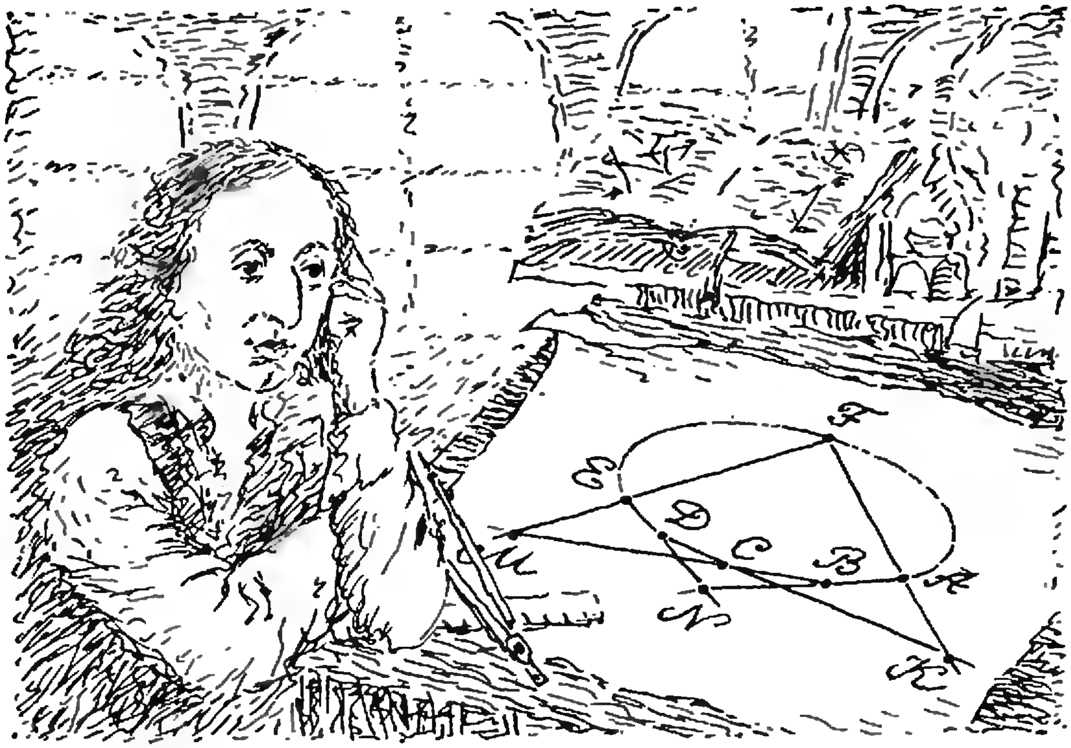
Новости науки *(38)* **Science news** *(38)*

Смесь *(25, 60, 61)* **Miscellaneous** *(25, 60, 61)*

Шахматная страничка **The chess page**

На пересечении линий *(3-я с. обложки)* On the intersection of lines *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982



В. Тадеев

Простые, двойные, гармонические

Никто теперь точно не знает, как в 1640 году семнадцатилетний Блез Паскаль (о его жизни см. брошюру С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)) додумался до теоремы, носящей ныне его имя. Возможно, продолжив зачем-то стороны вписанного в окружность шестиугольника, он просто заметил, что точки пересечения M, N и K оказались на одной прямой (см. заставку). Случайно ли это? Юноша взял другой шестиугольник, но точки M, N и K упорно ложились на одну прямую.

Мы не знаем, какие эмоции возникли в его душе. Известно только, что он довольно быстро придумал доказательство обнаруженного им красивого факта и тут же его обобщил. А затем... затем из теоремы, как из ро́га изобилия, посыпались следствия. Впоследствии теорема Паскаля оказалась одним из важнейших положений нового раздела математики — *проективной геометрии*, нашедшего интересные применения в геодезии и картографии.

В этой статье мы докажем теорему Паскаля для окружности и обсудим некоторые «проективные понятия», позволяющие ее обобщить.

Простые отношения

Пусть на прямой l заданы точки A, B и C (рис. 1). Для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ существует такое (единственное) число λ, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Это число λ называется *простым отношением* точек A, B, C; обозначается оно через (ABC). Когда точки B и C совпадают, простое отношение (ABC) не определено. Из определения ясно, что

$$|(ABC)| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}.$$

Точнее, $(ABC) = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$, если точка C

расположена между A и B, и $(ABC) = -\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$ в противном случае.

Фиксируем теперь на l точки A и B и исследуем, как изменяется простое отношение (ABC) в зависимости от положения точки C. Для этого поместим начало координат в точку B, а ось абсцисс направим вдоль l от A к B (рис. 2). Если абсциссу точки C обозначить через x и положить $|AB| = a$, то $|\overrightarrow{AC}| = a + x$ и $|\overrightarrow{CB}| = x$. Легко видеть, что

$$(ABC) = v(x) = -\frac{a+x}{x}. \qquad (1)$$

Из графика функции v (рис. 2) видно, что положение точки C на прямой AB однозначно определяется числом (ABC).

Возьмем на плоскости прямые l, l' и точку P вне их. Произвольной точке A прямой l поставим в соответствие точку $A' = (PA) \cap l'$ прямой l'. Это отображение прямой l в прямую l', которое естественно назвать *центральным проектированием* (прямой l в прямую l'), в дальнейшем будет играть важную роль.

К сожалению, если $l \nparallel l'$, простое отношение точек при центральном проектировании не сохраняется (рис. 3). Однако из него легко строится другое отношение, уже обладающее нужным нам свойством.

Двойные отношения

Пусть на прямой l заданы точки A, B, C и D (рис. 4). Число $\dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ называется *двойным* (или сложным, или ангармоническим) *отношением точек* A, B, C, D; обозначается оно через $(ABCD)$. Таким образом,

$$|(ABCD)| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{DB}|}.$$

Когда точки A и D совпадают, $(ABD) = 0$ (см. (1)); в этом случае двойное отношение $(ABCD)$ не определено. Не определено оно, конечно, также при $B = C$. При $B = D$ естественно положить $(ABCD) = 0$.

Фиксируем теперь на l точки A, B и C. Поместим начало координат в точку B и направим ось абсцисс вдоль l от A к B. Если абсциссу точки D обозначить через x и положить $|AB| = a$, $(ABC) = k$, то из (1)

$$(ABCD) = w(x) = -\frac{kx}{a+x}.$$

Из графика функции w (нарисуйте его!) видно, что положение точки D однозначно определяется числом $(ABCD)$.

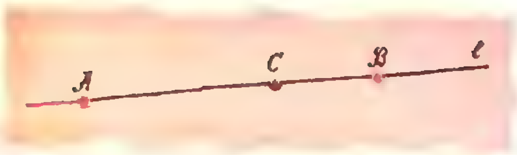


Рис. 1.

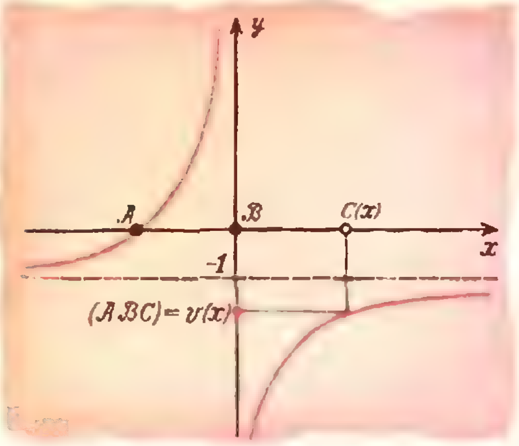


Рис. 2

Упражнение 1. Пусть $(ABCD) = w$. Докажите, что
а) $(BADC) = (CDAB) = (DCBA) = w$;

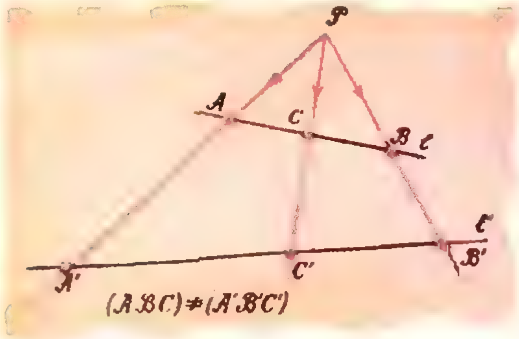


Рис. 3.

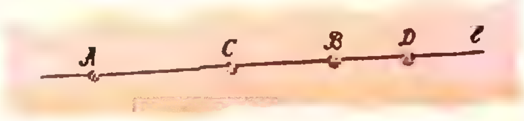


Рис. 4.

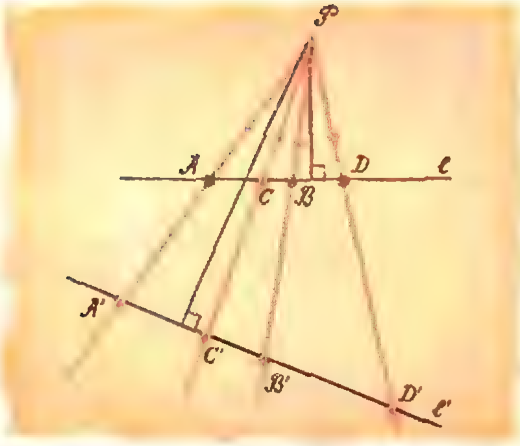


Рис. 5.

б) $(BACD)=(ABDC)=(CDBA)=(DCAB)=$ $=\frac{1}{w}$;

в) $(BDAC)=(DBCA)=(ACBD)=(CADB)=$ $=1-w$;

г) $(DACB)=(ADBC)=(CBDA)=(BCAD)=$ $=1-\frac{1}{w}$;

д) $(DBAC)=(BDCA)=(ACDB)=(CABD)=$ $=\frac{1}{1-w}$;

е) $(ADCB)=(DABC)=(CBAD)=(BCDA)=$ $=\frac{1}{1-\frac{1}{w}}$.

Докажем, что двойное отношение при центральном проектировании сохраняется (рис. 5). Обозначим, соответственно, через h и h' расстояния от P до прямых l и l'. Рассматривая площади, например, треугольников PAC и $PA'C'$, получаем

$$\frac{h\cdot|AC|}{h'\cdot|A'C'|}=\frac{|PA|\cdot|PC|}{|PA'|\cdot|PC'|}.$$

Отсюда

$$|A'C'|=|AC|\cdot\frac{|PA'|\cdot|PC'|}{|PA|\cdot|PC|}\cdot\frac{h}{h'}.$$

Из аналогичных равенств для $|C'B'|$, $|A'D'|$ и $|D'B'|$ получаем

$$\frac{|A'C'|}{|C'B'|}:\frac{|A'D'|}{|D'B'|}=\frac{|AC|}{|CB|}:\frac{|AD|}{|DB|}.$$

Поскольку точки A, B, C, D на l и A', B', C', D' на l' расположены в одинаковом порядке, простые отношения (ABC) и $(A'B'C')$, а также (ABD) и $(A'B'D')$ имеют одинаковые знаки. Значит, $(A'B'C'D')=(ABCD)$.

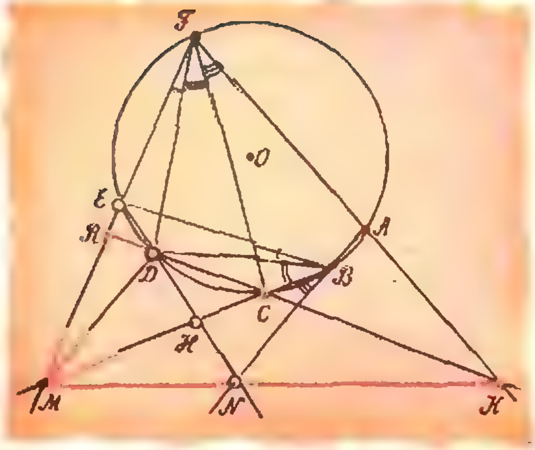


Рис. 6.

Паскалевы тройки

Теперь можно пожинать плоды наших трудов.

Постройте (только аккуратно) вписанный в окружность шестиугольник $ABCDEF$ и продлите пары сторон FE и BC, ED и AB, DC и FA до пересечения в точках M, N, K соответственно*). Если вы проделаете эти построения достаточно точно, вы увидите, что *точки* M, N, K *лежат на одной прямой* (рис. 6). Эту тройку точек называют *паскалевой тройкой*, утверждение об их коллинеарности — *теоремой Паскаля.*

Кстати, сколько вам лет? Семнадцать? Если вы внимательно прочитали предыдущие

Рис. 7.

---

*) О случае, когда хотя бы одна пара прямых не пересекается, будет сказано ниже.

страницы, вы находитесь на равных с Паскалем, только что сделавшим свое наблюдение. Не хотите ли посмотреть, сколько времени вам потребуется, чтобы самостоятельно найти доказательство теоремы Паскаля?

Докажем эту теорему. Рассмотрим две четверки прямых: FE, FD, FC, FA и BE, BD, BH, BN. Они конгруэнтны, так как углы между соответствующими прямыми равны (например, $\widehat{EFD}=\widehat{EBD}$, ибо они опираются на общую дугу DE). Значит, по доказанному в предыдущем разделе $(RDCK)=(EDHN)$ (здесь $R=(FE)\cap(CD)$, $H=(BC)\cap(ED)$). Обозначим точку пересечения прямых MK и EH через N'. Тогда $(EDHN')=(RDCK)$. Следовательно, $(EDHN)=(EDHN')$, откуда N' совпадает с N.

Упражнения

2. Выбирая всевозможными способами пары прямых, соединяющих вершины вписанного в окружность шестиугольника $ABCDEF$, убедитесь, что имеется 60 паскалевых троек.

3*. Исследуйте взаимное расположение 60 прямых, на которых лежат эти тройки.

4. Сформулируйте и докажите теорему Паскаля для вписанного в окружность пятиугольника (*Указание*. Рассмотрите его как шестиугольник с совпавшими вершинами E и F, а касательную в точке E как предельное положение секущей EF), четырехугольника и треугольника.

5. Постройте одной линейкой касательную к данной окружности из данной точки.

* * *

Чтобы из теоремы Паскаля получить следствия, о которых говорилось в начале статьи, придется сперва немного потрудиться. Мы изучим два важных типа преобразований плоскости — параллельное проектирование и центральное проектирование. Эти преобразования лежат в основе проективной геометрии.

Вы знаете, что *перемещения* плоскости оставляют неизменными *расстояния* между точками; поэтому они сохраняют размеры и форму фигур. При *подобиях* сохраняются лишь *отношения* расстояний — фигуры могут изменяться в размере, но сохраняют свою форму. Хуже обстоит дело с параллельным и центральным проектированием — они искажают и форму фигур. Например, при параллельном проектирова-

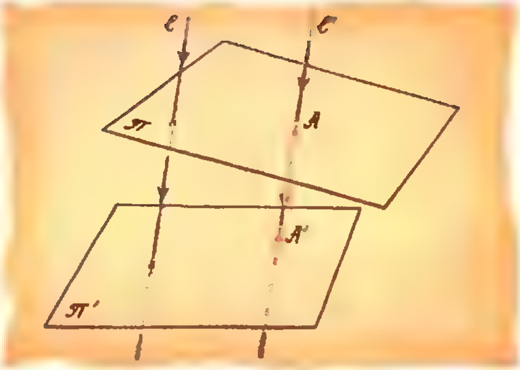


Рис. 8.

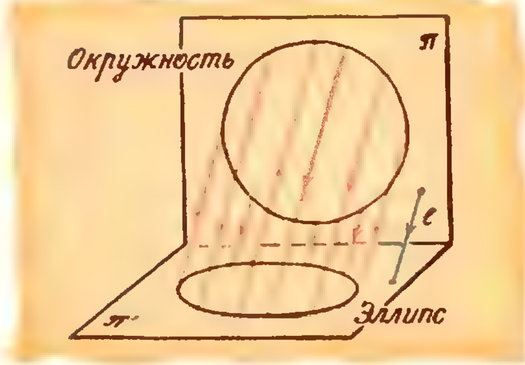


Рис. 9.

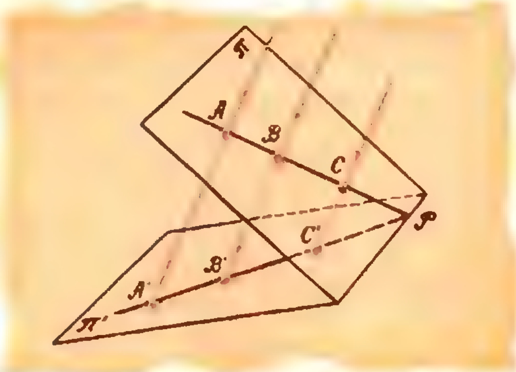


Рис. 10.

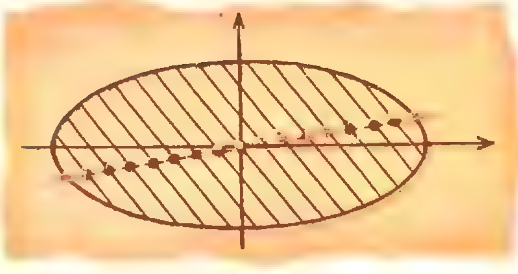


Рис. 11.

нии окружность может перейти в эллипс, а при центральном — даже в пару пересекающихся прямых! Что же они тогда сохраняют? Как раз об этом и пойдет речь — ответ на этот вопрос составляет основное содержание проективной геометрии.

Параллельное проектирование

Около поверхности Земли лучи Солнца с достаточной точностью являются параллельными. Поэтому возникновение на ровной поверхности тени от плоского предмета является иллюстрацией параллельного проектирования (рис. 7).

А математическое определение здесь такое: пусть даны плоскости π и π' (параллельные или пересекающиеся) и прямая l, пересекающая обе плоскости; каждой точке $A \in \pi$ поставим в соответствие точку $A' \in \pi'$ пересечения прямой l', проходящей через A параллельно l, с плоскостью π' (рис. 8); полученное отображение плоскости π на π' называется *параллельным проектированием* (π на π' вдоль прямой l).

Очевидно, параллельное проектирование является взаимно однозначным отображением плоскости π на плоскость π', переводящим параллельные прямые в параллельные, пересекающиеся — в пересекающиеся.

Параллельное проектирование не только меняет размеры фигур, но и искажает их форму. Так, при параллельном проектировании окружность может «сплющиваться» в эллипс (рис. 9)*). Меняются, таким образом, не только расстояния, но и их отношения.

Однако *простое отношение трех точек при параллельном проектировании сохраняется*. Действительно, когда плоскости π и π' пересекаются (рис. 10), это сразу следует из подобия треугольников PAA', PBB' и PCC'; случай, когда π и π' параллельны, еще проще — разберите его самостоятельно.

Этот простой, но важный факт имеет много интересных следствий.

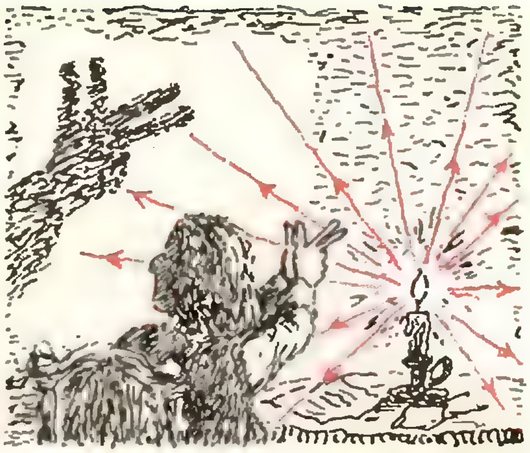


Рис. 12.

Например, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину отрезка, медиана треугольника — в медиану. (А вот биссектриса не обязательно перейдет в биссектрису; то же самое можно сказать и о высоте треугольника.)

Упражнения.

6. Покажите, что эллипс имеет единственный центр симметрии.

• **7.** Покажите, что середины хорд эллипса, параллельных данному направлению, лежат на одной прямой, проходящей через его центр (рис. 11).

Центральное проектирование

Свет, испускаемый лампой, — конечно, не такой яркий, как солнечный. В пределах освещенности лампой ее лучи нельзя считать параллельными — лампу поэтому чаще представляют как точечный источник, лучи которого расходятся во всех направ-

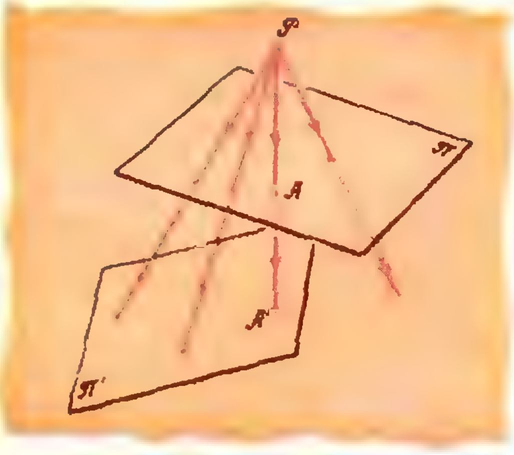


Рис. 13.

---

*) Кстати, это одно из возможных определений эллипса — кривая, получающаяся параллельным проектированием окружности.

лениях. Возникновение на экране тени от плоского предмета моделирует центральное проектирование (рис. 12).

Математическое определение здесь следующее: пусть даны плоскости π и π' (параллельные или пересекающиеся) и точка P вне этих плоскостей; каждой точке $A \in \pi$ поставим в соответствие точку $A' \in \pi'$ пересечения прямой PA с плоскостью π' (рис. 13); полученное отображение плоскости π в плоскость π' называется *центральным проектированием* (плоскости π в плоскость π' из центра P).

К сожалению, если плоскости π и π' не параллельны, центральное проектирование не является ни отображением всей плоскость π, ни отображением на всю плоскость π'. В самом деле, если через P провести плоскость π_1, параллельную π', то точки прямой $l = \pi_1 \cap \pi$ при центральном проектировании из P никуда не отображаются (рис. 14, *а*). Аналогично, если через P провести плоскость π_2, параллельную π, то в точки прямой $l' = \pi_2 \cap \pi'$ при центральном проектировании из P никакие точки плоскости π не переходят (рис. 14, *а*).

Посмотрим, что делается при центральном проектировании с прямыми плоскости π. Как уже было сказано, прямая l (и любая ее точка) ни во что не переходит. Любая прямая плоскости π, параллельная l, переходит в прямую плоскости π', параллельную l' (рис. 14, *б*). Прямая плоскости π, пересекающая l, без точки пересечения — «проколотая прямая» — переходит в «проколотую прямую» плоскости π' — в прямую без точки ее пересечения с l' (рис. 14, *в*). (В дальнейшем, чтобы не загромождать формулировки оговорками, мы в подобных ситуациях будем допускать вольность речи и говорить коротко, что прямая переходит в прямую.)

Заметим далее, что пересекающиеся прямые, если точка их пересечения не лежит на выделенной прямой l, переходят в пересекающиеся прямые (рис. 14, *г*), в противном случае они переходят в параллельные (рис. 14, *д*).

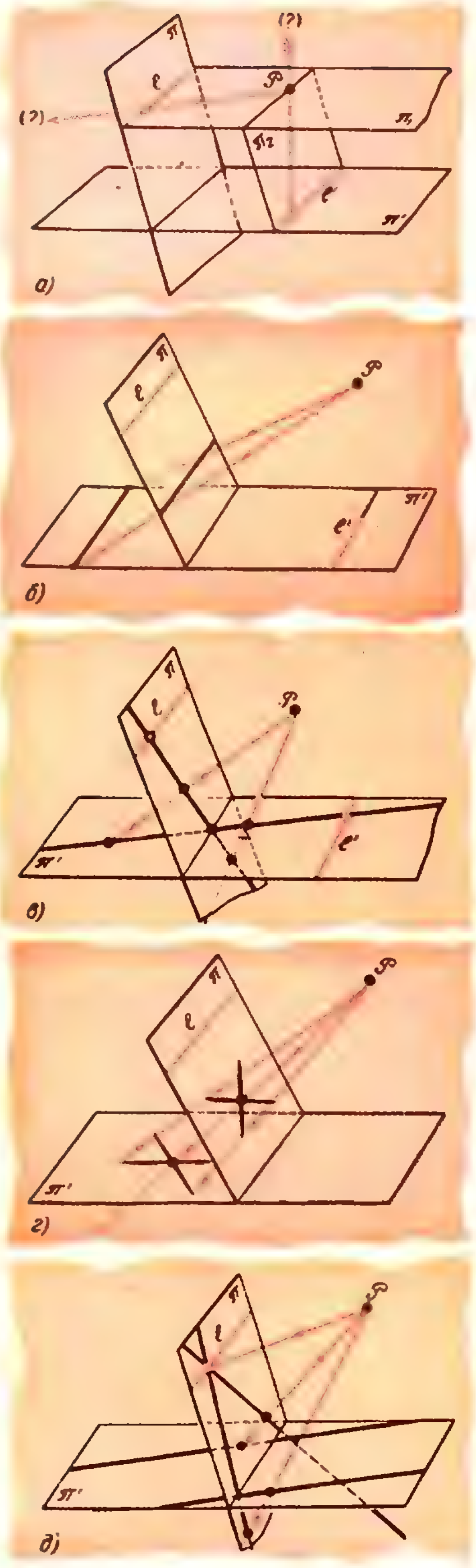


Рис. 14.

Таким образом, можно сказать, что при центральном проектировании в основном прямые переходят в прямые, притом пересекающиеся — в пересекающиеся. Слова «в основном» означают «кроме исключений и оговорок, указанных выше».

Оговорок об исключительных случаях в формулировках о проектировании можно избежать, если считать, что «параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке» и что «все бесконечно удаленные точки данной плоскости лежат на одной (бесконечно удаленной) прямой». Более того, словам в кавычках можно придать точный математический смысл; тогда, присоединяя к нашей обычной (евклидовой) плоскости ее «бесконечно удаленные точки», мы получим так называемую «проективную плоскость».

На проективной плоскости теорема Паскаля выполняется без оговорок: даже в случае правильного шестиугольника противоположные (параллельные) прямые «пересекаются в трех бесконечно удаленных точках, которые все лежат на одной (бесконечно удаленной!) прямой».

Однако мы здесь не будем заниматься этим странным математическим объектом. К этой теме «Квант» вскоре вернется.

Конические сечения

Посмотрим теперь на примере окружности, в какой мере центральное проектирование искажает форму фигур. Рассмотрим окружность S, лежащую на плоскости π, и точку P над этой плоскостью (рис. 15). Во что перейдет окружность S при центральном проектировании из точки P, зависит, разумеется, от расположения плоскости π', на которую мы проектируем. На рисунке показаны четыре случая (плоскости $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$); при этом получаются, соответственно, эллипс, парабола, гипербола и пара пересекающихся прямых. На рисунке хорошо видно, что совокупность проектирующих прямых образует **конус**; поэтому перечисленные кривые называют ***коническими сечениями***.

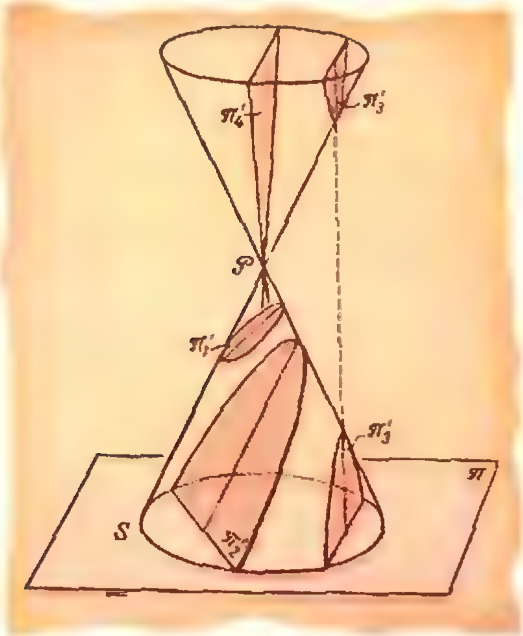


Рис. 15.

Если центральное проектирование так сильно искажает форму фигур, то что же оно все-таки сохраняет? Мы знаем, что оно переводит прямые в прямые, то есть сохраняет *коллинеарность* точек (здесь только нужно помнить об оговорках, сделанных выше!). Кроме того, оно сохраняет *двойное отношение* четырех точек — это мы фактически доказали раньше. Оказывается, этих двух фактов достаточно, чтобы получить много глубоких геометрических теорем, в частности — следствия из теоремы Паскаля.

Упражнения

8. Сформулируйте и докажите теорему Паскаля для шестиугольника, вписанного в эллипс, параболу и гиперболу.

9. Докажите, что эллипс, парабола и гипербола однозначно определяются пятью точками.

10. Укажите способ построения одной линейкой по пяти точкам эллипса других его точек.

11. Постройте одной линейкой касательную к данному эллипсу из данной точки. То же — для параболы и гиперболы.

Гармонические четверки

Еще древнегреческие математики называли коллинеарную четверку точек A, B C, D *гармонической*, если $(ABCD) = -1$.

Приведем пример. Возьмем произвольный треугольник NAB и проведем биссектрису NC «внутреннего» угла ANB и биссектрису ND «внешнего» угла KNB (рис. 16). Как известно («Геометрия 6—8», задача 914), $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|NA|}{|NB|}$. Это утверждение можно записать и так:

$$(ABC) = \frac{|NA|}{|NB|}.$$

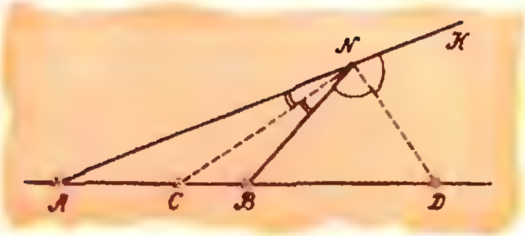


Рис. 16.

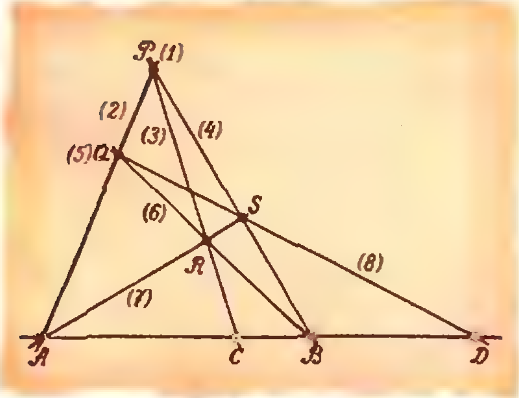


Рис. 17.

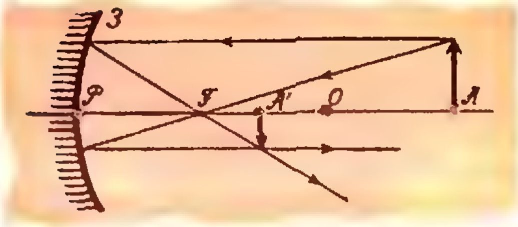


Рис. 18.

Легко доказать также, что

$$(ABD) = -\frac{|NA|}{|NB|}.$$

(Указание. Рассмотрите отношение площадей треугольников NAD и NBD, взяв за основания сначала $[NA]$ и $[NB]$, а потом — $[AD]$ и $[BD]$.) Следовательно, $(ABCD) = -1$, то есть четверка точек A, B, C, D является гармонической.

Этот факт позволяет с помощью циркуля и линейки по точкам A, B и C построить «четвертую гармоническую» точку D.

Упражнение 12. Укажите способ построения такой точки с помощью одной линейки. Указание. См. рис. 17. Точки P и Q на этапах *1* и *5* выбираются произвольно.

Гармонические четверки встречаются в оптике. Рассмотрим ход лучей в вогнутом зеркале *З* (рис. 18). Пусть A — точка на оптической оси, A' — ее изображение, F — фокус зеркала, а O — его центр ($|PF| = |FO|$). Тогда четверка точек P, O, A', A является гармонической. Докажите это самостоятельно, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

известной из курса физики.

Древнегреческие ученые, кроме *арифметической* ($a - b = c - d$) и *геометрической* $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, рассматривали еще *гармоническую* пропорцию: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ (этому равенству удовлетворяют координаты a, b, c, d гармонической четверки точек A, B, C, D). В случае, когда $b = c$ (в этом случае пропорции называют *непрерывными*), получаются *среднее арифметическое* $b = \frac{a+d}{2}$, *среднее геометрическое* $b = \sqrt{ad}$ и *среднее гармоническое* $b = \frac{2ad}{a+d}$.

По преданию, еще Пифагор, занимаясь математической теорией музыки, установил, что длины струн, дающих при одинаковом натяжении ноты *до*, *ми*, *соль* (составляющие мажорное трехзвучие), пропорциональны числам 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$. Но $\frac{4}{5}$ является средним гармоническим чисел 1 и $\frac{2}{3}$. Отсюда пришло в математику понятие гармонии.

Л. Марочник

Кометы

Почти четверть века назад человечество было потрясено известием о запуске искусственного спутника Земли. Во всем мире радиоприемники были настроены на волну его передатчика. Простенькие радиосигналы первого спутника «бип-бип-бип» возвестили о начале космической эры в истории человечества.

Нынешние десятиклассники, не говоря уже о более «молодой поросли», родились в эпоху космических полетов. Все постепенно становится привычным. И сейчас даже полеты кораблей к другим планетам Солнечной системы — Венере, Марсу, Сатурну — наверное, меньше поражают воображение, чем некогда — запуск первого спутника, полет Юрия Гагарина, высадка американских астронавтов на Луне. Тем не менее, и нынешнее поколение ожидают кое-какие «сюрпризы», граничащие с научной фантастикой. Один из ближайших поражающих воображение космических экспериментов — экспедиции к комете Галлея, которые будут осуществлены в 1985—86 годах, когда эта комета в очередной раз вернется из «окраин» Солнечной системы и приблизится к Солнцу.

Такого рода эксперименты имеют, по крайней мере, два важнейших аспекта: психологический и научный. Почему психологический? Дело в том, что кометы всегда поражали воображение людей. Слово «комета» в переводе с греческого означает «волосатая звезда». И в древние времена, и в средние века кометы изображали чаще всего как отрубленные головы с развевающимися волосами. Человек всегда искал на звездном небе аналогии с известными ему, понятными образами; отсюда — названия многих созвездий: Большая Медведица, Близнецы, Весы и т. п. В этом смысле кометы не были исключением. Однако, если звездное небо даже искусному наблюдателю виделось практически неизменным из ночи в ночь, то появление яркой «волосатой звезды», довольно быстро, иногда в течение всего нескольких дней, исчезающей с небосвода, было событием выдающимся и ужасающим.

Вид яркой кометы — зрелище впечатляющее. По своему блеску она

Комета Галлея, сфотографированная 13 мая 1910 года (внизу слева — Венера).

может быть как Венера, например, и даже как Луна в полнолунии. Хвост такой кометы простирается на полнеба. Посмотрите на фотографию кометы Галлея, сделанную во время ее прошлого прохождения через перигей в 1910 году. Эффектно, не правда ли? Во всяком случае, можно понять, почему кометы во все времена у многих народов считались вестниками несчастий, дурными знамениями, «гласом божьим» или, лучше сказать, «дьявольским». История человечества изобилует войнами, эпидемиями, дворцовыми переворотами и убийствами особ королевского происхождения, так что почти всегда появлению кометы «сопутствовало» какое-нибудь трагическое событие.

В 44 году до нашей эры смерть Юлия Цезаря совпала с появлением на небе яркой кометы (об этом известно из трудов римских историков), поэтому в средние века и даже позднее при европейских дворах существовало мнение, что появление яркой кометы может предвещать смерть особ царствующего дома. Яркая комета 1664 года очень напугала французского короля Людовика XIV, знакомого нам по роману Дюма «Виконт де Бражелон», а португальский король того времени Альфонс VI, опасаясь, что комета явилась за ним, стрелял в нее из аркебузы.

Любопытно, что «китайская точка зрения» на кометы радикально отличалась от «европейской». По мнению древних китайцев, кометы были курьерами, разносящими по «звездным провинциям» волю императора. Планеты были правителями провинций, а звезды — местными властями. Кометы, перемещаясь из провинции в провинцию, переносили правительственные депеши.

Впрочем, не следует думать, что в давние времена начисто отсутствовало научное изучение комет. Уже в древних китайских хрониках отражен фундаментальный научный факт, лежащий в основе современных представлений о физике комет, заключающийся в том, что хвосты комет всегда направлены в сторону, противоположную Солнцу. Об этом было известно также римскому философу и писателю Луцию Сенеке. До XVII века в науке господствовали взгляды Аристотеля — признанного авторитета во всех вопросах естествознания. Аристотель полагал, что кометы находятся вне ведения астрономов, так как, по его мнению, это явление (комета) возникает в земной атмосфере: земные пары, поднимаясь вверх, загораются, соприкасаясь со «сферой огня», и хвост кометы — это пламя, которое гонит ветер. Однако уже в 1577 году искуснейший наблюдатель того времени Тихо Браге неопровержимо доказал ошибочность взглядов Аристотеля. Если бы комета находилась в пределах земной атмосферы, то есть сравнительно недалеко от Земли, то, наблюдая ее одновременно из двух различных точек земной поверхности, Тихо Браге и его ученики видели бы ее рядом с различными звездами. Но этого не произошло — комета в обоих пунктах проектировалась на одну и ту же точку звездного неба, а это означало, что угол «наблюдатель № 1 — комета — наблюдатель № 2» (так называемый параллакс) весьма мал, то есть комета находится очень далеко от Земли, и уж во всяком случае за пределами земной атмосферы. С тех пор изучение комет окончательно перешло в ведение астрономов.

После того как Галилей первым навел на небо построенный им телескоп, в астрономии появилась новая профессия — «ловцы комет». Дело в том, что слабая комета имеет вид маленького туманного пятнышка на небе. Но отнюдь не любое туманное пятнышко — это комета. Теперь мы знаем, что так выглядит целый ряд астрономических объектов: планетарные и диффузные туманности, шаровые и рассеянные скопления, галактики. Когда комета еще далеко от Солнца, она тоже почти не перемещается по небу от ночи к ночи, поэтому ее трудно отличить от этих «статичных» пятнышек. Наблюдатель должен быть достаточно искусным. Французский астроном Шарль Мессье (1730–1817) впервые в истории астрономии составил каталог таких туманностей (более ста объектов) именно для того, чтобы не путать их с кометами. Это и сейчас один из самых известных, можно сказать, «настольный» каталог астрономов. Объекты каталога Мессье обозначают буквой М. Объект М1 — это знаменитая Крабовидная туманность, в центре которой, как мы теперь знаем, находится нейтронная звезда. Именно эту туманность Мессье принял сначала за новую комету и именно во избежание дальнейших ошибок составил свой знаменитый каталог. «Ирония судьбы» заключается в том, что по прошествии каких-нибудь 200—250 лет причины и следствия, так сказать, поменялись местами. Теперь мы знаем, что кометы — это, скорее всего, обитательницы всего лишь нашей Солнечной системы, в которой они, по-видимому, возникли. Солнце — вполне заурядная звезда нашей Галактики (в ней приблизительно 10^{11} звезд). Таких галактик, как наша, великое множество. Обычно они образуют скопления (число галактик в скоплениях исчисляется сотнями и даже тысячами). Таких скоплений мы видим сегодня около двадцати. И если во времена Мессье галактики и туманности были лишь досадными помехами на пути «вылавливания комет», то теперь именно объекты каталога Мессье (и других подобных каталогов) являются важнейшим предметом исследования, так как именно они позволяют судить о структуре и эволюции Вселенной, видимые сегодня размеры которой исчисляются миллиардами световых лет (1 световой год $\approx 10^{18}$ см).

Казалось бы, на фоне таких грандиозных проблем могут ли когонибудь всерьез волновать такие частности, как Солнечная система (ее размеры вряд ли превышают сотни астрономических единиц, а 1 астрономическая единица $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ световых лет), Солнце и совсем «частная частность» — кометы? Оказывается, могут. Дело в том, что вопрос о происхождении Солнечной системы тесно связан с проблемой происхождения жизни на Земле и вообще во Вселенной, с проблемой существования внеземных цивилизаций. Проблемы эти не менее фундаментальны, чем проблемы эволюции Вселенной. Для их решения нужно знать начальные условия, при которых образовалась Солнечная система. И оказывается, именно кометы могут дать об этом необходимую информацию.

По современным представлениям все тела Солнечной системы (и, в частности, кометы) возникли в едином процессе эволюции досолнечного газопылевого облака. Единой, общепринятой точки зрения о том, как это произошло, в настоящее время не существует. Это связано с большой неопределенностью в начальных условиях возникновения и последующей эволюции досолнечного облака. Считается, например, что возникновение планетных систем вокруг звезд — явление заурядное, и в этом плане наша звезда — Солнце — не есть нечто исключительное. (Подробнее освещение этого вопроса можно найти в прекрасной книге И. С. Шкловского «Вселенная, жизнь, разум».) Однако в самое последнее время возникли сомнения в заурядности условий, в которых находится Солнечная система в нашей Галактике. Связано это с местоположением Солнца в Галактике.

Наша Галактика относится к спиральным. Согласно современным представлениям, спиральные рукава галактик представляют собой волны уплотнения. Галактика вращается. При этом угловая скорость Ω зависит от расстояния R до ее центра, то есть $\Omega = \Omega(R)$. А волны уплотнения вращаются с постоянной угловой скоростью $\Omega_{\text{в}}$. Существует, очевидно, такая окружность радиуса $R_{\text{к}}$ в диске галактики, угловая скорость вращения по которой совпадает с угловой скоростью волн уплотнения (то есть выполняется равенство $\Omega(R_{\text{к}}) = \Omega_{\text{в}}$). Такую окружность называют коротационной. В каждой галактике (в том числе и в нашей) есть только одна коротационная окружность.

Оказывается, Солнце в нашей Галактике находится почти на коротационной окружности, и положение Солнечной системы в этом смысле исключительно. Вполне возможно, что из-за этой исключительности условия, в которых возникла Солнечная система, не являются заурядными. Не исключено, что это имеет значение и для проблемы происхождения жизни. Вследствие того, что Солнце вращается почти синхронно со спиральным узором Галактики, мы только один раз за время существования Солнечной системы успели пересечь спиральный рукав — место, крайне опасное для всего живого, так как именно в спиральных рукавах вспыхивают сверхновые звезды, которые дают настолько мощные потоки электромагнитного излучения, что это может оказаться губительным для жизни. Например, по мнению И. С. Шкловского, именно вследствие вспышки близкой сверхновой звезды произошло массовое вымирание динозавров на Земле.

Уже из приведенного примера ясно, насколько важно знать начальные условия, при которых формировалась Солнечная система, насколько они были заурядны или незаурядны в Галактике, каков был химический состав досолнечного облака, физические условия в нем и т. п. Информацию об этих начальных условиях, во всяком случае о химическом составе и физических условиях, могут дать кометы. Массы комет очень малы по сравнению с массами планет Солнечной системы (по-видимому, они порядка $10^{-5} \div 10^{-12}$ массы Земли). Это означает, что мала их собственная гравитация. Поэтому кометы почти не эволюционировали с эпохи своего рождения до «сегодняшнего дня». Другими словами, физические условия в кометах, их химический состав остались такими же (или почти такими же), как в первичной газопылевой туманности, из которой образовались Солнце и планеты. Эволюция затронула большие тела — само Солнце, планеты, но почти не коснулась малых — комет, метеоритов.

Более того, одна из современных гипотез вообще связывает происхождение жизни в Галактике с кометами. Она принадлежит известному американскому физику Дайсону. Его идея заключается в том, что жизнь сконцентрирована на поверхности Земли, в биосфере. Если считать, что жизнь всегда может возникнуть лишь в поверхностных слоях холодных небесных тел, то тогда кометы в Галактике — наиболее подходящее для этого место. Дело в том, что, хотя массы комет намного меньше масс планет в Солнечной системе (или, соответственно, в Галактике, если феномен нашей Солнечной системы — явление не уникальное), однако число их велико ($\approx 10^{15}$), так что суммарная площадь поверхности всех кометных ядер намного больше суммарной площади поверхности всех планет. Химический состав комет, определенный путем спектрального анализа, показывает, что в них есть органические молекулы, которые при определенных условиях способны к самоорганизации, то есть возможно образование из них сложных органических молекул, которые могут послужить основой для возникновения простейших микроорганизмов.

Существует, например, небезосновательная гипотеза, принадлежащая английским ученым Хойлу и Викрамасингху, что некогда Земля была «заражена» органической материей, возникшей в кометах, и что жизнь на Земле возникла вследствие эволюции этой органики. Здесь, конечно, есть свои «за» и «против». Например, И. С. Шкловский высказывает сомнения в справедливости такой гипотезы: так как кометы движутся по сильно вытянутым орбитам вокруг Солнца, в них в огромных пределах меняется температура; из-за малой массы комет в них почти нет силы тяжести; то есть условия в кометах резко отличаются от земных. С другой стороны, совсем недавно появились и некоторые аргументы «за». В упавшем в Мексике метеорите Алленде был обнаружен избыток устойчивого изотопа магния ^{26}Mg (избыток по сравнению с его средним содержанием в Солнечной системе). Исследования показали, что этот избыток является следствием распада радиоактивного изотопа ^{26}Al (устойчивый изотоп — это ^{27}Al). Его период полураспада $T = 0{,}72 \cdot 10^6$ лет. Откуда взялся в досолнечной туманности радиоактивный ^{26}Al? Это — вопрос. Ясно, однако, что он должен был в нее попасть приблизительно за миллион лет до того как начали затвердевать метеориты. Сейчас его появление связывают с вероятным взрывом близкой сверхновой*). Если, однако, в досолнечной туманности присутствовал ^{26}Al, то он был и в том материале, из которого возникли кометы. А это значит, что простейшие органические молекулы, входящие в состав кометных ядер, находились под облучением распадающегося вследствие своей естественной радиоактивности изотопа ^{26}Al. Лабораторные опыты показывают, что при облучении такие молекулы способны к самоорганизации, к образованию аминокислот и оснований нуклеиновых кислот, а отсюда совсем недалеко до возникновения жизни.

Эти идеи не бесспорны, быть может — даже сомнительны. Для их проверки, для ответа на множество интереснейших вопросов необходимы прямые эксперименты в космосе и, конкретно, «рандеву» с кометами, непосредственное «прощупывание» их.

Что представляют собой кометы согласно современным научным взглядам? Массы комет малы. Как я уже упоминал, они, вероятно, заключены в пределах $10^{15}\div10^{22}$ г (масса Земли $\approx 6\cdot10^{27}$ г). В гравитационном поле колоссальной массы Солнца ($\approx 2\cdot10^{33}$ г) они движутся согласно закону всемирного тяготения, по орбитам, представляющим собой конические сечения, то есть, кривые, получающиеся при пересечении конуса плоскостью. Это — окружность, эллипс, парабола, гипербола. В фокусе орбит находится Солнце. Гравитационное поле больших планет (Юпитера и Сатурна) возмущает их орбиты, изменяет их, так что комета, движущаяся, например, по эллиптической траектории, может перейти на гиперболическую или параболическую. Кометы, имеющие эллиптические орбиты (возникновение в таких условиях окружности крайне маловероятно), периодически возвращаются к Солнцу. Такие кометы называют периодическими. Их немного — несколько более семидесяти. Самым большим периодом обладает комета Борелли, которая проходит через перигелий раз в 493 года. Самым коротким периодом обладает комета Энке — 3,3 года. (Обычно кометы носят имена своих первооткрывателей.) Всего сейчас известно свыше пятисот кометных орбит. Можно было бы думать, что раз большинство комет движется по незамкнутым траекториям, они рождаются за пределами Солнечной системы, где-то в Галактике. Однако это не так. Исследования показали, что в действительности первичными орбитами всех комет были эллипсы, большинство которых постепенно превратилось в гиперболы и параболы под влиянием притяжения Юпитера и Сатурна. Это означает, что кометы возникли в пределах Солнечной системы. Сейчас наиболее популярна точка зрения голландского астронома Яна Оорта, согласно которой на границе Солнечной системы, приблизительно на расстоянии 15000 а. е. от Солнца, существует облако комет (так называемое облако Оорта) — «резервуар», из которого под влиянием тяготения ближайших звезд время от времени вырывается какая-либо из комет и устремляется к Солнцу. Ее мы и фиксируем как очередную комету. Раньше существовала красивая гипотеза, согласно которой кометное облако возникло из ледяных остатков десятой планеты Солнечной системы — Фаэтона, некогда существовавшей между орбитами Марса и Юпитера и погибшей вследствие взрыва. Позднее такое объяснение стало казаться далеко не бесспорным. Кометы могли возникнуть и как побочный продукт при формировании планет, и вследствие других процессов в досолнечном газопылевом облаке. Важно, однако, что они возникли, по всей вероятности, в Солнечной системе, мало эволюционировали и, следовательно, несут информацию о начальных условиях.

Что представляют собой кометы с физической точки зрения? Практически вся масса кометы сосредоточена в ее ядре. Ядро, по-видимому, представляет собой твердую смесь камней, льдов различных химических соединений (метана, аммиака, воды и пр.), мелких частиц и т. п. Размеры ядер, вероятно, заключены в пределах от нескольких километров до десятков километров. По мере приближения к перигелию кометные ядра «обрастают» атмосферами, состоящими из различных молекул и пылинок. Атмосферы появляются вследствие прогрева ядра солнечными лучами — при прогреве испаряются льды, при испарении освобождаются и мелкие частицы. Размеры атмосферы вблизи перигелия очень велики. Например, у кометы Галлея в 1910 году голова (т. е ядро + атмосфера) имела диаметр свыше 100 000 км. Из головы типичной кометы обычно выходит один или несколько хвостов, которые всегда направлены в сторону, противоположную Солнцу.

---

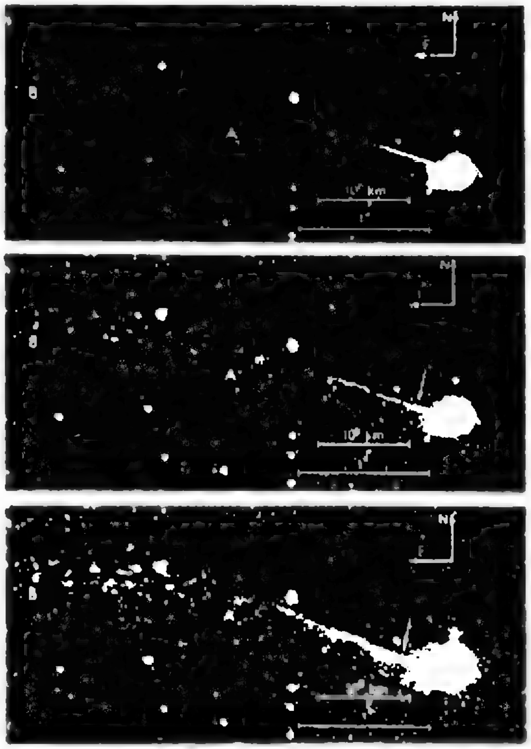
*) При взрывах сверхновых температура повышается настолько, что в их веществе начинается термоядерный синтез химических элементов и, в частности, радиоактивного алюминия. Образовавшиеся в результате такого синтеза продукты, разлетаясь при взрыве, могли «загрязнить» собой близлежащее досолнечное облако.

Химический состав кометных атмосфер (голов и хвостов) определяют по их спектрам. Чаще всего в головах комет наблюдаются молекулярный углерод (C_2), циан (CN), трехатомный углерод (C_3) и другие молекулы. Хвосты комет по своему составу делятся на три типа. Хвосты I типа состоят из плазмы — ионизированных молекул N_2^+, CO^+ и электронов — с концентрацией $n \approx 10 \div 100$ частиц/см^3. Спектры хвостов II и III типов непрерывные. Хвосты III типа — пылевые, хвосты II типа, по-видимому, смешанные — газопылевые.

Нейтральные молекулы и пылинки в атмосферах комет движутся под действием двух противоположно направленных сил: силы гравитационного притяжения к Солнцу и отталкивающей от него силы давления солнечного света*). (Сила притяжения к ядру кометы пренебрежимо мала по сравнению с этими силами.)

Тот факт, что хвосты комет направлены в сторону, противоположную Солнцу, означает, что отталкивание от Солнца преобладает над притяжением. Ускорения частиц в хвостах принято измерять в долях ускорения солнечного притяжения g_0 на данном расстоянии. В хвостах II и III типа ускорения частиц оказываются $\sim(1 \div 20)g_0$, в хвостах I типа — порядка $(100 \div 1000)g_0$. Может ли лучевое давление обеспечить такие ускорения пылинок и молекул? Пылинок — да. С молекулами дело обстоит сложнее. Математический расчет показал, что максимально возможное ускорение, которое под действием лучевого давления может получить молекула, равно $56g_0$. Этого достаточно, чтобы объяснить поведение хвостов второго типа. Но не первого.

Высокие ускорения в хвостах I типа, их причудливая, струйная, быстро меняющаяся структура объ-

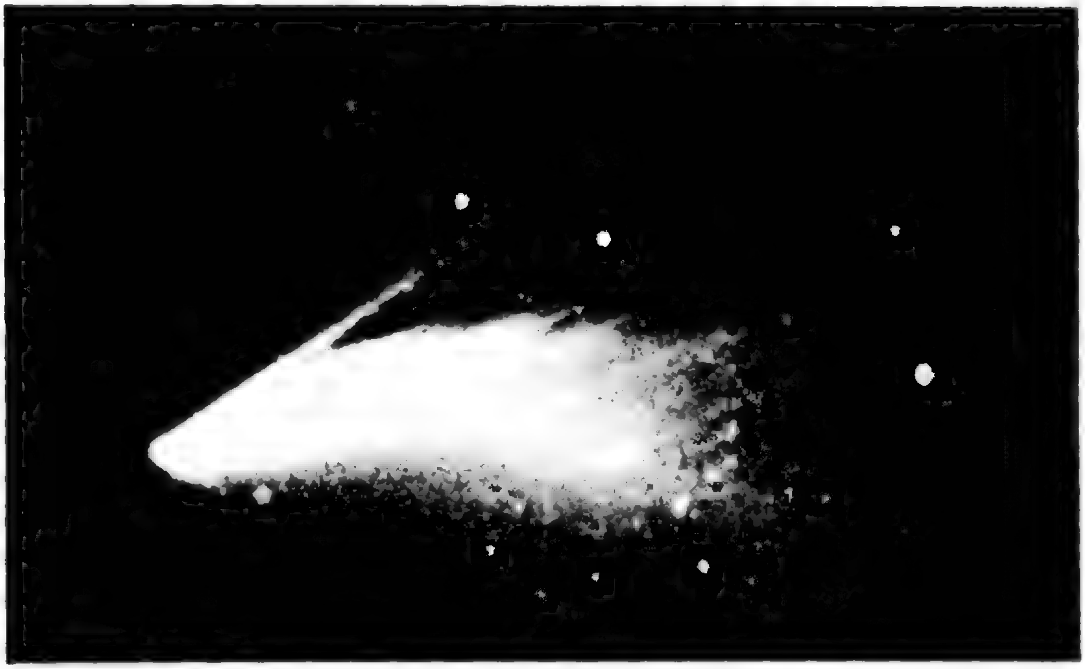


Фотографии кометы Бредфилда, сделанные в 1979 году в Соккоро (Нью-Мехико). Между первой (верхней) экспозицией и последней — временной интервал в 27,5 минут. За это время хвост кометы, который имел колоссальную длину 1,5 млн км, успел быстро переориентироваться, вращаясь как целое. На фотографиях приведен масштаб (линейный и угловой).

В кометных хвостах плазменного типа часто наблюдаются колебательные и спиралевидные движения. Вращение хвоста как целого, наблюдавшееся у кометы Бредфилда, — явление крайне редкое. Причины его пока недостаточно ясны.

---

*) Эффект давления света (или лучевого давления) был доказан экспериментально выдающимся русским физиком П. Н. Лебедевым.



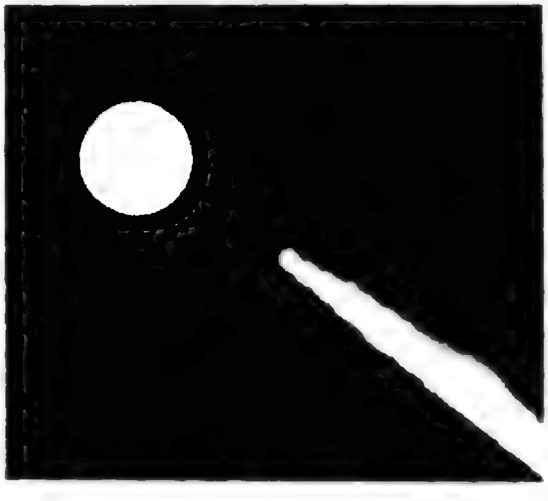
Комета Мркоса (1957 год). Вверху виден узкий газовый хвост I типа, внизу — широкий пылевой хвост II типа.

ясняются не лучевым давлением, а электромагнитными силами.

Межпланетное пространство, в котором движутся кометы, заполнено так называемым солнечным ветром, то есть непрерывно истекающей из Солнца плазмой — протонами и электронами, уносящими с собой (вследствие своей высокой электропроводности) часть солнечного магнитного поля. Высокие ускорения и струйная структура хвостов I типа обусловлены взаимодействием ионов N_2^+, CO^+ и электронов, из которых они состоят, с солнечным ветром.

Не говоря уже о до сих пор нерешенных фундаментальных проблемах, таких как происхождение Солнечной системы, жизни в ней и т. п., на которые могут пролить свет кометные исследования, даже в самой физике явлений, наблюдаемых в кометах, очень много неясного. Список таких непонятных явлений велик, и мы приводить его здесь не будем.

Таким образом, экспедиции к кометам, помимо захватывающего психологического аспекта, имеют и огромное научное значение. Они нужны всем тем, кто интересуется физикой многих непонятных явлений, наблюдаемых в кометах, и тем, кто интересуется фундаментальными проблемами происхождения нашей Солнечной системы и систем, подобных ей в нашей Галактике, проблемами происхождения жизни на Земле и вообще во Вселенной. Вопрос о том, какие экспедиции и к каким кометам планировались и планируются в последние годы, — это, безусловно, предмет отдельного рассказа. Здесь я коротко остановлюсь на ближайших из них — экспедициях к комете Галлея. Эта комета — периодическая. В хрониках зарегистрировано



Неизвестная комета, направляющаяся к Солнцу (1979 год).

29 ее возвращений к Солнцу; в 1986 году будет тридцатое.

Комета Галлея — одна из самых знаменитых в истории человечества. В музее Байе во Франции хранится гобелен XI века, на котором изображены норманны, пораженные видом кометы Галлея в 1066 году. Явление кометы было истолковано как дурное предзнаменование королю Гарольду, погибшему затем в битве при Гастингсе. В 1456 году та же комета Галлея считалась проявлением гнева божьего. Незадолго до ее появления турки захватили Константинополь, превратили христианские церкви в мечети, вырезали почти все христианское население. Появление кометы, по мнению «просвещенных лиц» того времени, предвещало новые беды и, в частности, не исключалось, что это «знамение» говорит об угрозе христианству в Европе. Комета 1456 года была, как писали историки того времени, «ужасной»: ее хвост напоминал бушующее пламя и занимал почти треть звездного неба. Опасаясь за судьбы христианства, римский папа Каликст III призывал в ежедневных молитвах проклинать и эту комету, и турок.

Современник Ньютона Эдмунд Галлей, именем которого названа комета, на основе своих математических расчетов вычислил впервые ее орбиту и период обращения и предсказал появление кометы в 1758 году. Появление кометы Галлея должно было подтвердить закон всемирного тяготения, в правильности которого тогда еще сомневались. Комета не появилась. Знаменитый французский математик А. Клеро понимал, что отсутствие кометы, скорее всего, связано с возмущениями ее орбиты большими планетами. Однако нужны были титанические вычисления, чтобы предсказать дату появления кометы до ее обнаружения на небе. С помощью астронома Ж. Лаланда и математика Гортензии Лепот Клеро успел вовремя закончить вычисления и очень точно предсказать дату появления кометы Галлея. Закон всемирного тяготения Ньютона был блестяще подтвержден. (Вывезенный из Индии французским астрономом Лежантилем дотоле невиданный в Европе цветок был назван в честь мадам Лепот гортензией.)

Вернемся теперь к проектам экспедиции к комете Галлея.

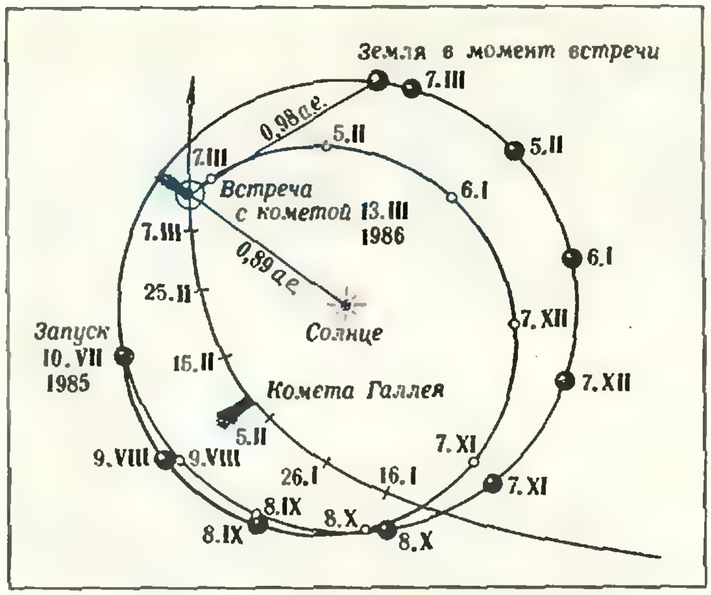
Первоначально проект экспедиции разрабатывался совместно американским и европейским космическими агентствами НАСА и ЕСА. Старт предполагался в 1985 году. Рассчитано было все — от траектории запускаемого автомата до веса (с точностью до граммов) научной аппаратуры. Вот идея этого эксперимента.

После ухода автомата за пределы земного тяготения включается небольшой двигатель, который переводит аппарат на спиралевидную траекторию, раскручивающуюся вокруг Солнца. На втором витке спирали аппарат должен пролететь мимо кометы Галлея на расстоянии в 130 000 км. В этот момент с основного аппарата должен стартовать маленький субавтомат (весом около 100 кг) и направиться к комете. По расчетам он должен пролететь всего в нескольких сотнях километров от ядра. Основной автомат делает еще один виток по спирали и в 1988 году встречается с другой периодической кометой — Темпель-2. «Подстроившись» в хвост этой комете, автомат, медленно подтягиваясь, добирается почти до ядра, летя внутри кометной атмосферы.

Стоимость этого проекта для НАСА составляла 250 млн. долларов, и американцы от него отказались.

Европейцы получили финансирование на часть проекта: встречу только с кометой Галлея. Этот проект стоит 100—150 млн. долларов и носит условное название «Джотто». (Итальянский художник Джотто в XIV веке дал первую научную зарисовку кометы Галлея.)

Орбита кометы Галлея лежит в плоскости, пересекающей плоскость эклиптики под углом $\alpha = 162°$. В 1910 году прохождение кометы было оптимально удобным для наблюдений, так как вблизи перигелия комета находилась как раз на линии Солнце — комета — Земля (и Земля даже прошла через гигантский ионизированный хвост кометы). В сле-



дующее прохождение кометы ситуация для наблюдений будет неблагоприятной. Комета вблизи перигелия будет находиться как бы за Солнцем, и ее можно будет наблюдать в короткие промежутки времени на рассвете и после захода Солнца. Кроме того, комета Галлея, в отличие от большинства комет, имеет так называемое обратное движение — она летит по своей орбите в сторону, противоположную обращению Земли вокруг Солнца. Это очень осложняет эксперимент «Джотто», так как автомат и комета будут подлетать друг к другу как бы на встречных курсах с относительной скоростью 75 км/с, поэтому время пролета вблизи ядра кометы будет очень мало, оно исчисляется секундами. За это время нужно успеть осуществить огромную научную программу: попытаться сфотографировать ядро, установить химический и изотопный состав кометной атмосферы, степень ионизации, величину магнитного поля и т. д.

Приведенная выше схема полета корабля для встречи с кометой Галлея заимствована из опубликованного ЕСА проекта. Внешний круг — это орбита Земли, в центре круга — Солнце. Запуск планируется 10 июля 1985 года. Автомат летит по спирали вокруг Солнца и встречает комету 13 марта 1986 года после прохождения ею перигелия. На рисунке отмечены положения Земли, автомата и кометы в конкретные даты.

Параллельно с «Джотто» в СССР будет осуществлена своя экспедиция к комете Галлея. Ее проект очень остроумен. Автором его является академик Р. З. Сагдеев, директор Института космических исследований АН СССР. Суть проекта в том, чтобы автоматы, которые предполагается послать к Венере в 1984 году, использовать для встречи с кометой Галлея. Дело в том, что, в отличие от Земли, Венера будет расположена весьма удачно по отношению к комете вблизи ее перигелия. Поэтому небольшого маневра в поле тяготения Венеры будет достаточно, чтобы направить автоматы, выполнившие свои исследовательские задачи вблизи этой планеты, к комете Галлея. Такой проект практически не требует дополнительных денежных затрат.

Если экспедиции к комете Галлея пройдут удачно, то исключительность этой кометы в истории человечества станет неоспоримой.

Г. Меледин, В. Сербо

Конденсация света в вещество

Мыслимо ли превращение света в вещество? Если да, то как это можно сделать?

В этой статье мы хотим рассказать об основных физических принципах, связанных с реализацией удивительной идеи превращения (конденсации) света в вещество с помощью встречных фотон-фотонных пучков. Но прежде — немного об ускорителях на встречных пучках.

Получать новые частицы, а также исследовать строение и взаимодействие уже открытых частиц можно с помощью ускорителей. Чем больше скорость налетающей частицы-снаряда относительно частицы-мишени, тем больше подробностей можно узнать. Еще до сравнительно недавнего времени использовались неподвижные мишени, которые облучались разогнанными в ускорителе частицами. Потом возникла идея: раз существенно относительное движение налетающей частицы и мишени, то почему бы не воспользоваться движущейся мишенью и двигать ее навстречу ускоренному пучку частиц? Такой подвижной мишенью может стать другой ускоренный пучок, движущийся навстречу первому. Так появились ускорители на встречных пучках.

Первыми были ускорители с встречными электрон-электронными и электрон-позитронными пучками. Затем был построен ускоритель с протон-протонными пучками. Недавно начал работать ускоритель, в котором сталкиваются протонные и антипротонные пучки. Планируется создание электрон-протонных ускорителей. Вы, возможно, слышали об этом.

Но вот о взаимодействии встречных фотон-фотонных пучков вряд ли кто из вас слышал. А между тем уже был проведен ряд интересных экспериментов, в которых изучалось рождение электронов, позитронов и других, более массивных, частиц на встречных фотон-фотонных пучках. Как это удалось сделать, рассказать очень не просто. Однако попробуем.

Пожалуй, самое замечательное свойство частиц и античастиц — их способность к взаимному уничтожению (аннигиляции) и превращению в другие частицы или кванты излучения. Так, для электрона e^- античастицей является позитрон e^+; при столкновении e^- и e^+ может произойти их аннигиляция и рождение каких-то новых частиц.

На встречных электрон-позитронных пучках хорошо изучена реакция аннигиляции типа

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma,$$

в результате которой образуются два гамма-кванта, то есть два кванта электромагнитного излучения высокой частоты. Энергия этих γ-квантов во много раз превосходит энергию квантов видимого света.

Упражнение 1. Выбрав соответствующую систему отсчета, покажите, что при аннигиляции электрон-позитронной пары не может родиться только один фотон.

Упражнение 2. Найдите энергию одного из двух фотонов, полученных в результате взаимного уничтожения электрона и позитрона, и сравните ее с энергией фотона, соответствующего зеленому свету с длиной волны $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Здесь естественно возникает целый ряд вопросов. Прежде всего — не должна ли наблюдаться обратная реакция превращения гамма-квантов соответствующей энергии в электрон-позитронную пару:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-?$$

Почему бы при столкновении одного пучка электромагнитного излучения с другим не рождаться и более тяжелым частицам, скажем, пи-мезонам π^+ и π^- (π-мезоны — это короткоживущие ядерные частицы с массой, примерно в 300 раз большей массы электрона):

$$\gamma+\gamma\to\pi^++\pi^-$$

или протонам и антипротонам? Или, еще шире — не должно ли происходить превращение света (гамма-квантов) в вещество и антивещество (в атомы и антиатомы, молекулы и антимолекулы)? Конечно, до получения антимолекул на встречных фотон-фотонных пучках пока еще слишком далеко, а вот возможность подробно изучить реакцию рождения пары пи-мезонов вызвала большой интерес физиков.

Как же практически можно осуществить превращение (или конденсацию) света в вещество? Заметим, прежде всего, что такое превращение кажется противоречащим хорошо установленному факту: световые волны проходят друг через друга без взаимодействия (принцип суперпозиции электромагнитных волн). Оказывается, принцип суперпозиции выполняется не всегда, для сильных электромагнитных полей он нарушается — после прохождения друг через друга световые пучки изменяются. Теперь возникает новая проблема: для наблюдения реакции типа

$$\gamma+\gamma\to\pi^++\pi^-$$

нужно столкнуть друг с другом два плотных пучка γ-квантов. К сожалению, плотные пучки фотонов в настоящее время можно получить только от лазеров, но γ-лазеры еще не изобретены. Обычные же лазеры излучают фотоны слишком малых для наших целей энергий. Как же решить эту проблему?

Оказалось, что существует очень красивый обходной путь, с помощью которого можно уже сегодня наблюдать превращение света в вещество: использовать встречные электрон-позитронные пучки для получения необходимых γ-пучков. Постараемся объяснить суть этой идеи.

Как известно, γ-пучок можно представить либо как поток фотонов высокой энергии, либо как электромагнитную волну большой частоты. У такой волны напряженность $\vec{E}$ электрического поля и индукция $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярны друг другу и скорости $\vec{v}$ движения волны (рис. 1). Но как раз почти такими же свойствами обладает электромагнитное поле релятивистского электрона (и позитрона), то есть электрона, движущегося со скоростью, близкой к скорости света c. Поясним, почему это так. Для этого рассмотрим электрическое поле... движущегося конденсатора. Да, именно конденсатора, потому что с помощью этого простого примера будет легко связать хорошо известное поле неподвижного электрона с полем движущегося электрона.

Итак, рассмотрим электрическое поле плоского конденсатора в двух инерциальных системах отсчета: в системе K, в которой конденсатор движется, и в системе K', где он покоится. Пусть сначала скорость конденсатора $\vec{v}$ параллельна его пластинам (рис. 2, *а*). Обозначим через q заряд конденсатора, а через S' — площадь пластины конденсатора в системе K'. Тогда электрическое поле $\vec{E'}$, перпендикулярное вектору $\vec{v}$, равно $E'=E'_\perp=q/(\varepsilon_0 S')$. При переходе в систему K заряд, конечно же, остается прежним, а площадь пластины S изменяется. Из специальной теории относительности известно, что поперечные, по отношению к направ-

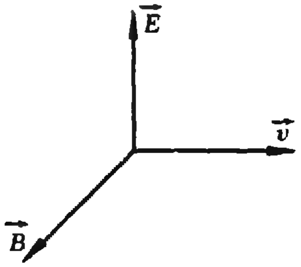


Рис. 1.

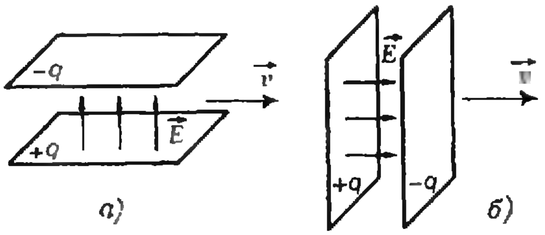


Рис. 2.

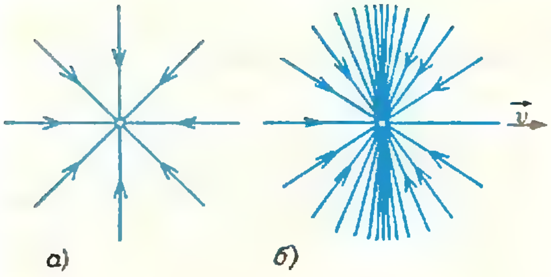


Рис. 3.

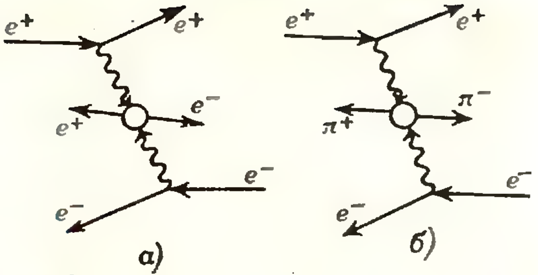


Рис. 4.

лению вектора $\vec{v}$, размеры движущихся тел не изменяются, а продольные сокращаются в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз. Значит, в нашем случае площадь пластины $S=\sqrt{1-v^2/c^2}\ S'$ и электрическое поле

$$E_\perp=\frac{E'_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{q/(\varepsilon_0 S')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Аналогично, для случая, когда скорость конденсатора перпендикулярна его пластинам (рис. 2, *б*), размеры пластин не изменяются, и электрическое поле, параллельное вектору $\vec{v}$, остается одним и тем же в обеих системах отсчета:

$$E_\parallel=E'_\parallel=q/(\varepsilon_0 S').$$

Формулы, полученные для частного случая плоского конденсатора, справедливы для любого электростатического (в системе K') поля. Применим их к релятивистскому электрону. В системе K', где электрон покоится, его поле $\vec{E}'$ имеет хорошо известный вид — оно сферически симметрично (рис. 3, *а*). В системе K, в которой электрон движется со скоростью $\vec{v}$, создаваемое им поле уже не симметрично — в перпендикулярном к вектору $\vec{v}$ направлении оно сильнее (рис. 3, *б*). Чем больше скорость v, тем больше отношение $E_\perp/E_\parallel$, и электрическое поле электрона становится все более поперечным.

Наконец, вокруг движущегося электрона (так же, как и вокруг провода с током) возникает поперечное магнитное поле $\vec{B}$, линии индукции которого имеют вид окружностей с центрами на линии движения электрона.

Таким образом, в поле движущегося электрона векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и направлению $\vec{v}$ движения электрона. Другими словами, это поле — почти такое же, как и у электромагнитной волны. Поэтому электромагнитное поле релятивистской заряженной частицы можно рассматривать как поток фотонов, сопровождающих эту частицу.

Упражнение **3.** Найдите электрическое поле, создаваемое релятивистской заряженной частицей, на расстоянии a от нее по направлению скорости и на расстоянии b в перпендикулярном направлении. Скорость частицы $\vec{v}$, заряд q.

Именно эти фотоны, сопровождающие летящие навстречу друг другу электроны и позитроны (во встречных электрон-позитронных пучках), и можно использовать как встречные фотон-фотонные пучки с высокими энергиями. В свою очередь, эти фотоны, провзаимодействовав, могут превратиться в другие частицы: e^+ и e^-, π^+ и π^- и т. п.

Впервые рождение новой пары электрон-позитрон через промежуточные столкновения гамма-пучков (рис. 4, *а*) наблюдалось в 1971 году в Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР, а позднее (и на других ускорителях) — в Италии и США.

Реакции с рождением пи-мезонов (рис. 4, *б*) исследуются, начиная с 1979 года, на самых больших ускорителях в ФРГ и США.

Недавно в Новосибирске начались эксперименты на новом ускорителе на встречных электрон-позитронных пучках ВЭПП-4. В программу экспериментов входит также детальное изучение процессов превращения (конденсации) электромагнитного излучения в другие частицы.

В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди, потеряв надежду на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!

«Квант» относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12, с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

Обозначение операций

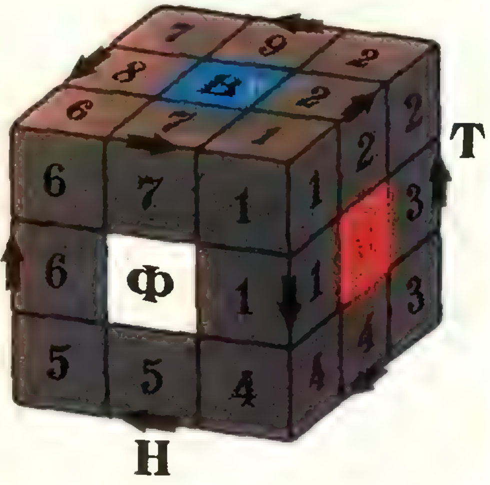
Обозначим каждую грань волшебного кубика: *Ф* (фасад), *Т* (тыл), *В* (верх), *Н* (низ), *П* (правая), *Л* (левая) (см. рис.). Поворот грани X на $n \cdot 90°$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n, например повороты правой грани на 90°, 180°, 270° записываются, как $П$, $П^2$, $П^{-1}=П^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв *Ф*, *Т*, *В*, *Н*, *П*, *Л* со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции F первый угловой кубик перешел на место i_1-го, i_1-й — на место i_2-го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда



---

*) Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.

*) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).

кубик с номером i_{n_1} вернется на место первого (почему?). Кубики 1, $i_1, \dots, i_{n_1}$ образуют в операции F *цикл*, обозначаемый $(1 i_1 \dots i_{n_1})$. Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл ($n_1 < 7$), то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n_1+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n_1+1} \dots i_{n_2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на *независимые* (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(1 i_1 \dots i_{n_1}) \cdot (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись [2 7 6] означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i-й средний кубик занял место j-го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j-го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^{-}7^{+}6^{-}]$ (или $[2^{-}7\,6^{-}]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^{-}]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180°.

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак +, знак — или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120°. Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим +, если по часовой стрелке — ставим —. Скажем, записи (5^{+}), (5), (5^{-}) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120°, 0°, 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице *(см. с. 24)*

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями), затем знак ~, а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $П \sim (1^{+}2^{-}3^{+}4^{-})\,[1234]$, $В^{-} \sim (1276)\,[2^{-}9^{-}8^{-}7^{-}]$, $Ф^2 \sim (15)\,(46)\,[16]\,[57]$, $ПФ \sim (1^{+}2^{-}3^{-}5^{-}6^{+})\,(4^{+})\,[1234567]$, $П^2Ф^2 \sim (135)\,(264)\,[136]\,[24]\,[57]$.

В таблице приводится 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции C_{15} и C_{19} заимствованы из «Венгерского среднешкольного журнала», C_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» $2 \times 2 \times 3$. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — *Ф* и *П*. Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = ПТВ^2Т^{-1}$, $A_2 = Ф^{-1}ТВТ^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Ф и П. Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

Название, описание и результат операции	Число ходов
1) *Перестановки средних кубиков:*	
а) *3-циклы*	
$C_1 = Ф^{-1}П^{-1}ФП \sim [125] \cdot (1^+2)(45^-)$	4
$C_2 = Ф^2П^{-1}Ф^2П \sim [126] \cdot (1^+2^-5^-64^+)$	4
$C_3 = ФП^{-1}Ф^{-1}П \sim [127] \cdot (1^-4^-)(2^+6^+)$	4
$C_4 = Ф^2П^2Ф^2П^2 \sim [136] \cdot (135)(264)$	4
$C_5 = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^2 \sim [235] \cdot (1^+5^+)(2^-3^-)$	5
$C_6 = П^{-1}Ф^2П^{-1}Ф^2П^2 \sim [236] \cdot (1^+2^-35^+6^-)$	5
$C_7 = П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2 \sim [237] \cdot (1^+2)(3^-6)$	5
$C_8 = П^{-1}Ф^{-1}П^2ФП^{-1} \sim [245] \cdot (1243^-5^+)$	5
$C_9 = П^{-1}Ф^2П^2Ф^2П^{-1} \sim [246] \cdot (13^+6^-)(24^-5^+)$	5
$C_{10} = Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [123] \cdot (1^-3)(2^-4^-)$	7
б) *2-циклы*	
$C_{11} = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [14](12^+34^-)$	8
$C_{12} = ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1} \sim [12][3^-][4^-](24^+3)(1^+5^+)$	7
в) *поворот средних кубиков*	
$C_{13} = ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1} \sim [1^-][2^-](1^-2^-)(46^-)$	8
г) *перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых*	
$C_{14} = П^2НВ^{-1}Ф^2ВН^{-1} \sim [136]$	6
$C_{15} = ВПТЛФВ^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}П^{-1} \sim [1^-2^-7]$	10
$C_{16} = ПВН^{-1}Ф^{-1}НВ^{-1} \sim [1^-6^-24^-3]$	6
$C_{17} = (П^2Ф^2)^3 \sim [24]\,[57]$	6
$C_{18} = П^2Ф^2П^2Ф^2 \cdot ПВ^{-1}П^2ВФ \cdot ПВФ^2В^{-1}Ф \sim [2^-][7^-]$	14
$C_{19} = П^{-1}ВПТЛФВ^{-1}ПВ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}В \sim [2^-][7^-]$	14
2) *Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних*	
а) *3-циклы*	
$У_1 = ВЛВ^{-1} \cdot П^{-1} \cdot ВЛ^{-1}В^{-1} \cdot П \sim (1^+2^+6^+)$	8
$У_2 = Л^{-1}ТЛ \cdot Ф^{-1} \cdot Л^{-1}Т^{-1}Л \cdot Ф \sim (12^-6^+)$	8
$У_3 = Ф^2П^2Ф \cdot Л \cdot Ф^{-1}П^2Ф \cdot Л^{-1}Ф \sim (126)$	9
$У_4 = Л^2Т^2Л^{-1} \cdot Ф^2 \cdot ЛТ^2Л^{-1} \cdot Ф^2Л^{-1} \sim (1^+26^-)$	9
$У_5 = ПВ^2П \cdot Н \cdot П^{-1}В^2П \cdot Н^{-1}П^2 \sim (12^+6^-)$	9
$У_6 = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1} \sim (1^-2^-6^-)$	10
$У_7 = П^{-1}Т^2П \cdot Ф \cdot П^{-1}Т^2П \cdot Ф^{-1} \sim (1^+7^+4^+)$	8
$У_8 = ФНФ^{-1} \cdot В^2 \cdot ФН^{-1}Ф^{-1} \cdot В^2 \sim (17^+4^-)$	8
$У_9 = Ф^{-1} \cdot ПТ^{-1}П^{-1} \cdot Ф \cdot ПТП^{-1} \sim (1^-74^+)$	8
$У_{10} = Н^2Л^{-1}Н^{-1}П^2НЛН^{-1}П^2Н^{-1} \sim (1^-7^+4)$	9
$У_{11} = Т^{-1}НТ^{-1}П^2ТН^{-1}Т^{-1}НП^2Н^{-1}Т^2 \sim (174)$	11
$У_{12} = П^2Н^{-1}ЛНП^2Н^{-1}Л^{-1}Н \sim (2^+4^-6)$	8
$У_{13} = В^{-1}У_7В \sim (2^+4^+6^+)$	10
$У_{14} = В^{-1}У_{10}В \sim (246)$	11
б) *разворачивание угловых кубиков*	
$У_{15} = (ПФ^{-1}Н^2ФП^{-1}В^2)^2 \sim (2^-)(6^+)$	12
$У'_{15} = П^{-1}У_{15}П \sim (6^+)(3^-)$	14
$У''_{15} = ПУ_{15}П^{-1} \sim (1^-)(6^+)$	14
$У_{16} = У_9^{-1} \cdot У_8 = ПТ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}ПТП^{-1}Ф^2НФ^{-1}В^2ФН^{-1}Ф^{-1}В^2 \sim (1^+)(4^+)(7^+)$	15
$У'_{16} = П^{-1}У_{16}П \sim (1^+)(2^+)(7^+)$	15
$У''_{16} = FУ_{16}F^{-1} \sim (1^+)(3^+)(7^+)$, здесь $F = ФН^{-1}Ф^{-1}В^2$	15
$У_{17} = (C_{13})^2 = (ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1})^2 \sim (1^+)(2^+)(4^-)(6^-)$	16
$У_{18} = (C_3C_2)^2 = (ФП^{-1}Ф^{-1}ПФ^2П^{-1}Ф^2П)^2 \sim (1^-)(2^+)(4^+)(5^+)(6^+)$	16
в) *3-циклы с разворачиванием*	
$У_{19} = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛН^2ТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1}Н^2 \sim (1^-2^-7^-)(3^-)(5^+)$	12
$У_{20} = (C_{12})^2 = (ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1})^2 \sim (2^+34^+)(1^-)(5^-)$	14
г) *пары 2-циклов*	
$У_{21} = (C_1)^3 = (Ф^{-1}П^{-1}ФП)^3 \sim (1^-2^+)(4^-5^+)$	12
$У_{22} = (C_3)^3 = (ФП^{-1}Ф^{-1}П)^3 \sim (14)(26)$	12
$У_{23} = C_{17}П^{-1} = (Ф^2П^2)^2Ф^2П(Ф^2П^2)^2Ф^2П \sim (13)(24)$	12
$У_{24} = (C_{11})^2 = (П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф)^2 \sim (1^+3^-)(2^+4^-)$	16

четно. Поэтому после первого этапа в гранях $Ф$ и $П$ может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3 = НП^{4-n}Н^{-1}$ ($n = 1, 2, 3$) «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го и n-го, а операция $A_4 = НВ^{-1}ПВН^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_3 и A_4, мы добиваемся того, что стрелки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани *Ф* и *П*, поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко сделает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней *Ф* и *П* можно правильно расставить, использовав не более трех операций типа C_1—C_{10}. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней *Ф* и *П*. Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа Y_1—Y_{14}. После этого можно, применяя операции Y_{15}—Y_{18}, правильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16}, мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16}, Y'_{16} или Y''_{16}. Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющемся данным) алгоритме — на 52 хода.

Игра, задача или спорт?

Эти соревнования очень напоминали состязания штангистов — разминочный зал, помост, за которым — огромное табло, участники, собирающиеся с силами (или с мыслями?) перед подходом к снаряду, судьи, аплодисменты зрителей... Только вместо штанги на помосте был установлен небольшой столик с сенсорным электронным фиксатором времени, табло показывало не килограммы, а секунды, вместо грома железа раздавалось тихое поскрипывание, да и «спортсмены» не отличались могучим телосложением тяжелоатлетов. Здесь, в Будапеште, 5—6 июня проходил первый чемпионат мира по «волшебному кубику Рубика». На него съехались чемпионы 19 стран трех континентов — в основном, школьники и студенты-математики.

Соревнования проходили так: очередной участник на глазах зрителей наугад вытаскивал из чемоданчика, наполненного заранее «запутанными» кубиками, один, изучал его в течение 15 секунд, еще несколько секунд мог, как гимнаст, прокручивать в уме начало комбинации, а затем уже демонстрировал совершенство своего алгоритма и, конечно, ловкость пальцев. Было проведено три серии попыток; в зачет шло лучшее время. За соблюдением правил следило жюри, возглавляемое самим изобретателем головоломки — профессором Э. Рубиком.

Результаты, показанные «гроссмейстерами кубика», поразительны. Даже худшее время лишь немногим превышает 55 секунд. (Для сравнения скажем, что нетренированный, но уже знакомый с кубиком человек, пользуясь записью алгоритма, тратит на сборку около двух часов.) Не обошлось и без казусов: чемпион Финляндии в одной из попыток так спешил, что один за другим сломал два кубика. А первое место занял шестнадцатилетний американец Мин Тай, его время — 22,95 секунды!

Так что же такое «волшебный кубик» — игра, математическая задача или... новый вид спорта?

В. Н.

В. Сурдин

Солнечное затмение 31 июля 1981 года

Среди редких астрономических явлений самое впечатляющее — солнечное затмение. Уверен, что с таким утверждением согласятся тысячи очевидцев полного солнечного затмения, которое 31 июля 1981 года наблюдалось на территории СССР. В этот день лунная тень пробежала по Земле путь в 8250 км, из них около 7100 км — по суше; столь длинная полоса затмения на материке бывает редко. Замечательно, что на всем своем пути лунная тень двигалась по территории нашей страны: от побережья Грузии через Северный Кавказ, Казахстан и Южную Сибирь до восточных границ Советского Союза. Далее тень Луны двигалась по поверхности Тихого океана и закончила свой маршрут у Гавайских островов. Весь этот длинный путь лунная тень проделала всего за 2,9 часа, а в каждой отдельной точке на поверхности Земли продолжительность полного затмения не превышала 129 секунд. Впрочем, автору этой заметки, вместе с группой астрономов и геофизиков, посчастливилось наблюдать солнечную корону в течение 155 секунд с борта самолета Як-40, летящего вслед за лунной тенью.

Диаметр лунной тени на поверхности Земли не превосходит 270 км. Во время затмения 31 июля максимальный размер тени был 108 км. По счастливой случайности лунная тень прошла по многим участкам Байкало-Амурской магистрали. В столицу БАМа — Тынду съехались многие любители астрономии и профессиональные астрономы и геофизики, чтобы наблюдать затмение. Но утром 31 июля погода в Тынде была плохая: облачность начиналась почти у самой земли и тянулась до высоты 7 км. Все напряженно ждали полудня, когда должно было начаться затмение. Предчувствия были самые нехорошие. Казалось, что не оправдается даже наша надежда на самолет: по метеоусловиям ему не давали взлет. Незадолго до начала затмения туман у земли рассеялся и, после отчаянных уговоров диспетчера, нам разрешили взлет. Солнечную корону мы увидели и сфотографировали на высоте 7770 м на фоне почти черного неба.

Как выяснилось после посадки, в Тынде затмение началось при сплошной облачности, но буквально за несколько минут до момента полного затмения облака быстро рассеялись, и солнечная корона появилась на почти чистом небе. За свое терпение наблюдатели были вознаграждены изумительной картиной яркого жемчужного ореола, возникшего всего на 2 минуты вокруг дисков Луны и Солнца, встретившихся на короткое время, чтобы снова надолго разойтись в своем сложном небесном хороводе.

Возможно, у читателя возникнет вопрос: стóит ли это редкое природное явление того, чтобы множество занятых людей отправлялись в далекие, порой необжитые места и в этих необжитых местах устраивали почти настоящие астрономические обсерватории со сложными дорогими приборами, и все это ради нескольких минут любования солнечной короной? Да и любования ли? Оказывается, многие астрономы, не раз ездившие на затмения, так никогда и не видели корону Солнца, хотя погода была отличная. Все время, от первой до последней секунды затмения, ученые проводили у своих приборов, боясь даже на мгновение оторваться, чтобы посмотреть на корону.

Ответ на этот вопрос несомненен: стоит. Дело в том, что в короткие минуты затмения астрономы успевают получить ценнейший наблюдательный материал о структуре и физических условиях в верхних слоях солнечной атмосферы. В обычное время такие исследования провести нельзя: мешает яркий свет солнечного диска. Поэтому солнечные затмения еще долго останутся желанным событием для астрономов и всех любителей науки о небе.

В заключение предлагаем вам решить несколько задач, связанных с солнечными и лунными затмениями. В таблице, помещенной ниже, приведены данные о планетах и их спутниках. Некоторые из этих данных понадобятся вам при решении задач.

Задачи

1. Почему полные солнечные затмения чаще бывают летом, а не зимой?

2. Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах?

3. Бывают ли солнечные затмения на Марсе? на Юпитере?

4. Бывают ли на указанных планетах затмения спутников («лунные» затмения)?

5. Можно ли на самолете догнать лунную тень, движущуюся по поверхности Земли?

Перед наблюдением полного солнечного затмения 1927 года в Швеции (слева направо): С. К. Всехсвятский, В. Г. Фесенков, Г. С. Ландсберг и А. А. Михайлов.

6. Можно ли наблюдать солнечное затмение с борта орбитальной станции «Салют»? Оцените продолжительность затмения.

7. Можно ли в момент полного лунного затмения увидеть из одной точки земной поверхности и Луну и Солнце?

8. Когда угловой диаметр Луны больше: когда она находится вблизи зенита или у горизонта?

9. Можно ли наблюдать солнечное затмение на Северном полюсе?

Планета	Экваториальный радиус (км)	Среднее расстояние от Солнца (млн. км)	Некоторые спутники	Радиус спутника (км)	Среднее расстояние от планеты (тыс. км)	Период обращения (дни)
Земля	6378	149,6	Луна	1738	384,4	27,3
Марс	3398	227,9	Фобос	~10	9,38	0,32
			Деймос	~6	23,5	1,26
Юпитер	71 900	778,3	Ио	1816	421,6	1,78
			Европа	1563	670,9	3,55
			Ганимед	2638	1070	7,16
			Каллисто	2410	1880	16,69

А. Ходулев

Расселение фишек

От редакции

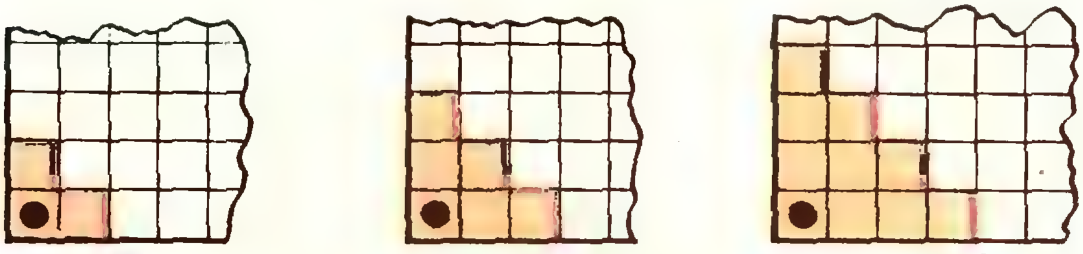
Эта заметка посвящена следующей задаче М. Концевича (из № 11 за 1981 г.), признанной читателями одной из лучших среди опубликованных в «Задачнике Кванта» в прошлом году:

М715. *Прямой угол разбит на клетки. На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли несколькими указанными преобразованиями освободить от фишек уголки из а) трех, б) шести, в) десяти клеток, показанные на рисунках 1, а, б, в?*

Эта задача нам также очень понравилась — мы нашли в ней многие черты, которые были бы рады встретить в новых материалах, присылаемых в журнал: наглядная формулировка, побуждающая проделать эксперимент и затем построить общую теорию; характерный для современной дискретной и прикладной математики объект исследования (решетка, заполненная единицами и нулями, локальные правила перехода); естественное появление в решении целого букета важных математических понятий и конструкций (инвариант, бесконечная сумма, вложение задачи в некоторое ее «расширение», конечный алгоритм и т. п.). Очень советуем тем, кто не решал задачу М715, подумать над ней хотя бы час, прежде чем читать статью («главный» рисунок 8 мы нарочно отправили в конец статьи). Остальным, уже испытавшим это удовольствие, мы предлагаем доказать не доказанные факты из второй части статьи, где излагается небольшая теория, позволяющая исследовать разрешимость «игры Концевича» в самом общем случае.

Решение задачи М715. Инвариант

Для поисков нужной последовательности ходов удобно воспользоваться шашками и обычной шахматной доской. Поставив шашку в левый нижний угол и немного поэкспериментировав, легко найти решение задачи а). В этой задаче можно освободить розовую область, например, так, как показано на рисунке 2 — за 4 хода (1,1), (2,1), (2,2), (1,2). (Запись хода указывает координаты клетки, с которой снимается фишка при выполнении хода. Например, ход (2,1) означает, что фишка снимается с поля (2,1), а на поля (2,2) и (3,1) ставятся новые фишки).



а) б) в)

Рис. 1.

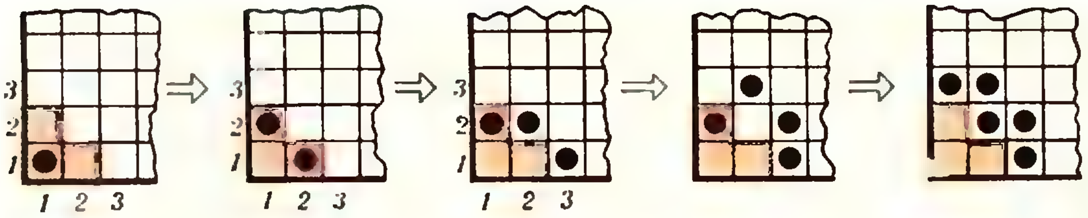


Рис. 2.

Найти решение задач б) и в) экспериментальным путем не удается. Мы докажем, что освободить соответствующие области невозможно. Начнем с более простой задачи в).

Многие читатели рассуждали примерно так. Когда мы уберем фишку (1,1), появятся две новых (1,2), (2,1) — на полях (i, j) с $i+j=3$. Их нам рано или поздно тоже придется убрать — при этом на следующей диагонали $i+j=4$ появятся уже $2 \cdot 2=4$ «потомка»; их «расселение» (ведь эту диагональ тоже надо освободить!) даст 8 фишек на диагонали $i+j=5$ и в задаче в) — целых 16 фишек на диагонали $i+j=6$. Из этих 16 на месте могут остаться лишь 5, остальные 11 дадут 22 новых потомка на диагонали $i+j=7$, из которых $22-16=6$ вновь нуждаются в расселении и т. д., — фишкам явно не хватает жизненного пространства!

Упражнение. Попробуйте превратить эти соображения в строгое решение задачи в).

Кое-что из этих рассуждений (а именно, множество необходимых ходов, рассматриваемых без учета порядка их выполнения) еще пригодится нам ниже. Но мы сначала приведем более глубокое по идее и изящное решение задачи в), которое — с небольшим ухищрением — проходит и для б).

При доказательстве невозможности какого-либо перехода очень полезно бывает найти инвариант. *Инвариантом* называется некоторая величина, зависящая от состояния исследуемой системы и не меняющаяся при любом допустимом преобразовании. Если окажется, что конечное состояние (к которому мы стремимся) обладает значением инварианта, отличным от исходного, то перевести одно из них в другое невозможно. Замечательный пример применения инвариантов для доказательства невозможности перехода см. в статье О. Виро «Раскрашенные узлы» («Квант», 1981, № 3)*).

В нашей задаче инвариант должен зависеть от расположения фишек на плоскости. Попробуем найти инвариант s в виде суммы нескольких слагаемых — «весов» клеток, занятых фишками; при этом каждой клетке нужно приписать положительное число — *вес* так, чтобы эта сумма s действительно оказалась инвариантом, то есть не менялась при любом ходе.

Простейший способ — взять вес клетки (i, j), занятой фишкой, равным $w_{ij}=1/2^{i+j-2}$ (рис. 8, с. 55). Легко убедиться, что при таком выборе весов w_{ij} их сумма s по всем занятым клеткам — инвариант: при очередном расселении вес каждой фишки уменьшается вдвое, но вместо одной появляются две фишки. В начальной позиции (фишка в клетке (1,1)) $s_{\text{нач}}=1$. Чтобы оценить s в конечной позиции (когда нужные 10 или 6 клеток свободны), заметим, что сумма вообще всех чисел w_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots)$ конечна! Действительно, сумма чисел в первом горизонтальном ряду равна $w_{11}+w_{12}+$ $+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2.$ Во втором ряду сумма в два раза меньше, в третьем еще в два раза меньше и т. д. Сумму чисел по всей четверти плоскости находим, складывая суммы отдельных горизонтальных рядов $2+1+\frac{1}{2}+\ldots=4$. Будем обозначать сумму чисел w_{ij} по некоторому множеству клеток X через $s(X)$. Обозначим через B и $Б$ множества, которые надо освободить в задачах в) и б) соответственно, через K — всю четверть плоскости. Мы получили, что $s(K)=4$. В окончательной позиции все фишки должны принадлежать множеству $K \setminus B$ (так обозначается *дополнение* B до K); поэтому $s_{\text{кон}}<s(K \setminus B)$ (строго меньше, поскольку в окончательной позиции конечное число фишек и они

---

*) См. также «Квант», 1976, № 2, с. 32; 1976, № 12, с. 19; 1979, № 3, с. 26.

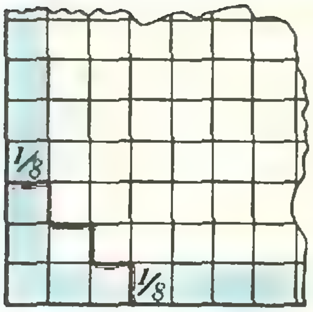


Рис. 3.

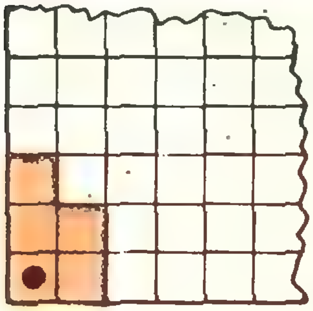


Рис. 4.

не могут заполнить все множество $K\setminus В$). Но

$$s(K\setminus В)=s(K)-s(В)=$$
$$=4-\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

Итак, $s_{\text{нач}}=1$, $s_{\text{кон}}<\frac{3}{4}$, а должно быть $s_{\text{кон}}=s_{\text{нач}}$, если мы действуем по правилам! Полученное противоречие доказывает, что освободить область $В$ нельзя.

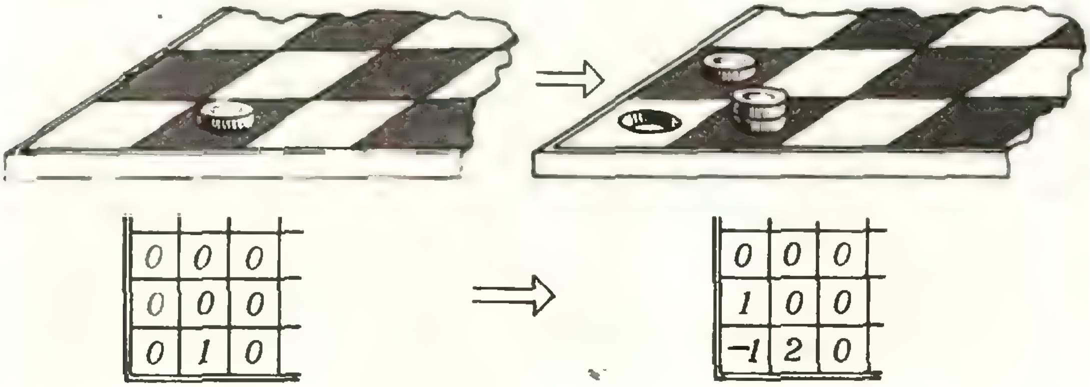
Для $Б$ аналогичный подсчет показывает, что $s_{\text{кон}}<s(K\setminus Б)=1\frac{1}{4}$. Эта оценка еще не дает противоречия. Но ее можно улучшить, заметив, что в первом горизонтальном и первом вертикальном ряду (обозначим оба этих ряда вместе через L — см. рис. 3, где L выделено голубым цветом) всегда будет находиться лишь по одной фишке, каждая из которых внесет в сумму $s_{\text{кон}}$ вклад, не превышающий $1/8$ (поскольку они должны находиться за пределами $Б$). Сумма чисел для остальных фишек должна быть меньше, чем $s(K\setminus Б\setminus L)=3/4$. Поэтому $s_{\text{кон}}<$ $<s(K\setminus Б\setminus L)+2\cdot\frac{1}{8}=1$, а это уже противоречит тому, что $s_{\text{нач}}=1$.

Задачи а), б), в) решены, однако интересно научиться исследовать любую аналогичную задачу. Можно ли, например, освободить область $Г$, показанную на рисунке 4? Здесь $s(K\setminus Г)=1\frac{1}{2}$ и даже с учетом единственности фишек в первом горизонтальном и вертикальном рядах можно получить лишь $s_{\text{кон}}<1\frac{1}{8}$. Вместе с тем освободить эту область не удается.

Мы будем исследовать теперь задачи такого типа: *вначале фишки заполняют множество H; нужно несколькими ходами освободить множество F* (здесь H и F — любые конечные множества клеток из K). Будем называть её *задачей освобождения (H, F)*.

Обобщенные позиции и ходы

Прежде всего, удобно избавиться от запрещения делать ход от клетки (i, j), когда она свободна или когда клетки $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ заняты (данное в условии задачи правило



0	0	0
0	0	0
0	1	0

⟹

0	0	0
1	0	0
−1	2	0

Рис. 5.

мешает менять порядок ходов, что очень стесняет). Но тогда придется сильно обобщить и понятие позиции. Будем теперь считать, что в клетке (i, j) может находиться любое целое число A_{ij} фишек — не только положительное, но и отрицательное, причем для каждой позиции A лишь для конечного множества клеток число A_{ij} отлично от 0. *Ход (обобщенный)* в такой позиции — одновременная замена

$$A_{ij} \to A_{ij}-1,\ A_{i+1,j} \to A_{i+1,j}+1,$$
$$A_{ij+1} \to A_{ij+1}+1.$$

Прежние позиции (в которых $A_{ij}=1$ или $A_{ij}=0$) и ходы будем называть *нормальными*.

На рисунке 5 показан ход, в результате которого из нормальной позиции получается ненормальная. В нижней части рисунка 5 та же позиция показана в новой, числовой записи.

Результат выполнения хода из клетки (i, j) состоит в вычитании единицы из A_{ij} и прибавлении единицы к $A_{i+1,\ j}$ и $A_{i,\ j+1}$; результат нескольких таких вычитаний и прибавлений, очевидно, не зависит от порядка их выполнения.

Имеет место следующий замечательный факт, позволяющий применять обобщенные ходы для решения интересующей нас задачи: *если одна нормальная позиция P может быть переведена в другую нормальную позицию Q последовательностью произвольных (возможно, ненормальных) ходов $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, то P может быть переведена в Q и некоторой последовательностью нормальных ходов, полученной перестановкой ходов данной последовательности.* (Докажите это!)

Далее вместо задачи освобождения (H, F) мы будем рассматривать следующую «задачу нормализации»: *задана позиция A, в которой все $A_{ij} \geqslant 0$, причем некоторые $A_{ij} > 1$; нужно несколькими ходами привести ее к нормальной.* Чтобы свести первую задачу ко второй, образуем позицию $A_{ij}=H_{ij}+F_{ij}$ (обозначим ее $A=H+F$), другими словами, к фишкам H добавим еще по фишке повсюду в F — тогда в $F \cap H$ будет стоять по две фишки. Оказывается, что *задача освобождения (H, F) эквивалентна задаче нормализации $H+F$.* (Докажите это!)

Решение «задачи г)» (рис. 4)

Добавляя по одной фишке в клетках области $Г$, получаем задачу нормализации, изображенную на рисунке 6.

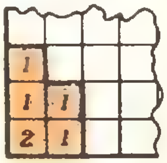


Рис. 6.

Рекомендуем вам проделать дальнейшие ходы на шахматной доске. Подойдут обычные шашки — «минус-шашки» не понадобятся. Глядя на позицию, мы видим, что на клетке (1,1) стоят две фишки. Одна из них должна быть убрана; это можно сделать только ходом (1,1). Значит, ход (1,1) должен присутствовать в любом решении, то есть это — *необходимый* ход. Можно считать, что он делается первым. Сделаем его. Получим позицию, изображенную на второй картинке на рисунке 7. Дальнейшие (необходимые) ходы показаны на этом же рисунке. В результате их выполнения исходная позиция возникла вновь (только сдвинутая на одну клетку вверх и на одну клетку вправо). Отсюда следует, что исходная задача г) неразрешима (продумайте это!).

Общий алгоритм

Пользуясь обобщенными ходами и нормализацией, мы сумели разо-

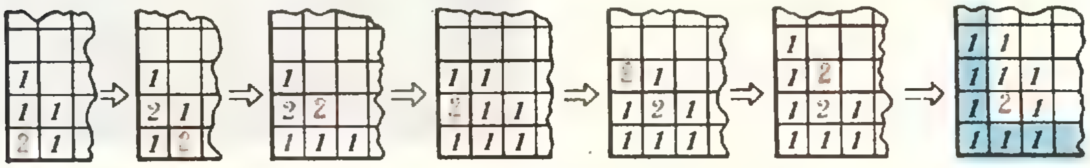


Рис. 7.

(Окончание см. на с. 55.)

Л. Микаэлян

Домашние опыты с поляризованным светом

Вместо введения

Эксперименты, описанные в этой статье, по своему характеру совсем не похожи на те, что обычно делаются в школе (или даже в институте). Там на опыте либо проверяют правильность каких-нибудь соотношений, вытекающих из уже известных законов, либо, измерив часть величин, входящих в эти соотношения, вычисляют другие. Например, из закона Гука и второго закона Ньютона следует, что период колебаний груза на пружине равен $T=2\pi\sqrt{m/k}$. Можно независимым способом измерить массу груза m и упругость пружины k, вычислить период T и сравнить его с измеренным на опыте значением. Можно также измерить период и массу груза и вычислить упругость пружины.

Такие эксперименты очень нужны и постоянно ведутся не только в учебных, но и в научных лабораториях. Однако для науки не менее важны эксперименты с другим подходом к проблеме. Допустим, вы натолкнулись на какой-то неизвестный эффект, и он возбудил ваше любопытство. Вы начинаете исследовать, от каких факторов и условий этот эффект зависит. Причем речь не идет о проверке каких-либо законов, потому что проверять пока нечего. Законы еще неизвестны и, возможно, будут установлены не скоро. Но вы вносите свой вклад в развитие науки: будущая теория должна будет объяснить ваши результаты. И этим не исчерпывается значение таких исследований. Еще до появления полной теории может быть сделан ряд важных заключений. Кроме того, обнаруженный эффект может даже найти практические применения. Вспомним хотя бы о магнитной стрелке, которая служила путешественникам задолго до того, как была понята природа магнетизма.

Что нас заинтересовало?

Яркий луч солнечного света падает на стеклянную пластинку и... не отражается. Мы видим освещенные пылинки на поверхности стекла, но зайчика на стене нет. Когда в лучи, идущие к стеклу, мы ввели кусочек бесцветной слюды, отражение появилось, а поле зрения окрасилось всеми цветами радуги. Они переливались, переходя друг в друга при повороте или покачивании слюды. В наших опытах мы сделали эти и еще несколько открытий. Мы — это я и два восьмиклассника.

Скажем сразу, что стекла для опытов мы брали самые обыкновенные, а вот свет был «приготовлен» особым способом. Впрочем, расскажем обо всем по порядку.

Почти все необходимое для экспериментов мы нашли дома. Исключе-

Смятая целлофановая обертка, сфотографированная в поляризованном свете. Фото И. Борисевича и А. Щуки.

ние составили пластинки слюды (размерами несколько сантиметров при толщине 0,2—0,3 мм) и стекла (очень удобны отмытые от эмульсии фотопластинки 9×12 см). Мы не использовали каких-либо глубоких знаний о природе света, кроме одного: что свет — это волны. Какие именно волны — продольные или поперечные, мы узнали из анализа полученных результатов.

Исчезновение отраженного света

Отложив «эффект слюды» на потом, мы занялись эффектом исчезновения отражения и приступили к его методическому изучению.

Первый раз мы заметили это явление, рассматривая изображения ярких предметов за окном после двух отражений. Первое происходило в оконном стекле, второе — в стеклянной пластинке, которую один из нас держал в руках. Меняя положение стекол и следя глазами за изображением предмета (например, светлого облака невысоко над горизонтом), мы обнаружили, что при некотором положении изображение как бы меркнет, сильно теряя свою яркость. Геометрия хода лучей для этого случая показана на рисунке 1. Она нам будет часто встречаться, и для краткости будем называть ее геометрией № 1. Заметьте, что плоскости первого и второго отражений взаимно перпендикулярны (плоскостью отражения будем называть плоскость, в которой лежат падающий и отраженный лучи и перпендикуляр к поверхности стекла), а углы падения лучей на оба стекла (они отсчитываются от перпендикуляра к поверхности стекла) на глаз близки к 60°.

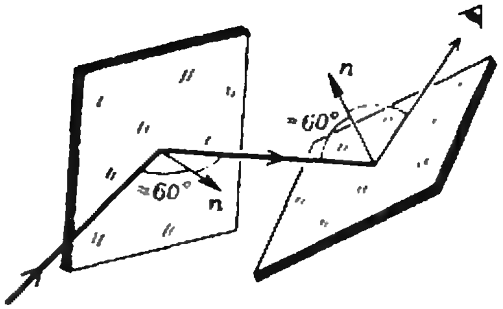


Рис. 1. Геометрия № 1. Плоскости первого и второго отражений взаимно перпендикулярны. От второго стекла свет практически не отражается.

Понимая, что яркость изображения определяется количеством света, отраженного от первого и второго стекол, мы задались вопросом: при каком из двух отражений — первом или втором — падает коэффициент отражения света? Рассматривая предметы, однократно отраженные в стекле, мы убедились в том, что ни при каком угле падения лучей их отражение не обнаруживает минимума. Напротив, с ростом угла падения яркость изображения непрерывно возрастает. Так мы определили, что доля отраженного света уменьшается во втором стекле, если на него падают лучи, отраженные первым стеклом в геометрии № 1. В этом и состоял наш секрет особого «приготовления» света.

Затем мы продолжили эксперименты.

От чего и как зависит эффект?

Прежде всего мы сменили источник света и повторили опыт в геометрии № 1. Мы взяли лампу накаливания (мощностью 60 Вт) и поставили ее так, что, когда сидишь на стуле, нить находится несколько выше колен. Первое отражение происходило в стекле от книжной полки, которое мы поставили вертикально, а второе — от стеклянной пластинки, которую сидевший на стуле держал в руках перед собой на уровне нити лампы. Следя глазами за отражением нити, довольно быстро удалось найти положение, при котором нить меркнет почти полностью. Ослабление отражения достигало на глаз по крайней мере нескольких десятков раз*). Мы повторили опыт еще с одним источником света — свечой — и убедились, что от источника эффект не зависит.

Потом мы провели опыты с другими отражателями. В качестве первого, кроме стекла, использовались лакированная дверца шкафа и поверхность воды. В последнем случае необходимо было, конечно, чтобы плоскость первого отражения была вертикальной, а второго — горизонтальной. В роли второго отражателя использовалось оргстекло (ученическая линейка). Все шло хорошо. Когда же мы попытались воспроизвести эффект с обыкновенным зеркалом, у нас ничего не вышло: ни на месте первого, ни на месте второго отражателя зеркало не давало затемнения. Ничего не получилось и с металлической поверхностью (мы брали никелированную крышку от металлической коробки).

---

*) В дальнейшем, ради краткости, будем говорить не о сильном уменьшении отражения, а о его исчезновении.

Далее мы стали более внимательно исследовать влияние геометрии эксперимента. Мы снова вернулись к лампе как источнику света и стеклянным отражателям. Оказалось, что уже малые (на глаз 5—7°) отклонения от оптимального угла падения на любое из зеркал в геометрии № 1 довольно сильно увеличивают количество отраженного света. Если же изменить геометрию так, чтобы плоскости первого и второго отражений стали параллельными друг другу (рис. 2), то ни при каких углах падения исчезновение света не наблюдалось. Это расположение будем называть в дальнейшем геометрией № 2.

Важные выводы о природе света

Нужно сказать сразу, что мы не смогли понять, почему отражение исчезает только при определенных углах падения света. Но из того факта, что эффект зависит от угла между плоскостями отражений, нам удалось сделать некоторые выводы.

Переход от геометрии № 2 к геометрии № 1 можно, очевидно, себе представить так: из своего начального положения второй отражатель (и глаз вместе с ним) перемещаются таким образом, что плоскость второго отражения становится перпендикулярной плоскости первого, а углы падения остаются неизменными. При достижении конечного положения (геометрия № 1) отражение исчезает. В то же время физически очевидно, что отражение есть следствие взаимодействия света с веществом, и количество отраженного света не может непосредственно зависеть от относительного положения каких бы то ни было плоскостей. Как же второй отражатель «узнает» о положении первой плоскости — параллельная она или перпендикулярная?

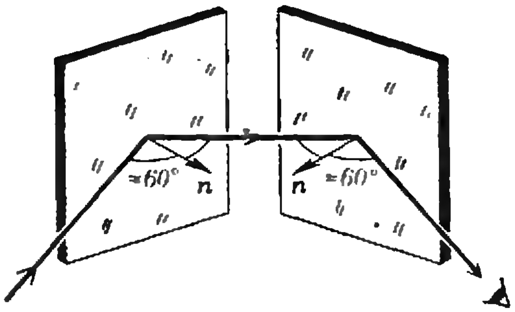


Рис. 2. Геометрия № 2. Плоскости отражений параллельны. Отражение от второго стекла есть.

Единственная возможность состоит в том, что сам свет приносит эту информацию. Другими словами, плоскость, в которой происходит отражение, «метит» световую волну, определяя в ней некоторое внутреннее направление. А коэффициент отражения, стало быть, зависит сразу от двух углов: угла падения луча и угла между этим внутренним направлением, присущим самой волне, и плоскостью второго отражения.

Из всего этого мы сделали вывод, что свет относится к типу поперечных волн. Рассуждали мы следующим образом. Любая волна характеризуется направлением своего распространения. Если наблюдать волну в каком-либо фиксированном месте, то там будут происходить колебания. В продольной волне, например в звуковой, направления, вдоль которых происходят эти колебания, совпадают с направлением распространения. Поэтому продольная волна характеризуется всего одним направлением. В поперечных волнах, например в волнах, бегущих по веревке, направление колебаний перпендикулярно скорости волны. А раз световая волна характеризуется двумя направлениями, то, стало быть, она поперечна. Важно подчеркнуть, что мы не пытаемся объяснить исчезновение отражения. Напротив, отталкиваясь от этого экспериментального факта, мы приходим к выводу о поперечности световых волн. (Замечательно, что нам даже не пришлось думать о том, что́ именно «колеблется» в свете, хотя мы знали, конечно, что свет — это электромагнитная волна.)

Что же происходит при двойном отражении света?

Картина двойного отражения представилась нам в следующем виде. Свет, падающий на первый отражатель, посылается огромным числом различных участков светящегося тела. Колебания в этих световых «посылках» перпендикулярны к направлению их распространения, но в остальном их направления случайны и в среднем равновероятны (рис. 3). Каждое такое колебание можно разложить на два: одно происходит в плоскости падения, другое — перпендикулярно к ней (рис. 4). Если угол падения оптимален, то отразится только одно из них. (Какое именно, осталось невыясненным, поэтому направления, показанные на рисунке 4, приняты произвольно.) В таком случае говорят, что отраженный свет выстроен или поляризован. Исход второго отражения зависит от ориентации направления колебаний и плоскости падения: в геометрии № 2 отражение есть, а в геометрии № 1 его нет.

Если же отойти от оптимального угла падения на первый отражатель, то в отраженном свете будут представлены оба направления колебаний, но в неодинаковой степени, и свет будет поляризован не полностью, а частично. Вот почему при отклонении от геометрии № 1 полного исчезновения отраженного света не происходит.

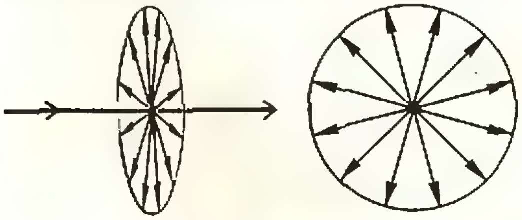


Рис. 3. В естественном свете все направления колебаний равновероятны.

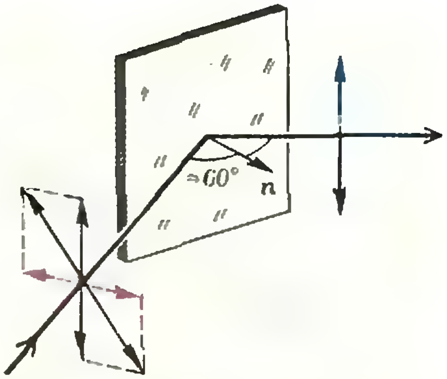


Рис. 4. Стекло отражает только одну составляющую колебаний — перпендикулярную плоскости падения. Отраженный свет поляризован.

Оказывается, прошедший свет тоже поляризован

Имея картину явления, мы стали на ее основе высказывать различные предсказания и проверять их на опыте. Вот один из них. Свет от лампы падает под оптимальным углом на несколько стеклянных пластинок, сложенных в стопу, а затем — еще на одно стекло, называемое анализатором (рис. 5). Если наша картина правильна, то, очевидно, прошедший свет тоже будет поляризован, но в направлении, перпендикулярном поляризации отраженного света. В отличие от отраженного, поляризация прошедшего света не будет полной, но чем больше пластинок в стопе, тем больше будет поляризация: ведь от каждой из них частично отражается и «отсеивается» свет одной поляризации. И действительно, мы наблюдали, что в геометрии, приведенной на рисунке 5, свет от стекла-анализатора отражается хуже, чем в случае, когда плоскость второго отражения перпендикулярна плоскости падения (эта геометрия на рисунке не показана).

Этот же, по существу, опыт можно поставить немного по-другому. Используя полностью поляризованный (то есть отраженный под нужным углом) свет, мы проверили, что прозрачность стопы пластин сильно зависит от ориентации направлений поляризации и плоскости падения.

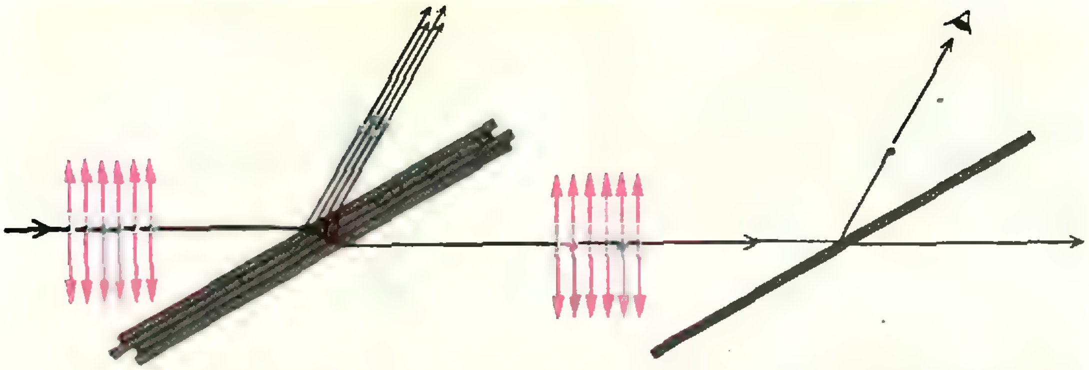


Рис. 5. Неполяризованный свет падает на стопу стеклянных пластин. В проходящем свете преобладают колебания, лежащие в плоскости падения. Такой свет плохо отражается от второго стекла.

В случае, показанном на рисунке 6, *а*, десять стекол почти не уменьшают яркости света, а в случае, как на рисунке 6, *б*, — уменьшают ее приблизительно вдвое.

Возникновение и исчезновение разноцветной окраски слюды

Опыты со слюдой мы начали с того, что повторили их в геометрии № 1, при этом источником света служила лампа. Настроив систему на возможно более глубокий минимум отражения, мы ввели пластинку слюды в лучи, идущие от одного отражателя к другому, так, что поляризованный свет был перпендикулярен ее поверхности. Это привело к окрашиванию слюды в различные цвета, правда цветовая гамма была беднее, чем в опыте с дневным светом. Мы наблюдали, как при поворачивании слюды вокруг оси, совпадающей с лучами света, цвета периодически сменяли друг друга.

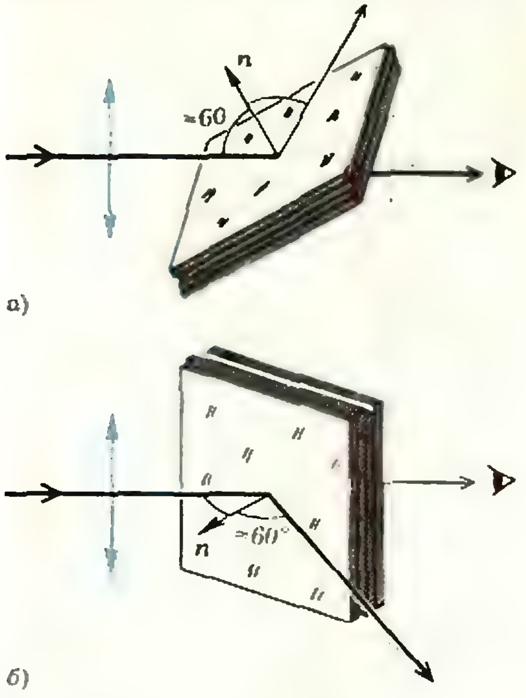


Рис. 6. Поляризованный свет падает на стопу стеклянных пластин. В случае *а*) — отражение слабое и прозрачность высока; в случае *б*) — отражение сильное, прозрачность плохая.

Если же смотреть на поляризованный свет, прошедший сквозь слюду непосредственно, то есть минуя второе отражение, то никаких цветов не видно. При перемещении слюды в область между лампой и первым отражателем также не было никакой окраски.

Кроме слюды мы испробовали другие прозрачные материалы. Оказалось, что стекло и оргстекло не дают никакого эффекта, а вот целлофановая пленка от пачки сигарет дала аналогичный эффект. При поворотах пленки отражение периодически усиливалось и уменьшалось (это происходило несколько раз за один полный поворот), но цветовой окраски в этом случае почти не было.

Наконец, мы взяли гораздо более тонкую слюду, отщепив слой от более толстой пластинки. Слюда довольно легко расслаивается, и после небольшой тренировки нам удалось это сделать. Отщепленный слой был совершенно прозрачным и, по-видимому, заметно тоньше 0,1 мм. Если попытаться держать его за уголок горизонтально, то он прогибается под собственной тяжестью. Действие тонкого слоя слюды оказалось похожим на действие целлофана: при вращении слюды яркость изображения нити лампы (после второго отражения) периодически менялась, но окраски не было.

Какие можно сделать выводы из наблюдаемого «эффекта слюды»?

1. В геометрии № 1 на второй отражатель падает свет, поляризованный так, что отражения не происходит. При введении слюды отражение появляется. Значит, в прошедшей через нее световой волне появляются колебания другого направления. Другими словами, слюда меняет состояние поляризации света.

2. Слюда по-разному действует на свет различных длин волн (различных цветов), но проявляется это в не очень тонких слоях.

Используя указанные свойства слюды, мы смогли сильно увеличить чувствительность обнаружения частичной поляризации света. Даже при небольшой степени поляризации введение слюды в падающие на стекло-анализатор лучи дает в отраженном свете характерную окраску, меняющуюся с поворотом слюды. Благодаря высокой цветовой чувствительности глаза, при таком способе обнаружения поляризации не нужно заботиться о том, чтобы точно подыскать соответствующее положение плоскости падения, что, конечно же, упрощает наблюдения.

С помощью этого «усовершенствования» мы, например, установили, что освещенные сбоку облака посылают частично поляризованные лучи (рис. 7). Мы наблюдали и поляризацию голубого безоблачного неба. Эффект в этом случае не особенно велик и проявляется лучше всего, если стоять к Солнцу боком, так, чтобы лучи, рассеянные атмосферой, приходили приблизительно перпендикулярно к линии, соединяющей Солнце и стекло.

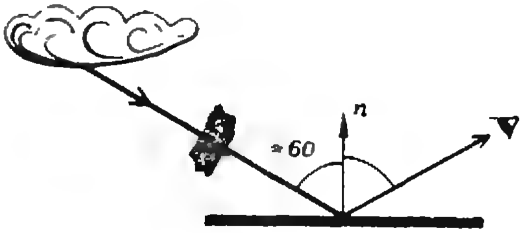


Рис. 7. Кусочек слюды или целлофана увеличивает чувствительность обнаружения поляризации.

3. Думая об «эффекте слюды», мы заключили, что этот эффект как-то связан с тем, что взаимодействие слюды со светом зависит от направления. Точнее: слюда имеет различные свойства в различных направлениях, и поэтому результат прохождения света через нее зависит от того, как ориентированы колебания в световой волне относительно этих направлений. Ведь при поворотах пластинки относительно оси светового пучка меняется только ориентация кристаллических осей слюды по отношению к направлению колебаний. Стекло, так же как и оргстекло, видимо, никаких особых направлений не имеет, то есть их свойства одинаковы для всех направлений.

Дальше в понимании этих вопросов мы продвинуться не смогли, но правильность общей идеи мы сумели подтвердить на опыте. Для этого мы искусственно нарушили внутреннюю симметрию оргстекла с помощью механических напряжений. В геометрии № 1 в лучи, падающие на второе стекло, мы поместили полоску из оргстекла размерами 2×20×200 мм. Оказалось, что если изгибать и скручивать полоску, то местами появляется характерное затемнение поля зрения, которое пропадает при снятии напряжений. Тогда мы решили «заморозить» напряжения. Утюгом мы слегка размягчили небольшой участок средней части полоски, приложили растягивающее усилие и, не снимая его, быстро охладили полоску под струей воды. Напряженное оргстекло стало вести себя подобно целлофановой пленке.

Заметим, что наши исследования велись по классической схеме: наблюдение — опытное исследование — гипотеза — эксперимент. Фактически мы повторили путь, пройденный наукой. Поляризацию света при отражении открыл французский физик Малюс в 1808 году, через три года он и французский ученый Био обнаружили поляризацию прошедшего света, а в 1815 году английский физик Брюстер нашел условие, при котором отраженный свет оказывается поляризованным полностью. Много лет спустя русский физик Столетов для усиления эффекта поляризации использовал стопу плоскопараллельных пластин.

Когда мы закончили все эксперименты, перед нами оказалось больше вопросов, чем было в самом начале. Вот некоторые из них:

— Почему естественный свет при отражении поляризуется?

— Почему облака и небо посылают поляризованный свет?

— Что именно происходит с поляризованным светом в материалах, подобных слюде?

— Можно ли использовать поляризованный свет для количественного изучения внутренних напряжений в прозрачном теле или для изучения структуры кристаллов?

— Можно ли добиться «эффекта слюды» другими — не механическими — воздействиями на вещество?

— Нельзя ли использовать слюду для количественного изучения спектрального состава света?

Словом, как это и должно быть, проведенные с помощью двух стекол и кусочков слюды опыты открывают широкий простор для размышлений и новых исследований.

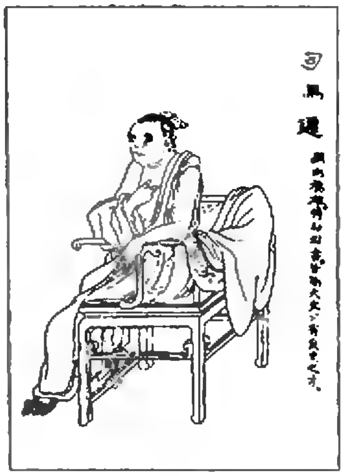
Новости науки

Астрономия и древняя летопись

Трудно, наверное, считать новостью то, что наблюдалось 2000 лет назад; однако, именно такая новость стала известной лишь недавно. Впрочем, когда астроном впервые обнаруживает новую галактику, он с полным правом говорит об открытии, хотя галактика существовала задолго до этого примечательного для науки события.

Открытие, о котором пойдет речь, было сделано на страницах древней китайской хроники Ши цзи («Исторических записок»)*). Ее написал в 95 году до нашей эры Сыма Цянь. В Ши цзи собраны сведения об истории, сельском хозяйстве, науке Китая. Есть там и описание астрономических наблюдений, в частности — указываются цвета некоторых звезд. Действительно, если внимательно смотреть на звезды и сравнивать их друг с другом, то можно увидеть, что они различаются по цвету.

В Ши цзи написано, что цвет Сириуса (α Большого Пса) — белый, Антареса (α Скорпиона) — красный, Бетельгейзе (α Ориона) — желтый и Беллатрикса (γ Ориона) — голубой. Все эти звезды принадлежат к числу самых ярких, и их можно увидеть на нашем северном небе. Как оказалось, цвет трех звезд указан правильно (зрение у астрономов было острым!), недоумение вызывает лишь цвет Бетельгейзе.



Сыма Цянь (гравюра на дереве).

Сейчас хорошо известно, что это — переменная звезда, а именно — красный сверхгигант, и что цвет ее — не желтый, а красный. Но, по-видимому, древние звездочеты не ошиблись и здесь.

По современным представлениям в данное время Бетельгейзе находится в стадии быстрого расширения. За 2000 лет ее радиус почти удвоился, и теперь он приблизительно в 300—400 раз превышает радиус Солнца. Расширяясь, звезда охлаждается; и если сейчас температура ее поверхности около 3000 градусов, то во времена, когда писалась Ши цзи, она должна была быть на 1000—2000 градусов больше. Соответственно, и цвет ее должен был быть более желтым.

Таким образом в древней летописи нашлось зримое подтверждение эволюции звезды, явления, которое, казалось бы, лежит за пределами возможности человеческих наблюдений. Оно лишний раз доказывает, что любое следствие теоретических построений когда-нибудь да подвергается опытной проверке.

Недавно в старых китайских книгах было обнаружено еще одно интересное свидетельство древних ученых. Летом 365 года до нашей эры Джан Де увидел вблизи Юпитера яркую точку. Может быть, это был один из спутников Юпитера, например — Ганимед или Каллисто? По крайней мере, именно так объясняют это место историки.

Конечно, интерпретация древних авторов не всегда убедительна. Кто знает, не ошиблись ли они.

Я. С.

---

*) Частично «Исторические записки» переведены на русский язык.

задачник Кванта

Задачи

М751—М755; Ф763—Ф767

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М751, М752» или «Ф763».

Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М751. На окружности отмечены $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные. (9)

В. Произволов

М752. Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше, чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее, чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть a);

б) не менее, чем n раз. (8)

А. Берзиньш

М753. Числа a, b, c лежат на интервале $]0, \pi/2[$ и удовлетворяют равенствам:

$$\cos a = a,$$
$$\sin \cos b = b,$$
$$\cos \sin c = c.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания. (10)

С. Гессен

М754. а) Существуют ли многочлены $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1.$$

(10)

П. Гусятников, Ю. Нестеренко

М755. Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше, чем $-1/3$. (9)

С. Гашков

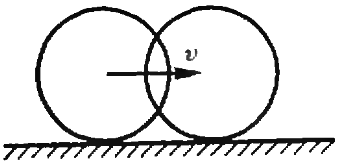


Рис. 1.

Ф763. На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R. Мимо него движется со скоростью v такой же обруч (рис. 1). Найти зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие; второй обруч «проезжает» вплотную к первому. (9)

С. Кротов

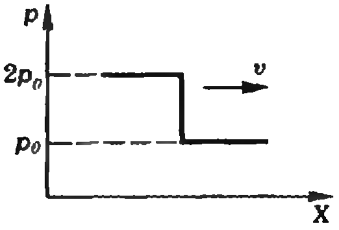


Рис. 2

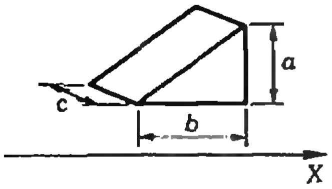


Рис. 3.

Ф764. Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью в направлении оси X (рис. 2); в момент прихода волны давление резко повышается от значения p_0 до $2p_0$. На пути распространения волны стоит клин, размеры клина указаны на рисунке 3, масса клина равна m. Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости распространения волны; трение пренебрежимо мало. (8)

А. Буздин

Ф765. В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P=10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0=10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допустимая величина $\Delta P_{\max}$, если предельный перегрев из экологических соображений не должен превышать величины $\Delta T_{\max}=0{,}1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при увеличении абсолютной температуры тела в 2 раза. (10)

С. Козел

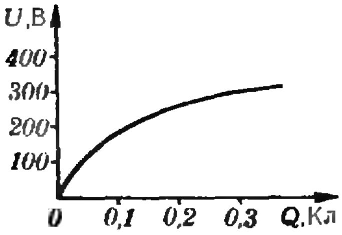


Рис. 4.

Ф766. Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда Q конденсатора приведен на рисунке 4. Конденсатор заряжают от батареи с $U_0=300$ В через резистор с сопротивлением $R=10$ кОм. Найти максимальную энергию вспышки. Оценить максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1=250$ В. (9)

А. Зильберман

Ф767. В одном из проектов получения электроэнергии предлагалось использовать морские течения и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем.

В море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии $l=100$ м; площадь каждой пластины $S=1$ км^2. Морская вода, удельное сопротивление которой равно $\varrho=0{,}25$ Ом·м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью $v=1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север; индукция поля равна $B=10^{-4}$ Тл. Определить максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоеднненной к пластинам. (10)

А. Шеронов

Problems

M751—M755; P763—P767

M751. A circle is divided into $3k$ arcs by $3k$ points; k arcs are of length 1, k others of length 2 and the remaining k are of length 3. Prove that at least two of the points are diametrically opposed. (9)

V. Proizvolov

M752. Integers are the entries in the $n\times n$ cells of a square table. Integers in cells with a common side differ by no more than 1. Prove that at least one number appears in the table

a) no less than $[n/2]$ times ($[a]$ is the integer part of a);
b) no less than n times. (8)

A. Berzinsh

M753. The numbers a, b, c in the interval $]0, \pi/2[$ satisfy the relations:

$$\cos a=a, \quad \sin\cos b=b, \quad \cos\sin c=c.$$

Write these numbers in increasing order. (10)

S Gessen

M754. a) Do there exist polynomials

$$P=P(x, y, z),\ Q=Q(x, y, z),\ R=R(x, y, z)$$

in the variables x, y, z satisfying the identity

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1?$$

b) Same question for the identity

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)\ R=1. \quad (10)$$

P. Gusyatnikov, Yu. Nesterenko

M755. The point M is chosen arbitrarily inside a tetrahedron. Prove that at least one edge of the tetrahedron is seen from the point M under an angle whose cosine is no greater than $-1/3$. (9)

S. Gashkov

P763. A hoop of radius R stands on a horizontal surface. An identical hoop rolls past it with velocity v (see figure Рис. 1). Find the dependence of the upper "intersection point" of the hoops on the distance between their centres. The hoops are thin; the second hoop rolls past the first, almost touching it. (9)

S. Krotov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The problems from this issue were proposed in the final round of the All—Union mathematical and physical olympiad this year. The number in brackets indicates the grade of the students to whom the problem was proposed. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 30th, 1982 to the following adress: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ 15, «ФИЗМАТЛИТ», «КВАНТ».

Please send us the solutions

of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

P764. A shock wave is a high pressure region which propagates with high velocity in the direction of the X axis (see figure Рис. 2, p. 40); when the wave reaches any given point the pressure there jumps from the value p_0 to $2p_0$. A wedge stands in the way of the wave; the mesurements of the wedge are shown on the figure Рис. 3, its mass is m. What velocity will the wedge aquire immediately after the wave front goes past it? It may be assumed that the propagation velocity of the wave front is much greater than that aquired by the wedge; friction is negligible. (8).

A. Buzdin

P765. A the present time, the power of all energy sources on Earth used by man is $\Delta P=10^{13}$W, while the power of solar energy reaching the Earth's surface is $P_0=10^{17}$W. What is the value of overheating ΔT due to energy sources of terrestrial origin? What is the maximal admissible value ΔP_{max} if, from ecological considerations, overheating must not exceed $\Delta T_{max}=0{,}1$Q? It is known that the amount of energy eradiated by a heated body increases 16 fold when the absolute temperature of the body doubles. (10)

S. Kozel

P766. A non-linear capacitor, filled with a dielectric whose dielectric permeability depends on field tension, is used in a flash lamp. The dependence of the voltage U on the charge Q in the capacitor is plotted on figure Рис. 4, p. 40. The capacitor is charged from a battery with $U_0=300V$ through a resitance $R=10$кOhm. Find the maximal energy of the flash. Estimate the maximal mimber of flashes per minute. It may be assumed that the capicitor is entirely discharged during the flash. The minimal initial voltage for the flash is $U_1=250V$. (9)

A. Zilberman

P767. One of the existing projects to obtain electric energy is based on sea currents and the Earth's magnetic field. The project is the following.

Two metal plates are immersed horizontally into the sea, one above the other, at the distance $l=100$m; the area of each plate is $S=1$ km^2.Sea water, whose resistance is $\varrho=0{,}25$ Ohm/m, flows between the plates from West to East with velocity $v=1$ m/s. The Earth's magnetic field there is assumed uniform, directed South-North, its induction is $B=10^{-4}$ T.

Find the maximal electric power which may be generated on a load connected to the plates. (10).

A. Sheronov

Решения задач

M711—M720; Ф723—Ф732

M711. *Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD, вписанного в окружность с центром O, взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырехугольник на две части равной площади.*

Соединим вершины B и D четырехугольника с центром O и продолжим радиус CO до пересечения с окружностью в точке G (рис. 1). Поскольку $(AC)\perp(BD)$, $\widehat{ACD}+\widehat{BDC}=90^\circ$, так что $\overset{\smile}{DA}+\overset{\smile}{BC}=180^\circ$. Отсюда вытекает, что дуги DG и AB конгруэнтны и, следовательно, угол AOB в два раза больше угла DCO. Из этого несложным вычислением получаем равенство площадей треугольников AOB и COD.

Равенство площадей треугольников AOD и BOC доказывается аналогично.

Поскольку ломаная AOC делит наш четырехугольник на части, составленные из пар треугольников AOB, BOC и AOD, COD, получаем утверждение задачи.

В. Вав振кин

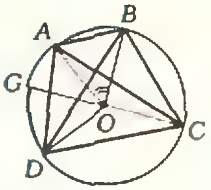


Рис. 1.

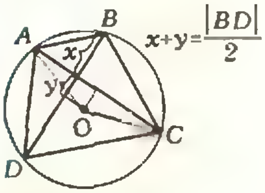


Рис. 2

О т   р е д а к ц и и. Это решение по существу приводит к наблюдению, которому была посвящена задача М648: в таком четырехугольнике (вписанном в окружность, со взаимно перпендикулярными диагоналями) длина стороны вдвое больше расстояния от центра окружности до середины противоположной стороны. Есть и значительно более короткие решения, найденные читателями. Например: перпендикуляры, опущенные из центра O на диагонали AC и BD, попадают в их середины (рис. 2), а потому каждая из частей, на которые ломаная AOC делит наш четырехугольник, имеет площадь $\frac{|AC|\cdot|BD|}{4}$.

◆

М712. *Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.*

$\pi=3{,}14159265\ldots$:

$$\begin{array}{r}
1{,}11111111\ldots\\
1{,}01011111\ldots\\
1{,}01011011\ldots\\
0{,}01011011\ldots\\
0{,}00011011\ldots\\
0{,}00001010\ldots\\
0{,}00001000\ldots\\
0{,}00001000\ldots\\
0{,}00001000\ldots\\
\hline
3{,}14159265\ldots
\end{array}$$

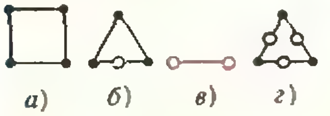
Заметим, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, содержащих в своей десятичной записи только цифры 0 и 1 (на полях в таком виде представлено число $\pi=3{,}14159265\ldots$). Пусть теперь $a>0$ — данное число. Представляя $\frac{a}{7}$ в виде суммы девяти чисел, содержащих в своей десятичной записи только цифры 0 и 1, и учитывая, что $a=7\cdot\left(\frac{a}{7}\right)$, получим нужное представление числа a.

Задача М712 очевидным образом обобщается: *любое положительное число можно представить в виде суммы $q-1$ чисел, q-ичная запись которых содержит только цифры 0 и k ($k<q$).*

Э. Туркевич

◆

М713. *M — множество точек на плоскости. Точка O плоскости называется «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество?*



а)   б)   в)   г)

Рис. 1.

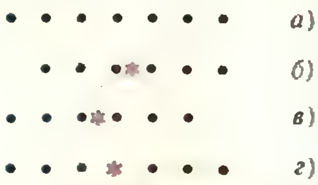


Рис. 2

Конечное множество точек на плоскости может иметь 0, 1, 2, 3 «почти центров симметрии» (см. рисунок 1, *а)*—*г)* соответственно). Покажем, что больше трех «почти центров симметрии» конечное множество M на плоскости иметь не может.

Прежде всего заметим, что множество M имеет конечное число «почти центров симметрии», поскольку ими могут быть только середины отрезков, соединяющих точки множества M. Выберем теперь такую прямую, при проекции на которую точки множества M и его «почти центры симметрии» не сливаются. Поскольку при проекции на прямую центр симметрии множества точек переходит снова в центр симметрии, достаточно доказать наше утверждение для конечного множества точек, лежащих на одной прямой.

Рассмотрим множество точек на прямой с координатами $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Если мы выбросим первую точку, то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка с координатой $(x_2+x_n)/2$; если выбросим последнюю — то только точка с координатой $(x_1+x_{n-1})/2$; наконец, если мы выбросим какую-нибудь не крайнюю точку, то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка с координатой $(x_1+x_n)/2$ (см. рис. 2; на рисунке 2, а мы выбросили среднюю точку — центр симметрии оставшегося множества попадает в нее). Значит, конечное множество точек на прямой, а тем самым и любое конечное множество точек на плоскости, не может иметь больше трех «почти центров симметрии».

В. Прасолов

М714. *N друзей одновременно узнали N новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длился один час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а) $N=64$, б) $N=55$, в) $N=100$.*

N	$T(N)$
2	1
3	3
4	2
5	4
6	3
7	4
8	3
9	5
10	4
...	...

Обозначим через $T(N)$ минимальное число часов, за которое N друзей смогут обменяться новостями. Любопытно, что функция $T=T(N)$ не монотонна. Это можно обнаружить, найдя значения $T(N)$ для небольших N — они приведены в таблице на полях; рядом, на рисунке 1, показан способ, который позволяет для $N=4$, 5, 6 и 8 узнать все новости за $T(N)$ часов. Разумеется, чтобы решить задачу, мы должны не только указать способ обменяться новостями за $T(N)$ часов, но и доказать, что за меньшее число часов этого сделать нельзя — получить для $T(N)$ оценку снизу. С нее мы и начнем.

Рассмотрим произвольную новость. После первого часа ее знают не больше двух друзей, после второго часа — не больше четырех друзей, ..., после k-го часа — не больше 2^k друзей. Поэтому, если после T часов все N друзей знают все новости, то $2^T \geqslant N$ и $T \geqslant \log_2 N$. Так как T — целое число, то $T \geqslant \lceil \log_2 N \rceil$. (Здесь через $\lceil a \rceil$ обозначается наименьшее целое число, которое не меньше, чем a. Такое обозначение сейчас применяется все чаще, особенно специалистами по прикладной и вычислительной математике; при этом для обычной целой части — «округления вниз» — вместо обозначения $[a]$ используют обозначение $\lfloor a \rfloor$.)

Если N — нечетное число, то найдется один из N друзей — обозначим его через A, — который в первый час не участвует в разговорах. Применяя вышеприведенные рассуждения к той новости a, которую вначале знает только A, мы получим, что для обмена всеми новостями необходимо не менее $1+\lceil \log_2 N \rceil$ часов.

Покажем, что найденная оценка снизу

$$T(N)=\begin{cases}\lceil \log_2 N \rceil, & \text{если } N \text{ четно,}\\ \lceil \log_2 N \rceil+1, & \text{если } N \text{ нечетно}\end{cases}$$

достижима, то есть покажем, что можно так организовать обмен новостями, что после $T(N)$ часов все друзья будут знать все новости. Разберем три случая.

1°. Проще всего предъявить способ обмена новостями за k часов для $N=2^k$.

Сопоставим каждому другу набор из k чисел 0 и 1 («двоичный номер»); различных таких наборов от $(0,0,\ldots,0)$ до $(1,1,\ldots,1)$ как раз 2^k. Пусть в t-м часу разговаривают друг с другом пары друзей, номера которых отличаются лишь в одном t-м месте. Тогда, если номера двух друзей отличаются в t_1, t_2, ..., t_s местах $(1 \leqslant t_1<t_2<\ldots<t_s \leqslant k)$, то в результате разговоров в t_1-м, t_2-м, ..., t_s-м часу они будут знать новости друг друга. (Этот способ для $N=4$ и $N=8$ проиллюстрирован рисунком 1.)

Другой способ, пригодный для любого четного N, описан ниже в пункте 3°.

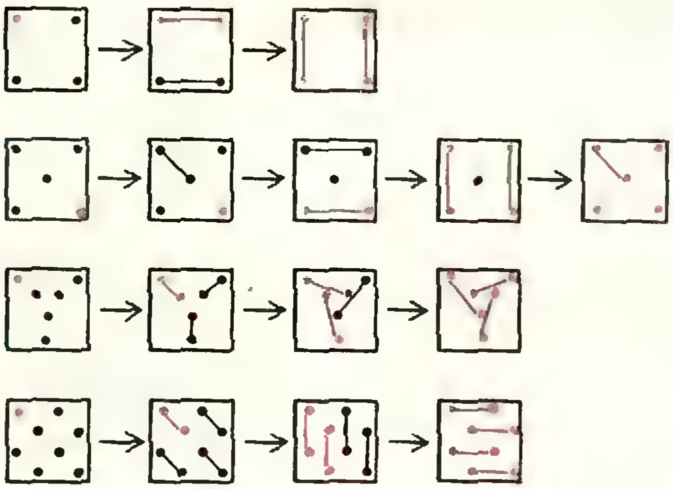


Рис. 1. На этих рисунках (для $N=4$, 5, 6 и 8 друзей) изображен один из оптимальных способов обмена новостями. Распространение одной из новостей показано красным цветом.

2°. Пусть $2^{k-1}<N<2^k$, N — нечетное число. Тогда $\lceil \log_2 N \rceil = k$, $N=2^{k-1}+r$, где $0<r<2^{k-1}$. Покажем, как за $k+1$ часов все друзья могут узнать все новости. Разделим N друзей на две группы: первую, состоящую из 2^{k-1} друзей, и вторую, состоящую из r друзей. В течение первого часа каждый друг из второй группы разговаривает с некоторым другом из первой группы. В последующие $k-1$ часов 2^{k-1} друзей первой группы обмениваются между собой новостями так, как это описано в пункте 1°; в результате каждый из них узнает все новости. Наконец, в последний час каждый друг из второй группы снова разговаривает с некоторым другом из первой группы, в результате чего все друзья из второй группы тоже узнают все новости.

3°. Пусть $2^{k-1}<N\leqslant 2^k$, $N=2m$ — четное число. Тогда $\lceil \log_2 N \rceil = k$ и $2^{k-2}<m\leqslant 2^{k-1}$. Покажем, как за k часов все друзья могут узнать все новости.

Рассмотрим два правильных m-угольника, помещенных прямо друг над другом (см. рисунок 2, где $m=6$). Будем считать, что каждая вершина — это один из друзей (разные вершины — разные друзья). Двух друзей в некоторый момент времени t будем называть *соседними*, если изображающие их в этот момент вершины наших m-угольников находятся прямо *одна* над другой (например, как при $t=0$ вершины A и B на рисунке 2). Пусть a — какая-нибудь из новостей. (Вершины, изображающие друзей, знающих в момент времени t новость a, будем окрашивать.) Пусть в первый час между собой разговаривают все пары соседних в момент времени $t=0$ друзей (см. рисунок 2 при $t=1$). В дальнейшем перед началом t-го часа ($t=2, 3, \ldots, k$) мы будем поворачивать по часовой стрелке верхний m-угольник на угол $2^{t-1}\cdot\dfrac{180°}{m}$ и считать, что t-ый час разговаривают все пары друзей, оказывающихся к этому моменту соседними (на рисунке 2 изображено распространение новости a после первого, второго и третьего часа). Результатом таких разговоров будет то, что после t-го часа 2^{t-1} вершин каждого из наших m-угольников окажутся окрашенными. Поскольку $m\leqslant 2^{k-1}$, после k часов будут окрашены все их вершины. Таким образом, после k часов все N друзей будут знать любую новость a.

Наше утверждение полностью доказано.

Итак, ответы на пункты а), б), в) нашей задачи: соответственно, $T(64)=6$ часов, $T(55)=7$ часов и $T(100)=$ $=7$ часов.

А. Анджан

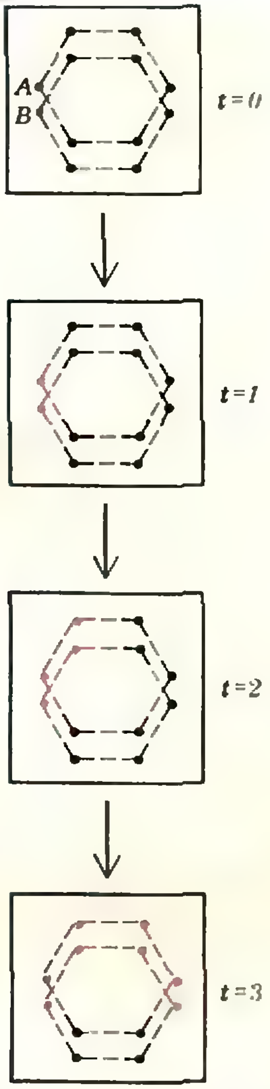


Рис. 2. Способ обмена новостями для четного $N=12$ (верхний шестиугольник сначала поворачивается на угол 60°, затем — на угол 2 · 60° и 4 · 60°).

M716[*]) *Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA и AB. Для таких точек M внутри $\triangle ABC$ величина* $\dfrac{|BC|}{|MA_1|}+\dfrac{|CA|}{|MB_1|}+\dfrac{|AB|}{|MC_1|}$ *принимает наименьшее значение?*

◆

Пусть $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, $|MA_1|=x$, $|MB_1|=y$, $|MC_1|=z$. Заметим, что величина $ax+by+cz$ постоянна: для любой точки M внутри данного треугольника она равна $2S$ — удвоенной его площади (см. рисунок)[*]). Оценим произведение интересующей нас величины $f=$ $=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}$ на эту постоянную:

$$f\cdot 2S=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)=a^2+b^2+c^2+$$

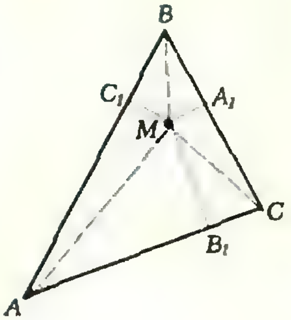
$$+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geqslant$$

$$\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=P^2,$$

---

[*]) Решение задачи M715 — в заметке А. Ходулева «Расселение фишек» (с. 28).

[*]) Часто бывает полезен тот факт, что соответствие между точками внутри треугольника и тройками положительных чисел $(x;\ y;\ z)$ такими, что $ax+by+cz=2S$, взаимно однозначно.



где $P=a+b+c$. Мы трижды воспользовались очевидным неравенством $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\geqslant 2$, которое превращается в равенство при $u=v$. Таким образом, мы доказали, что неравенство

$$f=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{P^2}{2S}$$

верно для любых x, y, z (таких, что $ax+by+cz=2S$) и обращается в равенство при $x=y=z$, так что минимум выражения f достигается в центре окружности, вписанной в наш треугольник: именно в этой точке $x=y=z=$ $=\frac{2S}{P}$.

Н. Васильев

◆

М717. *Даны натуральные числа n и r, $1<r<n$. Рассмотрим всевозможные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящие из r чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно $\frac{n+1}{r+1}$. (Например, при $n=3$, $r=2$ получаем три подмножества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и среднее арифметическое равно $(1+1+2)/3=4/3$.)*

Прежде всего заметим, что у множества $\{1, 2, \dots, n\}$ имеется $C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ подмножеств, состоящих из r чисел. Мы приведем два свойства чисел C_n^k *), которые понадобятся нам для решения нашей задачи:

$$1^\circ.\ C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1};$$

$$2^\circ.\ C_n^k+C_{n-1}^k+\dots+C_k^k=C_{n+1}^{k+1}.$$

Будем называть подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящие из r чисел, *r-подмножествами*. Легко сообразить, что наименьшими элементами r-подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ могут быть только числа $1, 2, \dots, (n-r+1)$. При этом число k является наименьшим сразу для C_{n-k}^{r-1} таких подмножеств (в самом деле, каждое r-подмножество, для которого число k является наименьшим элементом, содержит наряду с k и $r-1$ элемент из множества $\{k+1, k+2, \dots, n\}$, состоящего из $n-k$ элементов). Поэтому сумма всех выбранных чисел равна

$$S=1\cdot C_{n-1}^{r-1}+2\cdot C_{n-2}^{r-1}+\dots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1}, \qquad (*)$$

и нужно показать, что среднее арифметическое $\frac{S}{C_n^r}$ (всего имеется C_n^r r-подмножеств) равно $(n+1)/(r+1)$, или что $S=C_n^r\cdot(n+1)/(r+1)=C_{n+1}^{r+1}$.

Воспользовавшись тем, что $C_{n-1}^{k-1}=C_n^k-C_{n-1}^k$ (см. 1°), преобразуем сумму S следующим образом:

$$S=1\cdot C_{n-1}^{r-1}+2\cdot C_{n-2}^{r-1}+\dots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1}=$$
$$=1\cdot(C_n^r-C_{n-1}^r)+2\cdot(C_{n-1}^r-C_{n-2}^r)+\dots+(n-r)(C_{r+1}^r-$$
$$-C_r^r)+(n-r+1)C_r^r=C_n^r+C_{n-1}^r+\dots+C_r^r.$$

Учитывая свойство 2°, получаем $S=C_{n+1}^{r+1}$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить и по индукции, рассмотрев множество $\{1, 2, \dots, n+1\}$ и заметив, что

$$S(n+1, r)=S(n, r)+S(n, r-1) \qquad (**)$$

(см. рис. 2); здесь через $S(m, k)$ обозначена сумма наименьших чисел k-подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Предположив доказанными равенства

$$S(n, r)=C_{n+1}^{r+1},\ S(n, r-1)=C_{n+1}^r$$

для r- и $(r-1)$-подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ (базис индукции содержится в условии задачи), получим, учитывая $(**)$ и свойство 1°,

$$S(n+1, r)=C_{n+1}^{r+1}+C_{n+1}^r=C_{n+2}^{r+1},$$

что и требуется.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
. . . .

Рис. 1. Треугольник Паскаля.

---

*) Более подробно с числами C_n^k — *биномиальными коэффициентами* — можно познакомиться, прочитав статью Н. Васильева, А. Зелевинского «Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения» («Квант», 1982, № 1) или брошюру В. А. Успенского «Треугольник Паскаля» (Популярные лекции по математике, выпуск 43, М., «Наука», 1978); несколько первых строк этого треугольника изображены на рисунке 1.

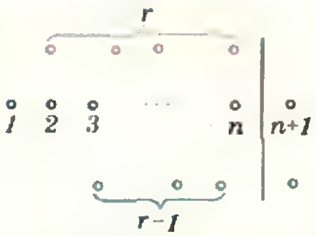


Рис. 2. $S(n+1, r)=S(n, r)+$ $+S(n, r-1)$, поскольку число $n+1$ либо не входит в r-подмножество множества $\{1, 2, ..., n+1\}$ (этому соответствует слагаемое $S(n, r)$), либо входит в него (тогда получается слагаемое $S(n, r-1)$).

M718. *Найдите наибольшее значение выражения* n^2+m^2 *для всевозможных пар* $(n; m)$ *натуральных чисел таких, что* $1\leqslant m\leqslant 1981$, $1\leqslant n\leqslant 1981$ *и* $|n^2-mn-m^2|=1$.

Интересно, что сумма **наибольших** чисел в r-подмножествах множества $\{1, 2, ..., n\}$ равна

$$n\cdot C_{n-1}^{r-1}+(n-1)\,C_{n-2}^{r-1}+\ldots+r\cdot C_{r-1}^{r-1}, \qquad (***)$$

так что сумма средних арифметических наибольших и наименьших чисел этих подмножеств равна (см. (*), (***) и 2°) $n+1$. Отсюда получаем, что среднее арифметическое наибольших чисел в выбранных подмножествах равно $r\cdot(n+1)/(r+1)$. Оказывается, вообще для любого j, $j<r<n$, верно следующее утверждение: *среднее арифметическое j-х по величине чисел r-подмножеств множества* $\{1, 2, ..., n\}$ *равно* $j\cdot(n+1)/(r+1)$. Докажите это самостоятельно.

Н. Каумова

◆

Заметим прежде всего, что если пара $(n; m)$ натуральных чисел такова, что

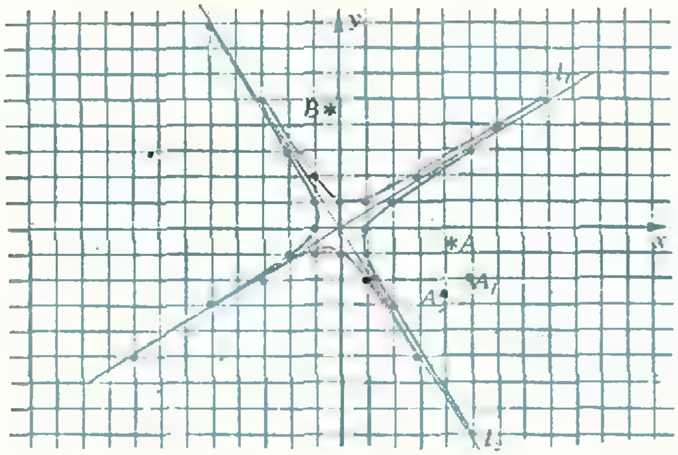
$$(n^2-mn-m^2)^2=1, \qquad (*)$$

то $n\geqslant m$, причем $n=m$ лишь в случае $n=m=1$. Кроме того, если пара $(n_0; m_0)$ удовлетворяет условию (*) и $n_0>m_0$, то пара $(m_0; n_0-m_0)$ также ему удовлетворяет (проверьте это!). Положив $m_0=n_1$, $n_0-m_0=m_1$, получим $n_1\geqslant m_1$; если при этом $n_1>m_1$, то и пара $(n_2; m_2)$, где $n_2=m_1$, $m_2=n_1-m_1$, также удовлетворяет условию (*). Продолжая этот процесс образования новых пар, удовлетворяющих условию (*) (см. рисунок), мы через конечное число шагов получим пару (1; 1). В самом деле, вторые элементы построенных пар меньше первых их элементов, а последовательность первых элементов построенных пар убывает: $n_i>m_i=n_{i+1}$. Образование же новой пары из пары $(n'; m')$ невозможно лишь в случае $n'=m'$: тогда $n'-m'$ — не натуральное число. Отсюда вытекает, что последней образованной парой будет пара (1; 1).

Теперь заметим, что если пара $(n'; m')$ получена из пары $(n; m)$ указанным преобразованием, то

$$n=m'+n', \; m=n'. \qquad (**)$$

Это означает, что вся последовательность пар, удовлетворяющих свойству (*), получается единственным образом из пары (1; 1) — с помощью преобразования (**). При этом последовательности и первых, и вторых элементов построенных таким образом пар возрастают. Вспомнив об ограничениях $1\leqslant n\leqslant 1981$, $1\leqslant m\leqslant 1981$, получим, что наибольшим значение выражения n^2+m^2 будет для такой пары $(n; m)$ натуральных чисел, у которой $n\leqslant 1981$,



Интересующие нас точки $(n; m)$ лежат на одной из гипербол $x^2-xy-y^2=1$, $x^2-xy-y^2=-1$. Преобразование плоскости, переводящее точку $(x; y)$ в точку $(y; x-y)$, можно представлять себе как композицию трех преобразований: (1) **растяжение** от прямой l_1 параллельно l_2 в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз; (2) **сжатие** к прямой l_2 параллельно l_1 тоже в $\frac{1+\sqrt{5}}{}$ раз; (3) симметрия относительно прямой l_1 ($A\to A_1\to A_2\to B$). Очевидно, это преобразование переводит красную гиперболу в синюю и наоборот.

а $m+n>1981$. Последовательно выписывая пары, получающиеся из (1; 1) преобразованием (**):

$$(1;\ 1), (2;\ 1),\ (3;\ 2),\ (5;\ 3),\ (8;\ 5),\ (13;\ 8),\ \ldots,$$

находим интересующую нас пару (1597; 987), так что ответ в нашей задаче — *число* 1597^2+987^2.

Попутно мы получили следующий замечательный факт: *все пары натуральных чисел* $(n;\ m)$, *для которых* $|n^2-mn-m^2|=1$ *и* $n>m$, *имеют вид* $(f_{i+1},\ f_i)$, *где* f_i *и* f_{i+1} — *соседние члены последовательности Фибоначчи.* Попробуйте сформулировать его на «геометрическом» языке целых точек гипербол, изображенных на нашем рисунке.

А. Абрамов, И. Клумова

◆

М719. *а) Для каких* $n\geqslant 3$ *существует множество из* n *последовательных натуральных чисел, обладающее следующим свойством: наибольшее из этих чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных* $n-1$ *чисел?*

б) При каких $n\geqslant 3$ *существует единственное множество из* n *последовательных натуральных чисел, обладающее указанным свойством?*

Любое натуральное n при некотором k удовлетворяет неравенствам $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$. Тогда $2^k<n<3\cdot 2^k<5\cdot 2^k$.

Рассмотрим множество

$$A=\{3\cdot 2^k,\ 3\cdot 2^k-1,\ \ldots,\ 3\cdot 2^k-n+1\}$$

из n последовательных натуральных чисел. Поскольку $n-1\geqslant 2^k$, среди $n-1$ последовательных натуральных чисел от $3\cdot 2^k-n+1$ до $3\cdot 2^k-1$ найдется хотя бы одно, делящееся на 2^k. При $n\geqslant 4$ хотя бы одно из них делится на 3. Поэтому число $3\cdot 2^k$ является делителем наименьшего общего кратного остальных $n-1$ чисел множества A для любого $n\geqslant 4$.

При $n\geqslant 6$ легко строится пример еще одного множества, обладающего указанным свойством:

$$B=\left\{5\cdot 2^k,\ \ 5\cdot 2^k-1,\ \ \ldots,\ \ 5\cdot 2^k-n+1\right\}$$

(проверьте это!). Таким образом, при $n\geqslant 6$ существует по крайней мере два множества A и B, обладающих указанным свойством. Остается рассмотреть случаи $n=3$, 4 и 5.

При $n=5$ также имеется два нужных множества: $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ и $\{8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$.

Докажем, что при $n=4$ существует единственное множество, обладающее указанным свойством. В самом деле, пусть множество $\{m,\ m+1,\ m+2,\ m+3\}$ обладает нужным свойством. Поскольку $m+3$ является делителем НОК $(m,\ m+1,\ m+2)$, число $m(m+1)(m+2)$ делится на $m+3$. Но $m(m+1)(m+2)=(m+3)(m^2+2)-6$; значит, 6 должно делиться на $m+3$, откуда $m=3$, и мы получаем единственный пример множества из четырех последовательных натуральных чисел, обладающего указанным свойством: $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Наконец, при $n=3$ таких множеств $\{m,\ m+1,\ m+2\}$ нет: НОК $(m,\ m+1)=m(m+1)$ (m и $m+1$ взаимно просты), но $m(m+1)$ не делится на $m+2$, поскольку

$$(m-1)(m+2)<m(m+1)<m(m+2).$$

А. Абрамов

◆

М720. *Про функцию* f, *определенную на множестве всех пар неотрицательных целых чисел* $(x;\ y)$, *известно следующее:*

$1°$. $f(0,\ y)=y+1$,

$2°$. $f(x+1,0)=f(x,\ 1)$,

$3°$. $f(x+1,\ y+1)=f(x,\ f(x+1,\ y))$

для каждой пары $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. *Найдите значение* $f(4,\ 1981)$.

Легко видеть, что $f(1,0)=f(0,1)=2$. Применяя соотношение 3°, находим

$$f(1,\ y)=f(0,\ f(1,\ y-1))=f(1,\ y-1)+1,$$

откуда следует, что

$$f(1,\ y)=f(1,0)+y=y+2.$$

Аналогично получаем, что

$$f(2,y)=2y+3.$$

Посмотрим, чему равно $f(3,y)$. Имеем

$$f(3,0)=f(2,1)=5;$$
$$f(3,y)=f(2,f(3,y-1))=2f(3,y-1)+3,$$

так что

$$f(3,1)=13,\ f(3,2)=29,\ f(3,3)=61,\ f(3,4)=125,\ \ldots$$

Можно заметить, что $f(3,\ y)=2^{y+3}-3$ (докажите это, например, с помощью индукции).

Теперь мы можем выразить $f(4,\ y)$:

$$f(4,y)=f(3,f(4,y-1))=2^{f(4,y-1)+3}-3,$$

причем $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3=13$.

Чтобы, как и выше, «угадать» формулу для $f(4,y)$, найдем $f(4,1)$ и $f(4,2)$. Имеем

$$f(4,1)=2^{f(4,0)+3}-3=2^{16}-3=2^{2^{2^{2}}}-3;$$

$$f(4,2)=2^{f(4,1)+3}-3=2^{2^{2^{2^{2}}}}-3.$$

Теперь совсем легко доказать, что

$$f(4,y)=\overbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{(y+3)\ \text{«двойки»}}-3,$$

поэтому

$$f(4,\ 1981)=\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{1984\ \text{«двойки»}}-3.$$

А. Абрамов

◆

Ф723. *Спортсмены бегут с одинаковыми скоростями v колонной длины l_0. Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u<v$). Спортсмен, поравнявшийся с тренером, бежит назад с той же скоростью v. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?*

Время, в течение которого все спортсмены, начиная с первого и кончая последним в колонне, повстречаются с тренером, равно

$$t=l_0/(v+u).$$

В тот момент, когда последний спортсмен поравняется с тренером, первый будет находиться от него на расстоянии

$$l=(v-u)t=l_0\frac{(v-u)}{(v+u)}.$$

Такова и будет длина колонны, когда все спортсмены развернуться.

(Объясните теперь, почему при отражении света от зеркала, движущегося навстречу источнику, сокращается длина волны света:

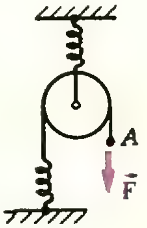
$$\lambda=\lambda_0\frac{c-u}{c+u},$$

где c — скорость света, u — скорость зеркала.)

И. Воробьев

◆

Ф724. *На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка A на рисунке), если к нему приложить силу $\vec{F}$? Жесткости пружин одинаковы и равны k. Пружины, нить и блок считать невесомыми.*



Пусть нижняя пружина под действием силы F растянулась на величину $x=F/k$. На верхнюю пружину в положении равновесия действует сила, равная $2F$. Под действием этой силы пружина растянута на величину $x_1=2F/k=2x$.

Таким образом, в результате действия силы F блок опустится на расстояние $2x$, нить слева укоротится на x и, следовательно, точка A опустится на расстояние

$$l=5x=5F/k.$$

Г. Меледин

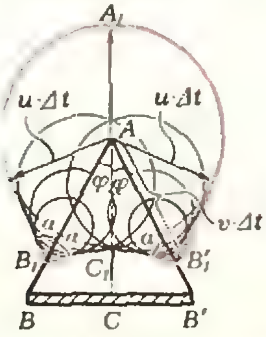
◆

Ф725. *Из взрывчатого вещества нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку так, чтобы при взрыве, начинающемся с вершины конуса и «сползающем» вниз, продукты взрыва ударялись о горизонтальную плиту, на*

Пусть взрыв начинается в точке A (см. рисунок) в момент времени t_0. Построим границу той области, в которой окажутся продукты взрыва к моменту времени $t_0+\Delta t$.

За время Δt во взрыв будут вовлечены те точки конуса, которые лежат на расстоянии $v\cdot\Delta t$ от точки A. Каждая из этих точек в тот момент, когда до нее дойдет взрыв, становится источником, из которого разлетаются продукты взрыва. Через любой промежуток времени Δt_i

которой стоит конус, одновременно. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна v, а скорость разлета продуктов взрыва u. Каким должен быть угол φ между осью конуса и его образующей?



$|AA_1| = u\cdot\Delta t$; $|AB_1| = v\cdot\Delta t$;
$\sin\alpha = u/v$.

Ф726. *В длинной горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя поршнями массы m каждый находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Вне поршней — вакуум. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны v и 3v. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Универсальная газовая постоянная равна R.*

Ф728.*) *Три маленьких шарика с одинаковыми массами — красный, синий и зеленый — закреплены невесомым каркасом в вершинах равностороннего треугольника со стороной l. Система положена на гладкую горизонтальную поверхность и приведена во вращение с периодом T вокруг центра масс. В некоторый момент красный шарик отрывается от каркаса.*

после взрыва в данной точке продукты взрыва окажутся внутри области, представляющей собой сферу радиуса $u\cdot\Delta t$ с центром в данной точке. Поверхность, огибающая все такие сферы, и будет границей той области пространства, в которой окажутся продукты взрыва к данному моменту времени.

На рисунке показано сечение этой области плоскостью, проходящей через ось конуса. Угол α, который образует участок B_1C_1 границы с образующей конуса, определяется условием $\sin\alpha = u/v$.

Тот факт, что продукты взрыва одновременно ударяются о плиту, на которой стоит конус, означает, что к тому моменту времени $t_0+\Delta T$, когда взрыв доходит до точки B, участок B_1C_1 границы совпадает с отрезком BB'. С учетом симметрии, это означает, что «внутренняя» коническая часть границы становится плоской горизонтальной поверхностью. Для выполнения этого условия угол, который составляет образующая конуса с его осью, должен быть равен $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$; следовательно,

$$\cos\varphi = u/v.$$

И. Воробьев

◆

Поскольку система изолированная, ее полная энергия остается неизменной.

Центр масс системы движется со скоростью 2v. В системе отсчета, связанной с центром масс, поршни в начальный момент движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v, и полная энергия системы равна сумме кинетических энергий поршней и внутренней энергии газа:

$$E = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}RT_0.$$

Максимальной температура газа будет в тот момент, когда скорости поршней (в системе центра масс) будут равны нулю. Энергия системы в этот момент равна

$$E = \frac{3}{2}RT_{\max} = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}RT_0.$$

Отсюда находим $T_{\max}$:

$$T_{\max} = T_0 + \frac{2}{3}\frac{mv^2}{R}.$$

В. Бородин

◆

При вращении системы вокруг центра масс (точка O на рисунке) каждый шарик движется по окружности радиуса $r = l/\sqrt{3}$. Линейная скорость каждого шарика равна

$$v = 2\pi r/T = 2\pi l/T\sqrt{3}.$$

Пусть в момент отрыва красного шарика положение системы было таким, как на рисунке. За время T красный шарик переместится на расстояние

$$s_1 = vT = 2\pi l/\sqrt{3}.$$

За это время центр масс синего и зеленого шариков (точка M) переместится вдоль направления NN' на расстояние

$$s_2 = \pi l/\sqrt{3}$$

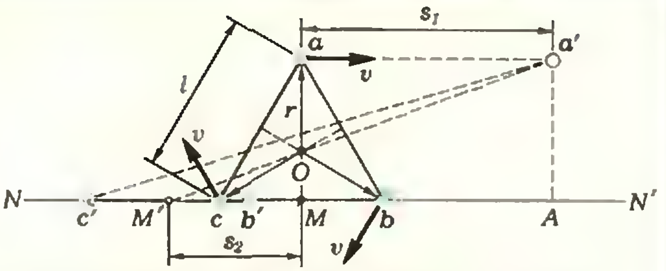
(поскольку центр масс системы остается неподвижным).

После отрыва красного шарика синий и зеленый шарики будут вращаться вокруг их центра масс; период вращения их будет равен T (покажите!). Следовательно, за время T, совершив полный оборот вокруг точки M, стержень,

---

*) Решение задачи Ф727 — в заметке А. Зильбермана «Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением» (с. 54).

На каком расстоянии от синего шарика он окажется спустя время T?



соединяющий синий и зеленый шарики, будет лежать на прямой NN'.

Таким образом, через время T после отрыва красного шарика шарики будут находиться в точках a', b', c'. Расстояние между красным и синим шариками найдем из треугольника $c'a'A$:

$$|c'a'| = \sqrt{|a'A|^2+|Ac'|^2} = l\sqrt{1+\pi\sqrt{3}(1+\pi\sqrt{3})}.$$

В. Григорьев

◆

Ф729. *Лента транспортера длины l движется со скоростью v_0. С какой скоростью нужно толкнуть кубик массы m против движения транспортера для того, чтобы количество тепла, выделившегося за счет работы силы трения между кубиком и лентой транспортера, было максимальным? Чему равно это максимальное количество тепла, если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v_0^2<2\mu lg$?*

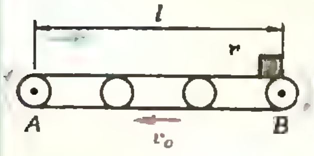


Рис. 1.

Количество выделившегося тепла будет максимальным при условии, что кубик пройдет максимальное расстояние относительно транспортера. Для этого необходимо, чтобы у ролика A скорость кубика относительно земли стала равной нулю. Начальная скорость (относительно земли), которую при этом должен иметь кубик, определяется условиями

$$-v+at=0, \quad l=vt-\frac{at^2}{2},$$

где $a=\mu g$ — ускорение, сообщаемое кубику силой трения. Отсюда

$$v=\sqrt{2\mu gl;}$$

время движения кубика по ленте транспортера до ролика A —

$$t=\sqrt{2l/\mu g}.$$

До остановки кубик пройдет по ленте путь

$$s_1=l+v_0t=l+v_0\sqrt{2l/\mu g}.$$

Далее кубик начнет двигаться равноускоренно вправо. Время, через которое прекратится проскальзывание, равно $\tau=v_0/a=v_0/\mu g$. За это время относительно земли кубик переместится на расстояние

$$s=a\tau^2/2=v_0^2/2\mu g.$$

Так как по условию задачи $v_0<\sqrt{2\mu gl}$, то за время τ кубик не соскользнет с транспортера, то есть $s<l$.

Путь, который за это время кубик пройдет относительно ленты транспортера, равен

$$s_2=\left|\frac{v_0^2}{2a}-v_0\tau\right|=\frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Полный путь кубика относительно ленты равен

$$S=s_1+s_2=l+v_0\sqrt{\frac{2l}{\mu g}}+\frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Количество теплоты, выделившееся за счет работы силы трения, равно

$$Q=\mu mgS=\frac{m}{2}(v_0+\sqrt{2l\mu g})^2.$$

Г. Мякишев

Приведем еще одно решение этой задачи. Его прислал читатель Б. Хвостов.

Рассмотрим движение в системе координат, скорость которой относительно земли равна v_0 и направлена в ту же сторону, что и скорость верхней части ленты транспортера

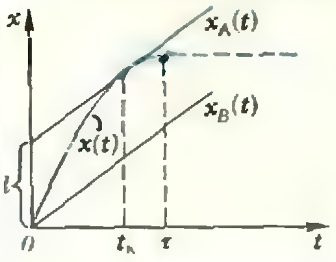


Рис. 2

(то есть от точки A к точке B на рисунке 1). Пусть в момент начала движения кубика ($t_0=0$) точка B совпадает с началом координат.

На рисунке 2 приведены графики движения точек A и B (неподвижных относительно земли) вдоль оси X, направленной влево (от точки B к точке A). График движения кубика будет представлять собой параболу

$$x(t)=(v+v_0)t-\mu g\frac{t^2}{2},$$

где v — начальная скорость кубика, μg — ускорение, сообщаемое кубику силой трения (время t меняется от $t_0=0$ до некоторого момента τ, соответствующего остановке кубика относительно ленты транспортера).

Максимальное количество тепла выделится при условии, что за время τ торможения кубика путь, пройденный им, будет максимально возможным и при этом кубик не слетит с ленты транспортера. Следовательно, график движения кубика — парабола, касающаяся в некоторый момент $t_к$ прямой $x_A(t)$; вершина параболы лежит выше прямой $x_B(t)$, то есть $x(\tau)>x_B(\tau)$.

Условия касания —

$$l+v_0t_к=(v+v_0)t_к-\mu g\frac{t_к^2}{2},$$

$$v_0=v+v_0-\mu g t_к,$$

откуда $v=\sqrt{2\mu g l}$. Путь торможения равен

$$s_\tau=\frac{(v+v_0)^2}{2\mu g}=\frac{(\sqrt{2\mu g l}+v_0)^2}{2\mu g},$$

время торможения —

$$\tau=\frac{v+v_0}{\mu g}=\frac{\sqrt{2\mu g l}+v_0}{\mu g}.$$

За это время точка B пройдет путь

$$s_B=\frac{v_0(\sqrt{2\mu g l}+v_0)}{\mu g}.$$

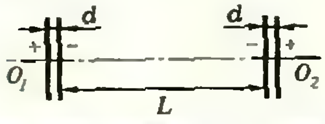
По условию задачи $v_0<\sqrt{2\mu g l}$; следовательно $s_B<s_\tau$, то есть $x(\tau)>x_B(\tau)$.

Максимальное количество тепла найдем из закона сохранения энергии:

$$Q_{max}=\frac{m(v+v_0)^2}{2}=\frac{m}{2}(\sqrt{2\mu g l}+v_0)^2.$$

◆

Ф730. *Два плоских конденсатора расположены так, как показано на рисунке. Расстояние L между конденсаторами много больше размеров их обкладок и расстояния d между обкладками. Заряд одного конденсатора q_1, заряд другого q_2. С какой силой притягиваются эти конденсаторы?*



Напряженность поля, создаваемого конденсатором с зарядом q_1 в точках, лежащих вблизи оси O_1O_2 на расстоянии x от этого конденсатора, равна

$$E_x=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+d)^2}\right)\approx\frac{q_1 d}{2\pi\varepsilon_0 x^3},$$

(x много больше линейных размеров пластин конденсатора).

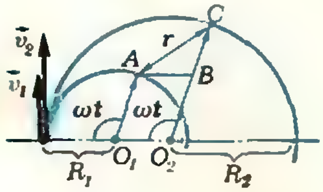
Следовательно, сила, действующая на конденсатор с зарядом q_2, равна

$$F=q_2(E_L-E_{L+d})=\frac{q_1q_2d}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L^3}-\frac{1}{(L+d)^3}\right)\approx\frac{3q_1q_2d^2}{2\pi\varepsilon_0 L^4}.$$

(Рассмотрите самостоятельно случай, когда соседние пластины конденсаторов имеют заряды разных знаков.)

В. Петерсон

Ф731. *Две одинаковые частицы с зарядами q и массами m вылетают одновременно из одной точки в направлении, перпендикулярном силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$. Выразить расстояние между частицами как функцию времени, если начальные скорости частиц направлены одинаково и равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.*



В магнитном поле частицы движутся по окружностям (см. рисунок), радиусы которых равны, соответственно,

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB}, \ R_2 = \frac{mv_2}{qB}. \qquad (1)$$

Угловые скорости частиц одинаковы и равны

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \frac{qB}{m}. \qquad (2)$$

Пусть через время t (от начала движения в магнитном поле) одна частица находится в точке A, а другая — в точке C (см. рисунок). Расстояние $r(t)$ между ними в этот момент времени можно определить из треугольника ABC. Этот треугольник — равнобедренный: $|AB| = |BC| = R_2 - R_1$; $\widehat{ABC} = \omega t$. Следовательно,

$$r(t) = 2|AB| \sin\frac{\omega t}{2} = 2(R_2 - R_1)\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Подставляя значения R_1, R_2, ω из (1) и (2), находим:

$$r(t) = \frac{2m}{qB}(v_2 - v_1)\sin\left(\frac{qB}{2m}t\right).$$

(Мы считаем пренебрежимо слабым электростатическое взаимодействие частиц. Именно такая ситуация наблюдается в камере Вильсона.)

В. Алешкевич

◆

Ф732. *Точечный предмет S, находится на оси полого конуса с зеркальной внутренней поверхностью (рис. 1). С помощью линзы Л на экране Э получают изображение предмета, создаваемое лучами, однократно отраженными от зеркальной поверхности конуса (прямые лучи от предмета на линзу не попадают). Что произойдет с изображением, если линзу закрыть диафрагмой такой, как а) на рисунке 2, а? б) на рисунке 2, б?*

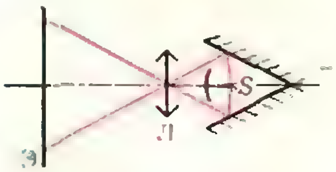
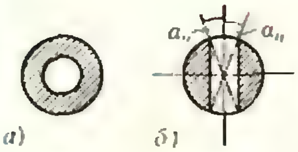


Рис. 1.



а) б)

Рис. 2

Лучи, однократно отраженные от поверхности конуса, распространяются так, как если бы они шли от совокупности точечных мнимых источников, расположенных по окружности; каждый такой источник симметричен источнику S относительно соответствующей образующей конуса. Изображением этих источников на экране будет кольцо (рис. 3). Существенно, что пучок лучей, попадающий от каждого мнимого источника на линзу, плоский: он проходит не через всю поверхность линзы, а пересекает линзу вдоль соответствующего диаметра (например, от источника S' лучи распространяются в вертикальной плоскости). Поэтому степень ослабления такого пучка диафрагмой зависит от формы и ориентации диафрагмы.

Симметричная диафрагма, изображенная на рисунке 2, *а*, очевидно, в равной мере ослабит пучки, идущие от всех мнимых источников. В этом случае освещенность кольца на экране уменьшится равномерно. Диафрагма, изображенная на рисунке 2, *б*, пропустит целиком пучки, плоскости которых образуют с вертикальной плоскостью углы $\alpha < \alpha_0$. Следовательно, освещенность соответствующих (то есть верхней и нижней) частей кольца на экране останется прежней. Прочие же пучки будут частично срезаться диафрагмой, причем тем сильнее, чем ближе плоскость пучка к горизонтальной плоскости. Поэтому на боковых участках кольца по мере изменения угла α от $\alpha = \alpha_0$ до $\alpha = \pi/2$ освещенность будет уменьшаться. Изображение будет таким, как на рисунке 4, где уменьшение освещенности схематически отображено уменьшением густоты штриховки. Очевидно, изображение симметрично относительно вертикальной и горизонтальной осей.

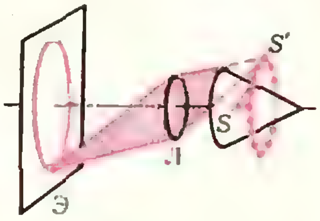


Рис. 3.

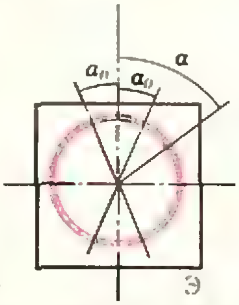


Рис. 4.

Д. Белов

А. Зильберман

Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением

Много интересных вопросов возникает в связи со свойствами источников, у которых зависимость напряжения от тока отличается от обычной зависимости $U = \mathcal{E} - rI$ ($\mathcal{E}$ — ЭДС, r — внутреннее сопротивление источника). Некоторые из этих вопросов мы разберем на примере задачи Ф727.

Ф727. *Зависимость напряжения от тока для некоторого источники электрической энергии показана на рисунке 1. Постройте график зависимости напряжения на нагрузке, на которую замкнут источник, от сопротивления нагрузки.*

Подключим к источнику резистор с сопротивлением R. Напряжение на нем связано с током простым соотношением — $U_{\text{н}} = RI$. На том же рисунке, где изображена зависимость $U\ (I)$ напряжения источника от тока через него, нарисуем прямую $U_{\text{н}} = RI$. Точка пересечения графика $U\ (I)$ и прямой $U_{\text{н}} = RI$ даст нам искомые ток и напряжение. Для обычного источника, у которого напряжение на зажимах тем меньше, чем больше ток, никаких проблем больше не возникает — точка пересечения одна и результат определяется однозначно.

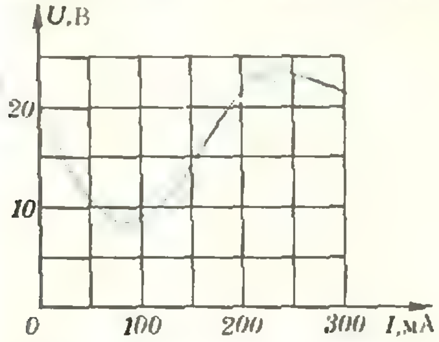


Рис. 1.

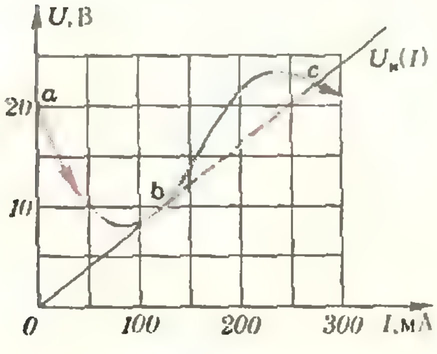


Рис. 2.

А вот для необычного источника, у которого на некотором участке напряжение растет с ростом тока, есть область значений R, при которых точек пересечения целых три. Понятно, что ток не может иметь одновременно три значения; значит, с этой областью нужно разбираться отдельно — удобный графический способ нахождения тока в цепи тут явно не подходит.

Подключим к источнику сначала резистор с очень большим сопротивлением, а затем будем постепенно сопротивление уменьшать. Первоначальный ток в цепи будет очень малым, и при уменьшении сопротивления он будет возрастать. На рисунке 2 такому режиму соответствует участок ab, на котором значения U и $I\ (U)$ меняются от $U_a = 20$ В, $I_a = 0$ до $U_b \approx 10$ В, $I_b \approx 120$ мА. Каждая точка этого участка соответствует устойчивому состоянию (малые изменения тока в цепи приводят к изменениям напряжения, которые стремятся компенсировать изменения тока; это характерно для всех «нормальных» цепей). При дальнейшем уменьшении R режим меняется скачком — от U_b, I_b до $U_c \approx 22$ В, $I_c \approx 260$ мА, а затем — снова «устойчивый» режим (справа от точки c по кривой $U\ (I)$).

Если мы начнем с малых сопротивлений резистора, то при увеличении R мы дойдем до точки d (рис. 3), затем — скачок от $U_d \approx 23$ В, $I_d \approx 210$ мА до $U_e \approx 8$ В, $I_e \approx 80$ мА и снова по кривой $U\ (I)$ до точки a.

А что если взять резистор, сопротивление которого лежит в области 80 Ом $< R <$ 100 Ом (значению $R \approx 80$ Ом соответствуют точки b и c на рисунке 2, значению $R \approx 100$ Ом — точки e и d на рисунке 3), и подключить его к источнику? Каковы будут напряжение и ток в цепи? Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать такие параметры цепи, как индуктивность проводов, емкость между выводами резистора. Если, например, индуктивность проводов большая (длинные провода), а емкость между проводами маленькая, то в момент подключения резистора к источнику ток будет малым (влияние индуктивности), а затем будет нарастать — режим в цепи будет устанавливаться в соответствии с рисунком 2. Если велика емкость между подключаемыми к источнику проводами, а индуктивность проводов маленькая, то в первый момент ток будет большим и станет уменьшаться (по мере зарядки емкости) — случай, соответствующий рисунку 3.

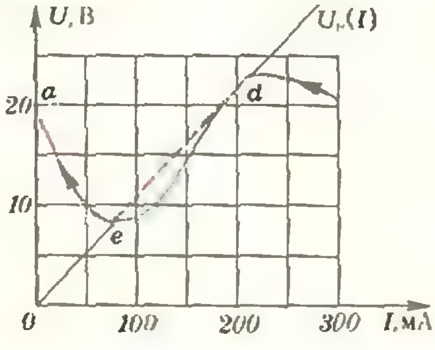


Рис. 3.

(Интересно отметить, что, используя подобные источники, можно получить незатухающие колебания в цепи. Правда, для этого нужен второй источник.

У обычного источника, напряжение на котором падает с ростом потребляемого тока, можно определить величину внутреннего сопротивления — по отношению изменений напряжения на выходе к изменениям тока: $r=-\frac{\Delta U}{\Delta I}$. В нашем случае на некотором участке — на участке bd зависимости U (I) — внутреннее сопротивление источника получается отрицательным. При этом участок bd настолько крут, что даже полное сопротивление цепи ($r+R$) оказывается отрицательным. Отсюда и неустойчивость «средней» точки, и другие «странности» (в том числе — возможность получения незатухающих колебаний: «отрицательное» сопротивление может компенсировать потери в колебательной системе; естественно, все это происходит без нарушения закона сохранения энергии — за счет энергии источника).

Как же удается получить всю кривую зависимости U (I), если как при уменьшении, так и при увеличении сопротивления нагрузки из кривой «выпадает» участок bd? При помощи маленькой хитрости: возьмем второй источник, его «минус» подключим к «плюсу» нашего источника, а нагрузку R включим между оставшимися выводами. Это позволит нам при той же величине тока подобрать резистор с бóльшим чем R сопротивлением так, чтобы полное сопротивление в цепи было всюду положительным. (На графике такая прямая уже не выходит из начала координат и пересекает кривую U (I) только в одной точке.)

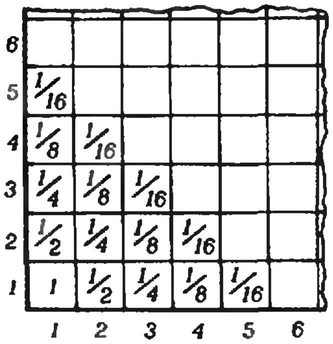
Зависимость, подобная приведенной в условии задачи Ф727, — вовсе не редкость. Она может возникнуть, например, при попытке сделать стабилизатор напряжения, у которого выходное напряжение не меняется при изменении тока нагрузки. Чаще всего этого достигают путем компенсации уменьшения напряжения (компенсационный стабилизатор). Стоит только немного ошибиться — сразу в какой-то области наступит перекомпенсация, и напряжение начнет увеличиваться с ростом потребляемого тока. (Радиолюбители знают, что стабилизаторы часто склонны к самовозбуждению; причины этого явления мы выше обсудили.)

Расселение фишек

(Начало см. на с. 28)

браться с задачей г). Оказывается, эти понятия достаточны, чтобы разобраться с задачей Концевича для любого множества G. Более того, существует алгоритм (вполне пригодный для программирования на ЭВМ), позволяющий за конечное число шагов решить задачу Концевича для G — либо установить ее неразрешимость, либо указать последовательность нормальных ходов, освобождающих G. Этот алгоритм основан на следующих соображениях.

Сведем задачу освобождения к задаче нормализации с начальной позицией A. Затем проведем горизонтальную и вертикальную прямые, ограничивающие заданную позицию A сверху и справа; получим прямоугольник $m\times n$, содержащий все фишки позиции, — так называемый *прямоугольник задачи* ($A_{ij}\geqslant 0$, причем $A_{ij}=0$ при $i>m$ или $j>n$). Отодвинув прямые на две клетки вправо и вверх, получим *расширенный прямоугольник П* задачи $(m+2)\times(n+2)$. Наш алгоритм состоит в следующем. *Имея позицию, построить расширенный прямоугольник П и выполнять необходимые ходы (в любом порядке — скажем, по горизонталям, в 1-й клетке, затем во 2-й и т. д.).*



6						
5	1/16					
4	1/8	1/16				
3	1/4	1/8	1/16			
2	1/2	1/4	1/8	1/16		
1	1	1/2	1/4	1/8	1/16	
	1	2	3	4	5	6

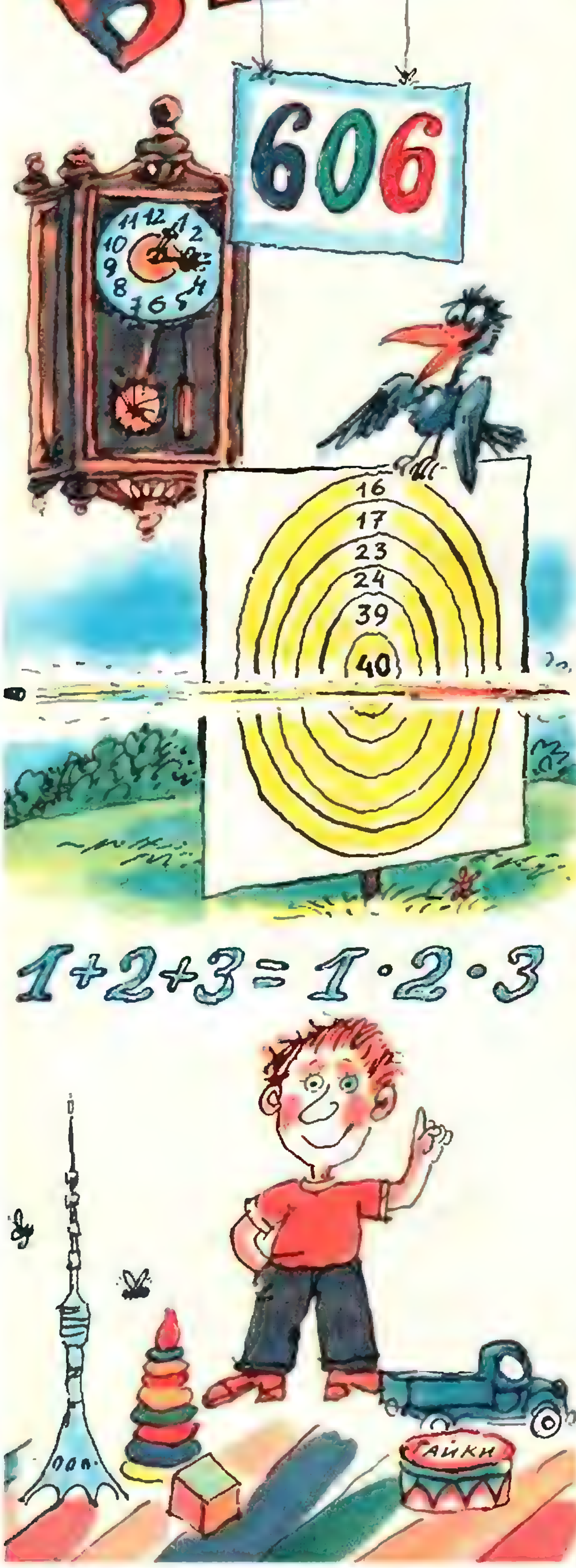
Рис. 8.

Если понадобится поставить фишку за пределы П, то задача неразрешима. Иначе, выполнив все необходимые ходы, мы получим ее решение (не выходящее за пределы П!).

Недостаток места не позволяет нам привести доказательство сформулированного факта. Возможно, читатели сумеют доказать его. А учащимся Заочной школы программирования мы рекомендуем написать программу, решающую задачу Концевича в общем случае.

А.Сави

ВЕСЕЛАЯ



В этом номере мы предлагаем дюжину шуточных и занимательных задач, для решения которых не нужно ни карандаша, ни бумаги. Эти задачи можно использовать на викторинах, КВНах и других веселых соревнованиях.

1. На листе бумаги написано число 606. Какое действие нужно совершить, чтобы увеличить его в 1,5 раза?

2. Какой знак нужно поставить между цифрами 5 и 6, чтобы получилось число большее пяти, но меньшее шести?

3. Часы с боем делают 3 удара за 4 секунды. За сколько секунд они сделают 9 ударов?

4. Сумма тройки чисел 1, 2 и 3 равна их произведению. Существуют ли еще такие тройки целых чисел?

5. У меня в кармане две монеты на общую сумму 5 копеек, причем одна из монет не трехкопеечная. Может ли такое быть?

6. На рисунке изображена мишень. Куда нужно попасть и сколько сделать выстрелов, чтобы выбить ровно 100 очков?

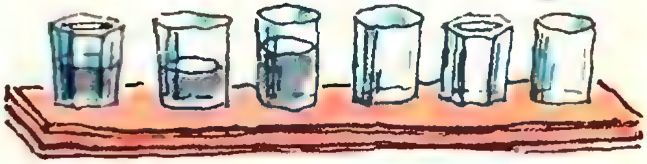
7. Останкинская телебашня высотой 530 метров весит 30 000 тонн. Сколько будет весить точная копия этой башни высотой 53 см?

8. У меня в трех коробках лежали гвозди, винты и гайки. На каждой коробке было написано что в ней лежит. Однажды мой младший брат пересыпал содержимое коробок так, что надпись на каждой коробке перестала соответствовать ее содержимому. Хорошо еще, что он не перепутал их между собой: гвозди остались лежать отдельно от гаек и винтов и т. д. Можно ли, открыв одну из коробок, определить, что лежит в каждой из коробок?

9. Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения на 3 — кубом целого числа.

ГВОЗДИ
ВИНТЫ

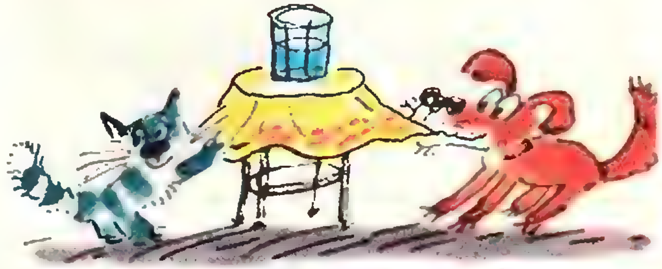
ВИКТОРИНА



10. На полочке подряд стоят шесть стаканов, как на рисунке: три с водой и три пустых. Как достичь расстановки, при которой пустые и полные стаканы чередуются, если при каждом ходе разрешается брать в руки лишь один стакан?

11. Найдите два числа, сумма, произведение и частное которых равны между собой.

12. На табуретке — коврик, на коврике — стакан с водой. Как убрать коврик, оставив стакан на табуретке, не трогая стакан?



* * *

Предлагаем также несколько игр, которые тоже можно использовать в соревнованиях, например в конкурсах капитанов в математическом КВН. В каждой из них существует выигрышная стратегия для одного из игроков: начинающего или второго. Попытайтесь определить, кто выигрывает при правильной игре, и найдите выигрышную стратегию.

1. Имеется две кучки камней. Двое играющих делают поочередно следующие ходы: забирают одну из кучек, а вторую делят на две части. Если играющий при своем ходе не сможет разделить кучку (так как в ней остался лишь один камень), то он проигрывает.

2. В землю вбивается несколько колышков. Двое по очереди связывают бечевками пары колышков. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечевок. (Не разрешается соединять бечевкой два ранее уже соединенных колышка.)

3. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причем за один раз можно оборвать либо один лепесток, либо два соседних лепестка. Выигрывает тот, кто делает последний ход.

Л. Баканина

Законы сохранения при ядерных превращениях

Процессы, происходящие в ядрах при их взаимодействиях, весьма сложны и изучены далеко не полностью. Однако, если из опыта известно, какие продукты получаются в результате ядерной реакции, то их скорости (а значит, и кинетические энергии) можно рассчитать с помощью законов сохранения энергии и импульса.

Закон сохранения импульса выполняется при всех ядерных реакциях: всегда суммарный импульс образовавшихся частиц равен начальному импульсу системы.

При использовании закона сохранения энергии нужно иметь в виду, что одни ядерные реакции идут с выделением, а другие — с поглощением энергии. Это связано с тем, что суммарная масса системы до взаимодействия может быть как больше, так и меньше суммарной массы образовавшихся продуктов. Существует, как говорят, дефект масс Δm, который и определяет энергию ΔE, выделяемую или поглощаемую в процессе реакции. Согласно формуле Эйнштейна,

$$\Delta E = \Delta m c^2,$$

где c — скорость света.

При этом следует помнить, что дефект масс всегда много меньше массы ядер как до, так и после реакции. Поэтому учитывать его нужно лишь в тех случаях, когда требуется определить энергию реакции ΔE. Если же она задана или в данной задаче определять ее не требуется, можно (и нужно) пользоваться округленными значениями масс ядер.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Радон — это альфа-радиоактивный газ с атомной массой $A=222$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α-частица (рис. 1)?*

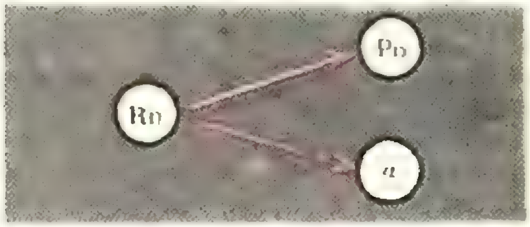


Рис. 1.

Энергия ΔE, освобождаемая при распаде (из-за дефекта масс), выделяется в виде кинетической энергии продуктов реакции: α-частицы ($A_\alpha=4$) и остаточного ядра ($A_\text{я}=218$). Так как дефект масс существенно меньше массы исходного ядра, выделяемая энергия мала по сравнению с энергией покоя ядер, и для кинетической энергии можно пользоваться нерелятивистской (классической) формулой. Следовательно,

$$\Delta E = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\text{я} v_\text{я}^2}{2}.$$

Кроме того, должен выполняться закон сохранения импульса:

$$m_\alpha v_\alpha - m_\text{я} v_\text{я} = 0.$$

Мы считаем, что до распада ядро радона покоилось или, во всяком случае, его кинетическая энергия была много меньше энергии реакции ΔE, поэтому суммарный импульс полагаем равным нулю.

Доля полной энергии, которую уносит α-частица, равна

$$\frac{E_\alpha}{\Delta E} = \frac{E_\alpha}{E_\text{я}+E_\alpha} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{m_\text{я}(m_\alpha/m_\text{я})^2 v_\alpha^2 + m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_\text{я}}{m_\alpha + m_\text{я}} = \frac{A_\text{я}}{A} \approx 0{,}98.$$

Итак, α-частица уносит 98% освобождаемой при распаде энергии.

Задача 2. *При захвате нейтрона ядром* ^6Li *происходит ядерная реакция* $^6\text{Li} + {}^1n \rightarrow {}^3\text{T} + {}^4\text{He}$ *(рис. 2),*

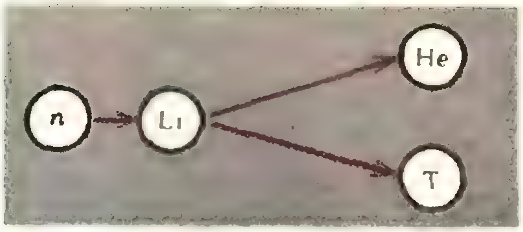


Рис. 2

в которой выделяется энергия $\Delta E = 4{,}8$ МэВ. Найдите распределение энергии между продуктами реакции (ядром трития и α-частицей), считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

Задача, в сущности, аналогична предыдущей. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_T v_T^2}{2} + \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \Delta E,$$

$$m_T v_T - m_\alpha v_\alpha = 0.$$

Отсюда, учтя, что атомные массы трития и α-частицы равны $A_T = 3$ и $A_\alpha = 4$ соответственно, находим

$$E_T = \frac{m_T v_T^2}{2} = \frac{m_\alpha}{m_T + m_\alpha} \Delta E = \frac{4}{7} \Delta E \approx \approx 2{,}74 \text{ МэВ},$$

$$E_\alpha = \Delta E - E_T = \frac{3}{7} \Delta E \approx 2{,}06 \text{ МэВ}.$$

Задача 3. *Реакцию синтеза дейтерия и трития $^2\text{D} + {}^3\text{T} \rightarrow {}^1n + {}^4\text{He}$ (рис. 3) изучают, направляя ускоренные до энергии $E_D = 2$ МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 17{,}6$ МэВ.*

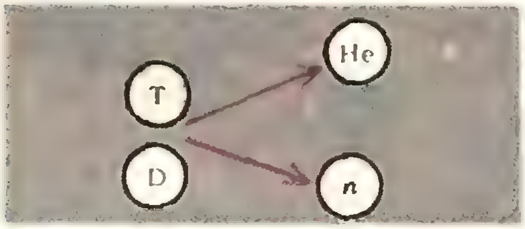


Рис. 3.

В данном случае начальный импульс системы отличен от нуля, и, кроме того, нейтрон и α-частица летят по разным направлениям. Значит, импульсы частиц нужно складывать как векторы, и закон сохранения импульса надо записать в векторной форме:

$$\vec{P}_D = \vec{P}_n + \vec{P}_\alpha .$$

Так как $\vec{P}_n \perp \vec{P}_D$ (рис. 4), по теореме Пифагора

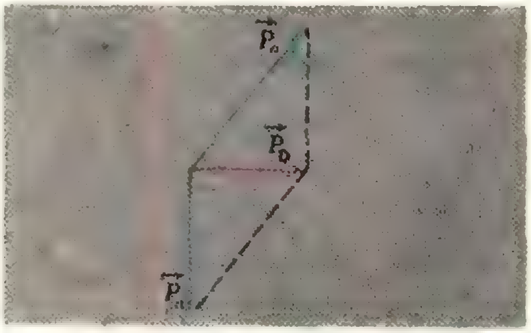


Рис. 4.

$$P_\alpha^2 = P_D^2 + P_n^2.$$

По закону сохранения энергии

$$E_n + E_\alpha = E_D + \Delta E,$$

или

$$\frac{P_n^2}{2m_n} + \frac{P_\alpha^2}{2m_\alpha} = E_D + \Delta E.$$

Из этих уравнений находим

$$E_n = \frac{P_n^2}{2m_n} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left(\Delta E + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} E_D\right) \approx \approx 14{,}9 \text{ МэВ}.$$

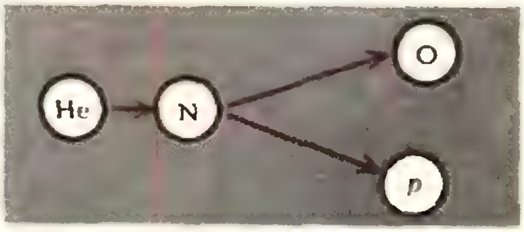


Рис. 5.

Задача 4. *Ядерная реакция $^{14}\text{N} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{17}\text{O} + {}^1p$ (рис. 5) может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_п = 14{,}5$ МэВ. На сколько энергия α-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся при реакции протонов была равна нулю?*

В отличие от предыдущих задач, где ядерные превращения сопровождались выделением энергии, в этой задаче реакция идет с поглощением энергии (то есть суммарная масса ядер после реакции больше, чем до реакции). При этом пороговая энергия $E_\text{п}$ не может быть равна поглощаемой энергии ΔE, так как импульс системы до реакции не равен нулю, а значит, и после реакции система имеет отличные от нуля импульс и кинетическую энергию. Минимальная кинетическая энергия, которой после реакции должна обладать система, равна кинетической энергии, связанной с движением ее центра масс. Ведь скорость центра масс не может измениться, так как во время реакции действуют лишь внутренние силы, в сумме компенсирующие друг друга. Следовательно, минимальная энергия налетающей частицы, при которой реакция может идти, то есть пороговая энергия $E_\text{п}$, равна сумме энергии ΔE, поглощаемой во время реакции, и кинетической энергии центра масс системы:

$$E_\text{п} = \Delta E + \frac{MV^2}{2},$$

где $M = m_N + m_\alpha$, а $V = \frac{m_\alpha v_\alpha}{M}$. Отсюда находим

$$\Delta E = \frac{M - m_\alpha}{M} E_\text{п} = \frac{14}{18} E_\text{п}.$$

После того как энергия реакции ΔE найдена, задача решается аналогично предыдущим. По законам сохранения энергии и импульса (учтя, что энергия и скорость протона равны нулю) получаем

$$E_\alpha = \Delta E + \frac{m_0 v_0^2}{2},$$
$$m_\alpha v_\alpha = m_0 v_0.$$

Из этих уравнений находим энергию E_α налетающей α-частицы:

$$E_\alpha = \frac{m_0}{m_0 - m_\alpha} \Delta E = \frac{17}{13} \Delta E = \frac{119}{117} E_\text{п}.$$

Эта энергия больше пороговой на величину

$$E_\alpha - E_\text{п} = \frac{2}{117} E_\text{п} = 25 \text{ кэВ}.$$

Упражнения

1. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: ${}^2\text{D} + {}^3\text{T} \rightarrow {}^4\text{He} + n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит с собой нейтрон? Кинетической энергией дейтерия и трития до реакции, по сравнению с выделившейся энергией, можно пренебречь.

2. При слиянии дейтрона с ядром лития происходит ядерная реакция ${}^6\text{Li} + {}^2\text{D} \rightarrow {}^7\text{Be} + n$, в которой выделяется энергия $\Delta E = 3{,}37$ МэВ. Считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой, найти распределение энергии между продуктами реакции.

3. Альфа-частица, имеющая скорость $v_\alpha = 1000$ м/с, налетает на атом углерода, который двигался до соударения в том же направлении, но со скоростью вдвое меньшей. С какой скоростью перемещается центр масс соударяющихся атомов?

4. В ядерной реакции ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$ протоны налетают на покоящиеся ядра лития. Если энергия налетающих протонов равна $E_p = 1{,}92$ МэВ, нейтроны, образующиеся в реакции, покоятся. На сколько можно уменьшить энергию налетающих протонов, чтобы реакция вообще могла идти?

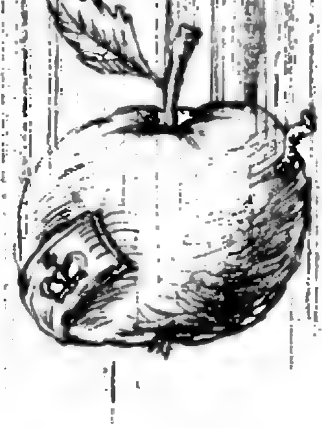
Задачи наших читателей

Расположим все натуральные числа в таблицу из 9 столбцов

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Возьмем любое число из таблицы, возведем его в квадрат, сложим цифры квадрата, сумму снова возведем в квадрат и сложим цифры квадрата и т. д. Докажите, что последовательность результатов этих операций с некоторого момента становится периодической, причем вид этой периодической последовательности один и тот же для всех чисел одного столбца. Точнее, в 1-м и 8-м столбцах появляется последовательность 1, 1, 1, ..., в 3-м, 6-м и 9-м — 9, 81, 9, 81, ..., в остальных — 13, 169, 16, 256, 13, 169, ... (на четных местах стоят квадраты, на нечетных — суммы их цифр).

О. Рогинский, Н. Рогинский



Яблоко со всех сторон

«Сатэрдэй Ивнинг Ньюс», 4 июля 1666 года.

«Происшествия. Сегодня в Королевский госпиталь доставлен некто Ньютон с явными признаками сотрясения мозга. Больной бредит яблоком и каким-то полем, покрытым гравитацией. Применяются меры интенсивного лечения».

• • •

Заместителю Старшего спикера Британского Королевского общества по административно - хозяйственной работе Анатолию Бердсу.

Глубокоуважаемый сэр!

Сим имею известить Вас на предмет недопустимого поведения сотрудника Агрономического отдела БКО Ньютона И., занимающегося гравитацией поля. Для покупки гравия ему было выдано 10 фунтов стерлингов наличными. Однако Ньютон И. преступно разбазарил оную сумму, из коей 1 ф. ст. был уплачен за право входа в Королевскую теплицу, 4 фунта — за чашку кофе, а 5 — за вчерашний номер «Таймс». После этого Ньютон И. улегся на газоне под Королевской яблоней, где, занимаясь чтением газеты, и распил упомянутую чашку кофе. В этот отрезок времени он также инспирировал падение себе на голову яблока, хотя оно являлось неприкосновенной частной собственностью, после чего с телесными повреждениями головы был доставлен в Королевский госпиталь.

В результате гравитация поля не произведена, и Ее Величества агрономический план не выполнен.

Руководствуясь вышеизложенным, прошу Вас, если Ньютон И., не дай Бог, останется жив, применить к нему меры предосторожности.

Преданный Вам Огастеус Р. Финк, писарь, 5 июля 1666 года.

Журнал «Лайф энд сайенс», 7 июля 1666 года. Из статьи И. Ньютона.

«...Исходя из формул (115—1) и (115—2), а также учитывая систему уравнений (158—4—77), после десяти страниц тривиальных вычислений приходим к очевидному математическому выводу — все массы тяготеют.

Пока что мой основной результат (211—7) представляется лишь чисто арифметическим курьезом, не имеющим широкого применения в натуральном хозяйстве».

Молодежная аристократическая газета «Лондонс Дэнди», 10 июля 1666 года.

«Наш спец. корр. сэр Джон Арчибалд взял интервью у молодого лондонского ученого И. Ньютона.

Под сенью развесистой яблони как-то само собой думается о судьбах науки, о той неумолимости, с которой время приближает нас к будущему.

— Скажи, Исаак, — говорю я, набравшись духу, — а как это пришло?

— Я много трудился, — скромно отвечает молодой мудрец, огненными глазами пронзая нежную зеленую кожуру пролетающих мимо плодов и видя недосягаемые горизонты науки завтрашнего дня.

— А чем ты занят сейчас? — спрашиваю я, замирая от любопытства.

— Пишу новую книгу «Бином меня», — отвечает он мечтательно.

И я ухожу, сопровождаемый теплыми напутственными словами моего нового друга, уверенный, что будущее Британской науки в надежных руках».

Журнал «Сайентист», 10 августа 1666 года. Из статьи Президента Парижской Академии мессира Ж. де ла Гунно.

«...Конечно, гипотеза Ньютона представляется непосвященному небезынтересной, тем более что сходные идеи высказывались ранее нашим великим соотечественником Декартом. Однако славные времена Аристотеля, Птолемея, Коперника и других гениальных одиночек, к сожалению, давно миновали. Сейчас наука стала сложным, ответственным делом, доступным лишь крупным квалифицированным коллективам.»

(Из газеты МФТИ «За науку»)

Конденсация света в вещество

1. Выберем систему отсчета, связанную с центром масс пары электрон-позитрон. В этой системе суммарный импульс равен нулю. Согласно закону сохранения импульса, такой же импульс должен был бы быть и у одного родившегося фотона, что невозможно.

2. По закону сохранения энергии энергия двух γ-квантов равна энергии покоя пары электрон-позитрон:

$$2h\nu_\gamma = 2m_e c^2,$$

или

$$E_\gamma = h\nu_\gamma = m_e c^2 \approx 0{,}51 \text{ МэВ}.$$

Энергия кванта видимого зеленого света

$$E = h\nu = hc/\lambda \approx 2{,}3 \text{ эВ}.$$

Таким образом,

$$E_\gamma / E \approx 2{,}2 \cdot 10^5.$$

3. Воспользуемся формулами для преобразования полей ($E_\parallel = E'_\parallel$, $E_\perp = \gamma_0 E'_\perp$, где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$) и учтем, что при переходе из системы K' в систему K продольные расстояния сокращаются (в γ_0 раз), а поперечные остаются без изменения. Тогда для поперечного поля в системе K получим

$$E_\perp(b) = \frac{E'_\perp(b)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma_0 E_{\text{кул}}$$

— поперечное поле $E_\perp$ движущейся релятивистской частицы усиливается по сравнению с кулоновским полем $E_{\text{кул}} = q/(4\pi\varepsilon_0 b^2)$ в γ_0 раз.

Для продольного поля в той же системе можно записать

$$E_\parallel(a) = E'_\parallel\left(\frac{a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{q(1 - v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = E_{\text{кул}}/\gamma_0^2$$

— продольное поле движущейся частицы ослабляется по сравнению с кулоновским в γ_0^2 раз.

Законы сохранения при ядерных превращениях

1. $\dfrac{E_n}{\Delta E} = \dfrac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_n} = 0{,}8.$

2. $E_n = \Delta E \dfrac{m_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}} + m_n} \approx 2{,}95$ МэВ;

$E_{\text{Be}} = \Delta E - E_n \approx 0{,}42$ МэВ.

3. $v = v_\alpha \dfrac{m_\alpha + m_C/2}{m_\alpha + m_C} = 625$ м/с.

4. $E_p - E'_p = E_p \left(\dfrac{m_p}{m_{\text{Be}}}\right)^2 \approx 39$ кэВ.

Что такое волна?
(см. «Квант» № 6)

2. $\Delta t = T/2$; $\Delta\varphi = \pi$.

3. Для оценки будем считать, что соударение шариков происходит в течение промежутка времени τ, за который волна деформации (звуковая волна) пройдет расстояние, равное диаметру шарика:

$$\tau \sim d/v \sim d\sqrt{\varrho/E} \sim 10^{-6} \text{ с}.$$

4. При резкой остановке ротора возникает волна деформации, которая распространяется по бетонному полу и достигает катушки с исследуемым образцом. Для того чтобы эта волна не мешала исследованиям, она должна дойти до образца к тому моменту, когда опыт уже закончится. (Поскольку возникающее электромагнитное поле распространяется со скоростью света, которая существенно больше скорости распространения волны деформации, можно считать, что магнитное поле создается в образце мгновенно.) Следовательно, минимальное расстояние между генератором и катушкой с образцом равно $l = v\Delta t \approx 50$ м (здесь $v \approx 5000$ м/с — скорость звука в бетоне).

5. Обозначим через k жесткость каждой пружинки, через M — массу атома кислорода и через m — массу атома углерода ($m/M = 12/16$). В случае а) атомы кислорода колеблются синхронно около неподвижного атома углерода. Поэтому их частота

$$\omega_a = \sqrt{k/M}.$$

При колебаниях типа б) на атом углерода действуют две силы, одинаковые по модулю и направленные в одну и ту же сторону. Если шарик — атом углерода — разбить на две равные части, то они будут колебаться одинаково, то есть в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Таким образом, задача сводится к определению частоты колебаний соединенных пружинкой шариков массой M и $m/2$. Такая система совершает колебания около неподвижного центра масс. Он находится на расстоянии $l' = \dfrac{m}{m + 2M}\, l$ от шарика массой M (l — длина пружинки в недеформированном состоянии), поэтому можно считать, что атом кислорода (шарик массой M) скреплен с центром масс пружинкой длиной l'. Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки:

$$k' = kl/l' = k(m + 2M)/m,$$

поэтому частота колебаний шарика массой M на пружинке жесткостью k' равна

$$\omega_б = \sqrt{\frac{k'}{M}} = \sqrt{\frac{k(m + 2M)}{mM}}.$$

Тогда окончательно отношение частот равно

$$\frac{\omega_a}{\omega_б} = \sqrt{\frac{m}{m + 2M}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Кантование кубика
(см. «Квант» № 6)

1. См. рис. 1.

2. Кубик можно перевести из первого положения во второе двукратным кантованием так, чтобы правая и левая боковые грани

остались в своих плоскостях. Единственной невидимой гранью будет левая. Только она может содержать четверку.

3. Возможный обход показан на рисунке 2.

4. Так как «крутые» повороты типа $MNPQ$ запрещены условием задачи, наш кубик может обойти углы сетки только по ломаным вида ABC (рис. 3). Но четыре таких поворота в сетке 5×5 можно выполнить только при движении по замкнутой ломаной, которая не может содержать центрального квадрата сетки. Задача решения не имеет.

5. Может (рис. 3).

6. Решение задачи для сетки 5×5 представлено на рисунке 4.

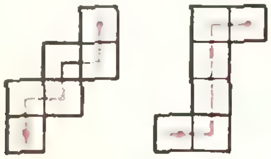


Рис. 1.

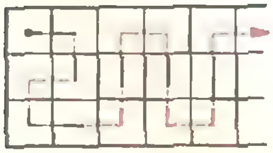


Рис. 2

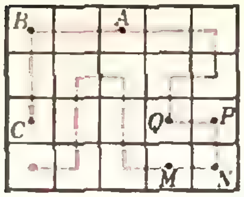
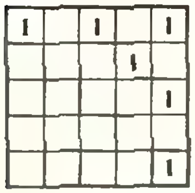


Рис. 3.



1		1		1
			1	
				1
				1

Рис. 4.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. $\overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)=3^2\cdot(a-b)$.
Поскольку a и b — цифры и $b\neq0$, эта разность будет точным квадратом тогда и только тогда, когда $a-b=1$ или $a-b=4$. Мы получаем следующие двузначные числа, обладающие нужным свойством:

$$21,\ 32,\ 43,\ 54,\ 65,\ 76,\ 87,\ 98$$

и

$$51,\ 62,\ 73,\ 84,\ 95$$

— всего 13 чисел.

Трехзначных же чисел, обладающих аналогичным свойством, нет: $abc-cbd=3^2\cdot11\cdot(a-c)$; но $a-c\neq11$, поскольку a и c — цифры. (Другое объяснение заключается в том, что 33^2 уже больше тысячи.)

2.

$$\begin{array}{rl} -\,340170 & \underline{|\,345} \\ \underline{3105} & |\,986 \\ -\,2967 & \\ \underline{2760} & \\ -\,2070 & \\ \underline{2070} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -\,385024 & \underline{|\,376} \\ \underline{376} & |\,1024 \\ -\,902 & \\ \underline{752} & \\ -\,1504 & \\ \underline{1504} & \end{array}$$

3. Ответ: Иван Иванович — лысый (см. рис. 5).

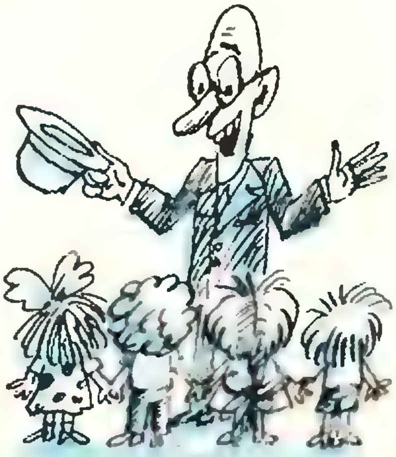


Рис. 5.

Обозначим число волос у Тани, Наташи, Пети, Васи и Ивана Ивановича через Т, Н, П, В и ИИ. Тогда

$$\begin{gathered}(\text{Т}+\text{Н})-(\text{П}+\text{В})=40,\\ (\text{Т}+\text{П})-(\text{Н}+\text{В})=20,\\ \text{ИИ}+\text{Т}+3\text{П}=\text{В}+3\text{Н}.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\text{ИИ}&=\text{В}+3\text{Н}-\text{Т}-3\text{П}=(\text{Н}+\text{Т})-(\text{П}+\text{В})-\\ &-2[(\text{Т}+\text{П})-(\text{Н}+\text{В})]=40-2\cdot20=0.\end{aligned}$$

4. Ответ: девять котят (см. рис. 6).

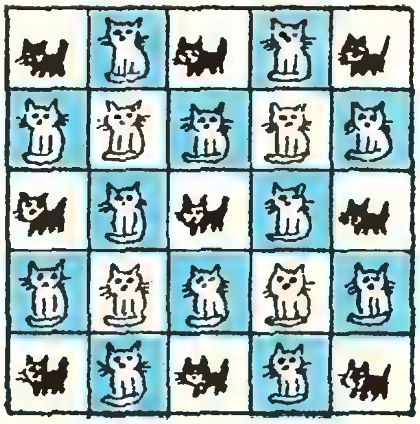


Рис. 6.

Если в центральной клетке квадрата сидит котенок, то в восьми соседних с ней клетках должны сидеть кошки. Легко убедиться, что в оставшихся клетках можно расположить не более восьми котят.

Если же в центральной клетке сидит кошка, а в одной из соседних с ней клеток сидит котенок, то его должны окружать восемь кошек. Нетрудно убедиться, что в этом случае в оставшихся клетках можно разместить не более семи котят.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

Задание 3 (С. Жигис, 1930 г.). **1. Крf3.** Король направляется к слабой пешке h7, попутно посматривая на поле e6. **1...Крc7 2. Крg4! Крd7.** Черные срывают планы неприятельского короля забрать пешку h7 (3. Крh5 Крe6 4. Крh6 Крf5 с простым выигрышем). **3. Крf5!** Белые меняют свой план и не пускают черного короля на поле e6. **3...Крe8** (3...Крd8 4. Крe6 Крe8 5. d4! приводит к основному варианту) **4. Крe6 Крf8 5. d3!** (Выигрыш темпа, проигрывает немедленное 5. d4) **5...Крe8 6. d4 Крf8 7. d5 Крe8 8. g6! hg. Пат.**

Задание 4 (У. Венолайнен, 1968 г.). Кажется, что спасения нет. Однако король и слон белых совершают чудо. **1. Крf3 Крd2** (1...e2 2. Сc3+ Крd1 3. Кр:g3 e1Ф 4. С:e1 Кр:e1 5. Крg4; 1...Крf1 2. Кр:g3 e2 3. Сc3 e1Ф 4. С:e1 Кр:e1 5. Крg4 с ничьей в обоих случаях) **2. Сf8!!** Парадоксальный ход. **2...g4+ 3. Крg2! e2 4. С:e7 Крc3 5. Сd8!** (нельзя 5. Сd6? из-за 5...e1Л! 6. Кр:g3 Лe6 с выигрышем, но не 5...e1Ф? 6. Сb4+ Кр:b4 пат) **5...Крb4 6. Сc7!** (6. Сb6? e1Л!) **6...e1Ф** (теперь и превращение в ладью приводит к ничьей — 6...e1Л 7. Кр:g3 Лg1+ 8. Крh4 и 9. Сg3) **7. Сa5+ Кр:a5. Пат.**

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, М. Златковский, Г. Красиков, П. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова, Е. Морозова

Корректоры Е. Сидоркина, Н. Сорокина

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматгиз», «Квант», тел 234-08-21
Сдано в набор 19.05.82 Подписано в печать 21.06.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л 6,73 Т-13514.
Тираж 175 032 экз. Цена 40 коп. Заказ 1198.

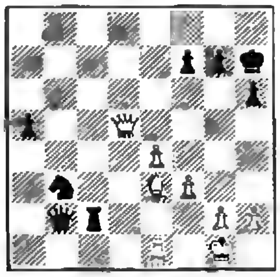
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ЛИНИЙ

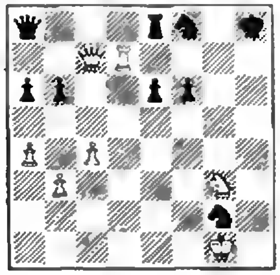
Сегодня мы рассмотрим несколько практических примеров использования геометрических мотивов на шахматной доске.

Двойной удар (вилка) — старинный мотив, знакомый каждому любителю шахмат, — также содержит геометрический элемент.



Ф. Олафссон — А. Карпов (XXIV Шахматная олимпиада, 1980 г.)

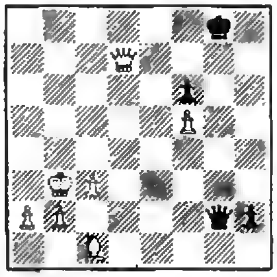
34. Ф:f7. Белые в цейтноте неосторожно берут пешку. Правильно было 34. Cf2, и на 34...Л:f2 следует 35. Фf5+ с вечным шахом. **34...Л:g2+ 35. Kpf1 Лg6 36. Лe2** (36. Cf2 Kd2+) **36...Фb1+ 37. Лe1.** Все идет к повторению ходов, но неожиданно в ход вступает геометрия. **37...Фa2!** Замаскированный двойной удар. По горизонтали грозит 38...Фg2×, а по диагонали на 38. Лe2 решает 38...Kd2+ и 39...Ф:f7. Олафссон счел геометрическую теорему доказанной и сдался.



А. Карпов — И. Чом (Бад—Лаутерберг, 1977 г.)

У черных лишний конь и пешка, неприятельская ладья под боем — дела, судя по всему, не так плохи. Однако бороться с законами геометрии трудно. **50. Kf5! Черные сдались.** Здесь ферзь опять действует сразу по двум линиям, и черные беспомощны. После 50...K:d7 белый ферзь движется по освободившейся диагонали — 51. Фh2+! (этот шах решает и в случае 50...ef) 51...Kpg8 52. **Фg3+ Kpf7 53. Фg7×.** Если же угроза по диагонали b8—h2 прерывается — 50...Фb8, то ферзь проявляет себя по седьмой горизонтали: 51. Лh7+! K:h7 52. **Фg7×.**

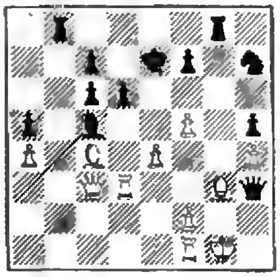
Теперь приведем три ярких примера на темы перекрытия, связки и отвлечения.



В. Симагин — Д. Бронштейн (Москва, 1947 г.)

Сейчас на доске появится второй черный ферзь, и белым, как будто, придется ограничиться вечным шахом.

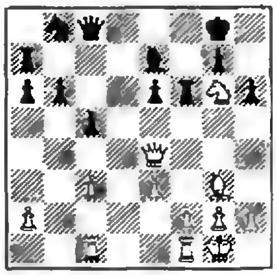
1. **Cg5!!** Вот так перекрытие! Слона нельзя брать ни пешкой — 1...fg 2. f6 с матом, ни ферзем — 1...Ф:g5 2. Фe8+, 3. Фe7+ и 4. Ф:h2 с решающим материальным перевесом. После **1...h1Ф 2. Фe8+ Kpg7 3. Фg6+ Kpf8 4. Ф:f6+ Kpg8 5. Фd8+ Kpg7 6. Фe7+ Kpg8 7. Фe8+** черные сдались, ввиду неизбежного мата — 7...Kpg7 (7...Kph7 8. Фg6+ Kph8 9. Cf6×) 8. f6+ Kph7 9. Фf7+ Kph8 10. Фg7×.



Гендель — Сушкевич, 1956 г.

1...Л:g3+! 2. Л:g3 Лg8!! Двойная связка! Белая ладья g3 связана сразу и по вертикали (нет хода 3. Л:h3), и по горизонтали (после 3. Л:g8 теряется ферзь). В то же время грозит Л:g3+. **Белые сдались.**

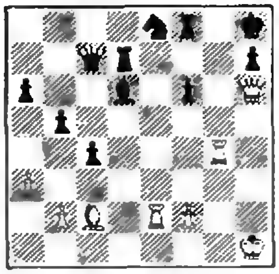
Длинные и неожиданные ходы ферзя всегда производят впечатление. Безусловно немалую роль здесь играет геометрический элемент — эффектное перемещение фигуры в пространстве. И чем длиннее путь, который проходит ферзь, тем сильнее эстетическое воздействие на зрителя.



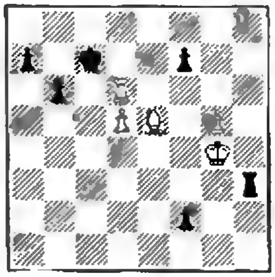
Панчик — Шураде, 1978 г.

1. Фa8!! Прекрасное воплощение темы отвлечения. Партия сразу кончилась, потому что черные остаются без фигуры — как после 1...Л:a8 2. K:e7+ и 3. K:c8, так и после 1...Лb7 2. K:e7+ Л:e7 3. Ф:b8.

Конкурсные задания

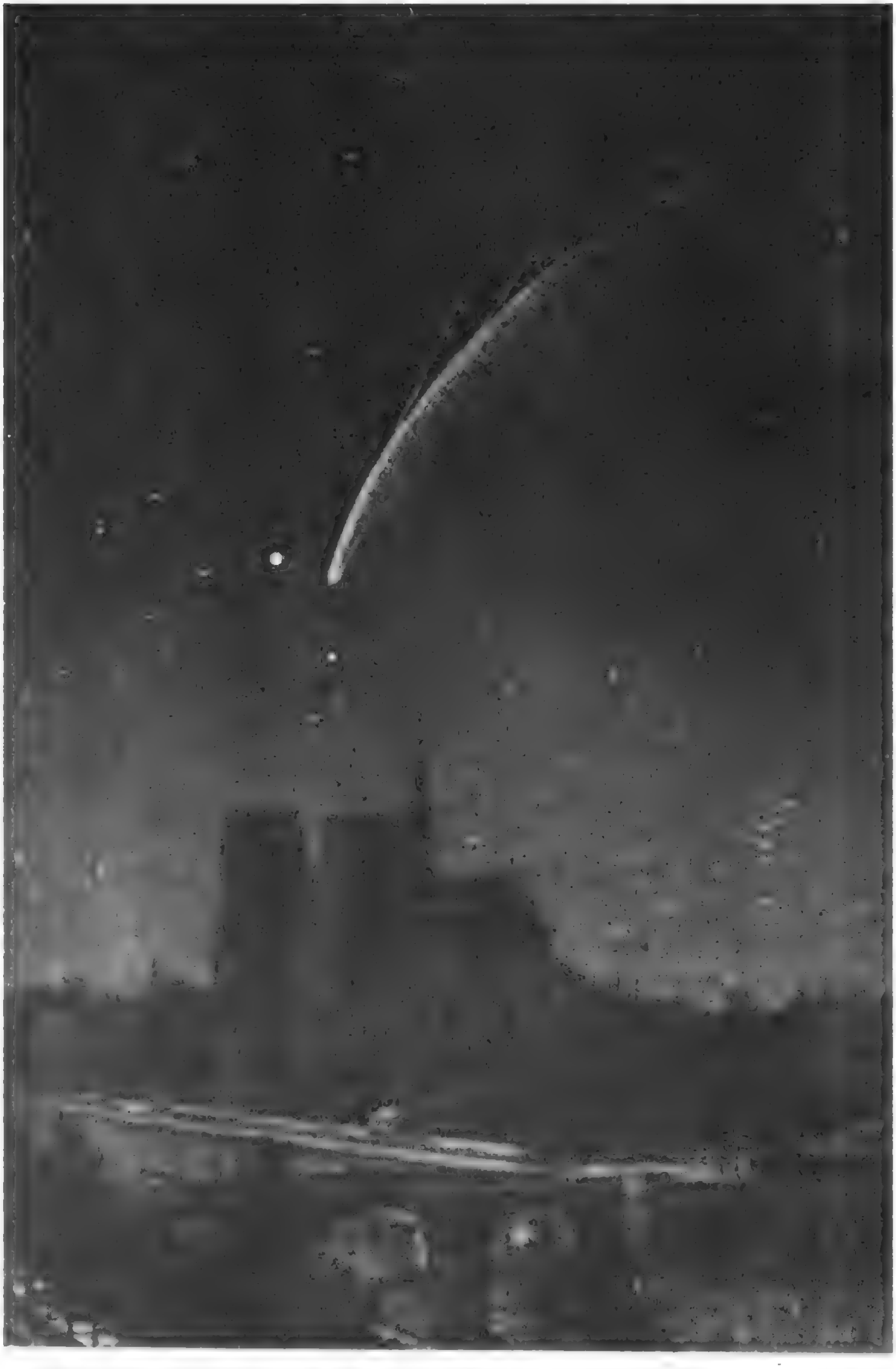


13. Белые начинают и выигрывают.



14. Ход черных. В чью пользу позиция?

Срок отправки решений — 25 сентября 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14»).

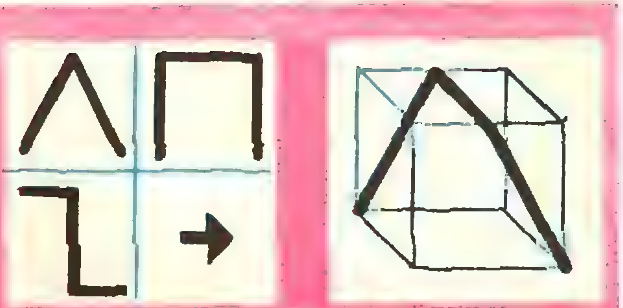


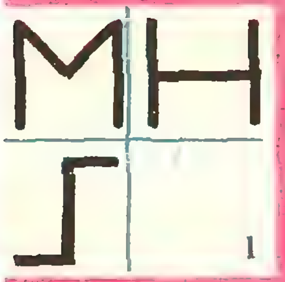
Здесь мы воспроизводим литографию с рисунка, сделанного в 1858 году в Париже во время прохождения кометы Донати (рисунок неизвестного художника). Кометам посвящена статья Л. Марочника в этом номере журнала.

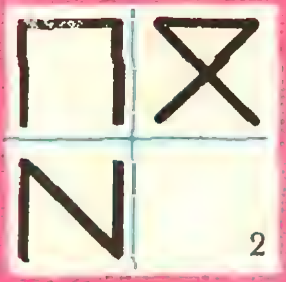
Цена 40 коп.

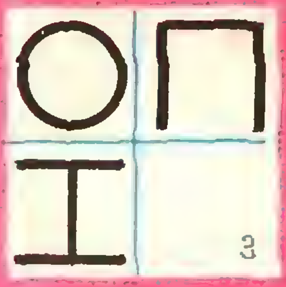
Индекс 70465

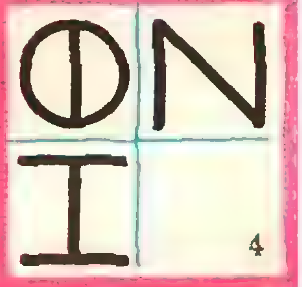
На рисунках даны три проекции моделей, сделанных из куска толстой проволоки. Эти модели не имеют накладывающихся (двойных) участков и узлов. По заданным проекциям постройте наглядные изображения фигур (все эти фигуры вписываются в куб). Справа приведен пример решения задачи.

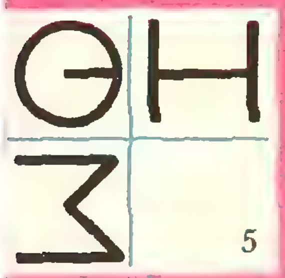


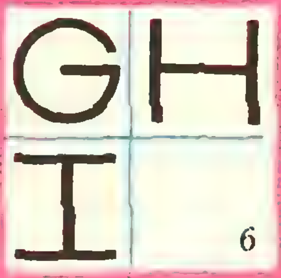

1

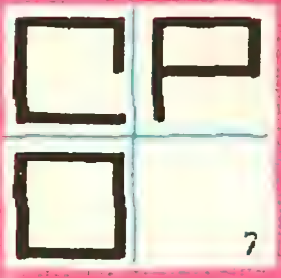

2

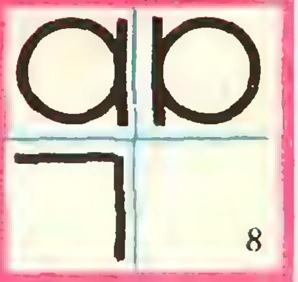

3

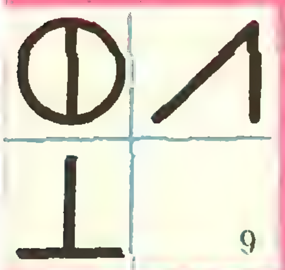

4

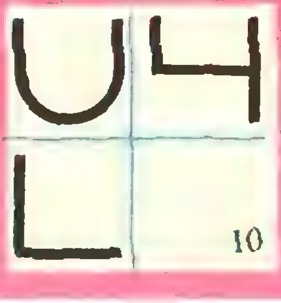

5

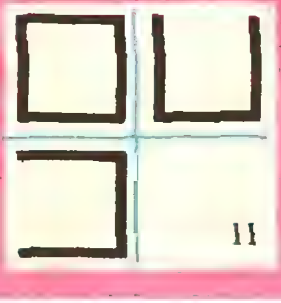

6

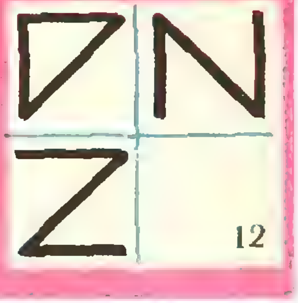

7


8


9


10


11


12

НОМЕР
8

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

КВАНТ 8
1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

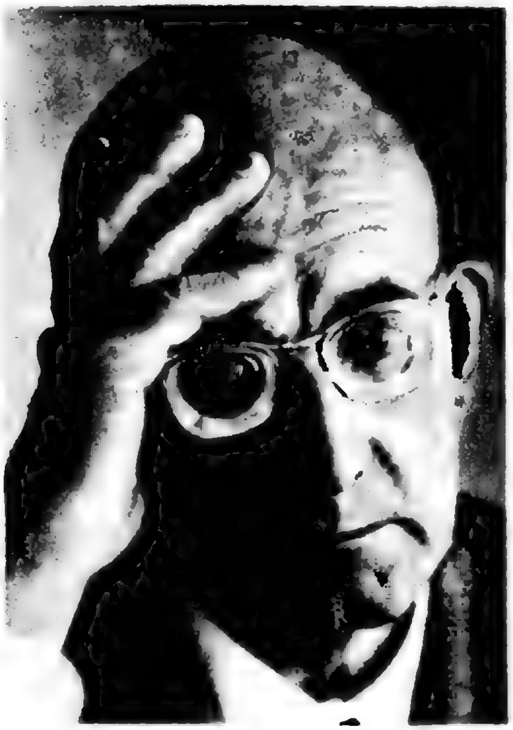
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

П. Александров. Математика и человеческая культура	2	*P. Alexandrov.* Mathematics and human culture
М. Франк-Каменецкий. Самая главная молекула	4	*M. Frank-Kamenetski.* The main molecula
М. Шубин. Топология и ... рельеф местности	10	*M. Shubin.* Topology and ... the relief of terrains
К. Кикоин. Что такое потенциальная яма	16	*K. Kikoin.* What is a potential hole
В. Дубровский. Математика волшебного кубика	22	*V. Dubrovski.* Mathematics of the magic cube
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
В. Майер. Свет, воздух и вода	28	*V. Mayer.* Light, air and water
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М756—М760; Ф768—Ф772	30	Problems M756—M760; P768—P772
Решения задач М721—М730; Ф733—Ф742	34	Solutions M721—M730; P733—P742
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	49	Problems
Н. Родина. Архимедова сила и киты	50	*N. Rodina.* Archimedean force and whales
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
М. Маринчук. Квадратное уравнение в задачах по физике	54	*M. Marinchuk.* Quadratic equations in physical problems
П. Горнуша. В чем разница?	59	*P. Gornusha.* What is the difference?
А. Смоляков. Почему так?	59	*A. Smoliakov.* Why so?
Искусство программирования		**The art of programming**
Ю. Первин. Однажды вечером в семье программиста	60	*Yu. Pervin.* One evening in a programmer's family
Ответы, указания, решения	63	**Answers, hints, solutions**
Наша обложка *(21)*		**Our cover page** *(21)*
Смесь ***(9, 15, 53)***		**Miscellaneous** ***(9, 15, 53)***
Шахматная страничка		**The chess page**
Жертва ферзя в партиях чемпиона мира *(3-я с. обложки)*		Queen sacrifices in the world champion's games *(3rd cover page)*

На первой странице обложки изображена пространственная модель молекулы ДНК. О том, как было выяснено, что именно ДНК является главной молекулой живой природы, вы можете прочитать в статье М. Франк-Каменецкого.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1982



П. Александров

Математика и человеческая культура

Математика имеет репутацию самой отвлеченной науки. В то же время никто не смеет считать ее бесполезной наукой, наоборот — эта самая нужная наука. И вот получается, казалось бы, противоречивое положение: с одной стороны — самая отвлеченная и оторванная от жизни наука, а с другой стороны — самая нужная наука. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что математика имеет два аспекта: теоретический, где она рассуждает о самых общих и далеких от жизни вещах, и прикладной, где она касается самых практически необходимых вещей.

Я всю свою жизнь был представителем теоретической (или, как ее еще называют, чистой) математики и никогда не имел дело с ее приложениями. В то же время я не считаю, что занимался бесполезным делом.

Один из моих учеников, ныне академик, Андрей Николаевич Тихонов начал свою научную деятельность в самой отвлеченной области чистой математики (так называемой абстрактной топологии) и явился одним из создателей теории бикомпактных пространств, обогатив математику одной из самых знаменитых конструкций, известной под названием топологического (или тихоновского) произведения пространств. А в настоящее время Андрей Николаевич занимается вычислительной математикой, то есть тем, что наиболее тесно связано с потребностями практики.

Даже из этого примера вы видите, как трудно и рискованно противопоставлять в математике теорию и практику.

Как же влияет математика на человеческую культуру? Это влияние так же многосторонне, как и сама человеческая культура. Это связано с тем, что человеческая культура представляет собой не только абстрактные знания, не только искусство, не только художественную литературу. В сокровищницу человеческой культуры входит и математика, в частности — прикладная математика. Трудно себе представить культуру нашего времени, в которой не существовало бы разработанной техники математических вычислений. Эта тех-

---

Академик Павел Сергеевич Александров — Герой Социалистического Труда, лауреат Государственной премии СССР, заведующий кафедрой высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ.

ника математических вычислений входит, например, в современную медицину и в языкознание в полном объеме. Как же можно ее не включать в человеческую культуру!

Мне хочется остановиться на следующем вопросе: как математика действует на развитие человеческой личности? Вопрос этот уместен, потому что математика является учебным предметом, которому придается чрезвычайно большое значение на всех ступенях общего образования. И в алгебре, и в геометрии школьники обучаются тому, что я мог бы назвать техникой человеческого мышления. Ну, а можно сказать просто: мышлению. Потому что нигде, может быть, человеческое мышление не выступает с такой силой и с такой яркостью, как в математике. Это во все времена признавалось всеми крупными мыслителями. Недаром Платон на входе в свою Академию, которая должна была объединять все формы человеческой культуры, человеческого творчества, написал: «Пусть не войдет сюда никто, не знающий геометрии». Платон считал, что геометрия — основная ступень на пути к философскому мышлению. Сейчас мы не говорим о геометрии с такой категоричностью. Вероятно, существует много различных путей, вводящих в храм человеческой мысли. Но, что математике несомненно принадлежит одно из важнейших мест в развитии человеческого ума и человеческого творчества, представляется совершенно бесспорным.

Но это лишь одна сторона влияния математики на формирование человеческой личности. Имеется и другая сторона.

Считается, что математические утверждения никогда не были и не бывают дискуссионными. В этом состоит совершенно особое положение математики в ряду других теоретических наук. Никому не приходит в голову спросить, верна ли такая-то математическая теорема.

Я оговорюсь, что самим-то математикам это приходит в голову, потому что понятие математической истины не так просто и не так однозначно, как мы привыкли это считать, опираясь на школьную математику. Когда мы приходим к высшим главам математики, мы видим, что там тоже все начинает колебаться, и там тоже возникает вопрос о спорности тех или иных истин, кажущихся совершенно бесспорными в других областях человеческого знания. Например, существует закон исключенного третьего: *из утверждений А и* (не *А*) *верно одно и только одно: либо утверждение А, либо его отрицание; ничего третьего не дано.* Так вот в математике и этот, казалось бы основной, устой всякого познания подвергается сомнению. В математике много можно говорить о законе исключенного третьего, и вопрос о применимости этого закона — одна из больших математических проблем.

Так что вы видите: все это гораздо сложнее и, я надеюсь, интереснее, чем кажется с первого взгляда. В математике много бесспорного, много и спорного. Другими словами, математика не является, так сказать, законченной формой человеческого мышления. Это — человеческая мысль, находящаяся еще в стадии исканий, причем исканий, относящихся к самым принципиальным, к самым важным и к самым трудным сторонам мыслительной деятельности.

М. Франк-Каменецкий

Самая главная молекула

> *Потрясающие вещи происходят в биологии. Мне кажется, Джим Уотсон сделал открытие, сравнимое с тем, что сделал Резерфорд в 1911 году*
>
> *Макс Дельбрюк*
>
> (из письма Нильсу Бору от 14 апреля 1953 года)

Из всего, что нас окружает, наиболее необъяснимой кажется жизнь. Мы привыкли, что она всегда вокруг нас и в нас самих, и потеряли способность удивляться. Но пойдите в лес, взгляните на деревья, траву, цветы, на птиц и муравьев так, будто видите их впервые, и вас охватит чувство беспомощности перед лицом великой тайны жизни. Неужели во всем этом есть нечто общее, нечто такое, что объединяет все живые существа, будь то человек или невидимый глазом микроб? Чем определяется преемственность жизни, ее возрождение вновь и вновь из поколения в поколение? Эти вопросы стары как мир, но только нам, живущим во второй половине XX века, посчастливилось впервые узнать ответы.

Революционные преобразования, произошедшие в физике в первой трети нашего века, оказали глубокое влияние на другие области науки, в первую очередь — на химию и биологию. Одной из главных вех на пути создания новой физики было открытие Резерфордом в 1911 году атомного ядра. Само существование атома Резерфорда находилось в вопиющем противоречии с классической теорией. Начался период создания новой физики, известной теперь под названием квантовой механики.

Эта новая теория, разработка которой была начата Планком, Эйнштейном и Бором, нашла свою окончательную и замечательно ясную формулировку в знаменитом уравнении Шредингера. Это уравнение не только позволило физикам решать все «головоломки», которые накопились в области атомных спектров, но, будучи дополнено принципом Паули, поставило на прочный теоретический фундамент всю химию. Наконец-то стал понятен смысл атомного номера в таблице Менделеева, ясен истинный смысл валентности, выяснена природа химической связи.

У физиков появилось ощущение всемогущества. И их взоры обратились к святая святых — к самой жизни. Не поможет ли новая физика разгадать тайну жизни? Или, может быть, наоборот — удастся доказать, что жизнь противоречит квантовой механике, и тогда придется «изобретать» какие-то новые законы. Это было бы особенно интересно.

...В августе 1932 года в Копенгагене проходил Международный конгресс по светотерапии. На одном из заседаний выступил Нильс Бор. Его лекция называлась «Свет и жизнь». В ней Бор поделился своими мыслями о проблеме жизни в связи с последними достижениями квантовой механики. На лекции присутствовал молодой немецкий физик-теоретик, стажер института Бора в Копенгагене Макс Дельбрюк. До сих пор он никогда не интересовался биологией. Он занимался квантовой химией, потом ядерной физикой, но не мог найти себе занятие по вкусу. Лекция Бора все определила: Дельбрюк твердо решил, что отныне он посвятит себя биологии.

Вернувшись в Берлин, Дельбрюк стал искать контактов с биологами. Ему повезло. В это время в Берлине работал известный генетик Николай Владимирович Тимофеев-Ресовский.

Продолжавшиеся всего несколько лет дружба и сотрудничество физика Дельбрюка и генетика Тимофеева-

Ресовского явились тем началом, из которого двадцать лет спустя родилась разгадка тайны наследственности.

Дельбрюк стал собирать у себя дома друзей-физиков и приглашать Тимофеева-Ресовского, который часами обучал их своей науке — генетике. Рассказывая, Тимофеев-Ресовский бегал, по своему обыкновению, из угла в угол, словно тигр в клетке. Он говорил о математически строгих законах Менделя, управляющих наследственностью. О генах и о замечательных работах Моргана, установившего закономерности расположения генов в хромосомах. О плодовой мушке дрозофиле и о мутациях, которые можно вызвать у нее рентгеновским излучением. Этим последним вопросом он как раз занимался вместе с физиком-экспериментатором Циммером.

Дельбрюка крайне заинтересовала их работа. Вообще в генетике было столько созвучного квантовой механике! Ведь квантовая механика принесла в физику дискретность, скачкообразность. Она также заставила серьезно относиться к случайности. И вот оказывается, что биологи тоже обнаружили дискретную неделимую частицу наследственности — ген — которая может случайным образом переходить из одного состояния в другое (этот переход называют мутацией).

Что же такое ген? Как он устроен? Об этом часто спорили на вечерах у Дельбрюка. Тимофеев-Ресовский говорил, что вообще-то этот вопрос мало интересует генетиков. Для них ген — то же, что для физиков — электрон. Ген — элементарная частица наследственности.

— Что вы ответите, если я спрошу, из чего состоит электрон? — сказал однажды Тимофеев-Ресовский. Все рассмеялись.

— Вот так же смеются генетики, когда их спрашивают, из чего состоит ген. Вопрос о том, что такое ген, выходит за рамки генетики, и его бессмысленно адресовать генетикам, — продолжал он. — Вы, физики, должны искать ответ на него.

— И все-таки, — настаивал Дельбрюк, — неужели нет никаких гипотез, пусть чисто умозрительных?

— Есть, — ответил Тимофеев-Ресовский, немного подумав. — Мой учитель Николай Константинович Кольцов считает, что ген — это полимерная молекула, скорее всего — молекула белка.

— Ну и что это объясняет? — тощий, длинный Дельбрюк прямо-таки кричал на широкоплечего, могучего Тимофеева-Ресовского. — Оттого, что мы назовем ген белком, мы поймем, как гены удваиваются? Ведь главная-то загадка именно в этом! Не ты ли рассказывал нам, как характерная форма губы переходила из поколения в поколение в роду Габсбургов? Какой механизм обеспечивает столь точное копирование генов в течение веков? Разве химия дает нам такие примеры? Во всяком случае, я никогда ничего подобного не слышал. Нет, тут нужна совершенно иная идея. Тут действительно таится загадка. Великая загадка. Возможно, новый закон природы. Сейчас главный вопрос — как к этому подступиться экспериментально.

Великая тайна, скрывавшаяся за коротким словом «ген», не давала покоя Дельбрюку. Как происходит удвоение, или редупликация, генов при делении клеток?

В особенно сильное возбуждение пришел Дельбрюк, когда узнал о существовании бактериофагов. Эти удивительные частицы, которых и живыми-то не назовешь, вне клетки ведут себя просто как большие молекулы — из них даже выращивают кристаллы. Но если такая частица попадает в клетку, то минут через двадцать клеточная оболочка лопается, и из нее вываливается сотня точных копий исходной частицы. «Вот о́н — ключ к разгадке, — думал Дельбрюк. — Это очень простое явление, гораздо более простое, чем деление целой клетки. Здесь нетрудно будет разобраться. В самом деле, надо посмотреть, как внешние условия будут влиять на воспроизводство вирусных частиц. Надо провести эксперименты при разных температурах, в разных средах, с разными вирусами».

Так физик-теоретик превратился в биолога-экспериментатора. Но мышление — мышление осталось чисто физическим. А главное — цель. Во всем мире не было другого человека, который занимался бы вирусами с единственной целью — узнать, как устроен ген.

... В 1937 году Дельбрюка приглашают работать в США, где он мог бы целиком посвятить себя проблеме редупликации бактериофагов. Он спешит воспользоваться этим предложением, так как жизнь в нацистской Германии становится невыносимой.

В Америке Дельбрюк собрал вокруг себя горстку энтузиастов, заразившихся его идеей изучения природы наследственности на бактериофагах. Так возникла «фаговая группа».

Шли годы, и участники фаговой группы все больше и больше узнавали о том, как протекает фаговая инфекция, как процесс воспроизведения фагового потомства зависит от внешних условий и т. д. Было проведено много замечательных исследований, в особенности в области изучения мутаций у бактерий и бактериофагов. Но все это, казалось, даже не приближало к решению основной проблемы.

Как часто бывает в науке, люди, объединившиеся для решения большой и важной задачи, постепенно занялись скрупулезным изучением частных вопросов, сделались маститыми специалистами в своих конкретных областях, но перестали видеть перед собой исходные цели. Так путники видят издалека сияющие горные вершины, но затем, приближаясь к ним, попадают в лесистые предгорья, откуда этих вершин не видно. Эти леса изобилуют грибами, ягодами... Если долго бродить по предгорьям, то виденные издалека снежные вершины начинают казаться миражем. Может быть, это были лишь облака, похожие на снежные горы? Но даже если это и в самом деле были горы, зачем туда спешить? Ведь здесь, в этих нехоженных лесах, так хорошо. Чтобы люди вновь вспомнили о цели, нужен громкий голос лидера.

И такой голос прозвучал. Это был голос замечательного физика-теоретика, одного из создателей квантовой механики Эрвина Шредингера.

В 1944 году вышла в свет небольшая книга Шредингера под броским заголовком «Что такое жизнь? С точки зрения физика». Тогда она не привлекла почти никакого внимания. Шла война, и большинство тех, кому была адресована книга, с головой ушли в научно-технические проблемы, от решения которых во многом зависел исход борьбы с фашистской Германией.

Но когда война кончилась, появилось много специалистов, особенно среди физиков, которым надо было все начинать сначала, снова искать себе место в мирной науке — вот для них книжка Шредингера оказалась как нельзя кстати.

В своей книге (на русском языке она вышла впервые в 1947 году) Шредингер, прежде всего, дал очень ясное и сжатое изложение основ генетики. Для физиков это была уникальная возможность узнать, причем в блестящем и, главное, доступном изложении их прославленного коллеги, в чем же состоит суть этой загадочно привлекательной науки. Но мало того. Шредингер изложил и блестяще развил идеи Дельбрюка и Тимофеева-Ресовского о связи генетики и квантовой механики. Пока эти идеи выдвигались неизвестными физикам людьми, на них не обращали особого внимания. Но когда об этом заговорил сам Шредингер... По признанию всех, кто в последующие годы штурмовал проблему гена, именно книга Шредингера послужила для них главным толчком. Шредингер был тем, кто как бы крикнул: «Вот они, сияющие вершины, посмотрите, они совсем уже близко. Что же вы мешкаете?»

Из многих, откликнувшихся на призыв Шредингера, двоим посчастливилось первыми увидеть дали, открывавшиеся с самого верха. Это были совсем еще юный воспитанник фаговой группы Джим Уотсон и сотрудник прославленной Кавендишской лаборатории Фрэнсис Крик.

Не будем подробно прослеживать их путь к вершине — об этом рассказал сам Уотсон в своей книге «Двойная спираль». Давайте попробуем кратчайшим путем достичь этой вершины, одной из величайших, когда-либо покоренных человеком, и хоть чуть-чуть ощутим те чувства, которые испытали первопроходцы и те, кто шел за ними следом.

Будучи одержим идеей узнать, как устроен ген, и считая, что фаговой группе эта задача не по плечу, Уотсон в 1951 году едет работать в Европу. Вскоре он «осел» в Кавендишской лаборатории, так как встретил там Крика, который был настроен так же по-боевому, как и он сам. Уотсон к тому времени уже был уверен, что ключ к разгадке тайны гена — в выяснении структуры ДНК.

Дело в том, что в том же 1944 году, когда вышла книга Шредингера, в одном из медицинских журналов была опубликована статья трех американских бактериологов во главе с шестидесятилетним Эвери, которая в послевоенные годы привлекла в гораздо большей степени внимание генетиков, химиков и физиков, чем медиков. В этой скрупулезно выполненной работе было абсолютно однозначно доказано, что когда из убитой бактерии некоторые генетические признаки передаются другой, живой бактерии (это явление было к тому времени уже давно известно и называлось трансформацией), то происходит передача только молекул дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Ни белки, ни какие-то другие составляющие убитой клетки в трансформации не участвуют. Собственно, эта работа Эвери теперь считается первым доказательством того, что гены представляют собой именно молекулу ДНК. Так что же, Эвери со своими двумя помощниками, а вовсе не Уотсон и Крик, впервые побывали на вершине?!

Бесспорно, Эвери сделал очень важный шаг в нужном направлении, но до вершины он не добрался. Эйнштейн как-то сказал изумительные по своей глубине слова: «Лишь теория решает, что мы ухитряемся наблюдать». У Эвери не было в запасе ничего такого, что можно было бы назвать теорией, и он ограничился сухим изложением фактов. Это, однако, не делало проблему менее острой. Генетики оказались перед выбором — либо надо отказаться верить данным Эвери, либо признать, что веществом наследственности является ДНК, а не белок, как принято было считать. Не верить Эвери было трудно — в его работе просто не к чему было придраться. И все-таки генетики ни за что не хотели отказаться от устоявшегося представления о белковой природе гена. Опытам Эвери было дано следующее объяснение: ДНК, конечно, никаких генов не содержит и содержать не может, но она может вызывать генные мутации, то есть изменять гены, которые, как им и положено, состоят из белка. Такое объяснение спасало белковую теорию гена. Правда, действие ДНК оказалось весьма необычным: вызываемые ею мутации повторялись от опыта к опыту. И это, конечно, не могло не заинтересовать генетиков, уже давно искавших способы направленного изменения наследственности. И генетики, и все, кто занимался проблемой химической (или физической) природы наследственности, вынуждены были, наконец, признать, что на ДНК следует обратить серьезное внимание.

Дело в том, что, хотя ДНК была открыта Мишером еще в 1869 году, она оставалась «падчерицей» даже у биохимиков, не говоря уж о генетиках или физиках, занимавшихся биологией. Было общепризнано, что ДНК — это регулярный полимер, состоящий из строго повторяющихся четверок мономерных звеньев (аденинового, гуанинового, тиминового и цитозинового), и эта молекула, скорее всего, выполняет какую-то чисто структурную функцию в хромосомах, но ни в коем случае не связана с хранением и передачей генетической информации. Работа Эвери заставила усомниться в этих взглядах.

Той теорией, которая решила, что же на самом деле ухитрились наблюдать Эвери и его последователи, была модель строения молекулы ДНК, придуманная Уотсоном и Криком в 1953 году.

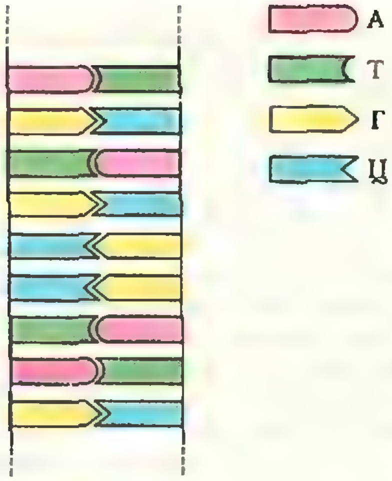


Рис. 1.

Если отбросить детали, то суть модели Уотсона — Крика предельно проста. Молекула ДНК состоит из двух полимерных цепочек. Каждая из цепочек представляет собой некоторую последовательность из звеньев четырех сортов — А (адениновое), Г (гуаниновое), Т (тиминовое) и Ц (цитозиновое). Последовательность в одной из двух цепей может быть совершенно произвольна. Тогда последовательность в противоположной, или, как говорят, комплементарной цепи однозначно задается с помощью следующего принципа комплементарности (рис. 1):

против А должно быть Т
против Т должно быть А
против Г должно быть Ц
против Ц должно быть Г

Принцип комплементарности был выведен из известного к тому времени пространственного строения мономерных звеньев ДНК. В этом Уотсон и Крик следовали общему методу построения молекулярных моделей, разработанному Лайнусом Полингом.

Если внутри каждой из взаимно комплементарных полимерных цепочек атомы скреплены очень мощными ковалентными связями, то между цепочками действуют сравнительно слабые связи, подобные тем, которые удерживают молекулы друг возле друга в кристаллах.

Самой замечательной особенностью модели Уотсона — Крика было то, что она с необыкновенным изяществом решала главную проблему — проблему редупликации гена. Ведь если мы разведем две нити, а потом на каждой нарастим, согласно принципу комплементарности, по новой нити, то мы получим из одной молекулы ДНК две, причем обе будут идентичны исходной (рис. 2).

Можно себе представить, в какое возбуждение пришел Дельбрюк, когда получил от Уотсона письмо, содержащее решение загадки удвоения гена. Он сразу и безоговорочно поверил в модель Уотсона — Крика. Под впечатлением письма Уотсона он и написал те слова, которые мы привели в качестве эпиграфа. Конечно, он тогда испытывал особую благодарность Бору за то, что тот вдохновил его в свое время заняться биологией. Нет, новых законов физики в биологии не обнаружили. Но центральную проблему, проблему физического строения гена, решить удалось.

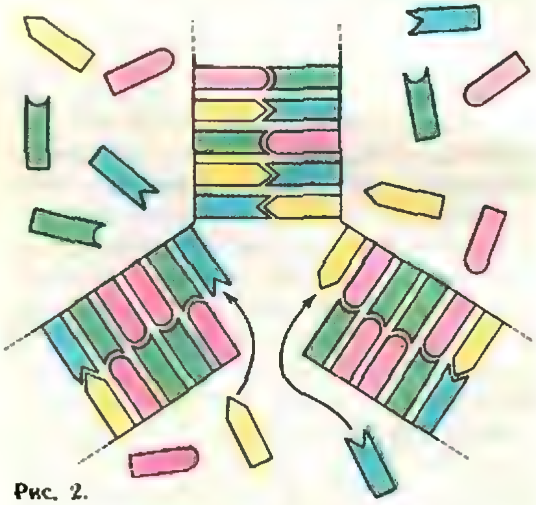


Рис. 2.

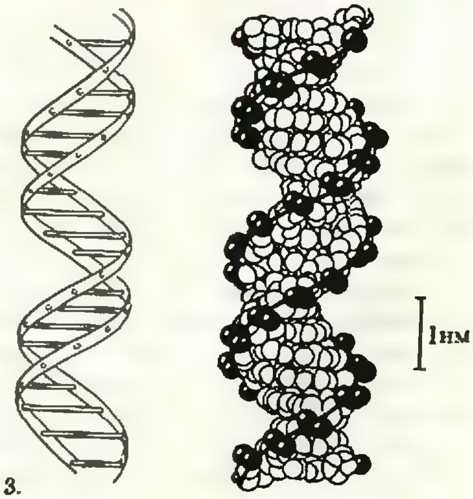


Рис. 3.

Молекула ДНК — не просто «веревочная лестница», как можно подумать, глядя на рисунок 1. Уотсон и Крик, исходя из данных рентгеноструктурного анализа, полученных Морисом Уилкинсом и Розалиндой Франклин, пришли к заключению, что она представляет собой двойную спираль, точнее — винтовую линию (рис. 3). При этом нити ДНК закручены вправо (то есть так же, как нарезка на шурупах и винтах). Полный оборот спираль делает на 10 звеньев. Все эти подробности были важны, потому что позволяли сравнивать модель с физическим экспериментом.

Не только Дельбрюк, очень многие были сразу покорены красотой модели. И хотя некоторые генетики продолжали держаться за белки как за палочку-выручалочку, их единственным аргументом остался такой: не может быть, чтобы такая сложная штука, как жизнь, была в своей основе устроена так просто. Аргумент, прямо скажем, не из сильных.

Так было установлено, что ДНК является самой главной молекулой живой природы.

Теперь, тридцать лет спустя, можно констатировать, что открытие структуры ДНК, действительно, сыграло в развитии биологии такую же роль, какую для физики сыграло открытие атомного ядра. Подобно тому, как выяснение строения атома привело к рождению новой, квантовой физики, открытие строения ДНК привело к новой, молекулярной биологии.

Эту параллель можно продолжить. Чисто теоретические исследования атома привели к овладению человеком практически неисчерпаемым источником энергии. Аналогично молекулярная биология привела в последние годы к возможности неслыханным образом вмешиваться в самые интимные свойства живой клетки, изменяя направленным образом ее наследственность. Это, безусловно, окажет в будущем не менее радикальное воздействие на жизнь людей, чем овладение энергией атомного ядра.

Спрашивайте — отвечаем

Уважаемая редакция!

Большое сходство с поверхностью Штейнера («Квант», 1980, № 1) имеет поверхность, задаваемая уравнением

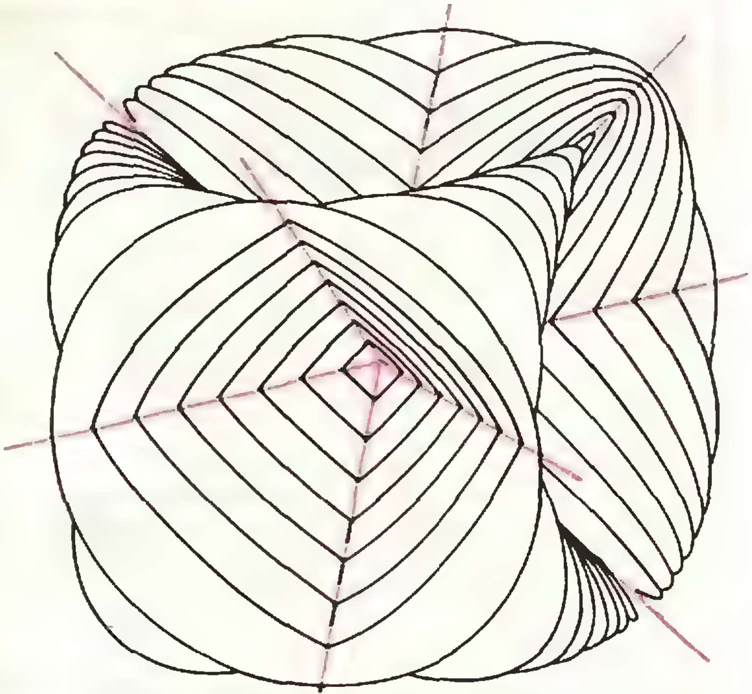
$$R^2(x^4+y^4+z^4)-2R^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2y^2z^2=0.$$

Если поверхность Штейнера вписывается в правильный тетраэдр, то эта поверхность вписывается в куб — касается шести граней куба по шести окружностям. По направлениям координатных осей поверхность имеет шесть углублений в виде конусов, к вершинам (в центре координат) переходящих в четырехгранные пирамиды.

Координаты каждой точки поверхности соответствуют длинам сторон треугольника, вписанного в окружность радиуса R.

Нельзя ли попросить компьютер нарисовать эту поверхность?

Инженер К. С. Ткаченко.



Редакция обратилась к специалисту в области машинной графики Ю. В. Котову, в свое время составившему программы для изображения поверхности Штейнера и ее видоизменений (см. также «Квант», 1980, № 12). Машинные чертежи, один из которых показан на рисунке (в аксонометрии), подтвердили свойства поверхности, приведенные в письме.

М. Шубин

Топология и... рельеф местности

Топология — в отличие от топографии — специально не занимается картами рельефа местности. Эта наука изучает, как принято считать, наиболее глубокие свойства геометрических фигур. Такие свойства (их называют *топологическими*) могут быть одинаковыми у внешне совсем не похожих фигур — М. Гарднер как-то писал, что «топологами принято называть математиков, которые не могут отличить кофейную чашку от бублика». Иногда топологические свойства и величины получаются как комбинации совсем простых геометрических свойств и величин. Именно так обстоит дело в знаменитой теореме Эйлера о многогранниках*). Сейчас мы познакомимся с еще одним примером такого же рода — одной теоремой из «теории Морса»**). В ней-то рельеф местности и появится.

На географических картах рельеф местности обычно показывают с помощью линий уровня, соединяющих точки, изображающие точки земной поверхности, находящиеся на данной

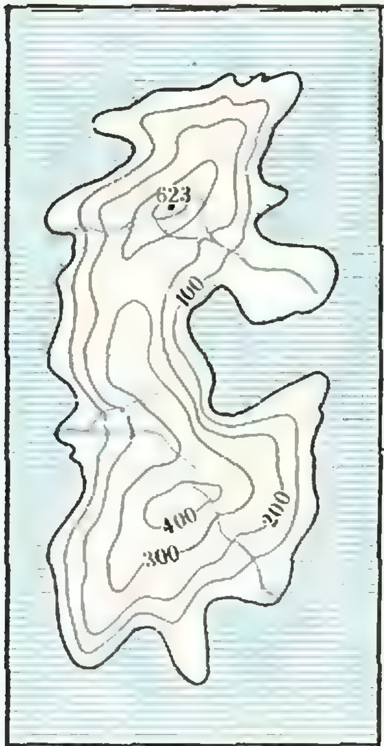


Рис. 1.

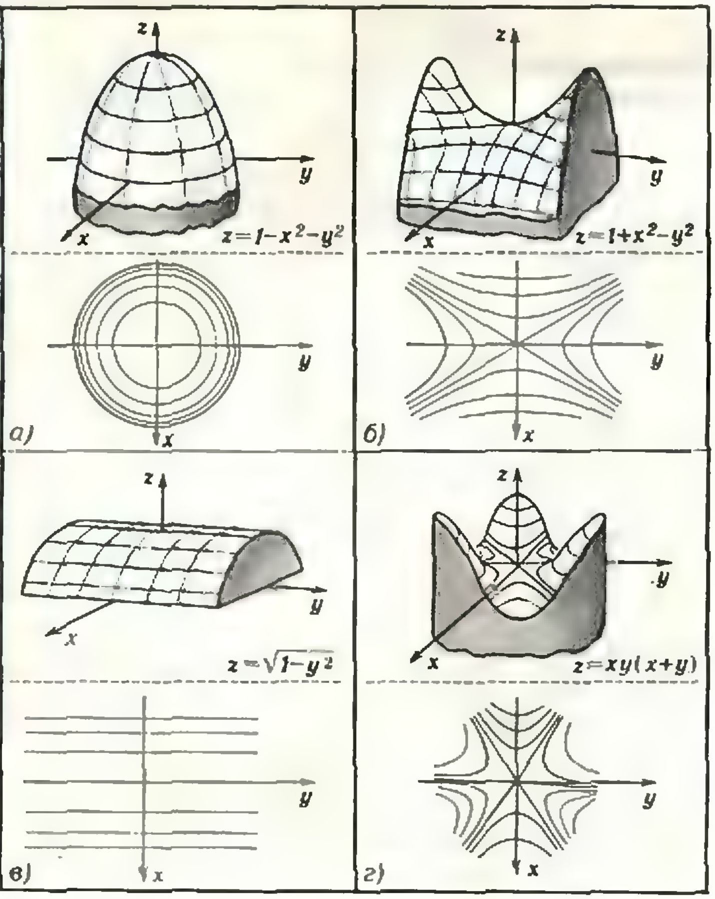


Рис. 2. Примеры поверхностей.

---

*) См., например, главу о топологии в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., «Просвещение», 1967), а также ниже теорему 2.

**) Гарольд Марстон Морс (1892—1977) — замечательный американский математик, создавший теорию, названную впоследствии его именем и представляющую собой один из важных разделов современной топологии.

высоте над уровнем моря (рис. 1). Математической моделью ограниченного участка земной поверхности служит геометрическая поверхность в пространстве, заданная уравнением вида $z=f(x, y)$. Несколько примеров поверхностей показано на рисунке 2. На каждой поверхности нарисованы множества точек, лежащие на данной высоте $z=\text{const}$, а линии уровня являются проекциями этих множеств на плоскость Oxy. Таким образом, *линия уровня* — это множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $f(x, y)=\text{const}$, где постоянная в правой части определяет рассматриваемую линию уровня, так что линии уровня как бы нумеруются такими постоянными. На рисунке 2 мы под каждой поверхностью поместили соответствующие семейства линий уровня.

Нас в первую очередь будет интересовать поведение рельефа местности вблизи его характерных точек — вершин, котловин и перевалов, а также вблизи его точек наклона.

Вершина. Характерное поведение линий уровня рельефа вблизи вершины показано на рисунке 3. Казалось бы, вершину можно определить просто как самую высокую точку некоторого окружающего ее участка местности. Однако окрестности таких точек могут иметь гораздо более сложное строение, чем на рисунке 3. Например, можно себе представить, что в сколь угодно малой окрестности такой точки имеются какие-то другие точки, обладающие тем же свойством, но расположенные ниже данной (рис. 4). Желая исключить такую ситуацию (и ей подобные), мы назовем точку *вершиной*, если она является самой высокой точкой некоторого окружающего ее участка местности и в ее окрестности линии уровня устроены, как на рисунке 3, то есть все они являются замкнутыми кривыми без самопересечений, охватывающими рассматриваемую точку, причем $z_0 > z_1 > z_2 > \ldots$

Котловина (рис. 5) — это «вершина наоборот», то есть точка, которая станет вершиной, если у рассматриваемой функции изменить знак. Таким образом, *котловиной* мы назовем точку, у которой линии уровня устроены так, как показано на рисунке 5, причем $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots$

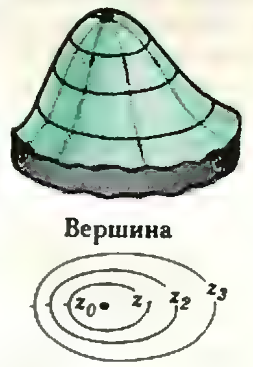


Рис. 3.

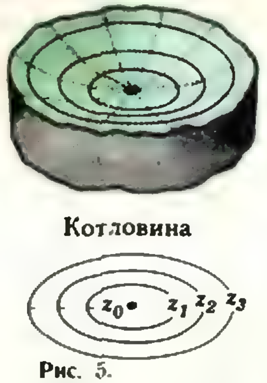


Рис. 5.

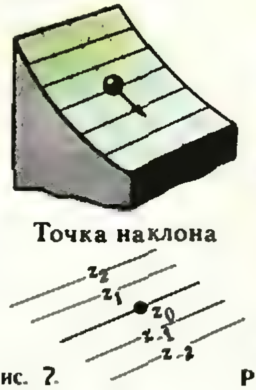


Рис. 7.

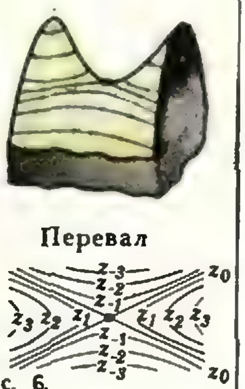


Рис. 6.

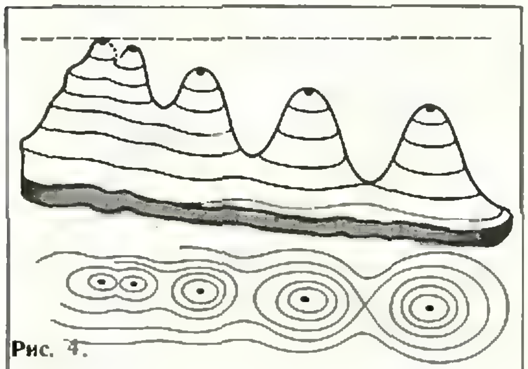
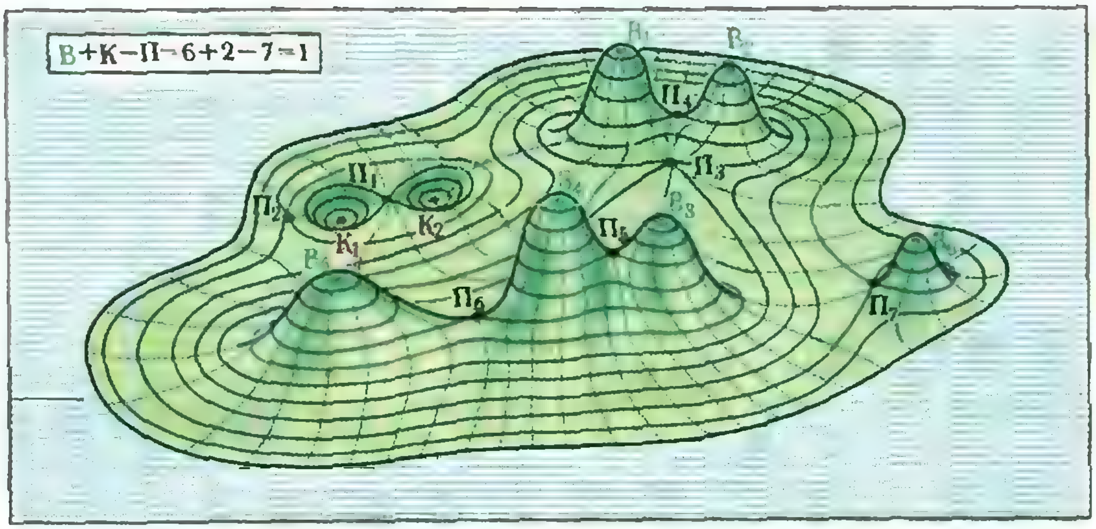


Рис. 4.

Перевал. Перевал можно описать как точку, вблизи которой рельеф устроен как седло (рис. 6). Около перевала линии уровня располагаются так: в точке перевала существуют два таких направления, что, идя по одному из них вперед или



назад, мы будем подниматься, а идя по другому — спускаться. Более того: направления первого типа заполняют два вертикальных угла, а направления второго типа — два других вертикальных угла, так что разделяющие их прямые, задающие эти две пары вертикальных углов, должны касаться линий уровня, проходящих через точку перевала. Итак, мы будем называть *перевалом* точку, в окрестности которой линии уровня устроены в соответствии с только что приведенным описанием.

Точка наклона (рис. 7). Говоря образно, точка наклона — это такая точка рельефа, что, если в нее положить шарик, он покатится, тогда как шарик, аккуратно поставленный в точку, являющуюся вершиной, котловиной или перевалом, будет покоиться (хотя в случае вершины или перевала его равновесие будет неустойчивым). Назовем *точкой наклона* такую точку рельефа, что вблизи нее линии уровня устроены, как на рисунке 7, причем $\ldots < z_{-2} < < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \ldots$

Точнее, семейство линий уровня должно быть таково, что его можно получить из семейства параллельных прямых так называемым *гомеоморфизмом*, то есть взаимно однозначным и взаимно непрерывным преобразованием участка карты.

Заметим, что на карте точек наклона, как правило, большинство. Например, все вершины, котловины и перевалы изолированы и окружены точками наклона.

Разумеется, кроме вершин, котловин, перевалов и точек наклона, существуют и другие типы точек. Например, на географической карте попадаются плато — целые области, высота точек которых постоянна. Постоянная максимальная высота может быть и на целой линии, как, например, на рисунке 2, *в*. Бывают и более «хитрые» точки, например «обезьяньи седла» (рис. 2, *г*) и точки скопления вершин (рис. 4). Однако все точки, не являющиеся точками наклона, кроме вершин, котловин и перевалов, можно устранить, чуть-чуть подправив рельеф местности; они при этом исчезают или заменяются на несколько вершин, котловин, перевалов*). Поэтому, помимо точек наклона, мы будем рассматривать только эти три типа точек.

Теперь мы можем сформулировать нашу основную теорему, являющуюся одной из простейших теорем теории Морса.

Теорема 1. *Пусть в море дан остров с таким рельефом, что все точки острова суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы, причем все береговые точки острова являются точками наклона. Пусть В — число вершин этого рельефа, К — число котловин, П — число перевалов. Тогда*

$$В+К-П=1.$$

Доказательство. 1) Назовем самую высокую вершину нашего острова *Эверестом* (если таких вершин несколько на одинаковой высоте, назовем Эверестом любую из них), а самую глубокую котловину назовем *Марианской впадиной*. Можно так изменить рельеф острова, не меняя чисел *В, К, П* и не нарушая условий теоремы, чтобы оказались выполненными следующие условия:

---

*) Этот факт (в более строгой формулировке) является одной из теорем теории Морса; нам он не потребуется.

а) все вершины имеют одинаковую высоту (равную высоте Эвереста);

б) все котловины находятся на уровне моря;

в) все перевалы находятся на разной высоте.

Проще всего удовлетворить условию а) — для этого достаточно «надстроить» все вершины до уровня Эвереста (рис. 8).

Заодно выкопаем все котловины до глубины Марианской впадины — это нам понадобится для последующего обеспечения условия б). Это условие выполнить не так просто — если пытаться «засыпать» котловины, можно наткнуться на перевал. Однако есть простой выход: «высушить море». А именно, можно считать, что под водой берега острова круто уходят вниз до глубины, превышающей глубину Марианской впадины. Тогда надо просто «высушить» море ровно до этой глубины.

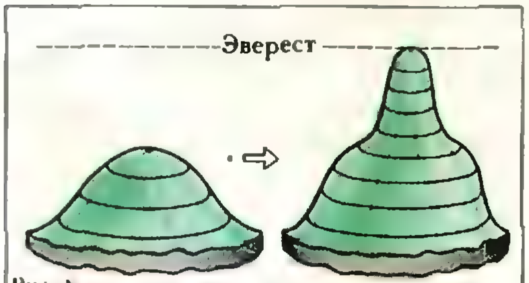


Рис. 8.

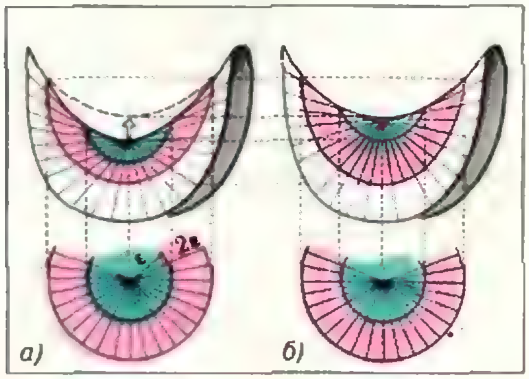


Рис. 9. Поднятие точки перевала: синяя часть поверхности (ее мы считаем жесткой) сдвигается немного вверх, а розовая часть (ее можно себе представить сделанной из тонкой резиновой пленки) слегка вытягивается от неподвижной внешней границы.

Для обеспечения условия в) надо уметь лишь чуть приподнять или опустить окрестность данного перевала, не задевая других вершин, котловин и перевалов и не создавая новых вершин, котловин и перевалов. Это можно сделать, например, приподнимая целиком часть рельефа, находящуюся внутри круга малого радиуса ε с центром в данной точке перевала (рис. 9, *а*), не трогая точки, лежащие вне круга радиуса 2ε (с тем же центром), и достраивая рельеф между окрестностями радиусов ε и 2ε так, как показано на рисунке 9, *б*.

Итак, будем считать, что рельеф нашего острова удовлетворяет условиям а) — в).

2) Теперь устроим «всемирный потоп». Пусть дождь постепенно заливает остров, поднимая равномерно уровень воды всюду (в котловинах и в море) от уровня моря до высоты Эвереста. При этом на острове от дождя в котловинах образуются внутренние озера, и он может в дальнейшем делиться на более мелкие острова. Мы будем следить, как по ходу потопа меняется количество озер и островов. Море не будем считать озером.

В начале потопа на донышках котловин образуется *К* озер. В конце потопа все озера сливаются с морем, а над водой остаются лишь верхушки **всех** гор (вот для чего они надстраивались!), так что количество озер и островов задается следующей таблицей:

	Озера	Острова
Начало потопа	*К*	1
Перед полным затоплением	0	*В*

3) Посмотрим, когда меняется число озер и островов в процессе

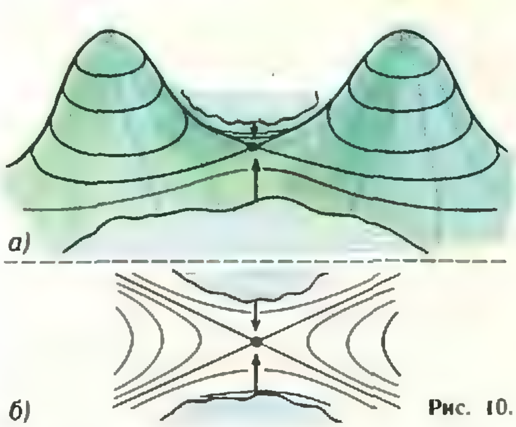


Рис. 10.

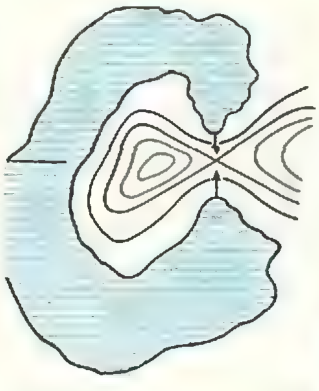


Рис. 11.

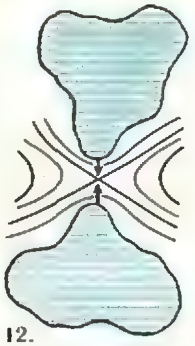


Рис. 12.

потопа. Ясно, что если вода заливает лишь точки наклона, то изменения этих чисел не происходит. Посмотрим, что будет, когда вода покрывает какой-нибудь перевал (рис. 10). При этом имеются две возможности:

а) сливаются воды одного и того же озера; тогда число озер не меняется, но зато образуется новый остров (рис. 11);

б) сливаются два разных озера (рис. 12); тогда число озер уменьшается на 1, а число островов не меняется.

Итак, при каждом покрытии водой перевала или уменьшится на 1 число озер или увеличится на 1 число островов. Но всего количество озер уменьшается на $К$, а количество островов увеличивается на $В-1$, так что $К+(В-1)=П$, то есть $В+К-П=1$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть все точки Земного шара суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы. Тогда* $В+К-П=2$.

Доказательство. Будем считать, что на дно самой глубокой из котловин налита вода (этого можно добиться, высушив все моря и океаны и оставив воду лишь на донышке Марианской впадины). Тогда все остальное можно считать островом, а воду на донышке этой котловины — морем. Но у всей Земли вершин и перевалов столько же, сколько у этого острова, а котловин на 1 больше. Остается воспользоваться теоремой 1, и следствие доказано.

Примером рельефа, к которому применимо это следствие, может служить всякий многогранник, внутри которого можно найти такую точку $О$, что все перпендикуляры, опущенные из нее на грани, попадают на сами грани (а не на их продолжения). Тогда, если назвать *высотой рельефа* в данной точке многогранника расстояние от нее до точки $О$, то основания перпендикуляров, опущенных из $О$ на грани (и только они), будут котловинами, вершины рельефа будут лежать в вершинах многогранника, а перевалы будут в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки $О$ на ребра (проверьте!). Отсюда следует, что для таких многогранников верна

Теорема 2 (теорема Эйлера о многогранниках). *Пусть Г, В и Р — числа граней, вершин и ребер выпуклого многогранника. Тогда*

$$Г+В-Р=2.$$

Как мы увидим ниже, эта теорема на самом деле верна для любого выпуклого многогранника — без сформулированного перед ней дополнительного условия. Она легко выводится из следующей теоремы.

Теорема 3 (теорема Эйлера о картах). *Пусть дана политическая карта острова, ограниченного замкнутой кривой, причем выполнены следующие условия:*

а) число стран больше или равно 2;

б) каждая страна ограничена замкнутой кривой без самопересечений;

в) нет стран, лежащих одна внутри другой (типа Монако, Ватикана или Сан-Марино).

Пусть С — число стран, В — число вершин (точек стыка границ или

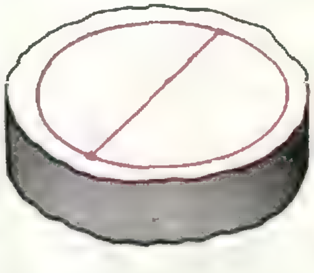


Рис. 13.

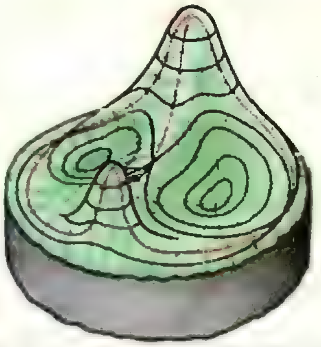


Рис. 14.

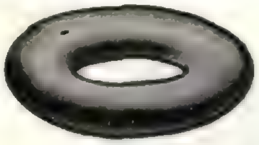


Рис. 15.

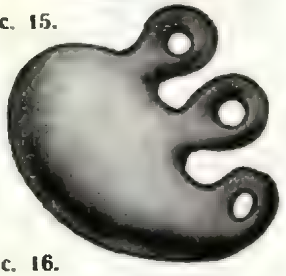


Рис. 16.

границ с линией берега), $Г$ — число границ (от одной вершины до другой), причем границы с морем тоже считаются. Тогда $С+В-Г=1$.

Пример. На карте, изображенной на рисунке 13, $С=2$, $В=2$, $Г=3$.

Доказательство теоремы 3. Достаточно построить на нашем острове такой рельеф, чтобы вершины его находились в точках стыка границ, котловины — ровно по одной в каждой стране, а перевалы — по одному на каждой границе (границы с морем можно чуть сдвинуть внутрь острова). Это можно сделать так: поставить в точках стыка границ сторожевые башни, имеющие форму Эйфелевой башни; на границах построить крепостные стены, снижающиеся к середине каждой границы и полого сходящие вниз в сторону каждой из двух стран, которые разделяет эта граница; наконец, вырыть по котловине в каждой стране, причем склоны котловин должны полого выходить к крепостным стенам. Пример такого рельефа для карты рисунка 13 изображен на рисунке 14. Теперь остается воспользоваться теоремой 1, и теорема 3 доказана.

Следствие. *Если на сфере нарисована политическая карта с числом стран не менее 3, удовлетворяющая условиям б) и в) теоремы 3, то для нее*

$$С+В-Г=2.$$

Доказательство. Можно считать одну из стран морем, а все остальное — островом. Тогда применима теорема 3, немедленно приводящая к требуемому результату.

Доказательство теоремы 2 (для любого выпуклого многогранника). Возьмем точку O внутри рассматриваемого многогранника и проведем какую-нибудь сферу большого радиуса с центром в точке O. Теперь спроектируем наш многогранник из точки O на сферу. Тогда мы получим на сфере политическую карту (грани многогранника проектируются в страны, а ребра — в границы), к которой применимо предыдущее следствие.

Задачи

1. Сформулировать и доказать аналоги следствий из теорем 1 и 3 для тора, то есть поверхности баранки или автомобильной шины (рис. 15).

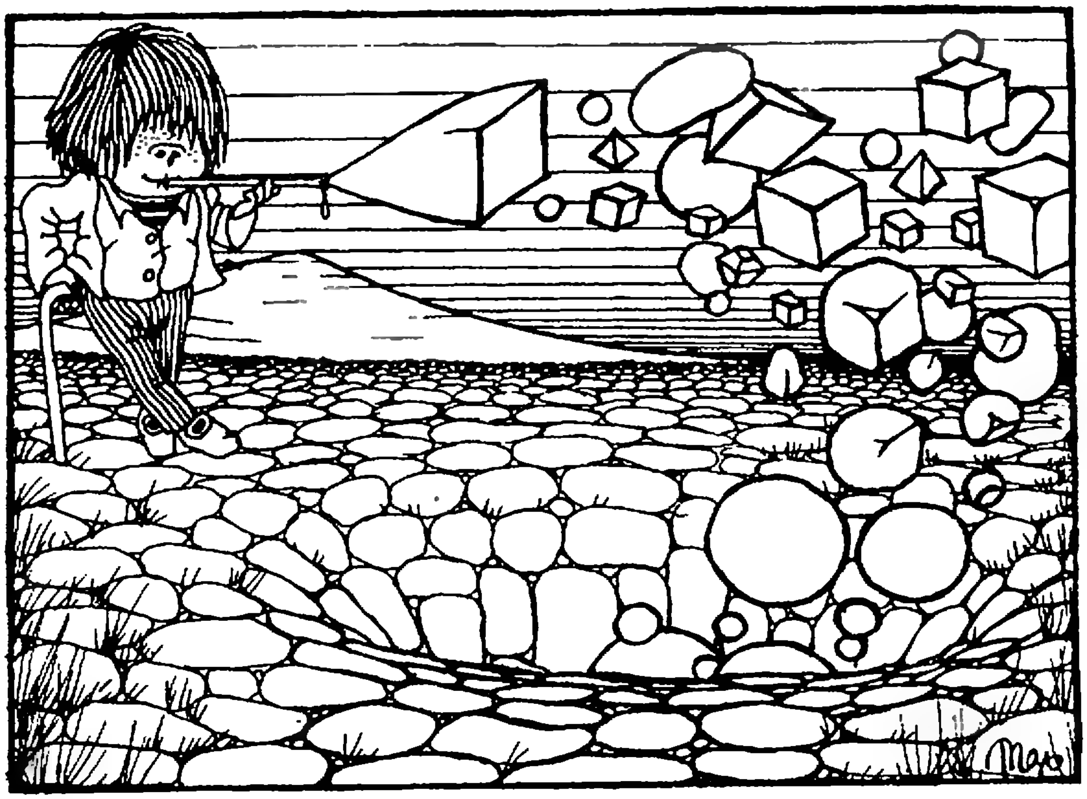
2. То же — для «сферы с p ручками» (на рис. 16 изображена сфера с тремя ручками).

Новые книги

Украинское издательство «Вища школа» выпускает в I квартале 1983 года книгу «Математика сегодня» (научно-популярный сборник на русском языке, под редакцией проф. А. Я. Дороговцева).

Сборник предназначен для студентов и преподавателей вузов, но, несомненно, будет интересен и полезен школьникам старших классов и учителям средней школы. Он включает статьи, посвященные актуальным направлениям математики, раздел нерешенных проблем, статьи о студенческих олимпиадах по математике, новые задачи.

Сборник выходит ограниченным тиражом, поэтому рекомендуем своевременно оформить заказ на него. Заказы нужно направлять в магазин «Книга — почтой» по адресу: 252117, Киев, ул. Попудренко, 26.



К. Кикоин

Что такое потенциальная яма

> *Потенциальная яма — это яма, которая еще не вырыта.*
>
> (из научного фольклора)

В физике часто встречается фраза: «Частица (или система) находится в потенциальной яме». Что же такое потенциальная яма и почему любой физический объект в конце концов в ней оказывается? Попробуем в этом разобраться. Удобнее всего это сделать на конкретных примерах. Начнем с самого простого.

Ящик и шарик

Возьмем ящик с неровным днищем, в котором есть выпуклости и вмятины (лунки), и бросим в него металлический шарик. Покатавшись по днищу, шарик в конце концов остановится на дне одной из лунок. Зададимся вопросом: почему шарик остановился в лунке, причем именно на ее дне, а не на склоне? Очевидный ответ состоит в следующем. На шарик, находящийся на стенке лунки (или выпуклости), действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила реакции стенки $\vec{F}_р$ (рис. 1). Равнодействующая сила $\vec{F}$ направлена вниз по склону, поэтому шарик, в соответствии со вторым законом Ньютона, приобретает ускорение и скатывается на дно лунки. На дне действие двух сил ($\vec{F}_т$ и $\vec{F}'_р$) уравновешивается, и равнодействующая обращается в нуль, так что здесь шарик будет находиться в положении равновесия.

Рассмотрим ту же самую ситуацию с энергетической точки зрения. У шарика, покоящегося на дне лунки, скорость равна нулю, равна нулю и его кинетическая энергия. Следовательно, вся энергия, которой он обладает, — потенциальная. Попробуем сдвинуть шарик из положения равновесия. Ясно, что на любое перемещение шарика вверх по склону должна быть затрачена работа против силы тяжести. За счет этой работы, произведенной над телом, возрастает его потенциальная энергия. Но если эта энергия ($E_п$) возрастает при любом перемещении (r) относительно положения равновесия, то, значит, в самой равновесной точке ($r=0$) она минимальна (рис. 2).

Теперь проследим за превращением энергии шарика, брошенного на дно ящика. В первый момент он обладал определенной кинетической и потенциальной энергией. При движении вверх и вниз по впадинам и выпуклостям днища происходило взаимное превращение кинетической и потенциальной энергий, но при этом часть энергии терялась на работу против трения. В конце концов общий запас механической энергии стал настолько малым, что шарику его не хватило, чтобы выбраться из очередной лунки, и он остановился на ее дне. В этом положении вся оставшаяся у шарика энергия — потенциальная и равная минимальному значению, возможному в этой лунке. Для примера на рисунке 3 показаны два возможных положения равновесия шарика в двух соседних лунках разной глубины. Каждому из равновесных положений отвечает свой минимум энергии, причем $E_{\text{п}\min 1}<E_{\text{п}\min 2}$ (для перемещения шарика из положения *1* в положение *2* нужно затратить положительную работу).

Итак, мы пришли к еще одному определению равновесия (точнее — устойчивого равновесия):

> *устойчивому равновесному положению тела всегда отвечает минимальное значение его потенциальной энергии*

Или, как говорят в таком случае, — *в положении устойчивого равновесия тело находится в потенциальной яме.*

Разобранный нами пример прост и нагляден: потенциальная яма для шарика оказывается ямой и в буквальном, житейском смысле. Теперь перейдем к объекту, для которого никакой реальной ямы представить себе нельзя, а потенциальная яма, тем не менее, существует и определяет его равновесное состояние.

Мыльный пузырь

Любому ребенку известно, что обыкновенный мыльный пузырь всегда имеет сферическую форму. Почему это так?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно вспомнить о поверхностном натяжении. Мыльный пузырь, с физической точки зрения, — это жидкая пленка, ограничивающая полость, заполненную газом. Если посмотреть на эту пленку в более крупном масштабе, то можно увидеть, что она состоит из двух поверхностных слоев (внешнего и внутреннего) и жидкости, заключенной между ними. Молекулы на поверхности находятся в особых условиях по сравнению с объемными молекулами. Каждая из молекул внутри жидкости пребывает в окружении себе подобных, и результирующая всех сил притяжения равна нулю. На поверхностную молекулу с одной стороны действуют молекулы не жидкости, а газа, имеющего значительно меньшую плотность. Поэтому равнодействующая сил притяжения на поверхности всегда направлена во внутрь, в объем. Следовательно, молекулы, для того чтобы выйти на поверхность, должны совершить работу против

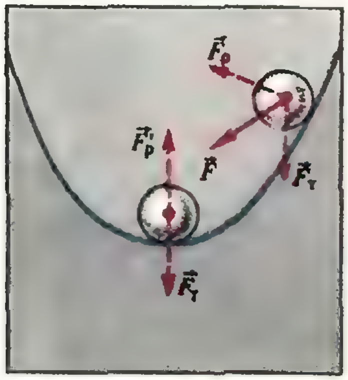


Рис. 1.

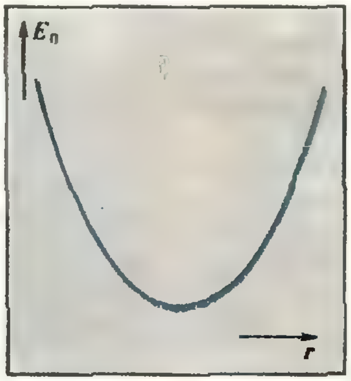


Рис. 2.

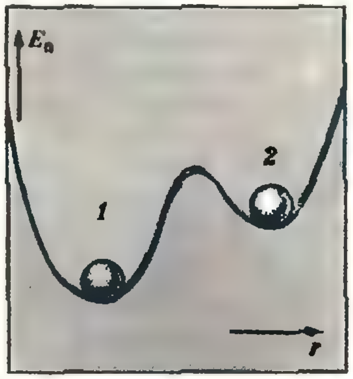


Рис. 3.

этих сил притяжения. А это означает, что молекулы на поверхности жидкости обладают большей энергией, чем внутри. Эту дополнительную потенциальную энергию называют поверхностной энергией. Чем больше площадь поверхности S, тем больше поверхностная энергия $E_{\text{пов}}$:

$$E_{\text{пов}} \sim S, \text{ или } E_{\text{пов}} = \sigma S.$$

Коэффициент пропорциональности σ и есть поверхностное натяжение. Этот коэффициент измеряется отношением работы A, необходимой для увеличения площади поверхности на ΔS, к величине ΔS. Для каждой жидкости он свой.

Когда мы надуваем пузырь, размер полости (а значит, и поверхности пленки) увеличивается, но количество жидкости в пленке, естественно, остается постоянным. Ясно, что увеличение поверхности возможно только за счет выхода новых молекул из объема в поверхностный слой, то есть за счет совершения работы и увеличения поверхностной энергии жидкости.

Теперь мы можем ответить на вопрос, почему же мыльный пузырь имеет форму сферы, а не, к примеру, яйца, эллипсоида или многогранника. Дело в том, что сфера обладает замечательным свойством: из всех геометрических фигур, ограничивающих данный объем, она имеет наименьшую поверхность. Поэтому, если мы попытаемся придать пузырю несферическую форму, то мы будем вынуждены увеличить площадь поверхностного слоя, то есть совершить дополнительную работу по выводу молекул на поверхность, а значит — и дополнительно увеличить поверхностную энергию жидкости.

Иными словами,
сферической форме пузыря отвечает минимум потенциальной энергии пленки, образующей его оболочку.

Спрашивается, кто же здесь находится в потенциальной яме? Ясно, что это не отдельная частица, поскольку сама природа поверхностного натяжения связана не с отдельными молекулами, а с их взаимодействием. Нельзя даже сказать, что в потенциальной яме находятся молекулы поверхностного слоя, так как при изменении радиуса пузыря происходит переход молекул из объема на поверхность или наоборот (да и при постоянных размерах пузыря, благодаря тепловому движению, имеет место непрерывный обмен молекулами между объемом и поверхностью).

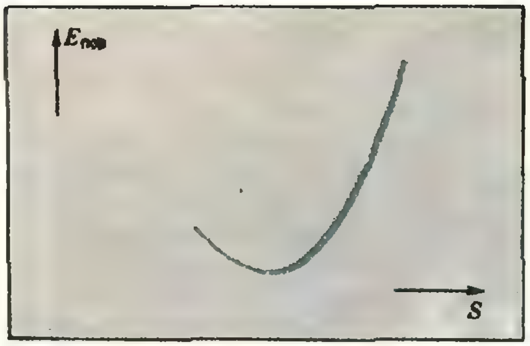


Рис. 4.

Таким образом,
в потенциальной яме находится вся жидкость, образующая мыльную пленку.

А ввести понятие потенциальной ямы нам удалось только потому, что существует универсальная характеристика — площадь поверхности пузыря, связанная постоянным коэффициентом с его поверхностной энергией.

Если говорить более строго, то таким способом можно описать только половину потенциальной ямы, отвечающей сферической форме пузыря (рис. 4). Уменьшить площадь можно только сжав пузырь, то есть совершив работу по сжатию газа, находящегося внутри полости. Соответствующее возрастание энергии системы в этом случае показано на рисунке 4 штриховой линией. Так что в действительности в потенциальной яме находится сложная система «поверхностные молекулы жидкости + объемные молекулы жидкости + молекулы газа внутри полости».

Ионный кристалл

Рассмотрим, наконец, последний пример системы, находящейся в потенциальной яме. Для такой системы вид потенциальной ямы можно установить с помощью точных, но весьма громоздких вычислений, а можно и приближенно, буквально в несколько строк. Именно так мы и поступим, при этом почти не проиграем в точности, но зато выиграем в простоте и наглядности.

Речь пойдет о ионном кристалле, типичным представителем которого является всем известная поваренная соль NaCl. Как известно, атомы (или ионы) кристаллических тел образуют правильные геометрические решетки. Кристалл поваренной соли имеет простую кубическую решетку, в узлах которой в трехмерном шахматном порядке располагаются положительные ионы натрия Na^+ и отрицательные ионы хлора Cl^- (рис. 5). Каждый ион Na^+ имеет своими ближайшими соседями шесть ионов Cl^-, а каждый ион Cl^- — шесть ионов Na^+. Расстояние между двумя ближайшими одинаковыми ионами на грани куба называют постоянной решетки (обозначим ее буквой a).

Чтобы определить вид потенциальной ямы данного кристалла, надо найти его полную потенциальную энергию, то есть энергию взаимодействия всех ионов кристалла друг с другом. Выделим сначала пару ближайших соседей Na^+ и Cl^- и рассмотрим взаимодействие между ними. Оно складывается из кулоновского притяжения зарядов противоположных знаков и отталкивания (имеющего иную природу), не позволяющего ионам подойти друг к другу слишком близко.

Опишем это взаимодействие с помощью понятия потенциала. Представим себе, что ион натрия находится в поле иона хлора, которое складывается из электростатического поля притяжения и поля отталкивания.

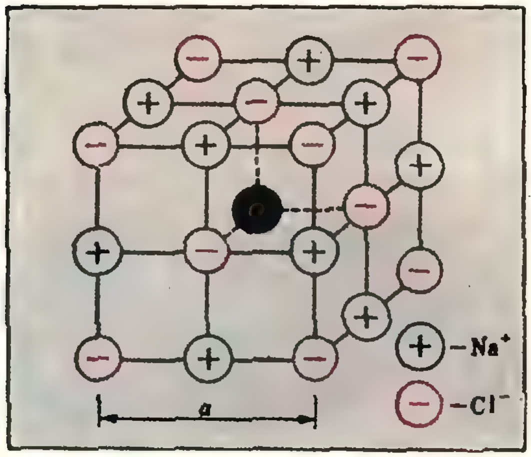


Рис. 5.

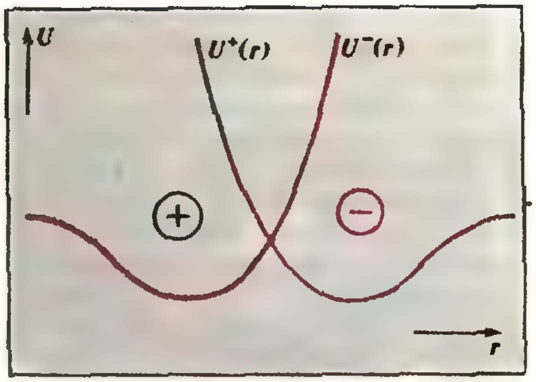


Рис. 6.

В соответствии с законами электростатики, потенциал поля притяжения равен $-e/r$ (в абсолютной системе единиц). Здесь e — заряд одновалентного иона, равный заряду электрона, а r — расстояние между ионами хлора и натрия. Точное выражение потенциала отталкивания, как правило, не известно, но для приближенных расчетов его можно представить в виде быстро убывающей степенной функции b/r^n, где b — некоторая постоянная. Показатель степени n для кристаллов типа NaCl принято считать равным 9.

Итак, положительный ион Na^+ находится в поле отрицательного иона Cl^-, потенциал которого равен

$$U^-(r) = -\frac{e}{r} + \frac{b}{r^n}.$$

Поскольку n велико, на малых расстояниях r потенциал отталкивания резко возрастает и становится существенно больше потенциала притяжения. На больших же расстояниях он практически равен нулю, и полный потенциал определяется потенциалом кулоновского притяжения. В результате $U^-(r)$ имеет вид кривой с минимумом и образует потенциальную яму для иона Na^+ (рис. 6).

В свою очередь ион натрия создает свое поле, потенциал которого представляет яму для иона Cl^-.

Таким образом, два соседних иона, взаимно притягиваясь на больших расстояниях и отталкиваясь на малых, создают потенциальные ямы, в которых и удерживают друг друга в положении равновесия.

В кристалле ситуация, конечно, более сложная. Кроме ближайших соседей с зарядами противоположного знака у любого иона имеются следующие, одноименно заряженные, соседи, за ними — еще и так далее. Хотя размеры кристалла и ограничены, число соседей можно считать бесконечно большим. Действительно, возьмем для примера соль «Экстра» самого мелкого помола. Ее кристаллики имеют размеры $\sim 0{,}1$ мм, а постоянная решетки $a \sim 10^{-8}$ см, так что на ребре такого кристаллика умещается $\sim 10^{6}$, на грани — 10^{12}, а в объеме — 10^{18} одинаковых ионов.

Расчет полной энергии взаимодействия столь большого числа ионов, на первый взгляд, представляет собой безумно сложную задачу. Однако с помощью остроумного приема, основанного на фундаментальных физических соображениях, расчет можно выполнить действительно в несколько строк. Подробно об этом будет рассказано в Приложении II в конце статьи, здесь же мы лишь приведем окончательный результат. Оказывается, суммарная энергия взаимодействия всех ионов в кристалле имеет вид

$$W_{\text{кр}}(a) = -\frac{Ae^2}{a} + \frac{B}{a^n},$$

где A и B — некоторые постоянные. Графически она представляет собой кривую с минимумом, описывающую потенциальную яму, в которой находится кристалл в целом. Это означает, что в состоянии равновесия постоянная решетки принимает такое значение a_0, которое соответствует минимуму потенциальной энергии.

Мы рассмотрели три, на первый взгляд, совершенно различных объекта и убедились в том, что для каждого из них потенциальная энергия изображается кривой с минимумом. В общем случае вид потенциальной ямы может быть более сложным, в частности — зависеть не от одного параметра, а от нескольких, но общий принцип всегда один и тот же:

в состоянии устойчивого равновесия любая система имеет минимальную потенциальную энергию, или, другими словами, пребывает на дне потенциальной ямы.

Приложение I

Вычислим потенциал φ_1, создаваемый в точке *1* с координатой r_1 электрическим зарядом $+e$, находящимся в начале координат (рис. 7). Как известно, этот потенциал равен работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Поместим в точку *1* пробный положительный заряд q. По закону Кулона на него со стороны заряда e действует сила $F = qe/r_1^2$ (в абсолютной системе единиц). Найдем работу A_{1-2} по перемещению заряда q из точки *1* в ближайшую точку *2*. При этом расстояние $r_2 - r_1$ выберем настолько малым, чтобы на всем участке *1—2* силу можно было считать постоянной и равной $F_1 = qe/r^2 = qe/(r_1 r_2)$. Тогда

$$A_{1-2} = F_1(r_2 - r_1) = \frac{qe}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = qe\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Аналогично можно вычислить работу A_{2-3} по перемещению заряда q из точки *2* в ближайшую точку *3*:

$$A_{2-3} = F_2(r_3 - r_2) = \frac{qe}{r_2 r_3}(r_3 - r_2) = qe\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right).$$

Очевидно, что работа поля на участке *1—3* равна сумме работ на участках *1—2* и *2—3*:

$$A_{1-3} = A_{1-2} + A_{2-3} = qe\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + qe\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = qe\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right).$$

Продолжая рассуждения, можно убедиться в том, что промежуточные точки никакой роли не играют, и в выражение для работы входят только координаты начальной и конечной точек. Поэтому работа поля по перемещению пробного заряда q из точки *1* в бесконечность ($1/r_\infty = 0$) равна

$$A_1 = qe\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_\infty}\right) = \frac{qe}{r_1}.$$

Тогда окончательно для потенциала в точке *1* получаем

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{q} = \frac{e}{r_1}.$$

Те, кто знаком с интегрированием, легко могут получить этот результат в одну строчку...

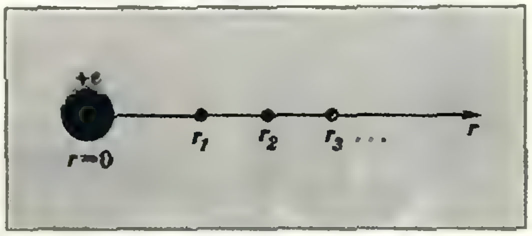


Рис. 7.

Приложение II

Для того чтобы найти полную потенциальную энергию кристалла, прежде всего вычислим его электростатическую энергию. Рассмотрим ион натрия Na^+, расположенный в центре кубической решетки, которая изображена на рисунке 5. Ближайшие его соседи — это 6 ионов хлора Cl^-, расположенных на расстоянии $r=a/2$ от него. Каждый из них создает потенциал $-e/r=-2e/a$. Согласно принципу суперпозиции, потенциал суммы зарядов равен сумме потенциалов этих зарядов; следовательно, ближайшие соседи создают суммарный потенциал, равный $-12\,e/a$. Следующими соседями являются 12 ионов натрия, находящиеся от рассматриваемого иона на расстоянии $a/\sqrt{2}$. Их суммарный потенциал равен $+12\sqrt{2}e/a=+16{,}97e/a$. Продолжая эту процедуру, можно найти, что третьи соседи создают потенциал $-9{,}24e/a$, четвертые $+6e/a$, ..., девятнадцатые $-3{,}08e/a$ и так далее.

Ясно, что суммировать все эти слагаемые бесперспективно. Однако тот факт, что знаки слагаемых чередуются (разноименно заряженные соседи чередуются с одноименно заряженными), наводит на мысль, что эти слагаемые можно как-то перегруппировать, и интересующую нас сумму найти более коротким путем. Такая перегруппировка действительно существует, и основывается она на соображении электронейтральности.

Давайте сосчитаем суммарный заряд всех ионов куба, изображенного на рисунке 5. При этом будем полагать, что кубу принадлежит только половина каждого иона, расположенного на его грани, четверть каждого иона, расположенного на ребре, и восьмая часть каждого иона, находящегося в вершине. Такое предположение отнюдь не произвольно. Если мы мысленно разобьем весь кристалл на кубики, подобные нашему, то окажется, что ион на грани принадлежит сразу двум кубикам, ион на ребре — четырем, а ион в вершине — восьми кубикам. Так вот, суммарный заряд куба, сосчитанный в соответствии с такой договоренностью, оказывается равным нулю! Иными словами, предложенный способ позволяет разбить кристалл на электронейтральные ячейки. Кулоновская энергия этого нейтрального куба равна

$$-\frac{12}{2}\,\frac{e^2}{a}+\frac{16{,}97}{4}\,\frac{e^2}{a}-\frac{9{,}24}{8}\,\frac{e^2}{a}=-2{,}91\,\frac{e^2}{a}.$$

Теперь нарастим на каждую грань куба еще по одному слою ионов и снова выделим нейтральную ячейку. Сторона этого куба равна $2a$, все ионы первоначального куба принадлежат ему целиком, а вновь включенные ионы — наполовину, на четверть или на одну восьмую, в зависимости от того, где они расположены. Электростатическая энергия такого куба, подсчитанная прежним способом, оказывается равной $-3{,}50\,e^2/a$. Если взять электронейтральный куб со стороной $3a$, то его энергия будет равна $-3{,}49\,e^2/a$. Дальнейшее увеличение объема куба практически уже ничего не изменяет, и в конце концов для его энергии получается величина, приблизительно равная $-3{,}495\,e^2/a$.

Та же идея разбиения кристалла на нейтральные ячейки подсказывает еще один способ приближенного вычисления энергии куба. Возьмем ион с зарядом $+1$ и окружим его сферой радиуса a, заполненной равномерно распределенным отрицательным зарядом, полная величина которого равна -1. Если теперь посчитать электростатическую энергию этой нейтральной сферы, то она окажется равной $-3{,}6\,e^2/a$, то есть очень близкой к истинному значению.

Так, удачно выбранная модель, основанная на понимании того, что наиболее существенно в данной физической ситуации, позволяет во много раз сократить вычисления.

Энергию отталкивания посчитать гораздо проще. Из-за того что потенциал отталкивания убывает очень быстро, можно предположить, что отталкивание существует только между ближайшими соседями, находящимися друг от друга на расстоянии $a/2$. Тогда полная энергия отталкивания есть просто сумма энергий парных взаимодействий между всеми парами частиц, и для нее сразу получается выражение $+B/a^n$. Здесь $B=kb$, где k — число пар в ячейке. На это же число k нужно умножить и вычисленную выше электростатическую энергию одного иона, и в результате для полной энергии куба получается выражение, приведенное в основном тексте статьи.

Наша обложка

Конечно, единичный куб можно обклеить (без пробелов и налеганий) шестью квадратами со стороной 1. Но можно ли единичный куб так обклеить другими квадратами?

Например:

а) квадратами со стороной $1/\sqrt{2}$?

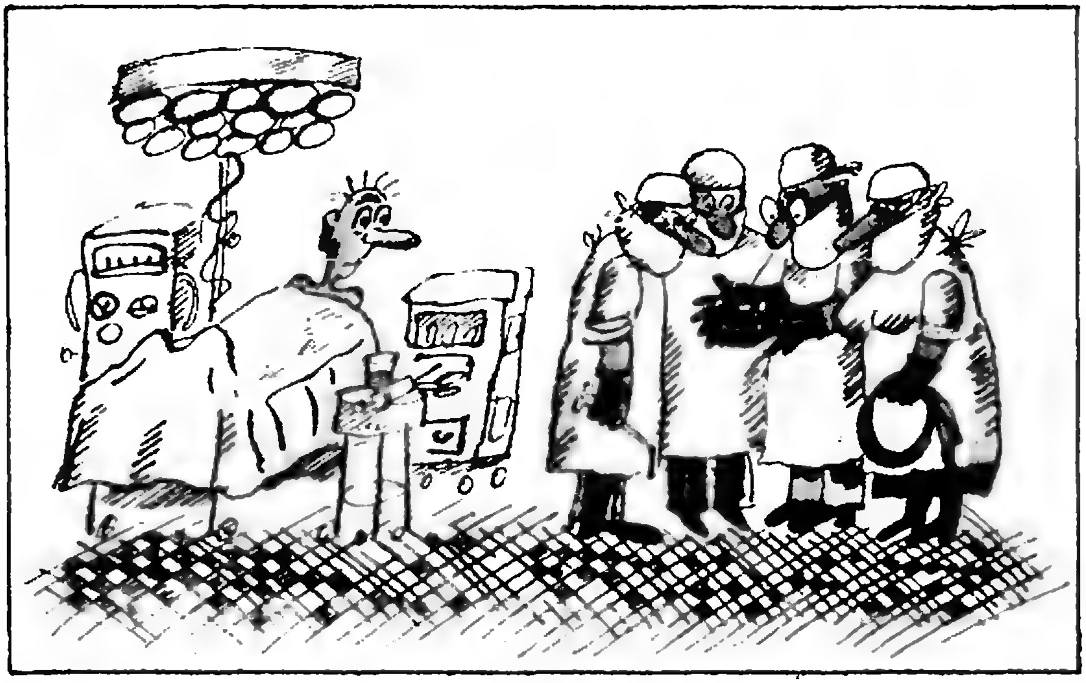
б) квадратами со стороной $\sqrt{2}$ и квадратами со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\frac{3}{2\sqrt{2}}$?

г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{3}{\sqrt{5}}$?

Сколько нужно квадратов в каждом случае? Как их нужно располагать на кубе? Ответ смотрите на 4 с. обложки.

Ю. Пухначёв



В. Дубровский

Математика волшебного кубика

«Квант» уже рассказывал подробно о конструкции венгерского «волшебного кубика» и алгоритмах решения этой головоломки*). Вслед за кубиком на свет появилась целая серия похожих на него игр. Математической теории таких игр и посвящена наша статья. А для любителей практической игры в кубик мы приводим принципиальную схему рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, основанную на этой теории.

Волшебный кубик задает вопросы

Условимся называть различные варианты сборки волшебного кубика, возникающие при произвольной расстановке 8 угловых маленьких кубиков по вершинам большого куба и 12 средних — по ребрам, его *состояниями*. Центральные кубики во всех состояниях расположены одинаково — так же, как в *нулевом состоянии*, когда каждая грань волшебного кубика окрашена в один цвет. Любой слой из 9 маленьких кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, разрешено поворачивать на ±90° или 180°. Такое вращение будем называть *поворотом грани* или просто *ходом*, а любую последовательность ходов — *операцией*. Если состояние S_2 можно получить из состояния S_1 с помощью некоторой операции, то и от S_2 можно перейти к S_1, изменив направление каждого из поворотов на противоположное и выполняя их в обратном порядке. В этом случае будем говорить, что состояния S_1 и S_2 *связаны*. В частности, состояние, связанное с нулевым (а только в таких состояниях и может пребывать реальный волшебный кубик, если его не разбирать), назовем *законным*.

Задача 1. Докажите, что общее число состояний волшебного кубика равно $N = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$ ($n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, читается: n-факториал).

Мы постараемся ответить на следующие вопросы: любое ли состояние куба является законным, то есть можно ли, собрав маленькие кубики в произвольном порядке, получить затем нулевое состояние поворотами граней? Если нет, то как узнать, законно ли данное состояние и вообще, связаны ли два данных состояния? Сколько существует законных

---

*) «Квант», 1980, № 12, с. 17; 1982, № 3, с. 20 и № 7, с. 22; см. также «Наука и жизнь», 1981, № 3, с. 131 и 1982, № 2, с. 97.

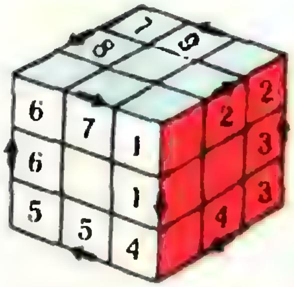


Рис. 1. Нулевое состояние. Скрытый угловой кубик имеет номер 9, скрытые средние — номера 10, 11, 12. На скрытых ребрах стрелки сонаправлены со стрелками на симметричных им относительно центра куба ребрах.

состояний, другими словами — сколько разных раскрасок волшебного кубика можно получить, вращая его грани? Каково максимальное число попарно не связанных состояний? Прежде всего разберемся,

Как задавать состояния

Чтобы полностью описать состояние волшебного кубика, надо для каждого маленького кубика указать место, которое он занимает, и его ориентацию на этом месте — каждый угловой кубик можно поместить в одно и то же «гнездо» тремя, а средний — двумя способами.

Представим, что волшебный кубик находится в нулевом состоянии. Перенумеруем его вершины и находящиеся в них угловые кубики числами от 1 до 8, а ребра и соответствующие средние кубики — числами от 1 до 12. Кроме того, на каждом ребре большого куба выберем определенное направление (мысленно нарисуем на нем стрелку) и нарисуем стрелку того же направления на соответствующем среднем кубике (рис. 1).

Теперь местонахождение i-го углового (j-го среднего) кубика в состоянии S можно задать номером $\sigma_S(i)$ ($\tau_S(j)$) той вершины (того ребра), где он находится (здесь $i=1, \ldots, 8$, $j=1, \ldots, 12$).

Чтобы задать ориентацию угловых кубиков, выделим пару противоположных граней большого куба, например его горизонтальные грани. Для определенности предположим, что верхний центральный кубик — синий, а нижний — зеленый*). Каждый угловой кубик имеет либо одну грань синего цвета, либо одну грань зеленого цвета; угол α ($\alpha=0°$, 120° или 240°), на который следовало бы повернуть этот кубик в его «гнезде» вокруг диагонали большого куба против часовой стрелки**), чтобы эта (синяя либо зеленая) грань стала горизонтальной, будем называть *углом поворота* данного углового кубика в состоянии S и обозначать $\alpha_S(i)$, где i — номер кубика.

Ориентацию j-го среднего кубика в состоянии S зададим углом $\beta_S(j)$ между нарисованной на нем стрелкой и направлением ребра, на котором он находится ($\tau_S(j)$-го ребра). Угол $\beta_S(j)$ может равняться 0° или 180°; будем называть его *углом поворота* j-го среднего кубика в состоянии S.

Что общего у связанных состояний

Нам надо выяснить, в каком случае два состояния связаны друг с другом. С этой целью проследим, как изменяются характеристики состояний α_S, β_S, σ_S и τ_S при поворотах граней. Начнем с углов поворотов. Легко проверить, что

А. Углы поворотов угловых кубиков не изменяются при поворотах четырех вертикальных граней на 180° и при произвольных поворотах горизонтальных граней.

Б. Углы поворотов средних кубиков не изменяются при поворотах двух противоположных (правой и левой на рис. 1) граней на 180° и при произвольных поворотах остальных граней.

В. При повороте любой вертикальной грани на ±90° к углам поворотов α_S двух кубиков, стоящих в ее противоположных вершинах, добавляется по 120°***), а к углам

---

*) Между прочим, кубик раскрашивают по-разному. Мы имеем в виду куб, у которого зеленая и синяя грани противоположны.

**) Разумеется, не разрушая волшебный куб, реально повернуть его угловой кубик в своем гнезде нельзя — мы здесь определяем теоретическое понятие.

***) Как это принято, углы поворотов мы складываем с точностью до 360°, например $240°+240°=120°$, $180°+180°=0°$ и т. д.

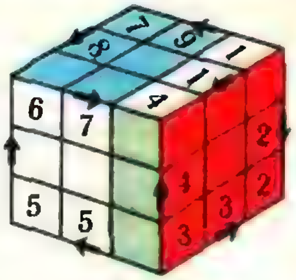


Рис. 2. После поворота правой грани на 90° по часовой стрелке. Здесь $\tau(1)=2$, $\tau(4)=1$, $\tau(2)=3$, $\alpha(1)=\alpha(3)=120°$, $\alpha(2)=\alpha(4)=240°$, $\beta(1)=\beta(2)=\beta(3)=\beta(4)=180°$.

поворотов двух ее других угловых кубиков добавляется по 240°.

Г. При повороте правой или левой (рис. 2) грани на ±90° меняются углы поворотов всех четырех средних кубиков этой грани.

Отсюда немедленно вытекает, что *суммы углов поворотов всех угловых и всех средних кубиков*

$$A(S)=\alpha_S(1)+\alpha_S(2)+\ldots+\alpha_S(8),$$

$$B(S)=\beta_S(1)+\beta_S(2)+\ldots+\beta_S \quad (12)$$

остаются постоянными при всех поворотах граней. Такие характеристики состояния называются *инвариантами* (от латинского «не изменяющийся»). Значения любого инварианта для двух связанных состояний S_1 и S_2, очевидно, совпадают. Поэтому равенства $A(S_1)=A(S_2)$ и $B(S_1)=B(S_2)$ являются необходимыми условиями связанности состояний. Вскоре мы увидим, что, присоединив к ним аналогичное равенство для еще одного инварианта, мы получим и достаточные условия. Но, прежде чем определить этот третий инвариант, нам придется сделать небольшое отступление

О перестановках

Перестановкой конечного множества называется любое отображение этого множества на себя. Таким образом, определенная выше функция σ_S, заданная на множестве $\{1, \ldots, 8\}$, является перестановкой этого множества, а τ_S — перестановка множества $\{1, \ldots, 12\}$. С любой операцией F также связаны две перестановки σ_F и τ_F этих же множеств: если нулевое состояние S_0 переводится операцией F в состояние S, то, по определению, $\sigma_F(i)=\sigma_S(i)$, $\tau_F(j)=\tau_S(j)$. Другими словами, $\sigma_F(i)$ и $\tau_F(j)$ — это номера тех мест (см. рис. 1), которые занимают в результате операции F угловой кубик, стоявший на i-м месте, и средний кубик, стоявший на j-м месте.

Выполнив одну за другой перестановки σ_1 и σ_2 одного и того же множества, мы снова получим его отображение на себя — перестановку σ. Она называется *композицией* σ_1 и σ_2: $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2$.

Задача 2. Пусть операция F переводит волшебный кубик из состояния S в состояние S'. Докажите, что $\sigma_{S'}=\sigma_{S}\circ\sigma_F$, $\tau_{S'}=\tau_S\circ\tau_F$. Докажите также, что $\sigma_{F_1\circ F_2}=\sigma_{F_1}\circ\sigma_{F_2}$, $\tau_{F_1\circ F_2}=\tau_{F_1}\circ\tau_{F_2}$, где $F_1\circ F_2$ — композиция операций F_1 и F_2.

Пусть σ — произвольная перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нарисуем одну под другой две строчки по n точек. Если при перестановке σ число i переходит в j, соединим i-ю точку верхней строки отрезком с j-й точкой нижней строки — мы получим *граф перестановки* σ (рис. 3). Обозначим через $N(\sigma)$ число точек пересечения отрезков графа (точку, в которой пересекается больше двух отрезков, сосчитаем столько раз, сколько пар отрезков ее содержит). Перестановка σ называется *четной* (*нечетной*), если

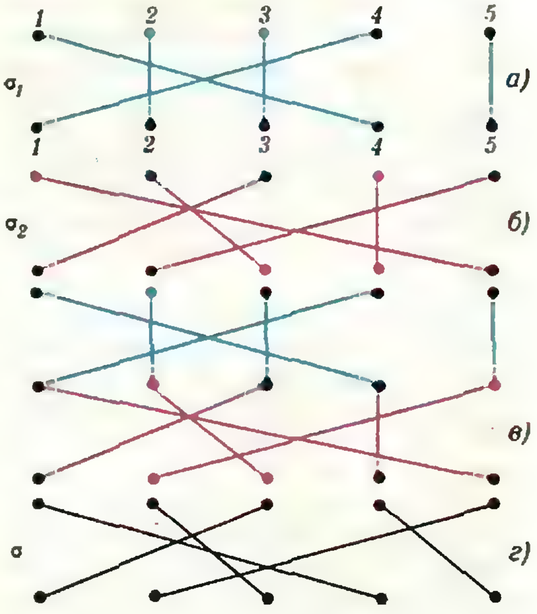


Рис. 3.

число $N(\sigma)$ четно (нечетно). *Знак перестановки* σ определим равенством $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$; $\varepsilon(\sigma)$ равно 1 или -1 в зависимости от того, четна или нечетна перестановка. Выясним, как зависит четность композиции $\sigma_1\circ\sigma_2$ от четностей σ_1 и σ_2. Граф композиции строится очень просто (см. рис. 3): совмещаем нижнюю строку графа перестановки σ_1 (рис. 3, *а*) с верхней строкой графа σ_2 (рис. 3, *б*) — получается «промежуточный» граф (рис. 3, *в*), а затем заменяем каждую ломаную в промежуточном графе на отрезок, соединяющий ее концы (рис. 3, *г*). Число точек пересечения ломаных в промежуточном графе, очевидно, равно $N(\sigma_1)+N(\sigma_2)$. При «распрямлении» ломаных оно может уменьшиться, но его четность сохранится (докажите это самостоятельно). Таким образом, $N(\sigma_1\circ\sigma_2)$ и $N(\sigma_1)+N(\sigma_2)$ — числа одной четности; следовательно,

$$\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2)=(-1)^{N(\sigma_1\circ\sigma_2)}=(-1)^{N(\sigma_1)+N(\sigma_2)}=(-1)^{N(\sigma_1)}\times(-1)^{N(\sigma_2)}=\varepsilon(\sigma_1)\circ\varepsilon(\sigma_2).$$

Другими словами, *композиция двух перестановок четна, если их четности совпадают, и нечетна в противном случае.*

Допустим, что перестановка σ множества из n элементов оставляет неподвижными $n-m$ элементов, а остальные m элементов можно упорядочить так, что первый из них переходит во второй, второй — в третий и, вообще, i-й — в $(i+1)$-й, а m-й элемент — опять в первый. Тогда перестановка σ называется *циклом длины m* или *m-циклом*. Например, перестановки σ_1, σ_2 и σ, графы которых изображены на рисунках 3, *а, б, г,* являются циклами длины 2, 4 и 5 соответственно.

Задача 3. Докажите, что

а) Любая *транспозиция* (то есть 2-цикл) является нечетной перестановкой.

б) Любой n-цикл является композицией $n-1$ транспозиций. Его четность противоположна четности числа n.

в) Любую перестановку можно представить в виде композиции циклов, причем можно обойтись только транспозициями, а в случае четных перестановок — 3-циклами.

Полная система инвариантов волшебного кубика

Назовем *знаком состояния* S число $\varepsilon(S)=\varepsilon(\sigma_S)\circ\varepsilon(\tau_S)$. Оно равно 1 или -1 в зависимости от того, совпадают или нет четности перестановок σ_S и τ_S.

Рассмотрим поворот F любой грани на 90°. Пусть в результате этого поворота волшебный кубик перешел из состояния S в состояние S'. Тогда (задача 2) $\sigma_{S'}=\sigma_S\circ\sigma_F$, $\tau_{S'}=\tau_S\circ\tau_F$. Перестановки σ_F и τ_F — это 4-циклы, поэтому они нечетны (задача 3, *б*) и $\varepsilon(\sigma_F)=\varepsilon(\tau_F)=-1$. Следовательно, $\varepsilon(\sigma_{S'})=\varepsilon(\sigma_S)\times\varepsilon(\sigma_F)=-\varepsilon(\sigma_S)$, $\varepsilon(\tau_{S'})=-\varepsilon(\tau_S)$ и $\varepsilon(S')=\varepsilon(S)$. Итак, знак состояния не меняется при поворотах граней. Это и есть третий инвариант.

Докажем, что *система инвариантов $A(S)$, $B(S)$ и $\varepsilon(S)$ — полная,* то есть, что *совпадение их значений для двух состояний обеспечивает связанность этих состояний.*

Пусть для начала $A(S)=B(S)=0°$, $\varepsilon(S)=1$. Покажем, что состояние S связано с нулевым состоянием S_0. Попробуем воспользоваться алгоритмом из статьи «Алгоритм волшебного кубика» («Квант» № 7 за этот год)*). Первый его этап всегда можно выполнить беспрепятственно. Второй выполним при условии, что число неправильно повернутых средних кубиков четно. Так и будет, ибо сумма углов поворота средних кубиков $B=0°$. Третий этап осуществим всегда. После него волшебный кубик переходит в состояние S', в котором все средние кубики стоят на своих местах, то есть $\tau_{S'}$ — тождественная перестановка. Но $\varepsilon(S')=1$; значит, $\sigma_{S'}$ — четная перестановка, а она разлагается в композицию 3-циклов (задача 3, *в*). Поэтому все угловые кубики мы сумеем расставить по местам. Останется правильно развернуть их. А это можно сделать, пользуясь операциями, указанными в алгоритме, благодаря тому, что сумма углов поворотов $A=0°$.

Пусть далее $A(S_1)=A(S_2)=\alpha$, $B(S_1)=B(S_2)=\beta$, $\varepsilon(S_1)=\varepsilon(S_2)=\varepsilon$. Если $\alpha=\beta=0°$, а $\varepsilon=1$, то оба состояния S_1 и S_2 связаны с нулевым; следовательно, они связаны друг с другом. Наконец, пусть S_1 и S_2 — «незаконные» состояния, например $\alpha=0°$, $\beta=180°$, $\varepsilon=1$. Рассмотрим состояния S_1' и S_2', получающиеся из S_1 и S_2 переворачиванием какого-то одного среднего кубика, скажем сине-белого. Инварианты A и ε при этом, конечно, не меняются, а B становится равным 0°, поэтому S_1' и S_2' связаны. Возьмем волшебный кубик в состоянии S_1 и заклеим синюю грань выбранного среднего кубика белой наклейкой, а белую — синей. Получим состояние S'_1. Переведем его в S'_2 и снимем наклейки — получится состояние S_2! Следовательно, состояния S_1 и S_2 связаны. Аналогично доказывается, что любые два состояния с одинаковыми инвариантами связаны. Таким образом, каждый из $3\times2\times2=12$ наборов значений инвариантов A, B и ε (A принимает три значения: 0°, 120° и 240°, B — два: 0° и 180°, ε — тоже два: 1 и —1) определяет класс попарно связанных состояний с этим набором инвариантов, причем состояния из разных классов не связаны; один из классов образован законными состояниями.

---

*) Разумеется, можно применить и любой другой алгоритм

Задача 4. Докажите, что число состояний во всех классах одинаково и равно $8!\cdot3^8\cdot\cdot11!\cdot2^{12}$.

Задача 5. Докажите, что значения инвариантов A, B, ε зависят только от состояния волшебного кубика, но не от выбора пары граней, направлений на ребрах и нумерации вершин и ребер.

Рекордный алгоритм

В журнале «Сайентифик Американ» (1981 г., № 3) описана общая идея рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, придуманного английским математиком М. Тистлетуэйтом. Пользуясь этим алгоритмом, можно перейти от любого законного состояния к нулевому не более, чем за 52 хода*). Алгоритм Тистлетуэйта коренным образом отличается от алгоритмов, которые описаны в упомянутых нами выше статьях. В общих чертах его схема такова.

Введем три ограничения на допустимые повороты граней:

1) запрещается поворачивать две противоположные вертикальные грани (допустим, правую и левую на рис. 1) на ±90°;

2) запрещается поворачивать какую бы то ни было вертикальную грань на ±90°;

3) запрещаются все повороты граней на ±90°.

Обозначим через Φ_1, Φ_2, Φ_3 совокупность всех операций, удовлетворяющих первому, второму, третьему ограничению соответственно (например, Φ_3 — это всевозможные последовательности поворотов граней на 180°), а через Σ_1, Σ_2, Σ_3 — класс всех состояний, получаемых из нулевого операциями из Φ_1, Φ_2, Φ_3. Ясно, что $\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\Sigma_3\ni S_0$ и что любые два состояния из класса Σ_k связаны друг с другом операцией из Φ_k. Весь алгоритм разбивается на четыре этапа. На первом выполняется такая операция F (без ограничений на ходы), которая переводит исходное состояние S в какое-нибудь состояние $S_1\in\Sigma_1$. В дальнейшем разрешаются только операции из Φ_1. На втором этапе с помощью операции $F_1\in\Phi_1$ волшебный кубик переводится в состояние $S_2\in\Sigma_2$, на третьем с помощью операции $F_2\in\Phi_2$ — в состояние $S_3\in\Sigma_3$. Наконец, на четвертом этапе, вращая грани только на 180°, мы должны получить из состояния S_3 нулевое состояние S_0.

Очевидно, попав после очередного этапа в класс Σ_k, мы его уже не покидаем, так что достижения всех предыдущих этапов сохраняются автоматически. Кроме того, вплоть до последнего этапа не нужно «загонять» маленькие кубики на положенные места. Но основное достоинство этой схемы в том, что она гораздо лучше обычных приспособлена к просчету на ЭВМ. Вероятно, это и сыграло решающую роль при «установлении мирового рекорда».

Прежде, чем составлять по этой схеме алгоритм, надо выяснить, что из себя представляют классы состояний Σ_1, Σ_2, Σ_3. Тут-то нам и пригодятся инварианты. С классами Σ_1 и Σ_2 разобраться легко. Вспомнная свойства *А* и *Б* углов поворотов маленьких кубиков, мы видим, что *углы поворотов средних кубиков* $\beta_S(j)$ *инвариантны относительно операций из* Φ_1 (свойство *Б*), *углы поворотов угловых кубиков* $\alpha_S(i)$ *инвариантны относительно операций из* Φ_2 (свойство *А*). Легко заметить также, что при операциях из Φ_2 четыре средних кубика, расположенных в горизонтальном «среднем слое» между верхней и нижней гранями, могут меняться местами только между собой, так что состав этого слоя остается неизменным.

Задача 6. Докажите, что величины $A(S)$, $\varepsilon(S)$ и $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots, 12$) образуют полную систему инвариантов относительно операций из Φ_1, а $\varepsilon(S)$, $\alpha_i(S)$ ($i=1, \ldots, 8$), $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots, 12$) и состав горизонтального среднего слоя — относительно операций из Φ_2.

Столь же просто убедиться, что при операциях из Φ_3, кроме инвариантов, перечисленных в задаче 6, сохраняются также составы двух вертикальных средних слоев и составы двух четверок угловых кубиков, образующих правильные тетраэдры (на рис. 1 и одну из них входят угловые кубики 1, 3, 5, 7, а в другую — 2, 4, 6, 8). Но это еще не все! Имеется еще один инвариант относительно набора операций Φ_3, описывающий зависимость между перестановками угловых кубиков внутри четверок. Возьмем любые два кубика одной из четверок. Они оба прилежат ровно к одной из граней куба. Если это правая или левая грань, то скажем, что эти кубики занимают *1-ю позицию,* если передняя или задняя — то *2-ю,* если верхняя или нижняя — то *3-ю*. Ясно, что вторая пара кубиков этой четверки всегда занимает ту же позицию, что и первая. Для простоты ограничимся состояниями S, у которых состав четверок «правильный» (как в нулевом состоянии). Рассмотрим первую четверку и определим перестановку p_S множества $\{1, 2, 3\}$, полагая $p_S(i) = j$, если пара кубиков этой четверки, занимавшая i-ю позицию в состоянии S_0, занимает j-ю позицию в состоянии S. Аналогично, для второй четверки определим перестановку q_S. Наш последний инвариант — это перестановка $\delta_S = p_S \circ q_S^{-1}$*). Он может принимать любое из $3! = 6$ значений.

---

*) В том же журнале сообщается, что в действительности всегда достаточно 23 ходов (!), причем уменьшить это число нельзя. Судя по всему, пока столь короткий реальный алгоритм решения кубика не найден.

Задача 7. Докажите, что δ_S действительно инвариант относительно Φ_3 и что вместе с инвариантами, перечисленными выше, он образует полную систему для Φ_3.

Теперь ясно, что на каждом этапе алгоритма следует стремиться к тому, чтобы значения очередной порции найденных нами инвариантов стали такими же, как для нулевого состояния.

Мы предлагаем читателям самостоятельно разработать алгоритм или его отдельные этапы по указанной схеме и прислать в редакцию свои варианты. Лучшие из них будут опубликованы.

Поиграем в другие игры

Даже неискушенные в математике люди сразу признают в волшебном кубике «родственника» знаменитой головоломки «15» Сэма Лойда, хотя внешне они совершенно не похожи. Сходство заключено в общей структуре этих игр, которую можно описать так: имеется некая система, способная пребывать в различных *состояниях,* среди которых одно («нулевое») состояние выделено. Задача состоит в том, чтобы перевести произвольное заданное состояние в нулевое, пользуясь определенным набором стандартных преобразований системы (в случае волшебного кубика — поворотами граней на ±90° или 180°), которые можно назвать *элементарными операциями* или *ходами.* При этом любой ход *обратим* (то есть, сделав его, мы всегда можем одним ходом вернуться в исходное состояние).

Так же, как и для волшебного кубика, в общем случае определяются понятия операции, связанных состояний, инварианта. Еще одно полезное понятие — *орбита состояния:* так называют множество всех состояний, связанных с данным. В частности, как мы видели, множество состояний волшебного кубика распадается на 12 орбит.

Мы предлагаем читателю ряд задач, посвященных исследованию игр указанного типа. В задачах 8—10 требуется доказать некоторые общие свойства этих игр (приводятся только их формулировки). В задачах 11—16 рассматриваются разные примеры, причем дается только описание игры, а ответить нужно на следующие вопросы: 1) каков полный набор инвариантов данной игры? 2) как перевести одно из двух связанных состояний в другое? 3) каково число орбит и состояний в одной орбите?

Задачи

8. Будем писать $S_1 \simeq S_2$, если состояния S_1 и S_2 связаны. Тогда для любых состояний S_1, S_2, S_3 1) $S_1 \simeq S_1$, 2) $S_1 \simeq S_2 \Rightarrow S_2 \simeq S_1$, 3) $S_1 \simeq S_2$, $S_2 \simeq S_3 \Rightarrow S_1 \simeq S_3$. Другими словами, отношение $S_1 \simeq S_2$ есть отношение эквивалентности.

9. Орбиты любых двух состояний S_1 и S_2 либо совпадают (если $S_1 \simeq S_2$), либо не имеют общих элементов.

10. Если всякая операция, переводящая в себя хотя бы одно состояние, переводит в себя и любое другое состояние, то число N_0 состояний во всех орбитах одинаково, а число всех состояний $N = N_0 \cdot k$, где k — число орбит. Проверьте, что указанное свойство операций справедливо для волшебного кубика.

11. Исследуйте игры, отличающиеся от «волшебного кубика» только набором элементарных операций: 1) разрешено вращать только 2 (3, 4 или 5) грани; 2) ход — это поворот пары противоположных граней (одной по, а другой против часовой стрелки) на один и тот же угол; 3) соответственно, обе грани по часовой стрелке.

(Окончание см. на с. 48)

---

*) Здесь q_S^{-1} обозначает обратное отображение к отображению q_S.

В. Майер

Свет, воздух и вода

Преломление при переходе из воды в воздух

Почти во всех книгах по физике в том месте, где говорится о преломлении света, есть рисунок, на котором изображены вода, точечный источник света внутри нее и лучи, выходящие из источника и преломляющиеся на границе вода — воздух. Например, так, как показано на рисунке 158 из учебника по физике для 10 класса («Физика 10», М., «Просвещение», 1981). Но, конечно же, гораздо интереснее поставить опыт и пронаблюдать само явление, а не рисунок.

Прежде всего изготовьте соответствующий осветитель. Возьмите непрозрачную пластмассовую баночку диаметром 40—50 мм и высотой 20—30 мм. В стенке баночки ножовочным полотном сделайте ряд равноотстоящих друг от друга одинаковых прорезей шириной примерно 1—1,5 мм. Вы получите кожух для осветителя.

В нижней части прямоугольной пластинки (из алюминия или пластмассы) просверлите отверстие по диаметру патрона лампочки для карманного фонаря. Одну поверхность пластинки покрасьте в белый цвет. (Проще всего это сделать, побрызгав поверхность белой нитроэмалью, которая продается в аэрозольной упаковке.) Или просто наклейте на пластинку лист белой бумаги.

К лампочке припаяйте проводники, вставьте ее в отверстие и обмажьте патрон лампочки с задней поверхности пластинки пластилином. Эта обмазка будет фиксировать лампочку в пластинке и одновременно изолировать место соединения лампочки с проводниками.

Подсоедините выводы лампочки к батарейке для карманного фонаря. Наденьте на лампочку изготовленный кожух так, чтобы лампочка оказалась на его оси, и прикрепите кожух к пластинке. На белой поверхности пластинки вы должны наблюдать световые пучки, расходящиеся от осветителя и идущие вверх в пределах угла, не превышающего π. Возможно, вам придется несколько подрегулировать положение кожуха или подправить щели в его стенке. Поэтому кожух удобнее всего закрепить на пластинке пластилином.

Разумеется, если вы захотите сделать более основательный прибор (скажем, для школьного кабинета физики), то придется придумать и осуществить более надежный способ крепления кожуха. Но прежде чем делать это, попробуйте простейший вариант, описанный здесь.

После того как прибор изготовлен, приступайте к опыту. Опустите пластинку с осветителем в сосуд с водой так, чтобы пластинка была расположена вертикально. Лучше всего использовать сосуд с плоской передней стенкой, например — аквариум. Через прозрачную стенку сосуда вы будете наблюдать примерно такой ход световых пучков, который показан на рисунке 1 (здесь *1* — сосуд с водой, *2* — осветитель, *3* — пластинка с белой поверхностью).

Если уж вы сделали прибор и пронаблюдали явление, то проведите и простейшие измерения. Ставя карандашом точки, отметьте на плас-

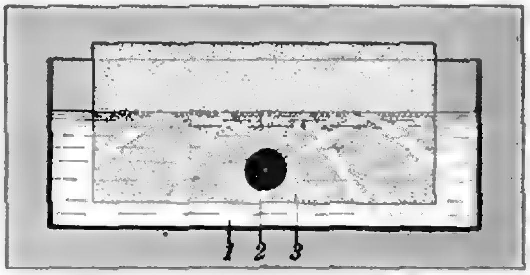


Рис. 1.

тинке положение поверхности воды, места выхода световых пучков из воды и положение пучков света на некотором расстоянии от поверхности воды.

Выньте пластинку из воды, высушите ее и карандашом по линейке нанесите ход световых пучков от щелей осветителя до границы раздела сред и далее — в воздух. Линией обозначьте границу раздела и в точках падения пучков восстановите к ней перпендикуляры. Измерьте транспортиром различные углы падения и преломления света и на основе этих экспериментальных результатов найдите среднее значение показателя преломления воды.

Отражение от нагретой воды

В большой сосуд с холодной водой (это может быть стеклянная банка, поставленная на лист белой бумаги, или тазик с белым дном) опустите жестяную банку, например из-под кофе, и каким-либо образом закрепите ее в вертикальном положении (рис. 2). Чем больше будет банка, тем лучше (мы использовали банку диаметром 80 мм и высотой 120 мм, и это, пожалуй, минимальные подходящие для опыта размеры).

Вскипятите воду, быстро вылейте кипяток в банку и посмотрите сверху сквозь воду в большом сосуде вдоль боковой поверхности банки — вы увидите ее блестящей как зеркало.

Опыт получается особенно эффектным, когда поверхность банки — черная. Если вам не удастся найти такую банку, возьмите любую и оберните ее черной бумагой от фотопакета (бумагу можно закрепить, например, липкой лентой). При заполнении банки горячей водой бумага будет ярко блестеть.

Очевидно, что в этом опыте наблюдается полное отражение света. Вопрос в том, почему это происходит.

Может быть, свет отражается от слоя воздуха на поверхности банки? Оказывается, нет. И жесть, и бумага хорошо смачиваются водой, так что никакой воздушной пленки не образуется.

В чем же дело? Повторите опыт еще раз. Теперь, прежде чем заливать в банку кипяток, опустите палец в холодную воду вблизи стенки большого сосуда. Налив в банку кипяток, приближайте палец к банке — вы будете ощущать постепенное увеличение температуры воды. Продолжайте наблюдения, и вы убедитесь, что полное отражение света исчезнет тогда, когда вся толща воды в радиальном направлении широкого сосуда прогреется примерно до одной и той же температуры.

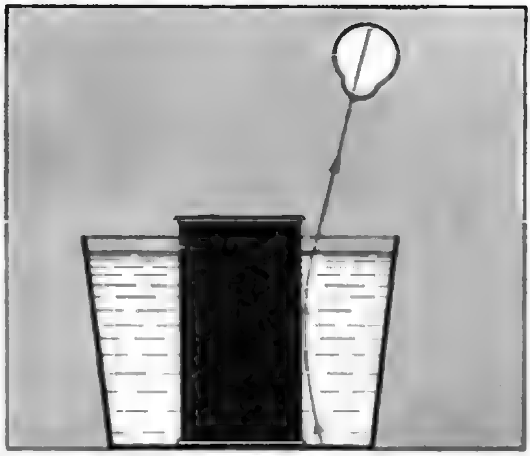


Рис. 2.

Так вот в чем разгадка! Полное отражение в условиях данного опыта происходит потому, что вода во внешнем сосуде прогрета неравномерно. Вблизи банки с кипятком температура воды наибольшая, а плотность — наименьшая. По мере удаления от банки температура воды уменьшается, а плотность — увеличивается. При этом увеличивается и оптическая плотность воды, или, другими словами, растет ее показатель преломления. Свет, идущий от дна сосуда, постепенно переходит из области с большей в область с меньшей оптической плотностью, поэтому и наблюдается его полное отражение.

В отличие от многих опытов с полным отражением, в данном случае нет резкой границы между средами с разными оптическими плотностями, следовательно, нет и отражения света в строгом смысле этого слова. Свет в оптически неоднородной среде с плавным изменением оптической плотности распространяется криволинейно (как показано на рисунке 2), загибаясь в область больших значений показателя преломления.

задачник Кванта

Задачи

M756—M760; Ф768—Ф772

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M756, M757» или «Ф768».

Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

M756. В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно (быть может, с пересадками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

M757. Из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... нетрудно выделить арифметическую прогрессию длины три: 1/2, 1/3, 1/6. Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию

а) длины 4?

b) длины 5?

с) длины k, где k — любое натуральное число?

Г. Гальперин

M758*. Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из последовательности 1, 2, 3, ... 1982, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел? (9)

Л. Курляндчик

M759. Внутри выпуклого четырехугольника, у которого сумма шести попарных расстояний между вершинами (то есть сумма длин всех сторон и диагоналей) равна S_1, расположен другой, для которого эта сумма равна S_2.

а) Может ли величина S_2 быть больше S_1?

b) Докажите, что $S_2<4S_1/3$.

с) Докажите, что если внутри произвольного тетраэдра с суммой длин ребер S_1 расположен другой, для которого эта сумма равна S_2, то $S_2<4S_1/3$. (10)

П. Гусятников

M760. С замкнутой ломаной $A_1A_2...A_m$, где m нечетно, проделывается такая операция: середины ее звеньев соединяются m отрезками через одну (середина A_1A_2 — с серединой A_3A_4, A_2A_3 — с A_4A_5, ..., $A_{m-1}A_m$ — с A_1A_2, A_mA_1 — с A_2A_3). С полученной ломаной вновь проделывается эта же операция и т. д. Докажите, что

из любой m-звенной ломаной
a) при $m=5$ — через два шага (рис. 1)
b) при $m=7$ — через три шага
c)* при любом нечетном m — через некоторое (зависящее от m) число шагов
получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной. (9)

А. Келарев

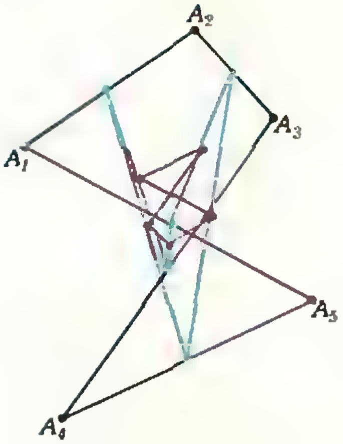


Рис. 1.

Ф768. По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (рис. 2). При какой скорости v поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной. Размеры волчка указаны на рисунке 2. (8)

А. Зильберман

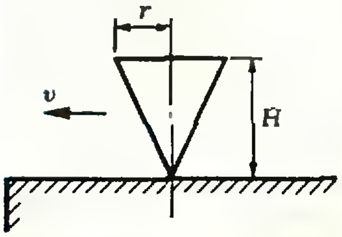


Рис. 2.

Ф769. Массивный цилиндр радиуса R опирается на две подставки одинаковой высоты (рис. 3). Одна подставка неподвижна, а другая выезжает из-под цилиндра со скоростью v. С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $R\sqrt{2}$? Считать, что в начальный момент подставки располагались очень близко друг к другу; трение между цилиндром и подставками отсутствует. (9)

С. Кротов

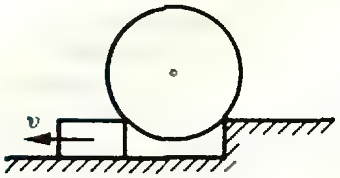


Рис. 3.

Ф770. В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда: $m_в=m_л=1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0=10^5$ Па до $p_1=2{,}5\cdot10^6$ Па. Определить, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до $14\cdot10^6$ Па.

1) Решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми.

2) Оцените поправку, которую дает учет сжимаемости.

Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до $20\cdot10^6$ Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды.

Удельные теплоемкости воды и льда — $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda=3\cdot10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho_л=0{,}9\rho_в$, где $\rho_в$ — плотность воды. (9)

А. Буздин

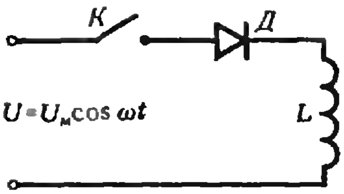


Рис. 4.

Ф771. В схеме, приведенной на рисунке 4, диод Д и катушка с индуктивностью L в момент времени $t=0$ при помощи ключа K подключаются к источнику переменного напряжения $u=U_м \cos \omega t$. Определить силу тока в катушке как функцию времени; построить график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. (10)

В. Скороваров

Ф772. Межпланетный корабль совершил мягкую посадку на Луну. Корабль имеет форму диска радиуса $r=4$ м; его поверхность покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с диаметром объектива $D=6$ м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения?

Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) равна $k=0{,}05$.

Расстояние от Земли до Луны $L=4\cdot10^5$ км; фотографирование ведется в свете с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм. Оценить, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА. (10)

С. Козел

Problems

M756—M760; P768—P772

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these

M756. There are more than 100 cities in a certain country, not counting the capital. The latter is joined by direct flights to 100 cities; each of the remaining cities is joined by direct flights to exactly 10 cities. It is known that one can fly from any city to any other (eventually, with transfers). Prove that half the airlines flying from the capital can be closed down so that it will still be possible to fly from any city to any other.

M757. It is easy to see that the sequence 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... contains a three-term subsequence which is an arithmetical progression: 1/2, 1/3, 1/6. Is it possible to find another subsequence, which is also an arithmetical progression,

a) of length 4?
b) of length 5?
c) of length k, where k is any natural number?

G. Galperin

problems are first publications. The problems from this issue were proposed in the final round of the All-Union mathematical and physical olympiad this year. The number in brackets indicates the grade of the students to whom the problem was proposed. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 31st, 1982 to the following adress: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ 15, «ФИЗМАТЛИТ», «КВАНТ».

Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

M758*. What least amount of numbers is it necessary to cross out from the sequence 1, 2, 3, ..., 1982 so that none of the remaining numbers be the product of two other remaining numbers? (9)

L. Kurlyandchik

M759. A convex quadrilateral, for which the sum of all six distances between the vertices (i. e. the sum of lengths of the sides and diagonals) is S_1, contains another one, for which this sum is S_2.

a) Can S_2 be larger than S_1?

b) Prove that $S_2 < 4S_1/3$.

c) Prove that if an arbitrary tetrahedron, for which the sum of lengths of the six edges is S_1, contains another one, for which this sum is S_2, then $S_2 < 4S_1/3$ (10)

P. Gusiatnikov

M760. The following operation is performed on the closed polygonal line $A_1A_2 ... A_m$, where m is odd: the centres of the segments are joined by m segments, skipping a centre each time (i. e. the centre of A_1A_2 is joined to that of A_3A_4, of A_2A_3 to A_4A_5, ..., of $A_{m-1}A_m$ to A_1A_2 of A_mA_1 to A_2A_3). The same operation is performed on the polygonal line thus obtained, etc. Prove that for any closed polygonal line with m vertices we get

a) in two steps, when $m=5$ (see figure Рис. 1),

b) in three steps, when $m=7$,

c)* in a certain number of steps (depending on m), for an arbitrary odd m,

a polygonal line which is similar (even homothetic) to the original one. (9)

A. Kelarev

P768. A top of conical shape, rapidly spinning about its axis, moves on a smooth table (see figure Рис. 2). For what velocity v of its motion will the top jump off the table without hitting its edge? The axis of the top is vertical; the measurements of the top are shown on the figure. (8).

A. Zilberman

P769. A massive cylinder of radius R is placed on two supports of the same height, one of which is fixed, while the other moves out from under the cylinder with velocity v (see figure Рис. 3). What is the force exerted by the cylinder on the fixed support at the moment when the distance between the supports is $R\sqrt{2}$? Assume that at the initial moment the supports were very close to each other and that there is no friction between the cylinder and the supports. (9)

S. Krotov

P770. In a thermoisolated cylinder a light piston compresses a mixture of equal amounts of water and ice: $m_w = m_i = 1$ kg. The pressure on the piston slowly increases from the initial value $p_0 = 10^5$Pa to $p_1 = 2.5 \times 10^8$ Pa. Determine how much ice will melt and find the work carried out by the external force. It is known that in order to decrease the temperature of ice melting by 1°C, the pressure must be increased to 14×10^6 Pa.

1) Solve the problem, assuming that water and ice are incontractible.

2) Estimate the correction needed to take contractibility into account. It is known that in order to decrease the volume of a certain amount of water by 1% pressure must be increased to 20×10^6 Pa. Assume in your estimate that the contractibility of ice is half that of water. The specific heat capacities of water and ice are

$$c_w = 4.2 \times 10^3 \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}),\ c_i = 2.1 \times 10^3 \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

the specific heat of ice melting is $\lambda = 3 \times 10^5$J/kg, the density of ice $\varrho_i = 0.9\ \varrho_w$, where ϱ_w is the density of water (9).

A. Buzdin

P771. In the circuit shown on figure Рис. 4, the diod and the solenoid of inductivity L are connected by means of the

key K at the moment $t=0$ to a source of alternating tension $u=U_м \cos \omega t$. Determine the current in the solenoid as a function of time. Construct the graph of this function. The diod and the solenoid are assumed ideal, the inner resistance of the source may be neglected. (10).

V. Skorovarov

P772. An interplanetary space-ship made a soft landing on the Moon. The ship has the form of a disk of radius $r=4$m, its surface is covered by black (non-reflecting) paint. Can the landing on the Moon be observed from the largest telescope in the world, the Soviet telescope BTA with object lens diameter $D=6$m, if a photographic plate is placed in the focal plane to take a picture of the area of the Moon where the landing is to take place. Assume that clearly noticeable contrast of the image on the photo (i. e. the minimal relative difference of the dark and light parts of the image) is $k=0{,}05$. The distance from Earth to Moon is $L=4\times10^5$ km; the picture is taken in light with wavelength $\lambda=0.6$ mkm. Estimate the size of letters arranged by astronauts on the moon surface that can be read from the Earth using the BTA telescope. (10)

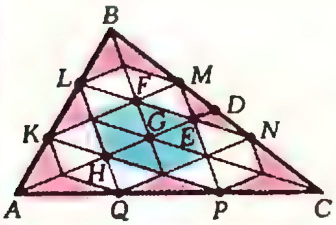
S. Kozel

Решения задач

M721—M730; Ф733—Ф742

M721. *Каждая сторона треугольника поделена на 3 равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.*

О т в е т: $\frac{2}{9}S$. Покажем, что данный треугольник можно разбить на 27 равновеликих треугольников, 6 из которых составляют рассматриваемый в задаче шестиугольник. Пусть K, L, M, N, P, Q — точки, делящие стороны треугольника ABC, как указано в условии (см. рисунок). Заметим, что отрезки KM и QN, QL и PM, KP и LN параллельны соответствующим медианам данного треугольника. Например, отрезок KM параллелен медиане AD, потому что $\frac{|BK|}{|BA|}=\frac{|BM|}{|BD|}=\frac{2}{3}$ и, следовательно, треугольники BKM и BAD гомотетичны. Проводя из точек деления остальные отрезки, параллельные медианам, а также сами медианы, мы получим нужное разбиение.*) В самом деле, шестиугольник разбивается на 6 конгруэнтных треугольников (на рисунке — голубые), еще 12 треугольников (белые) конгруэнтны им, а остальные 9 (красные) им равновелики. (Скажем, площади треугольников MEN и MFE равны, потому что их стороны EN и EF конгруэнтны, а высоты, опущенные на эти стороны из вершины M, совпадают.) Таким образом, площадь шестиугольника равна $6\cdot\frac{S}{6+12+9}=\frac{2}{9}S$.



А. Егоров

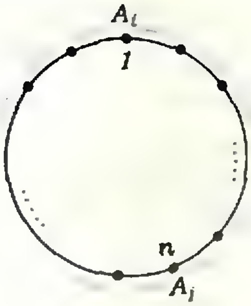
M722. *В точках A_1, A_2, ..., A_n, расположенных по окружности, расставляются в некотором порядке числа 1, 2, ..., n. а) Докажите, что сумма n модулей разностей соседних чисел не меньше 2n—2. б) Для какого количества расстановок эта сумма равна 2n—2?*

◆

Пусть числа 1 и n стоят в точках A_i и A_j соответственно. Будем вычислять разности соседних чисел, пользуясь рисунком: число, стоящее в начале каждой стрелки, вычитается из числа, стоящего в ее конце.

---

*) Чтобы решение стало безупречным, надо еще доказать, что построенные нами отрезки, действительно, пересекаются по три, как показано на рисунке. Пусть, например, H — точка пересечения $[KP]$ и $[LQ]$. Тогда треугольники LHP и BGC гомотетичны с центром A, следовательно, $H\in[AD]$ (G — точка пересечения медиан). Аналогично точка E пересечения $[LN]$ и $[MP]$ лежит на AD, потому что треугольники MEN и BGC гомотетичны с центром D, и т. д.



а) Очевидно, сумма разностей соседних чисел, стоящих на каждой из двух дуг с концами A_i и A_j, равна $n-1$. Поскольку сумма модулей нескольких чисел не меньше модуля суммы этих чисел, сумма модулей всех разностей не меньше $2|n-1|=2n-2$. Заметим, что равенство возможно лишь в случае, когда все разности положительны.
б) Ответ: для $n\cdot 2^{n-2}$ расстановок. Пусть сумма модулей разностей соседних чисел равна $2n-2$. Мы уже видели, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все разности были положительны. Иначе говоря, на каждой из дуг от A_i до A_j числа должны возрастать в направлении, указанном на рисунке стрелками, от 1 до n. Любая такая расстановка полностью определяется заданием точки A_i, в которую ставят единицу, и набора чисел, стоящих на левой дуге между 1 и n (остальные числа однозначно расставляются на правой дуге). Точку A_i можно выбрать n способами. Набор чисел на левой дуге — это произвольное подмножество (возможно, пустое) множества $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ из $n-2$ элементов. Его можно выбрать 2^{n-2} способами. Поэтому общее число расстановок, удовлетворяющих условию задачи, равно $n\cdot 2^{n-2}$.

◆

А. Разборов

М723*. *Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не является степенью натурального числа (a^k, где $k\geqslant 2$)?*

Первое решение. Приведем сначала чисто «олимпиадное» решение задачи, принадлежащее С. Конягину: требуемой последовательностью является последовательность $2, 2^2 3, 2^2 3^2 5, 2^2 3^2 5^2 7, \ldots, 2^2 3^2 \ldots p_{n-1}^2 p_n, \ldots$, где p_n — n-е простое число. Никакая сумма чисел, составленная из членов этой последовательности, не является степенью натурального числа, так как любая из таких сумм делится на p_k, где k — наименьший из номеров членов последовательности, входящих в эту сумму, и не делится на p_k^2.

Второе решение. Додуматься до примера из первого решения довольно трудно. Поэтому мы покажем, как можно доказать существование последовательности с требуемыми свойствами, не выписывая самой последовательности («чистая» теорема существования).

В этом решении мы будем пользоваться понятием плотности множества.

Определение. Пусть $A\subset\mathbf{N}$ и $\nu_n(A)$ — число элементов множества A, не превосходящих данного числа $n\in\mathbf{N}$. Если существует предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu_n(A)}{n}=d(A)$, то число $d(A)$ называется *плотностью множества* A.

Например, плотность арифметической прогрессии $A=\{a+dn\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ равна $\dfrac{1}{d}$, а геометрической — $A=\{bq^n\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ равна 0. Равна нулю и плотность любого конечного множества.

Легко доказать, что плотность объединения нескольких множеств нулевой плотности также равна нулю и что плотность множества $A\pm c$, полученного из множества A нулевой плотности сдвигом на $\pm c$ $(A\pm c=\{a\pm c\,|\,a\in A\})$, равна нулю.

Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма. *Если $d(A)=0$, то существует такое бесконечное множество B, что никакая сумма попарно различных чисел из B не принадлежит A и $B\cap A=\varnothing$.*

Доказательство. Будем строить множество B по индукции. Так как $d(A)=0$, существует натуральное число $b_1\notin A$. Это и будет первый элемент множества B. Пусть выбраны k элементов множества B: $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_s$ всевозможные суммы, образованные из этих чисел, и рассмотрим множества $A_i=A-r_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Каждое из них имеет нулевую плотность, и поэтому их объединение $V=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_s$ также имеет нулевую плотность. Следовательно, существует натуральное число b_{k+1}, не принадлежащее множествам V и A.

Ясно, что никакая из сумм чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$ не принадлежит множеству A. Существование множества B доказано.

В силу леммы для утвердительного ответа на вопрос задачи достаточно доказать, что множество $S=\{a^k \mid a>1, k>2\}$ всевозможных степеней натуральных чисел имеет нулевую плотность.

Оценим количество $\nu_n(S)$ степеней, не превосходящих числа n. Если $a^k<n$, то $a<\sqrt[k]{n}$. Поэтому натуральных чисел, k-я степень которых не превосходит n, имеется не более, чем $[\sqrt[k]{n}]$, где $[x]$ — целая часть числа x. В частности, при $k>m=[\log_2 n]$ существует только одно такое число — единица. Следовательно,

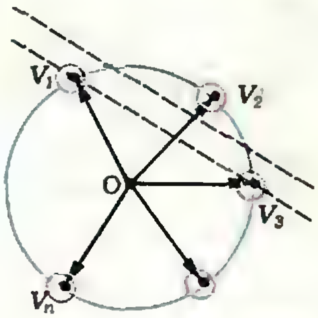
$$\nu_n(S)<\frac{[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\ldots+[\sqrt[m]{n}]}{n}<\frac{\sqrt{n}\log_2 n}{n}=\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$d(S)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(S)<\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}=0.$$

Л. Гурвиц

М724. *По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлениям. Докажите, что, как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.*



◆

Пусть в начальный момент черепахи находились в точках $A_1, \ldots, A_n$, расположенных в круге радиуса R с центром в точке O. Отложим от точки O векторы скоростей черепах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Ясно, что концы $V_1, \ldots, V_n$ этих векторов являются вершинами некоторого выпуклого n-угольника, вписанного в окружность радиуса v, равного величине скорости любой черепахи. Построим круги радиуса ε с центрами в точках $V_1, \ldots, V_n$. При достаточно малом ε любой многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$, вершины которого принадлежат этим кругам, очевидно, тоже будет выпуклым. (В качестве ε можно взять, например, половину наименьшего из расстояний от точек V_i до прямых, соединяющих соседние с V_i вершины, — см. рисунок.)

Пусть через время T черепахи оказались в точках $A'_1, \ldots, A'_n$, и пусть при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{1}{T}$ эти точки переходят в точки $B_1, \ldots, B_n$. Докажем, что при достаточно большом T точки $B_1, \ldots, B_n$ попадают в построенные нами круги, то есть, что $|V_iB_i|<\varepsilon$ при $i=1, \ldots, n$. Вектор $\overrightarrow{A_iA'_i}$, на который переместилась i-я черепаха за время T, равен $T\vec{v}_i$. Поэтому $\overrightarrow{OA'_i}=\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{Tv_i}$, а $\overrightarrow{OB_i}=\frac{1}{T}\overrightarrow{OA'_i}=\vec{v}_i+\frac{1}{T}\overrightarrow{OA_i}=\overrightarrow{OV_i}+\frac{1}{T}\overrightarrow{OA_i}$. Следовательно, $|V_iB_i|=\frac{1}{T}|OA_i|\leqslant R/T$. Значит, при $T>\frac{R}{\varepsilon}$ точки B_i попадут в круги радиуса ε с центрами $V_1, \ldots, V_n$, многоугольник $B_1 \ldots B_n$ будет выпуклым, а потому и точки $A'_1, \ldots, A'_n$, в которых оказались черепахи через время T, служат вершинами выпуклого многоугольника.

В. Прасолов

М725.* *Положим* $r_n=\cos^n\frac{\pi}{7}+\cos^n\frac{3\pi}{7}+\cos^n\frac{5\pi}{7}$. *Найдите а)* r_1 *и* r_2, *б)* r_3 *и* r_4. *в) Докажите, что* r_n *— рациональное число при любом* n.

◆

Пусть $c_k=\cos\frac{\pi k}{7}$ при $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Заметим, что c_k — проекция на ось Ox единичного вектора $\vec{e}_k$, образующего угол $\frac{\pi k}{7}$ с лучом $x>0$, $y=0$ (см. рисунок). Легко убедиться в том, что $c_{7+m}=c_{7-m}=-c_m$.

а) Нетрудно доказать, что

$$\vec{e}_1+\vec{e}_3+\vec{e}_5+\vec{e}_7+\vec{e}_{-5}+\vec{e}_{-3}+\vec{e}_{-1}=0 \qquad (1)$$

(одно из доказательств: при повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ эта система векторов переходит в себя; при этом сумма не меняется и, следовательно, равна $\vec{0}$).

Из (1) сразу следует, что $c_7+2c_1+2c_3+2c_5=0$, то есть

$$r_1=c_1+c_3+c_5=-\frac{1}{2}c_7=\frac{1}{2}.$$

Пользуясь известной формулой $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, получим $2c_1^2=1+c_2$, $2c_3^2=1+c_6$, $2c_5^2=1+c_{10}$, а так как $c_2=-c_5$, $c_6=-c_1$, $c_{10}=-c_3$, находим

$$r_2=c_1^2+c_3^2+c_5^2=\frac{1}{2}(3-c_1-c_3-c_5)=\frac{5}{4}.$$

б), в) Докажем, что c_1, c_3, c_5 — корни многочлена третьей степени с рациональными коэффициентами. Рассмотрим многочлен

$$p(x)=(x-c_1)(x-c_3)(x-c_5)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

корни которого — c_1, c_3 и c_5. Выразим коэффициенты этого многочлена через его корни. Раскрывая скобки, получим

$$a_1=-(c_1+c_3+c_5)=-r_1=-\frac{1}{2};$$

$$a_2=c_1c_3+c_3c_5+c_5c_1=\frac{1}{2}((c_1+c_3+c_5)^2-$$

$$-c_1^2-c_3^2-c_5^2)=\frac{r_1^2-r_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a_3=-c_1c_3c_5=-c_1c_2c_4=-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Итак, для каждого $j=1$, 3, 5 выполнено равенство

$$c_j^3-\frac{1}{2}c_j^2-\frac{1}{2}c_j+\frac{1}{8}=0.$$

Значит, для любого $n\geqslant 2$

$$c_j^{n+1}=\frac{1}{2}c_j^n+\frac{1}{2}c_j^{n-1}-\frac{1}{8}c_j^{n-2}.$$

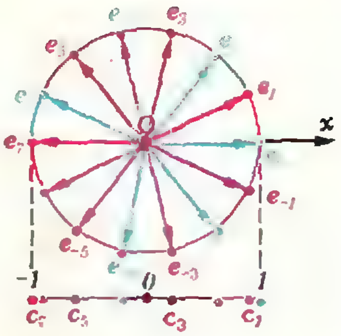
Сложив три таких равенства (при $j=1$, 3, 5), получим для $r_n=c_1^n+c_3^n+c_5^n$ рекуррентную формулу

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}r_{n-1}-\frac{1}{8}r_{n-2},$$

позволяющую вычислить r_{n+1}, если известны r_n, r_{n-1}, r_{n-2}. Поскольку, в силу а), $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{5}{4}$, а $r_0=3$, находим

$$r_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{1}{2},$$

$$r_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{16}.$$



Ясно, что числа r_n при каждом n рациональны. (Подробнее о примененной в решении идее см. статью «Рассмотрим разность», «Квант», 1981, № 4.)

Н. Васильев

◆

M726. *Точка внутри правильного $2n$-угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных а) для $n=4$, б) для $n=3$, в) для произвольного натурального n.*

Так как в правильном многоугольнике длины всех сторон равны, достаточно доказать, что сумма длин высот красных треугольников равна сумме длин высот голубых треугольников (см. рисунки).

Если n четно, то к противоположным сторонам $2n$-угольника примыкают треугольники одного цвета, поэтому сумма длин высот таких треугольников равна расстоянию между этими сторонами (рис. 1). Разбивая треугольники на пары, прилегающие к противоположным сторонам, сразу получаем утверждение задачи.

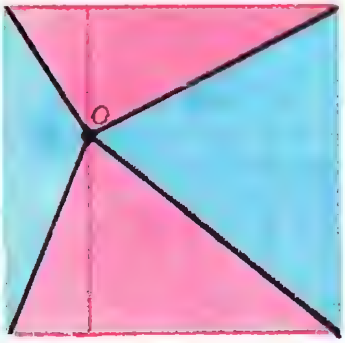


Рис. 1.

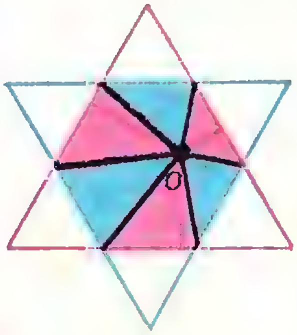


Рис. 2

При нечетном n, продолжив «красные» стороны $2n$-угольника, получим правильный n-угольник (рис. 2). Построенный таким же образом голубой n-угольник конгруэнтен красному. Площадь голубого n-угольника равна сумме длин высот голубых треугольников, умноженной на половину длины его стороны. То же верно и для красного n-угольника. Отсюда вытекают равенство сумм длин высот голубых и красных треугольников и вместе с этим утверждение задачи.

В. Прасолов

◆

M727. *Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+2abc<2$, где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2.*

Если a, b и c — длины сторон треугольника периметра 2, то $a<1$, $b<1$, $c<1$ (в противном случае одна из сторон треугольника будет больше суммы двух других). Поэтому $(1-a)(1-b)(1-c)>0$. Раскрывая скобки и преобразуя левую часть, получим

$$1-(a+b+c)+ab+bc+ac-abc=$$

$$=-1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+ab+bc+ac-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc=$$

$$=-1+\frac{(a+b+c)^2}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc=$$

$$=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-abc>0,$$

а это и значит, что $a^2+b^2+c^2<2(1-abc)$.

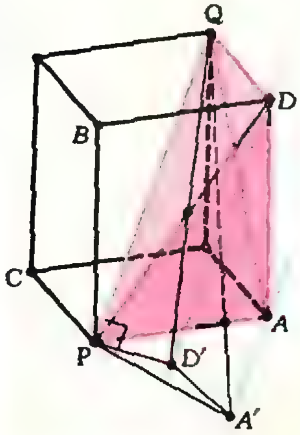
А. Егоров

◆

M728. *Пусть A, B, C — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной P, а Q — вершина, противоположная P. Докажите, что а) расстояния*

Плоскости PQA, PQB и PQC разрезают параллелепипед на 6 долек — тетраэдров. (Один из них — тетраэдр $PQAD$ — выделен на рисунке красным цветом.) Мы докажем, что объем каждой «дольки» равен $\frac{1}{3}dS$.

от точек A, B, C до прямой PQ могут служить длинами сторон некоторого треугольника; б) площадь S этого треугольника, объем V параллелепипеда и длина d его диагонали PQ связаны соотношением $V=2dS$.



Рассмотрим, например, тетраэдр $PQAD$. Его объем не изменится, если сдвинуть вершину A по прямой AA', параллельной диагонали PQ. В самом деле, вершины P, Q и D при этом остаются неподвижными, а расстояние от вершины A до плоскости PQD не меняется. Ясно, что и при перемещении точки D вдоль прямой DD', параллельной (PQ), объем тетраэдра сохранится. Сдвинем теперь вершины A и D в точки A' и D' так, чтобы плоскость $PA'D'$ стала перпендикулярной диагонали PQ (см. рисунок).

а) Поскольку отрезок $A'P$ перпендикулярен к прямой PQ, его длина равна расстоянию от точки A' до этой прямой, то есть расстоянию от точки A до (PQ). Точно так же, длина отрезка $D'A'$ равна расстоянию от точки D до прямой AA'. При параллельном переносе $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AP}$ точка D переходит в B, а прямая AA' — в (PQ), поэтому $|D'A'|$ — это расстояние от точки B до (PQ). Аналогично доказывается, что $|PD'|$ — это расстояние от точки C до (PQ). Таким образом, длины сторон треугольника $PA'D'$ равны расстояниям от точек A, B, C до прямой (PQ). По условию его площадь равна S.

б) Как мы видели, объем тетраэдра $PQAD$ равен объему тетраэдра $PQA'D'$. Площадь основания $PA'D'$ этого тетраэдра равна S, а высота равна длине d ребра PQ, так как оно перпендикулярно основанию. Таким образом, $V_{PQAD}=\frac{1}{3}dS$, а объем параллелепипеда $V=6\cdot\frac{1}{3}dS=2dS$.

В. Дубровский

◆

M729. *Найдите натуральное число, обладающее таким свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа.*

Ответ (подсказываемый номером задачи): искомое число равно 3: для него $3^2=9$, $3^3=27$, $3^6=729$.

Догадаться до ответа нетрудно, но надо еще доказать, что других таких чисел нет. В нашем доказательстве, как во многих задачах про целые числа, используются оценки числа по величине (в данном случае — оценка числа цифр) и соображения делимости.

Обозначим через $L(x)$ количество цифр натурального числа x: $L(x)=k+1$, если $10^k\leqslant x<10^{k+1}$. Для искомого числа должно выполняться равенство

$$L(a^6)=L(a^3)+L(a^2) \qquad (1)$$

(см. рисунок). Чтобы выяснить, для каких a оно верно, удобно разбить натуральный ряд на отрезки

$$10^{\frac{m}{6}}\leqslant a<10^{\frac{m+1}{6}},\ \text{где}\ 10^m\leqslant a^6<10^{m+1} \qquad (2)$$

$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Для чисел a на отрезке (2) величина $L(a^6)=m+1$, а также $L(a^3)$ и $L(a^2)$ принимают постоянные значения:

$$L(a^3)=\left[\frac{m}{2}\right]+1,$$

так как $10^{\left[\frac{m}{2}\right]}\leqslant 10^{\frac{m}{2}}\leqslant a^3<10^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\leqslant 10^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}$;

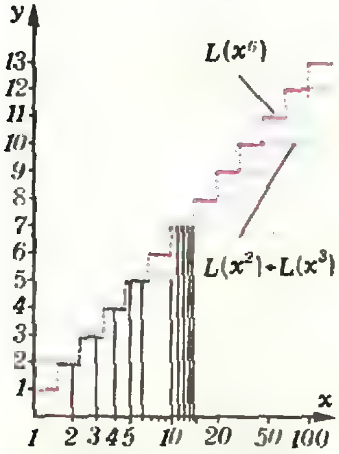
$$L(a^2)=\left[\frac{m}{3}\right]+1,$$

так как $10^{\left[\frac{m}{3}\right]}\leqslant 10^{\frac{m}{3}}\leqslant a^2<10^{\frac{m}{3}+\frac{1}{3}}\leqslant 10^{\left[\frac{m}{3}\right]+1}$

(здесь $[y]$ означает целую часть числа y). Равенство (1) для таких a принимает вид

$$m=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]+1,\ \text{или}$$

$$\frac{m}{6}+\left(\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]\right)+\left(\frac{m}{2}-\left[\frac{m}{2}\right]\right)=1.$$



Графическое решение уравнения $L(x^6)=L(x^2)+L(x^3)$. Масштаб на оси x — логарифмический. Корни уравнения выделены.

Последнее преобразование позволяет записать равенство совсем коротко, используя обозначение $\{y\}=y-[y]$ для «дробной части» числа y: $m/6-\{m/3\}+\{m/2\}=1$. Величина $\{m/2\}$ принимает только два значения: 0 и 1/2, а $\{m/3\}$ — только три: 0, 1/3 и 2/3. Значения m, отвечающие шести возможным вариантам, представлены в таблице:

$\left\{\frac{m}{2}\right\}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\left\{\frac{m}{3}\right\}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
m	6	4	2	3	1	—	$(m<0)$

При $m=1, 2, 3, 4$ получаем $10^{\frac{1}{6}}<a<10^{\frac{5}{6}}$, то есть $2<a<6$ ($10^{\frac{1}{6}}\approx 1{,}4678$, а $10^{\frac{5}{6}}\approx 6{,}8731$). При $m=6$ получаем, что «подозрительные» числа лежат в интервале $10<a<10^{\frac{7}{6}}\approx 14{,}678$, то есть $10<a<14$.

Все «подозрительные» числа можно перебрать и получить ответ. Однако перебор можно еще сократить, воспользовавшись тем, что число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3. Если a не делится на 3, то есть $a=3k\pm 1$, то a^2 дает при делении на 3 остаток 1, a^3 — либо 1, либо —1, а a^6 — только 1. В любом случае сумма первых двух остатков не равна третьему, поэтому из цифр чисел a^2 и a^3 нельзя составить число a^6

Осталось перебрать «подозрительные» числа, кратные трем: 3, 6, 12.

Н Васильев

M730*. *Последовательность (a_n) определяется условиями*

$$a_1=0,\ a_{2n+1}=a_{2n}=n-a_n.$$

(Например, $a_{10}=5-a_5=5-a_4=5-(2-a_2)=3+(1-a_1)=4$.)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите a_{1982}.

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число 2^k (при каждом $k=1, 2, 3, \ldots$)?

в) Докажите, что разность a_n-a_{n-1} равна 1, если в разложение числа n на простые множители число 2 входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае

г) Докажите, что $a_n=n/3$ для бесконечного множества значений n.

д) Найдется ли n такое, что разность $|a_n-n/3|$ больше 1982?

е) Докажите, что $\lim a_n/n=1/3$

◆

а) Ответ: $a_1=0$, $a_2=a_3=a_4=a_5=1$, $a_6=a_7=2$, $a_8=a_9=3$, $a_{10}=a_{11}=a_{12}=a_{13}=4$, $a_{14}=a_{15}=a_{16}=a_{17}=5$, $a_{16}=a_{19}=a_{20}=a_{21}=6$; $a_{1982}=661$.

Например, $a_{1982}=991-a_{991}=991-a_{990}=991-(495-a_{495})=496+a_{494}=496+247-a_{247}=743-a_{246}=743-123+a_{123}=620+a_{122}=620+61-a_{61}=681-a_{60}=681-30+a_{30}=651+15-a_{15}=661$.

в) (Утверждение б) будет доказано позже.) Пусть $n=2^k s$, где s — нечетное число Назовем число n *числом первого рода,* если k нечетно, в противном случае будем называть его *числом второго рода* Надо доказать, что разность a_n-a_{n-1} равна 1, если n — число первого рода, и 0 — если второго. Доказательство проведем индукцией по показателю k, с которым 2 входит в разложение числа n на простые множители. При $k=0$ (то есть при нечетном n) утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо при $k=l-1$, где $l>1$, и $n=2^l s$ Легко видеть, что $a_n-a_{n-1}=1-(a_{2^{l-1}s}-a_{2^{l-1}s-1})$ Если n — число первого рода (l нечетно), то $2^{l-1}s$ — число второго рода, разность в скобках равна 0 по предположению индукции и, следовательно, $a_n-a_{n-1}=1$. Если же n — число второго рода, то разность в скобках равна 1 и $a_n-a_{n-1}=0$.

б), г) Согласно пункту в), каждый член a_n нашей последовательности, начиная с a_2, либо равен предыдущему (если n — число второго рода), либо больше предыдущего на единицу (если n — число первого рода) Поэтому номер n первого члена последовательности, равного данному натуральному числу a, всегда является числом первого рода. После члена a_n число a повторяется до тех пор, пока среди номеров, следующих за n, не появится снова число первого рода. Поскольку n четно, $a_{n+1}=a_n=a$. Если $n+2$— число первого рода, то последовательность a_n принимает значение a ровно 2 раза Если же $n+2$ — число второго рода, то оно делится на 4, следовательно, $n+4$ — число первого рода. В этом случае число a повторяется 4 раза

$(a_{n+3}=a_{n+2}=a_{n+1}=a_n=a)$. Из сказанного также вытекает, что числа a_n последовательно пробегают весь натуральный ряд.

Выведем теперь явную формулу для a_n. В сумме $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)$ все слагаемые равны 0 или 1, причем единиц ровно столько, сколько чисел первого рода, не превосходящих n. Поэтому *a_n равно количеству чисел первого рода, не превосходящих n.* Легко показать, что

$$a_n=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]-\ldots \qquad (1)$$

(число ненулевых слагаемых здесь конечно, ибо $n<2^m$ при некотором m). Для доказательства формулы (1) заметим, что $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n}{4}\right]$, $\left[\frac{n}{8}\right]$, ... — это количества чисел, не превосходящих n и делящихся на 2, 4, 8, ... Поэтому разность $\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]$ равна количеству чисел от 1 до n, которые делятся на 2 и не делятся на 4, $\left[\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{n}{16}\right]$ — это количество чисел от 1 до n, делящихся на 8, но не делящихся на 16, и т. д.

Вычислим a_n по формуле (1) для $n=3\cdot 2^k$. Если k нечетно, то

$$a_{3\cdot 2^k}=\frac{3\cdot 2^k}{2}-\frac{3\cdot 2^k}{4}+\ldots+\frac{3\cdot 2^k}{2^k}-\left[\frac{3}{2}\right]=$$
$$=3(2^{k-1}-2^{k-2}+\ldots+1)-1=3\,\frac{2^k+1}{3}-1=2^k.$$

Заметим, что в этом случае n и $n+2=2(3\cdot 2^{k-1}+1)$ — числа первого рода. Следовательно, *при нечетном k число 2^k встречается в нашей последовательности 2 раза.* Пусть k — четное число. Тогда снова

$$a_{3\cdot 2^k}=\frac{3\cdot 2^k}{2}-\frac{3\cdot 2^k}{4}+\ldots+\left[\frac{3}{2}\right]=3\,\frac{2^k-1}{3}+1=2^k.$$

Но теперь $3\cdot 2^k$ — число второго рода. Поэтому *число 2^k при четном k повторяется среди чисел a_n четыре раза.* Попутно мы доказали утверждение г), так как $a_n=n/3$ при всех $n=3\cdot 2^k$.

д) Ответ: да. Допустим, что n делится на 4. Тогда по формуле (1)

$$a_n=\frac{n}{2}-\frac{n}{4}+\left[\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{n}{16}\right]+\ldots=\frac{n}{4}+a_{\frac{n}{4}}. \qquad (2)$$

Рассмотрим последовательность a_{n_m}, где $n_m=\frac{4^m-1}{3}$ при $m=1, 2, \ldots$ (n_m — целое нечетное число при любом m). Заметим, что $\frac{n_m-1}{4}=\frac{4^m-4}{3\cdot 4}=\frac{4^{m-1}-1}{3}=n_{m-1}$. Поэтому по формуле (2) для $n=n_m-1$

$$a_{n_m}=a_{n_m-1}=n_{m-1}+a_{n_{m-1}}.$$

Следовательно,

$$a_{n_m}=n_{m-1}+n_{m-2}+\ldots+n_1+a_1=\frac{n_m}{3}-\frac{m}{3}.$$

При $m=6000$ получим $\left|a_{n_m}-\frac{n_m}{3}\right|=2000>1982$.

е) Заметим, что в формуле (1) число слагаемых, отличных от нуля, равно $\nu=[\log_2 n]$. Поэтому

$$\left|a_n-\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{4}+\frac{n}{8}-\ldots+(-1)^{\nu+1}\frac{n}{2^\nu}\right|<\nu,$$

так как, снимая знаки целой части, мы допускаем в каждом слагаемом ошибку, меньшую 1. В скобках стоит сумма геометрической прогрессии. Вычисляя ее, получим

$$\left|a_n - \frac{n\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right)}{3}\right| < \log_2 n$$

или

$$\left|\frac{a_n}{n} - \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{\nu}}{3\cdot 2^{\nu}}\right| < \frac{\log_2 n}{n}.$$

А так как $\frac{(-1)^{\nu}}{3\cdot 2^{\nu}} \to 0$ и $\frac{\log_2 n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3}$.

В. Шевелев

◆

Ф733. *На «полуцилиндре» с радиусом основания R лежит гантелька длины l (рис. 1). Найти период малых колебаний гантельки.*

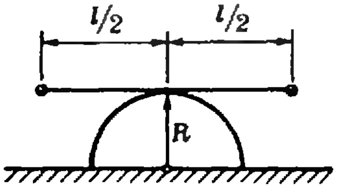


Рис. 1.

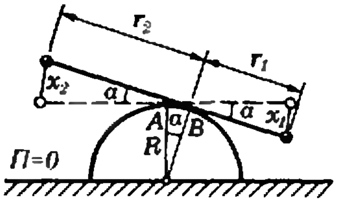


Рис. 2.

Пусть гантелька повернута на малый угол α относительно положения равновесия (рис 2), точка B — точка касания стержня с полуцилиндром; $\widehat{AOB} = \alpha$ (поверхность полуцилиндра шероховатая, и гантелька не проскальзывает). Возникающие при этом моменты сил стремятся вернуть гантельку в положение равновесия. Поскольку угол α мал, можно считать, что шарики гантельки будут двигаться по дугам окружностей радиусов

$$r_1 \approx \frac{l}{2} - |AB| = \frac{l}{2} - R\alpha, \qquad r_2 = \frac{l}{2} + R\alpha.$$

Скорости шариков будут равны, соответственно,

$$v_1 = x_1' = (r_1\alpha)' = \alpha'\left(\frac{l}{2} - 2R\alpha\right),$$

$$v_2 = x_2' = (r_2\alpha)' = \alpha'\left(\frac{l}{2} + 2R\alpha\right).$$

Полная энергия гантельки остается постоянной и равной ее потенциальной энергии $П_0$ в момент максимального отклонения от положения равновесия. Когда гантелька отклонена на угол α от положения равновесия, ее энергия равна

$$П_1 + K = mg(R + x_2) + mg(R - x_1) + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} =$$

$$= m\frac{l^2(\alpha')^2}{4} + 2mgR\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) = П_0$$

(m — масса каждого шарика; стержень считаем невесомым; вычисляя v_1^2 и v_2^2 мы пренебрегли членами порядка $\alpha^2(\alpha')^2$). Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{ml^2\alpha'\alpha''}{2} + 2mgR\alpha\alpha' = 0,$$

откуда

$$\alpha'' = -\frac{4gR}{l^2}\alpha.$$

Полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{4gR/l^2}$. Следовательно, период малых колебаний гантельки равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi l\sqrt{\frac{1}{gR}}.$$

А. Фролов

◆

Ф734. *Веревка, прикрепленная одним концом к боковой поверхности цилиндра у его основания радиуса r, обмотана вокруг цилиндра k раз*

Сила натяжения веревки, действующая на груз, направлена перпендикулярно скорости груза. Следовательно, абсолютная величина скорости груза остается постоянной и равной v.

Рассмотрим движение в тот момент, когда веревка

(k — целое число). К свободному концу веревки привязан груз. Грузу сообщают скорость v, направленную вдоль радиуса цилиндра (рис. 1). За какое время вся веревка снова намотается на цилиндр? Цилиндр закреплен на гладкой поверхности.

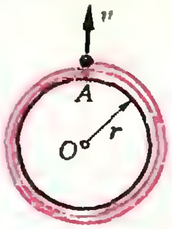


Рис. 1.

полностью смоталась с цилиндра и груз находится в точке C (рис. 2). За малый промежуток времени Δt груз переместится в точку C'. Поскольку Δt мало, угол α, на который повернется вся веревка, мал и

$$\alpha=\frac{v\cdot\Delta t}{l}=\frac{\Delta l}{r}\Rightarrow rv\cdot\Delta t=l\cdot\Delta l=\Delta\left(\frac{l^2}{2}\right).$$

Из последнего равенства находим время, в течение которого вся веревка длины l намотается на цилиндр:

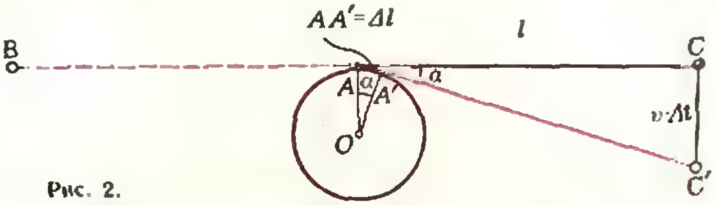


Рис. 2.

$t=\frac{l^2}{2rv}$. За такое же время веревка сматывается с цилиндра, и груз оказывается в точке B (см. рис. 2). Время, за которое груз перемещается из точки B в точку C, равно $\tau=\pi l/v$.

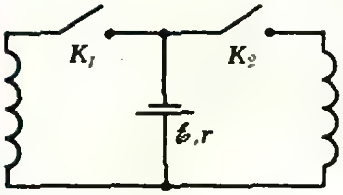
Таким образом, полное время, за которое веревка длины $l=2\pi rk$ смотается с цилиндра и вновь намотается на него, равно

$$T=2t+\tau=\frac{4\pi^2k^2r}{v}+\frac{2\pi^3rk}{v}=\frac{2\pi^2kr}{v}(2k+1).$$

Б. Мукушев

◆

Ф735. *Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рисунок). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить величину тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше установившегося тока через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.*



После замыкания ключа K_1 ток через катушку 1 (см. рисунок) будет нарастать. Пусть в тот момент, когда замыкают ключ K_2, величина этого тока равна I_0. После замыкания ключа K_2 напряжения на концах катушек будут равны. Пренебрегая активными сопротивлениями катушек, можно записать это условие в виде

$$L\frac{dI_1}{dt}=L\frac{dI_2}{dt},$$

где L — индуктивность катушек, а I_1 и I_2 — токи в катушках 1 и 2 соответственно в некоторый произвольный момент времени после замыкания ключа K_2. Это же условие можно записать в другом виде:

$$\frac{d(I_1-I_2)}{dt}=0,\quad \text{или}\quad I_1-I_2=\text{const},$$

то есть разность между абсолютными значениями токов в катушках в любой момент времени (при обоих замкнутых ключах) остается постоянной. Найдем эту разность I_1-I_2 исходя из начальных условий, то есть в момент подключения ключа K_2. В этот момент $I_1=I_0$, а $I_2=0$; следовательно,

$$I_1-I_2=I_0.$$

В установившемся режиме через катушки будут течь постоянные токи; обозначим их $I_{\text{уст.}1}$ и $I_{\text{уст.}2}$. Разность потенциалов на концах катушек, а следовательно, и на концах батареи будет равна нулю. Если через батарею в это время течет ток $I_б$, то

$$\varepsilon-I_бr=0.$$

Следовательно, в установившемся режиме ток, протекающий через батарею, будет равен $I_б=\varepsilon/r$. Из условия сохранения заряда можно записать

$$I_{\text{уст.}1}+I_{\text{уст.}2}=I_б=\varepsilon/r. \qquad (1)$$

Условие сохранения разности абсолютных значений токов через катушки выполняется и для установившихся токов; поэтому

$$I_{\text{уст. 1}} - I_{\text{уст. 2}} = I_0. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получаем

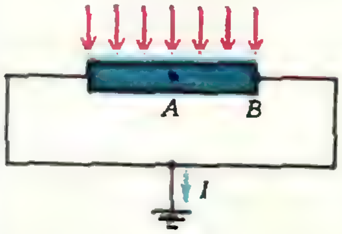
$$I_{\text{уст. 1}} = \frac{I_0 + \mathcal{E}/r}{2}, \quad I_{\text{уст. 2}} = \frac{\mathcal{E}/r - I_0}{2}.$$

Используя заданное соотношение для установившихся токов — $I_{\text{уст. 1}}/I_{\text{уст. 2}} = 2$ — найдем I_0:

$$I_0 = \mathcal{E}/3r.$$

В. Можаев

Ф736. *На однородный стержень, оба конца которого заземлены, падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня попадает одно и то же число электронов в секунду. Сопротивление стержня R. Ток на участке заземления равен I. Найти разность потенциалов между серединой стержня A и его концом B (см. рисунок).*



◆

Поскольку стержень однородный, ток по нему растекается симметрично относительно точки A. Поэтому в точке A ток равен нулю, то есть $I_A = 0$.

Разобьем мысленно участок AB стержня на N одинаковых частей. Пусть в конце первого (от точки A) участка ток равен I_1. Тогда в конце k-го участка ток равен $I_k = kI_1$; в конце N-го участка, то есть в точке B, ток равен $I_N = NI_1$. В то же время ток I_N равен половине тока I на участке заземления, то есть $NI_1 = I/2$. Отсюда $I_1 = I/2N$.

Сопротивление каждого из участков равно $R/2N$, а падение напряжения на k-м участке равно

$$U_k = I_k R/2N = kI_1 R/2N = kIR/4N^2.$$

Разность потенциалов между точками A и B равна сумме падений напряжения на всех N участках. Следовательно,

$$U_{AB} = \sum_{k=1}^{N} U_k = \frac{IR}{4N^2} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{IR}{8}\,\frac{N+1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{IR}{8}.$$

Н. Ликанский

Ф737. *Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку П. Для любого луча, проходящего пластинку, максимальный угол отклонения от первоначального направления равен α. Каков наименьший радиус светлого пятна, которое можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу Л с фокусным расстоянием F (рис. 1)?*

◆

Найдем границу освещенной области за линзой. Ее характер зависит от размера линзы (радиуса апертуры), от радиуса светового пучка и от расстояния между пластиной и линзой. Пусть эти параметры равны соответственно r, R и s.

При $r > R + s\,\mathrm{tg}\,\alpha$ все рассеянные пластинкой лучи попадают на линзу (рис. 2). За линзой границу освещенной области образуют лучи $1'$ и $4'$ (результат преломления лучей 1 и 4, определяющих границу падающего на линзу рассеянного пучка). Точки излома границы ниже оси обозначим A, B, C. Точка A находится в плоскости линзы на расстоянии $R + s\,\mathrm{tg}\,\alpha$ от оси. Точка B — точка пересечения лучей $1'$ и $3'$ — находится в фокальной плоскости, так как лучи 1 и 3, падающие на линзу, параллельны. Расстояние от точки B до оси равно $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Точка C — точка пересечения лучей $3'$ и $4'$ — лежит в плоскости четкого изображения рассеивающей пластинки, так как здесь собираются вышедшие из одной точки пластинки лучи. Таким образом, точка C — изображение точки, находящейся

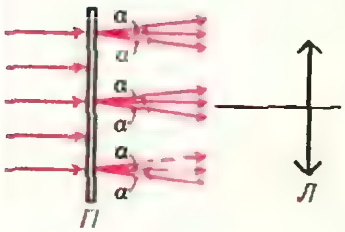


Рис. 1.

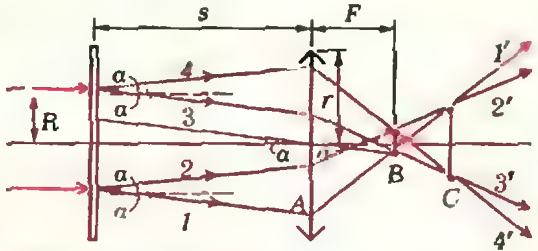
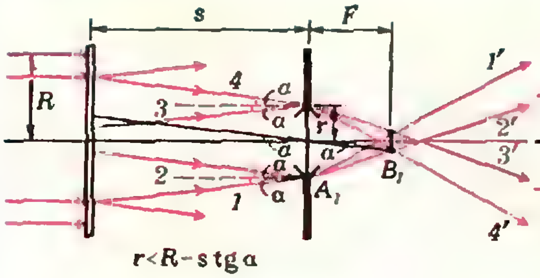
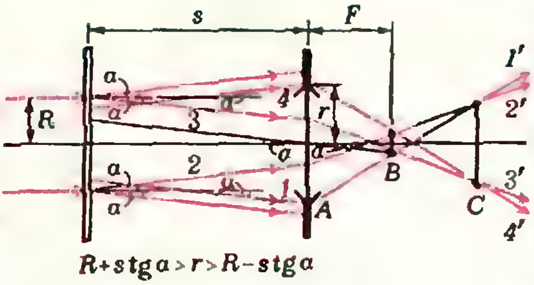


Рис. 2. $r > R + s\,\mathrm{tg}\,\alpha$



$r<R-s\,\mathrm{tg}\,\alpha$

Рис. 3.



$R+s\,\mathrm{tg}\,\alpha>r>R-s\,\mathrm{tg}\,\alpha$

Рис. 4.

на расстоянии R от оси и на расстоянии s от плоскости линзы. Поэтому расстояние от C до оси равно $RF/(s-F)$ (рассчитайте это сами).

Наименьшее пятно лежит в плоскости наиболее близкого к оси излома; поэтому его радиус равен минимальному из расстояний $R+s\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $RF/(s-F)$. Соответственно, экран должен располагаться или вплотную к линзе, или в фокальной плоскости, или в плоскости четкого изображения пластинки. Отметим, что при $s<F$ лучи $3'$ и $4'$ за линзой не пересекаются (изображение пластинки мнимое) и остаются лишь изломы A и B.

При $r<R-s\,\mathrm{tg}\,\alpha$ границу освещенной области за линзой образуют «предельные» лучи, проходящие через края линзы (рис. 3). Изломы границы находятся в плоскости линзы на расстоянии r от оси (точка A_1) и в фокальной плоскости, как и раньше, на расстоянии $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (точка B_1). Больше изломов нет. Минимальное из значений r и $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ дает радиус наименьшего пятна.

Наконец, в промежуточном случае $R+s\,\mathrm{tg}\,\alpha>r>R-s\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 4) изломы границы лежат в плоскости линзы, в фокальной плоскости и в плоскости четкого изображения пластинки на расстояниях r, $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $RF/(s-F)$ соответственно.

При достаточно малом α во всех этих случаях наименьшее пятно получится в фокальной плоскости, причем радиус этого пятна $F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ не зависит ни от радиуса первоначального пучка, ни от диаметра линзы. Интересно, что подобное сжатие пучка вблизи фокальной плоскости — его называют кроссовер — используется в электронном осциллографе для формирования узкого концентрированного электронного пучка.

И. Воробьев

◆

Ф738. *Частицы движутся гуськом с постоянными скоростями. Скорости частиц равномерно возрастают от значения v_1 в голове колонны до значения v_2 в хвосте колонны. В некоторый момент частицы занимают отрезок длины l_0 и при этом на единицу длины приходится n_0 частиц. Сколько частиц спустя время t будет приходиться на единицу длины в хвосте колонны? в голове колонны?*

Пусть частицы занимают отрезок длины l_0 в момент времени 0. За время t частица в голове колонны совершит перемещение v_1t, а частица в хвосте колонны — v_2t (рис. 1). Задние частицы движутся быстрее и нагоняют частицы в начале колонны. Расстояние между самой первой и последней частицей сократится за время t на $(v_2-v_1)t$ и станет равным

$$l=l_0-(v_2-v_1)t.$$

Сокращение длины отрезка, занимаемого всеми частицами, определяется разностью скоростей частиц в конце и в начале этого отрезка. Это же справедливо для промежутка между любыми двумя частицами колонны.

Пусть в начальный момент времени какие-то две частицы находятся на расстоянии Δx_0. Тогда разность их скоростей равна

$$\Delta v=\frac{(v_2-v_1)}{l_0}\Delta x_0$$

(так как скорости частиц равномерно возрастают к хвосту колонны). Расстояние между частицами за время t сократится на Δvt и станет равным

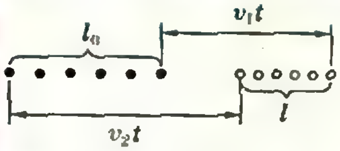


Рис. 1.

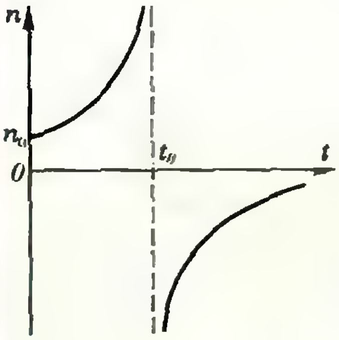


Рис. 2.

$$\Delta x=\Delta x_0-\Delta v\cdot t=\left(1-\frac{(v_2-v_1)t}{l_0}\right)\Delta x_0.$$

Как видим, расстояния между любыми двумя частицами сокращаются с течением времени в одно и то же число раз; поэтому частицы остаются распределенными вдоль колонны равномерно. Иначе говоря, число n частиц, приходящихся на единицу длины колонны, одинаково в любом ее месте, как было и в начальный момент.

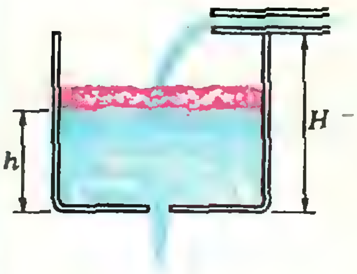
Чтобы найти n, поделим полное число частиц n_0l_0 на длину колонны в момент времени t:

$$n=\frac{n_0l_0}{l_0-(v_2-v_1)t}=\frac{n_0}{1-\dfrac{(v_2-v_1)t}{l_0}}.$$

На рисунке 2 приведена зависимость $n(t)$. При приближении времени к моменту $t_0=l_0/(v_2-v_1)$ концентрация n частиц неограниченно возрастает и при $t>t_0$ меняет знак, уменьшаясь в дальнейшем по абсолютному значению. Такое поведение $n(t)$ нетрудно понять: к моменту времени t_0 все частицы соберутся в одну точку — это и соответствует бесконечной концентрации; после этого, когда задние частицы обгонят передние, изменится порядок следования частиц — об этом и говорит изменение знака n.

И. Воробьев

Ф739. *В цилиндрический сосуд высоты H с площадью основания S из горизонтально расположенной трубы ежесекундно вливается масса воды M. В основании сосуда имеется небольшое отверстие. На поверхности воды в сосуде лежит тонкая легкая губка. С некоторого момента высота уровня воды в сосуде становится постоянной и равной h_0. Определить, с какой скоростью вытекает при этом вода из отверстия.*



◆

В установившемся режиме силы, действующие на губку, уравновешены. Со стороны падающей воды на губку действует сила

$$F=\frac{M\cdot\Delta t\cdot\sqrt{2g(H-h_0)}}{\Delta t}=M\sqrt{2g(H-h_0)}.$$

Эта сила за время Δt совершает работу

$$\Delta A=F\cdot\Delta x=F\frac{\Delta V}{S}=F\frac{M\cdot\Delta t}{\varrho S}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\Delta A+\Delta \Pi=\Delta K,$$

или

$$\Delta A+M\cdot\Delta t\cdot g\cdot h_0=M\cdot\Delta t\cdot\frac{v_1^2-v^2}{2},$$

где v — скорость падающей на губку воды, v_1 — скорость вытекающей из отверстия воды. Так как отверстие мало, $v^2\ll v_1^2$. Окончательно получаем

$$\frac{F}{\varrho S}+gh_0=\frac{1}{2}v_1^2,$$

откуда

$$v_1=\sqrt{2gh_0+\frac{2M}{\varrho S}\sqrt{2g(H-h_0)}}.$$

И. Омелян

Ф740. *В сосуде находится смесь газов — гелия и кислорода. При температуре $t=-2^\circ$ С и давлении $p=0{,}9$ атм плотность этой смеси $\varrho=0{,}44$ кг/м^3. Каким станет давление в сосуде, если из него удалить половину молекул кислорода?*

◆

Пусть в 1 м^3 смеси находится ν_1 молей гелия и ν_2 молей кислорода. Тогда полное число молей в объеме $V=1$ м^3 равно

$$\nu=\nu_1+\nu_2=\frac{pV}{RT}=\frac{0{,}9\cdot10^5\cdot1}{8{,}3\cdot271}\approx40 \text{ моль}.$$

Масса смеси в этом объеме равна

$$m=m_1+m_2=\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2=\varrho V=0{,}44 \text{ кг}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \nu_1+\nu_2=40, \\ 4\cdot 10^{-3}\nu_1+32\cdot 10^{-3}\nu_2=0{,}44, \end{cases}$$

находим ν_1 и ν_2:

$$\nu_1=30 \text{ моль}, \quad \nu_2=10 \text{ моль}.$$

Если удалить из сосуда половину молекул кислорода, то полное число молей станет равным $\nu'=35$ моль. Давление p' в сосуде при этом условии найдем из соотношения $p/p'=\nu/\nu'$:

$$p'=p\frac{\nu'}{\nu}=0{,}9\cdot 10^5\cdot\frac{35}{40}\approx 0{,}79\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

А. Зильберман

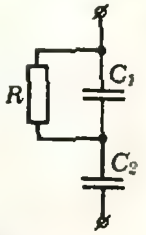
Ф741. *В сеть переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц подключены последовательно два конденсатора с емкостью 1 мкФ каждый. Параллельно одному из конденсаторов включен резистор с сопротивлением $R=100$ кОм (см. рисунок). Найти тепловую мощность.*

◆

Емкостное сопротивление на данной частоте $f=50$ Гц равно

$$Z_C=\frac{1}{2\pi f C}\approx 3\cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

Поскольку сопротивление резистора $R=10^5$ Ом, то есть



$R\gg Z_C$, можно считать, что $U_R\approx U/2=110$ В (U — напряжение сети). Таким образом, тепловая мощность равна

$$P=U_R^2/R\approx 0{,}12 \text{ Вт}.$$

А. Зильберман

Ф742. *Стеклянный сосуд прямоугольного сечения установлен между двумя собирающими линзами с фокусными расстояниями F перпендикулярно оптической оси линз (рис. 1). Точечный источник света S расположен в фокальной плоскости линзы $Л_1$. Когда сосуд пустой, изображение источника наблюдается на экране Э, расположенном в фокальной плоскости линзы $Л_2$. Сосуд заполняют прозрачной жидкостью, показа-*

◆

От точечного источника света S распространяется сферическая волна, то есть фронт волны (поверхность постоянной фазы) имеет вид сферы с центром в точке S. После прохождения линзы $Л_1$ фронт становится плоским (поскольку точка S находится в фокусе линзы $Л_1$). Плоскость фронта параллельна плоскости, в которой лежит линза, и боковым стенкам сосуда. Если бы сосуд был пустой, то после прохождения сосуда волновой фронт по-прежнему был бы параллелен стенкам сосуда. На линзу $Л_2$ падал бы пучок лучей, параллельных главной оси линзы, и изображение источника S находилось бы в правом фокусе линзы.

Когда сосуд заполнен жидкостью с меняющимся (по высоте) показателем преломления, ориентация волнового фронта в пространстве после прохождения сосуда меняется. Для нахождения фронта в этом случае воспользуемся

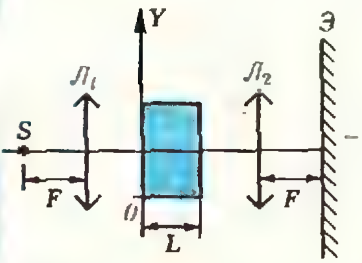


Рис. 1.

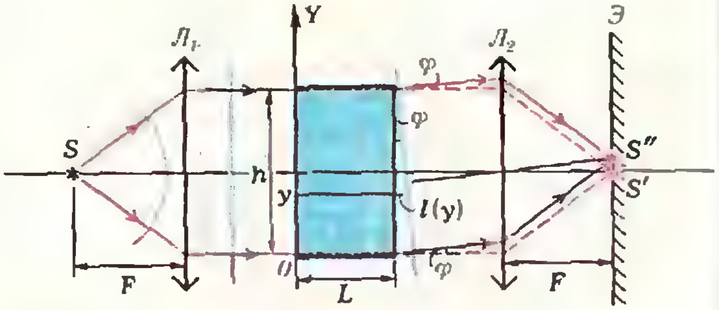


Рис. 2.

тель преломления которой меняется с высотой по закону $n(y)=n_0+\alpha y$. Толщина слоя жидкости равна L. На сколько сместится по вертикали изображение источника на экране? Изменение показателя преломления с глубиной сосуда считать малым в пределах диаметра светового пучка.

принципом Гюйгенса — Френеля. Согласно этому принципу фронт после прохождения светом сосуда будет представлять собой огибающую вторичных волн, источники которых лежат на левой боковой стенке сосуда.

Найдем положение фронта в тот момент времени, когда вторичные волны от источников, лежащих на левой стенке сосуда на высоте h от его дна (рис. 2), достигнут правой стенки сосуда. Время t, за которое эти волны пройдут расстояние L, равно

$$t=\frac{L}{c/n(h)}=L\frac{n_0+\alpha h}{c},$$

где c — скорость света в вакууме, $n(h)=n_0+\alpha h$ — показатель преломления в жидкости на высоте $y=h$. То же расстояние L волны, распространяющиеся от источников, лежащих на левой стенке сосуда на высоте $y<h$, пройдут за время

$$t_1=L\frac{n_0+\alpha y}{c}<t$$

(мы считаем, что $\alpha>0$). Следовательно, за время t эти волны распространятся вправо от сосуда на расстояние

$$l(y)=(t-t_1)c=L\alpha(h-y).$$

Величина $l(y)$ является линейной функцией y. Следовательно, после прохождения светом сосуда огибающая вторичных волн, то есть волновой фронт, будет представлять собой плоскость, наклоненную к боковой стенке сосуда под углом таким, что (см. рис. 2)

$$\operatorname{tg}\varphi=l(y)/(h-y)=L\alpha.$$

Таким образом, на линзу $Л_2$ будет падать пучок параллельных лучей, наклоненных под углом φ к оптической оси линзы. Изображение источника S будет получаться в фокальной плоскости линзы $Л_2$ на расстоянии

$$\delta=F\cdot\operatorname{tg}\varphi=FL\alpha$$

от оси линзы. При $\alpha<0$ изображение будет на столько же смещено вниз от оси.

В. Можаев

Математика волшебного кубика

(Начало см. на с. 22)

12. «Перекрашенный кубик». Элементарные операции прежние, но 1) на каждом центральном кубике нарисована стрелка, регистрирующая его повороты; 2) куб покрашен в три цвета так, что цвета противоположных граней в нулевом состоянии одинаковы.

13. «Волшебный параллелепипед $n\times m\times k$». Описание этой игры должно быть ясным из названия. Разумеется, неквадратные грани можно поворачивать только на 180°, и вращаются не только грани, но и внутренние слои. Даже среди 9 вариантов, отвечающих $n, m, k<3$, имеются отнюдь не тривиальные. Вариант $3\times3\times2$ выпускается в Венгрии под названием «Домино». Недавно в Венгрии стал выпускаться кубик $4\times4\times4$ под замечательным названием «Месть Рубика»!

14. «Волшебный кубик $3\times3\times3\times3$». (Для тех, кто немного знаком с четырехмерной геометрией.)

15. «Волшебный многогранник». В вершинах и в серединах ребер произвольного многогранника располагаются шарики разных цветов (число цветов равно общему числу вершин и ребер многогранника). За один ход разрешается циклически переставить все шарики одной грани. Состояние здесь полностью описывается перестановками σ_S и τ_S.

16. «Волшебный тетраэдр». Нулевое состояние — правильный тетраэдр, каждая грань которого окрашена в один из четырех цветов. При «поворотах граней» перемещается 4 угловых и 6 реберных «элементов», форму которых уточнять не будем. Важно, что здесь, кроме перестановок, надо учитывать и их ориентацию. Другие варианты получаются с октаэдром, додекаэдром и икосаэдром.

Квант для младших школьников

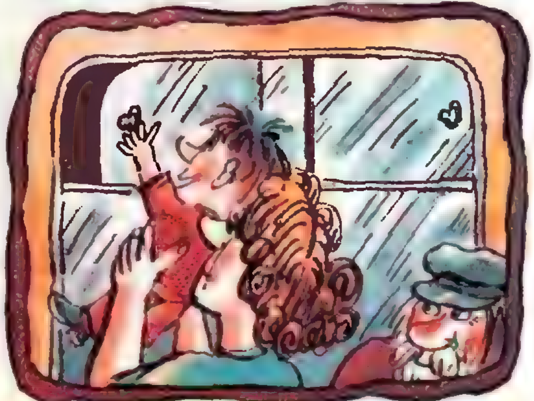
Задачи

1. Костя и Вадик после кино подсчитали оставшиеся у них деньги. Оказалось, что у Кости их в два раза больше, чем у Вадика. Вадик подумал и сказал: «Если бы у нас с тобой было денег в два раза больше, мы купили бы по 4 пряника и выпили по стакану «чистой» газированной воды по одной копейке за стакан». Более практичный Костя ответил: «Нечего мечтать! Давай купим по 3 конфеты и у нас еще останется на 3 стакана «чистой» газировки». Так они и сделали. Сколько денег оставалось у каждого мальчика, если разница в стоимости конфеты и пряника составляет 2 копейки?

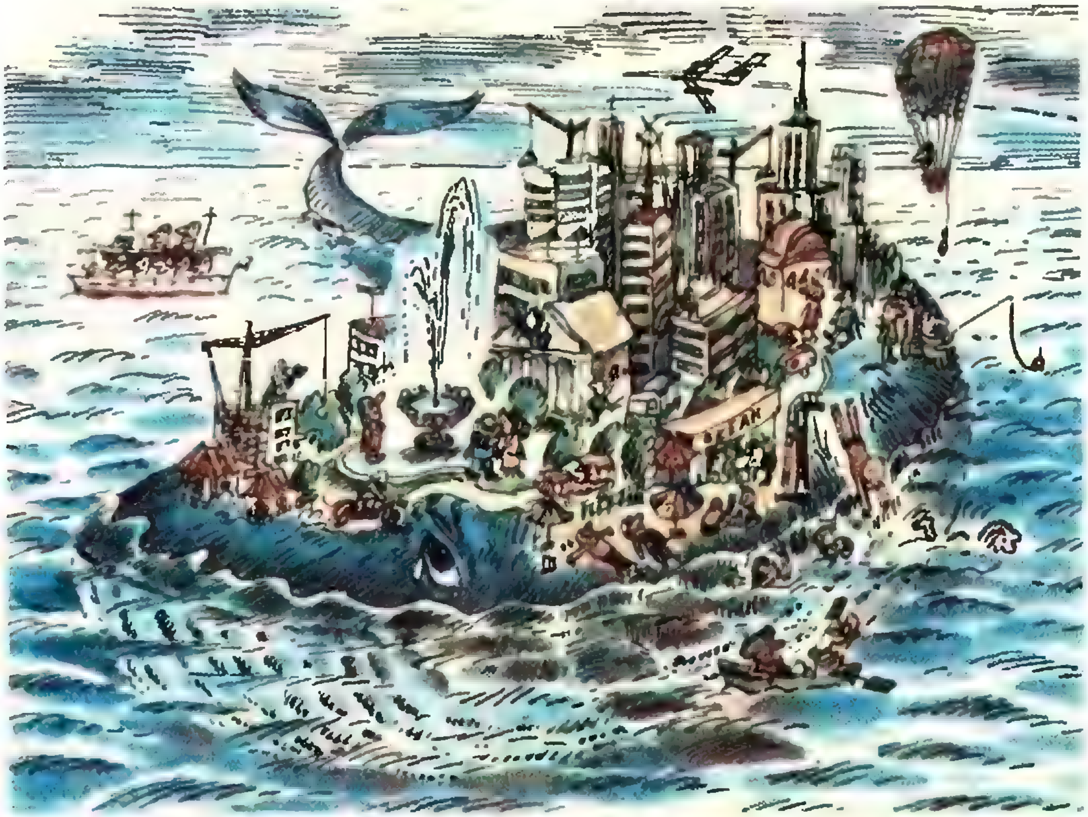
2. Окна в вагонах метро имеют форму, изображенную на рисунке. Закругления верхних углов рамы и стекла обычно делаются в виде дуги окружности. Окно приоткрыли, сдвинув стекло на 10 см. Высота подвижной части окна равна 25 см. Чему равна площадь открытой части окна?

3. В стеклянный сосуд, имеющий форму куба, нужно налить воды на 1/3 его объема. Как это сделать, не имея никаких измерительных инструментов?

4. В очереди в школьный буфет стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит раньше Миши, но после Олега, Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. В каком порядке стоят ребята?



Эти задачи нам предложили *Ф. Бартенев, М. Мамикон, Д. Мукушев* (ученик 8 класса Аркатской средней школы Абайского района Семипалатинской области), *А. Сигрианский*



Н. Родина

Архимедова сила и киты

На суше гусь производит впечатление малоподвижной, неуклюжей птицы. «На красных лапках гусь тяжелый...» — так писал А. С. Пушкин, применяя очень выразительное слово «тяжелый» для характеристики птицы. Но вот гусь вошел в воду и поплыл... Теперь мы видим уже легкую, грациозную птицу, движущуюся быстро и свободно. Даже дуновения ветра достаточно, чтобы изменить скорость ее движения. Отчего такая перемена?

Особенности поведения тел в воде связаны с малым трением и наличием выталкивающей — архимедовой — силы.

Положите на стол пробку или пластмассовую крышечку от банки и подуйте на нее сбоку. Она не сдвинется с места. Поместите пробку на поверхность воды — от дуновения она легко начнет двигаться. Вы убедитесь, что сила трения в воде намного меньше силы трения между твердыми телами.

А плавает пробка на поверхности воды потому, что равны друг другу две действующие на нее в противоположных направлениях силы: сила тяжести и архимедова сила.

В совершенстве приспособлено для жизни в воде тело самого большого животного на Земле — кита. Наиболее крупные представители отряда китообразных — голубые киты. Масса голубого кита достигает 130 тонн, но он способен развивать в воде скорость до 20 узлов (узел — скорость, равная одной морской миле в час, а так как морская миля равна 1,852 км, то узел — это скорость, равная 1,852 км/ч). Для сравнения укажем, что моторная лодка МКМ может развивать скорость до 30 км/ч, то есть около 16 узлов.

Кит кашалот, имеющий массу около 60 тонн, выскакивая из воды, поднимается над ее поверхностью на несколько метров.

Многое в поведении морских жи-

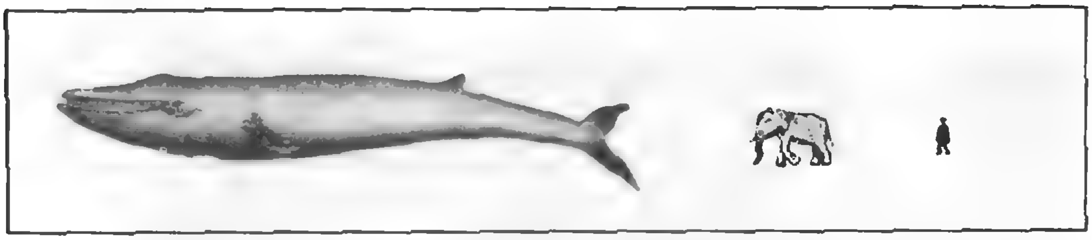


Рис. 1.

вотных мы с вами можем объяснить на основании законов и понятий физики. Но сначала ознакомимся с некоторыми данными о китах. Знаменитый исследователь морских глубин французский ученый Жак-Ив Кусто (это он изобрел акваланг) в своей книге «Могучий властелин морей» пишет: «Трудно описать ощущения человека, который впервые встречается в воде с китом... Прежде всего вас ошеломляют размеры кита. Они превосходят все, что человек привык видеть в мире животных, превосходят все, что он себе представлял».

Рисунок 1 дает представление о том, во сколько раз размеры голубого кита больше, чем размеры слона и человека. Длина этого кита достигает 33 м, он почти на 10 м длиннее пассажирского вагона! (Недаром в русских сказках упоминается «чудо-юдо рыба-кит», у которого «на спине село стоит».)

О массе китов мы уже говорили. Самый большой из добытых китов имел массу 150 000 кг, а самое большое наземное животное — слон — имеет массу от 3000 до 6000 кг (как язык некоторых китов!). Рассчитано, что если бы слон имел в два раза бо́льшую массу, то ему нужны были бы ноги вдвое толще, а они и так имеют площадь по 4 дм^2 каждая. (Подумайте и объясните, почему были бы необходимы такие ноги наземному животному.)

Тело плавает в воде, если действующие на него архимедова сила и сила тяжести равны между собой. Давайте рассчитаем архимедову силу, действующую на кита, и сравним ее с силой тяжести.

Архимедова сила равна весу жидкости, вытесненной погруженным в нее телом, то есть

$$F_A = g\varrho_ж V,$$

где $g \approx 10$ Н/кг, $\varrho_ж$ — плотность жидкости, V — объем тела. Как нам вычислить объем кита? Сделаем это так: будем считать, что тело кита имеет форму цилиндра. Тогда объем равен $V = \pi d^2 h/4$, где d — диаметр цилиндра, h — его высота. В нашем случае высота h — это длина кита. Чему равен диаметр нашего кита-цилиндра? Будем считать, что это средний диаметр тела кита. А средний диаметр оценим с помощью рисунка 1. Для этого измерим на рисунке диаметр кита в нескольких, например в десяти, разных местах: у головы, у хвоста, у середины. Среднее арифметическое этих измерений и примем за диаметр кита-цилиндра. Но только учтем, что рисунок 1 сделан в определенном масштабе: на рисунке длина кита ~7,5 см, а на самом деле его длина — 30 м, так что масштаб рисунка равен 1:400.

Проделайте дальше все расчеты, и вы убедитесь, что архимедова сила, которая поддерживает кита в воде, исчисляется миллионами ньютонов. (Разумеется, вычисления ваши очень приближенны, и нельзя сказать точно, сколько именно ньютонов; но то, что это число между одним и десятью миллионами, — точно.) Понятно, что такая сила удерживает в равновесии тело с массой в сотни тонн, а именно такую массу и имеет голубой кит. Кит в воде невесом, ведь сила тяжести, действующая на него, тоже исчисляется миллионами ньютонов (для вычисления силы тяжести нужно 9,8 Н/кг умножить на массу кита).

Конечно, кит не сможет находиться на суше. Известны случаи, когда киты по неизвестным пока до конца причинам выбрасываются на берег океана. Громадная сила тяжести (свыше миллиона ньютонов прижимает животное к земле. Скелет кита не приспособлен к тому, чтобы выдерживать эту тяжесть; даже дышать кит не может, так как для вдоха

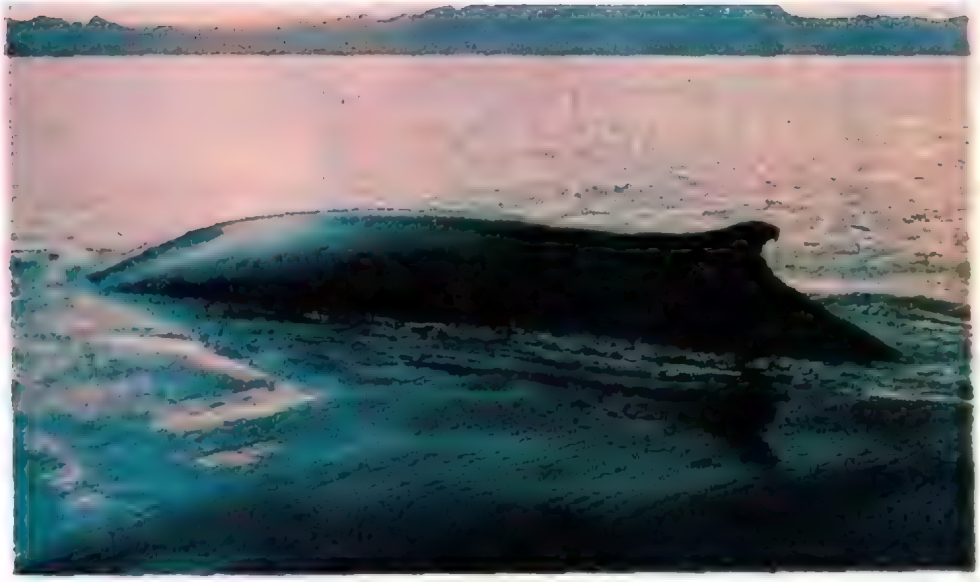


Рис. 2.

он должен расширить легкие, приподнять мышцы, окружающие грудную клетку, а в воздухе эти мышцы весят несколько десятков тысяч ньютонов.

Жак-Ив Кусто пишет: «...на суше перед гигантами вставали неразрешимые проблемы... дыхание требовало огромных усилий... на суше скелет кита не выдерживает веса мышц и жирового слоя, между тем как в плотной водной среде он отлично служит киту».

Во время экспедиции Кусто и его товарищи пытались спасти попавшего на мель китенка, масса которого была «всего» две тонны. Чтобы поднять его на борт судна, пришлось применить специальный гамак, так как даже новорожденный китенок может «сломаться» под действием собственной силы тяжести, если под ним нет равномерной опоры.

На рисунке 2 вы видите фотографию спящего в воде кита. Он не полностью погружен в воду. Значит, действующая на него выталкивающая сила должна быть меньше, чем в случае полного погружения (ведь эта сила равна весу жидкости, вытесненной китом). А сила тяжести осталась прежней. Казалось бы, равновесие должно нарушиться. Но кит спокойно спит на воде, он не тонет. Следовательно, выталкивающая сила и сила тяжести по-прежнему равны друг другу. Как объяснить это кажущееся противоречие?

Теперь самое время рассказать о том, как кит ныряет и как всплывает.

Хвост кита имеет горизонтальные лопасти и развивает мощность до 500 лошадиных сил (одна лошадиная сила — это единица мощности, равная примерно 736 Вт). Для сравнения скажем, что эта мощность только в два раза меньше мощности двигателя самолета АН-2 и в семь раз больше мощности двигателя трактора ДТ-75. Когда аквалангиста задевает корпусом плывущий кит, то «впечатление такое, словно толкнул мчащийся паровоз».

Могучим движением хвоста кит направляет свое тело в глубину океана — ныряет. Глубина погружения равна нескольким десяткам метров, а кашалот достигает глубины в 1000—1200 метров. На такой глубине давление воды велико (рассчитайте его сами, учитывая, что плотность морской воды равна 1030 кг/м^3). Легкие кита под этим давлением сжимаются до так называемого остаточного объема. У человека на глубине 60 м, где давление в четыре раза больше атмосферного, объем легких уменьшается в четыре раза — от 6 л на поверхности до 1,5 л; следовательно, для легких человека на глубине 60 м остаточный объем равен 1,5 л. От сжатия легких объем тела кита уменьшается, а с ним уменьшается и выталкивающая сила.

По мере того как кит выплывает из глубины на поверхность воды, архимедова сила немного увеличивается (почему?). Вынырнув на поверхность, кит вдыхает воздух, объем его тела увеличивается; значит, увеличивается и выталкивающая сила. Сила тяжести уравновешивается такой же выталкивающей силой, какая действовала на кита, плавающего внутри жидкости, но теперь уже для создания такой же выталкивающей силы киту не нужно полностью погружаться в воду — ведь его объем стал больше. Итак, при вдыхании воздуха объем тела кита увеличивается настолько, что ему уже не нужно полностью погружаться в воду, чтобы вес вытесненной им воды равнялся силе тяжести, действующей на кита.

В связи с этим подумайте над такой задачей. Известно, что киты заплывают иногда в сильно опресненные лагуны у побережья Чукотского полуострова. Предположим, что в пресную воду заплыл кит, изображенный на фотографии (рис. 2). Что изменилось бы в расположении кита в этом случае, если считать, что все данные, кроме состава воды, не меняются?

И в заключение нашего рассказа — несколько вопросов.

Если массу кита разделить на его объем, то мы получим среднюю плотность его тела. Можно ли утверждать, что, где бы ни плавал кит — в глубине океана, в его средних слоях или на поверхности, средняя плотность тела кита всегда равна плотности воды? За счет чего изменяется средняя плотность?

Для наблюдений и съемок китов использовали воздушный шар, наполняемый горячим воздухом при помощи газовой горелки. Почему такой шар — монгольфьер — поднимается в воздух?

По мере подъема шара пламя горелки регулировали, и оказалось, что шар может быть уравновешен в воздухе так, что в безветренную погоду он будет сколь угодно долго висеть над одной точкой моря. Что можно в этом случае сказать о соотношении между массой вытесненного шаром воздуха и массой самого шара вместе с наблюдателем?

Попробуйте объяснить такое явление, наблюдавшееся Кусто: «...вода впереди пузырилась, словно газированная. Это стая рыбешек то уходила вглубь, то снова поднималась к поверхности и выпускала воздух из плавательных пузырей». Зачем рыбешки выпускают воздух из плавательных пузырей и когда именно они это делают: уходя вглубь или поднимаясь к поверхности?

«Квант» улыбается

Словарь студента

Среди слов студенческого лексикона немало иностранцев по происхождению. В каком языке проживали и что значили их прародители?

Большинство таких слов оказались «римлянами». Вот буквальные переводы их предков:

Абитуриент — тот, кто должен уйти.

Аспирант — домогающийся.

Аудитория — выслушивание.

Декан — десятник.

Интуиция — внимательное разглядывание.

Конспект — обзор.

Курс — бег.

Студент — усердно работающий.

Семинар — рассадник.

Сессия — сидение.

Факультет — возможность.

Экзамен — взвешивание.

Слово *стипендия*, как пользующееся большой любовью студентов, заслуживает особого внимания. Так, стипендиум был введен впервые Римской республикой в 406-м году до н. э. и представлял собой уплату жалованья солдатам во время походов. Надо думать, что римские воины тоже относились к нему с большой любовью, так как до этого вынуждены были ходить в походы «за свой счет».

Несколько слов имеют более древнее, а именно греческое происхождение. Это, в первую очередь, *диплом* — «лист, сложенный вдвое», и *кафедра*, которая в те далекие времена была всего только стулом.

И, наконец, довольно молодое слово польского происхождения: *шпаргалки* — «ненужные, исписанные бумаги». Вот это уже совсем непонятно. Ведь попадись такая бумажка на «взвешивании» в нужный момент, она может заметно облегчить жизнь и приблизить получение «листа, сложенного вдвое».

Примечание. Каждый мало-мальски грамотный человек легко поймет, пользуясь этим словарем, что

Деканат — десятницкая.

Первокурсник — первопроходимец.

Заведующий кафедрой — завхоз.

Читателям предлагается продолжить этот список.
(Из газеты МФТИ «За науку»)

М. Маринчук

Квадратное уравнение в задачах по физике

Нередко при решении задачи для искомой величины получается квадратное уравнение. Как известно, такое уравнение имеет два корня, поэтому возникает необходимость проведения дополнительного анализа с тем, чтобы выяснить, какой именно корень отвечает на поставленный в задаче вопрос.

Физические задачи довольно разнообразны как по тематике, так и по степени трудности, вот почему единых приемов проведения такого дополнительного анализа не существует. В одних случаях, например, может оказаться, что один из корней лишен физического смысла, в других — что оба корня являются решением данной задачи, а в третьих — что оба корня имеют физический смысл, но на поставленный в задаче вопрос отвечает лишь одно значение.

Проиллюстрируем вышесказанное конкретными задачами из разных разделов физики. Вначале рассмотрим задачи, в которых оба корня квадратного уравнения для искомой величины, в принципе, дают ответ на поставленный вопрос. Однако некоторое видоизменение вопроса приводит к тому, что лишь один из корней оказывается подходящим.

Задача 1. *Маленький шарик брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=10$ м/с. Через какое время его высота над точкой бросания будет равна $h=3{,}2$ м? Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.*

Выберем начало координат в точке бросания шарика и направим координатную ось OX вертикально вверх. Тогда координата x шарика в произвольный момент времени t равна $x=v_0t-gt^2/2$. Подставив $x=h$, получаем квадратное уравнение для нахождения искомого времени:

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2},\ \text{или}\ t^2-2\frac{v_0}{g}t+\frac{2h}{g}=0.$$

Корни этого уравнения равны

$$t_{1,2}=\frac{v_0}{g}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2gh}{v_0^2}}\right).$$

В условиях задачи $t_1=1{,}6$ с и $t_2=0{,}4$ с.

Очевидно, оба полученных корня удовлетворяют поставленному в задаче вопросу, так как на высоте h шарик побывает дважды: спустя время t_2 при движении вверх и спустя время t_1 при движении вниз. Если ввести дополнительное условие, например на величину промежутка времени (наименьший или наибольший) или на направление движения (вверх или вниз), то решение задачи станет единственным.

Задача 2. *От источника тока с ЭДС $\mathscr{E}=500$ В необходимо передать энергию на расстояние $l=2{,}5$ км. Потребляемая мощность равна $P=10$ кВт. Найдите потери мощности в линии электропередачи, если диаметр медных подводящих проводов $d=1{,}5$ см, а удельное сопротивление меди $\varrho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом · м. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.*

Обозначим силу тока в цепи через I, а сопротивление подводящих проводов через R и приравняем мощность $P_\text{и}$ источника тока сумме передаваемой P и потерянной $P_\text{п}$ мощностей:

$$P_\text{и}=P+P_\text{п},\ \text{или}\ I\mathscr{E}=P+I^2R.$$

Относительно силы тока I это уравнение — квадратное. Его корни равны

$$I_{1,2}=\frac{\mathscr{E}}{2R}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4RP}{\mathscr{E}^2}}\right).$$

Сопротивление подводящих проводов

$$R = \varrho \frac{2l}{S} = \frac{8\varrho l}{\pi d^2} = 0{,}48 \text{ Ом}.$$

Тогда для силы тока получаем два значения:

$$I_1 = 1021 \text{А} \text{ и } I_2 = 21 \text{А},$$

а для потерянной мощности $P_п = I^2R$ —

$$P_{п1} \approx 500{,}4 \text{ кВт} \text{ и } P_{п2} \approx 211{,}7 \text{ Вт}.$$

Оба результата отвечают поставленному в задаче вопросу. Они соответствуют двум разным значениям сопротивления нагрузки ($R_н$), при которых потребляемая мощность ($P = I^2R_н$) одна и та же. В первом случае сопротивление нагрузки мало́, ток велик, а потому велики и потери мощности. Во втором случае сопротивление нагрузки велико, ток в цепи, а следовательно, и потери мощности малы. Другими словами, коэффициент полезного действия (КПД) во втором случае больше, чем в первом.

Наложение дополнительного условия на величину потерь (или силы тока, или КПД) приведет к тому, что только один корень будет ответом на вопрос задачи.

Задача 3. *Расстояние между двумя лампами силой света I_1 и I_2 равно L. На каком расстоянии от первой лампы следует поместить перпендикулярно к прямой, проходящей через лампы, лист бумаги, чтобы его освещенность со стороны первой лампы была в n раз больше, чем со стороны второй? Лампы считать точечными источниками света.*

Пусть лист бумаги находится между лампами на расстоянии x от первой и на расстоянии $L-x$ от второй (рис. 1). Тогда освещенности листа бумаги равны соответственно

$$E_1 = \frac{I_1}{x^2} \text{ и } E_2 = \frac{I_2}{(L-x)^2}.$$

С учетом условия задачи $E_1 = nE_2$ после некоторых преобразований для искомого расстояния x получаем квадратное уравнение

$$(I_1 - nI_2)x^2 - 2I_1Lx + I_1L^2 = 0.$$

Заметим, что, если $I_1 = nI_2$, получаем $x = L/2$, то есть лист бумаги находится посередине между лампами. В таком случае, естественно, лампа, сила света которой в n раз больше, создает во столько же раз бо́льшую освещенность.

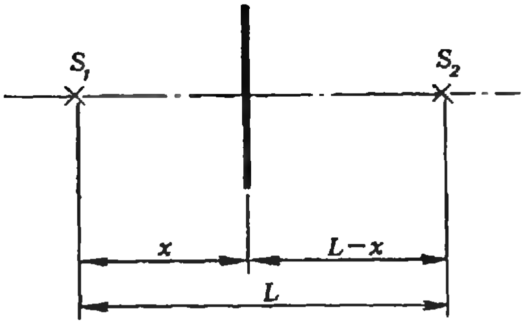


Рис. 1.

При $I_1 \neq nI_2$ уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{L}{1+\sqrt{nI_2/I_1}} \text{ и } x_2 = \frac{L}{1-\sqrt{nI_2/I_1}}.$$

Первый корень $x_1 < L$, что соответствует нашему предположению — лист бумаги находится между лампами, которые освещают его с разных сторон. Второй же корень $x_2 > L$ при $nI_2 < I_1$ и $x_2 < 0$ при $nI_2 > I_1$. Это означает, что лист бумаги находится вне отрезка, соединяющего лампы, которые освещают его с одной и той же стороны. В первом случае ($x_2 > L$) лист находится правее лампы S_2, а во втором случае ($x_2 < 0$) — левее лампы S_1.

Таким образом, оба корня (x_1 и x_2) квадратного уравнения являются решениями задачи. Однако если дополнительно оговорить, что лист бумаги освещается, например, с разных сторон (или с одной и той же стороны), то это приведет к тому, что корень x_2 (или x_1) перестанет удовлетворять требованиям задачи, и решение будет единственным.

* *
*

Теперь рассмотрим задачи, в которых оба корня не лишены физического смысла, однако только один из них соответствует поставленному вопросу.

Задача 4. *Велосипедист, двигаясь равномерно со скоростью $v_1 = 4$ м/с по прямолинейному участку пути, проезжает мост. Спустя время $\tau = 3$ мин этот же мост проезжает мотоциклист. Он имеет скорость $v_2 = 19$ м/с, но сразу после моста* *начинает тормозить, так что его дальнейшее движение — равнозамедленное с ускорением, равным по модулю $a=0{,}15$ м/с^2. Через какое время после начала торможения и на каком расстоянии от моста мотоциклист догонит велосипедиста?*

Выберем начало координат в конце моста и направим ось OX по движению мотоциклиста и велосипедиста. Время t до встречи начнем измерять с момента прохождения мотоциклистом конца моста. Тогда для координат велосипедиста и мотоциклиста имеем, соответственно,

$$x_1=v_1(\tau+t) \text{ и } x_2=v_2t-\frac{at^2}{2}.$$

Приравнивая координаты $x_1=x_2$, получаем для времени t квадратное уравнение

$$t^2-\frac{2(v_2-v_1)}{a}t+\frac{2v_1\tau}{a}=0,$$

корни которого равны

$$t_{1,2}=\frac{v_2-v_1}{a}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2v_1a\tau}{(v_2-v_1)^2}}\right).$$

Подставив конкретные значения, найдем

$$t_1=120 \text{ с и } t_2=80 \text{ с}.$$

Какое же значение соответствует условию задачи? Для ответа на этот вопрос определим скорости мотоциклиста v_2' и v_2'' в моменты времени t_1 и t_2:

$$v_2'=v_2-at_1=1 \text{ м/с}$$

$$\text{и} \quad v_2''=v_2-at_2=7 \text{ м/с}.$$

Заметим, что v_2' меньше скорости v_1 велосипедиста, а v_2'' больше этой скорости.

Очевидно, условию задачи соответствует только второе значение времени встречи $t_2=80$ с — в этот момент догоняющий мотоциклист должен иметь скорость бо́льшую, чем скорость догоняемого велосипедиста. При этом расстояние от конца моста до места встречи равно

$$L=v_1(\tau+t_2)=1040 \text{ м}.$$

Однако первый корень тоже имеет определенный физический смысл. Вначале скорость v_2 больше скорости v_1, в момент времени $t_2=80$ с мотоциклист догоняет велосипедиста и затем обгоняет его. С течением времени скорость мотоциклиста уменьшается, в некоторый момент ($t=100$ с) она становится равной скорости велосипедиста, затем продолжает уменьшаться дальше, и в момент времени $t_1=120$ с велосипедист догоняет мотоциклиста.

Ясно, что корень t_1 тоже мог бы стать решением задачи, если бы в ней требовалось найти просто время встречи, а не время, через которое мотоциклист догонит велосипедиста.

Задача 5. *Тело массой m находится на высоте H над поверхностью стола. Под ним на столе в вертикальном положении закреплена недеформированная пружина длиной l_0 и с коэффициентом жесткости k. Найдите максимальную деформацию пружины при свободном падении тела на нее.*

При падении тела на пружину его потенциальная энергия в поле тяжести Земли частично переходит в потенциальную энергию сжатой пружины (кинетическая энергия и в начальном, и в конечном положениях равна нулю). Отсчитывая потенциальную энергию тяготения от поверхности стола, для энергии поднятого над столом тела получим

$$E_1=mgH.$$

Если максимальная деформация пружины равна $x_м$, то в этом случае потенциальная энергия тяготения равна $mg(l_0-x_м)$, а потенциальная энергия сжатой пружины равна $kx_м^2/2$. Следовательно, в момент максимальной деформации пружины энергия системы равна

$$E_2=mg(l_0-x_м)+\frac{kx_м^2}{2}.$$

Из закона сохранения механической энергии $E_1=E_2$ следует уравнение

$$mgH=mg(l_0-x_м)+\frac{kx_м^2}{2},$$

или

$$x_м^2-\frac{2mg}{k}x_м-\frac{2mg(H-l_0)}{k}=0,$$

корни которого

$$x_{м\,1,2}=\frac{mg}{k}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{2k(H-l_0)}{mg}}\right).$$

Ответом на поставленный в задаче вопрос является первый, положительный корень

$$x_{м\,1}=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2k(H-l_0)}{mg}}\right).$$

Второй корень является отрицательным, однако и он не лишен физического смысла, который можно легко установить. Представим себе, что, как только тело касается пружины, оно прилипает к ней, и возникают колебания. После достижения максимальной величины деформация сжатия уменьшается, а затем переходит в деформацию растяжения. Ее максимальное значение и выражается отрицательным корнем, то есть оно равно

$$|x_{м\,2}|=\frac{mg}{k}\left|1-\sqrt{1+\frac{2K(H-l_0)}{mg}}\right|.$$

* * *

В заключение обсудим задачи, в которых один из корней не имеет физического смысла.

Задача 6. *Вдоль главной оптической оси собирающей линзы расположен тонкий стержень длины $l=15$ см так, что расстояние между линзой и ближайшим к ней концом стержня превышает ее фокусное расстояние. При этом изображения концов стержня в линзе находятся на расстояниях $f_1=36$ см и $f_2=60$ см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы.*

Построим изображение $A'B'$ стержня AB в линзе (рис. 2). Из рисунка 2 видно, что изображение ближнего к линзе конца стержня (точки B) находится дальше от линзы, чем изображение дальнего конца стержня (точки A). В задаче даны расстояния $f_1=|OA'|$ и $f_2=|OB'|$; следовательно, $d_1=|OA|$, $d_2=|OB|$, а длина стержня $l=d_1-d_2$.

Из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ имеем $d=\frac{fF}{f-F}$.

Тогда

$$l=d_1-d_2=\frac{f_1F}{f_1-F}-\frac{f_2F}{f_2-F}.$$

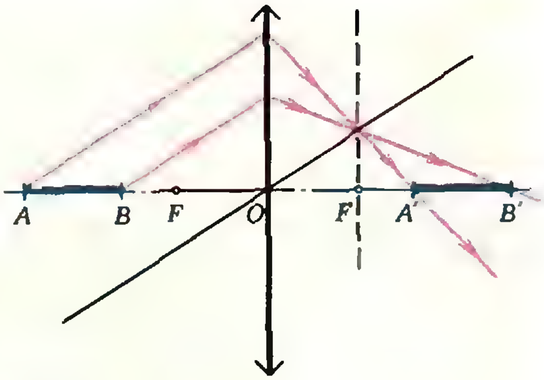


Рис. 2.

Это и есть уравнение для определения искомого фокусного расстояния F. Приведем его к стандартному виду квадратного уравнения:

$$(f_2-f_1-l)F^2+l(f_1+f_2)F-lf_1f_2=0$$

и найдем корни:

$$F_{1,2}=\frac{-l(f_1+f_2)\pm\sqrt{l(f_2-f_1)(4f_1f_2+lf_2-lf_1)}}{2(f_2-f_1-l)}$$

Подставив числовые значения и выполнив соответствующие вычисления, получим $F_1=20$ см и $F_2=-180$ см. Второй корень — отрицательный — не имеет физического смысла, так как фокусное расстояние собирающей линзы положительно. Таким образом, искомое фокусное расстояние линзы $F=20$ см.

Задача 7. *Однородный деревянный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Под стержнем расположили сосуд с водой так, что стержень оказался частично погруженным в воду (рис. 3). Какая часть стержня находится в воде, если плотность дерева $\varrho_1=0{,}8\cdot10^3$ кг/м³, а плотность воды $\varrho_2=10^3$ кг/м³?*

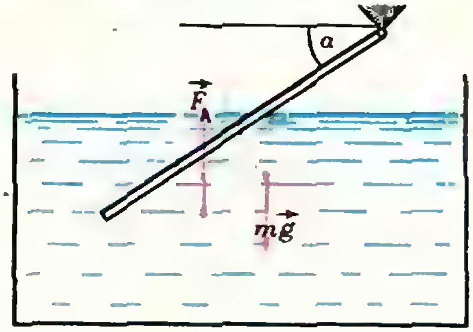


Рис. 3.

Условием равновесия тела с неподвижной осью вращения является равенство нулю алгебраической суммы моментов сил, действующих на это тело. Относительно оси вращения моменты создают две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру тяжести стержня, и сила Архимеда $\vec{F}_A$, приложенная к центру тяжести погруженной в воду части стержня.

Обозначим через l длину стержня, через S — площадь его поперечного сечения, через x — часть длины стержня, погруженную в воду. Тогда сила тяжести стержня $mg=\varrho_1 lSg$, а сила Архимеда $F_A=\varrho_2 xlSg$. Плечи этих сил равны $l/2\cos\alpha$ и $l(1-x/2)\cos\alpha$ соответственно.

Условие равновесия стержня относительно оси вращения имеет вид

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha-F_A l\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha=0.$$

После подстановки выражений для сил и некоторых преобразований для искомой величины x получим квадратное уравнение

$$x^2-2x+\frac{\varrho_1}{\varrho_2}=0.$$

Корни этого уравнения равны

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}},$$

или

$$x_1=1{,}45 \text{ и } x_2=0{,}55.$$

Очевидно, что доля длины стержня не может превышать единицы, поэтому первый корень лишен физического смысла.

Таким образом, в воде находится 0,55 длины стержня.

Задача 8. *Стеклянная трубка длины $L=125$ см расположена вертикально запаянным концом вниз. Доходящий до открытого верхнего края трубки столбик ртути высотой h отделяет находящийся в ней воздух от атмосферы. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Найдите высоту оставшегося в трубке столбика ртути, если атмосферное давление $p_a=75$ см рт. ст. Решите задачу при а) $h=60$ см; б) $h=40$ см.*

Применим закон Бойля — Мариотта к столбику воздуха, заключенного в трубке:

$$p_1V_1=p_2V_2.$$

В исходном состоянии его давление складывается из атмосферного давления и давления столбика ртути высотой h:

$$p_1=p_a+\varrho gh, \text{ или } p_1=\varrho g(H+h),$$

где ϱ — плотность ртути, H — высота ртутного столба, создающего давление, равное атмосферному. Объем, занимаемый воздухом в этом случае, равен $V_1=(L-h)S$, где S — площадь поперечного сечения трубки.

Обозначим через x высоту столбика ртути, оставшейся в трубке после переворачивания. Тогда

$$p_2=p_a-\varrho gx=\varrho g(H-x)$$
$$\text{и } V_2=(L-x)S.$$

Подставив соответствующие значения давлений и объемов в выражение закона Бойля — Мариотта, получим уравнение для нахождения искомой величины x:

$$\varrho g(H+h)(L-h)S=$$
$$=\varrho g(H-x)(L-x)S,$$

или

$$x^2-(H+L)x+h(H+h-L)=0.$$

Корни этого уравнения равны

$$x_{1,2}=\frac{H+L}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4h(H+h-L)}{(H+L)^2}}\right).$$

Выполним числовые расчеты для предусмотренных в задаче двух случаев.

а) При $h=60$ см получаем $x_1\approx\approx197$ см и $x_2\approx3$ см. Очевидно, что первый корень не удовлетворяет условиям задачи — высота оставшегося в трубке столбика ртути не может превышать его первоначальную высоту (не говоря уже о том, что она не может превышать длину всей трубки). Второй корень отвечает поставленному в задаче вопросу, то есть высота оставшегося в трубке столбика ртути равна приблизительно 3 см.

б) При $h=40$ см корни принимают значения $x_1=202$ см и $x_2=-2$ см. Первый корень не удовлетворяет условиям задачи по тем же причинам, что и в предыдущем случае. Второй корень также не подходит, так как высота столбика ртути не может быть отрицательной. Таким образом, при $h = 40$ см задача не имеет решения. Физически это означает, что предусмотренная в задаче ситуация фактически не реализуется — ртуть вытекает из трубки не частично, а полностью. При этом воздух, первоначально находившийся в трубке, занимает объем, превышающий объем самой трубки.

Упражнения

1. Вертолет поднимается вертикально вверх равномерно со скоростью v_0. В момент, когда его высота над землей равнялась H, из него был свободно отпущен груз. Через какое время после этого груз достиг земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. К потолку на пружине подвешено находящееся на подставке тело. В начальный момент времени пружина не деформирована. Подставка начинает двигаться вниз с постоянным ускорением $a < g$. Найдите время, через которое тело оторвется от подставки, а также максимальное растяжение пружины. Масса тела m, коэффициент жесткости пружины k.

3. Узкую цилиндрическую трубку длины $L = 90$ см, открытую с обоих концов, погружают вертикально в сосуд со ртутью так, что ртуть занимает третью часть длины трубки. Затем верхний конец трубки закрывают и вынимают ее полностью из сосуда со ртутью. Найдите высоту оставшегося в трубке столба ртути, если атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па.

4. Точечные положительные электрические заряды $+q$ и $+2q$ находятся на расстоянии L друг от друга. В каком месте прямой, проходящей через эти заряды, следует поместить отрицательный электрический заряд, чтобы он находился в равновесии?

5. Найдите силу тока в цепи, содержащей источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом, если развиваемая во внешней цепи мощность $P = 3$ Вт.

6. Расстояние между предметом и его изображением в рассеивающей линзе $L = 32$ см. Найдите расстояние между предметом и линзой, если фокусное расстояние линзы $F = -10$ см.

Советуем купить

Имеются в продаже и высылаются наложенным платежом (без задатка) следующие книги издательства «Наука»:

«Алгебра и начала анализа» (пособие для техникумов под редакцией Г. Н. Яковлева), ч. 1 (1981, изд. 2-е, перераб. и доп.) — цена 70 к., ч. 2 (1981; изд. 2-е, испр. и доп.) — цена 70 к.

Каганов М. И., Цукерник В. М. «Природа магнетизма» (1982) — цена 30 к.

Мочалов Л. П. «Головоломки» (1980) — цена 20 к.

Потапов М. К., Александров В. В. «Алгебра и анализ элементарных функций» (1980) — цена 1 р. 40 к.

Заказы направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15, магазин № 8 Москниги, отдел «Книга — почтой».

В чем разница?

Задача 1. *В прямоугольный треугольник с гипотенузой l вписан равнобедренный треугольник так, что его основание параллельно гипотенузе, а вершина, противолежащая основанию, лежит на гипотенузе* (рис. 1). *При какой длине основания вписанного треугольника его площадь будет наибольшей?*

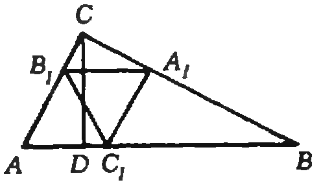


Рис. 1.

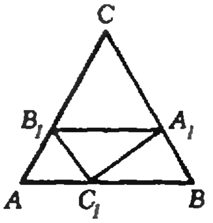


Рис. 2.

Задача 2. *В правильный треугольник со стороной l вписан прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна той стороне правильного треугольника, на которой лежит вершина прямого угла* (рис. 2). *При какой длине гипотенузы вписанного треугольника его площадь будет наибольшей?*

Обозначим $|A_1B_1|$ (см. рис. 1, 2) через x. Тогда площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна $\frac{|CD|}{2l}x(l-x)$ в задаче 1 и $\frac{\sqrt{3}}{4}x(l-x)$ в задаче 2 (проверьте!).

Единственная точка экстремума функции $y = kx(l-x)$ — точка максимума — $x = \frac{l}{2}$.

Тем не менее, в задаче 1 ответ — при $\frac{l}{2}$, а в задаче 2 — другой ответ. Какой? В чем разница между этими задачами?

П. Горнуша

Почему так?

Известно, что за площадь сферы принимается производная функции $V(R)$ по R («Геометрия 9—10», § 69):

$$S = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2.$$

Аналогичное определение можно дать и площади боковой поверхности цилиндра:

$$S = (\pi R^2 H)' = 2\pi RH.$$

Однако, если аналогичное определение дать площади боковой поверхности конуса, получится неверный результат:

$$\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)' = \frac{2}{3}\pi RH \neq \pi Rl.$$

$\left(\frac{2}{3}H\right.$ совсем не обязательно равно $\left.L.\right)$.

Почему так?

А. Смоляков

Ю. Первин

Однажды вечером в семье программиста

У программиста Ферстова четверо детей — Надя, Тимур, Егор и Дина. Все они увлекаются программированием. В тот вечер, о котором идет речь, папа заглянул в комнату к детям.

— Хотите разобрать этюд по программированию?

— Этюд по программированию? — хором переспросили ребята. — А разве такие бывают?

— Конечно, бывают. Это небольшие программы, которые содержат какие-нибудь хитрости. Решение этюда состоит в составлении программы по заданной теме, либо в поиске тщательно замаскированной ошибки, либо в проверке действий уже готовой программы. Вот такой именно этюд я и хочу вам предложить. В программе

```
переменные i: цел;
массив m[1:2] : цел;
i ← 1; m[1] ← 4; m[2] ← 5;
пшик(m[i]);
```

вы видите обращение к процедуре *пшик*, которая имеет такое описание

```
процедура пшик(x:цел);
m[i] ← m[i] + 1;
i ← i + 1;
x ← x—1
конец;
```

Определите, пожалуйста, какие значения получат *m*[1] и *m*[2] в результате работы этой программы.

— И это все?

— Все.

— Но это же так просто...

Отец не успел ответить. Зазвонил телефон.

— Ферстов слушает!

На другом конце провода кто-то торопился рассказать о последних событиях в лаборатории Ферстова. Его лицо стало серьезным.

— Хорошо. Сейчас буду. Разберемся.

— Ребята, — сказал он детям, — срочно бегу в ВЦ. В моем трансляторе ошибка. Разыщу, исправлю и тут же вернусь. А вы пока помозгуйте над программой.

И дети не успели даже задать ему свои вопросы, как Ферстов уже бежал вниз по лестнице, застегивая на ходу куртку. Ребята принялись обсуждать задание.

— Что это за язык странный какой? — сказала Надя. — На Паскаль не похоже: все ключевые слова — русские. И не Рапира — смотрите, какие забавные стрелки.

— Нечего удивляться, — ответил рассудительный Егор. — Языки разные бывают. Тут хоть и необычные символы, но зато все понятно: стрелка справа налево — это такое присваивание, как в Паскале, только по-другому обозначенное; двоеточие между целыми в квадратных скобках разделяет границы изменения индекса в массиве. Так что давайте-ка сразу за дело.

Каждый вооружился карандашом и бумагой и на некоторое время воцарилась деловая тишина.

— Готово! — первым закричал Тимур. — *m*[1] равно 3, а *m*[2] равно 5.

— Ничего подобного, — возразила старшая сестра Надя, — обе величины, и *m*[1], и *m*[2] — равны пятерке.

— Вы оба неправы, — сказал Егор. — Ответ такой: *m*[1] = 4, *m*[2] = 5.

Самая младшая, Дина, немного робея перед авторитетом старшей сестры и братьев, тихо проговорила:

— А у меня получилось *m*[1] = 5, *m*[2] = 4.

К счастью, папа, действительно, вернулся быстро. Дети сразу же окружили его, наперебой предлагая свои решения.

— Давайте по порядку, — предложил отец. — Ну-ка, старшая, начинай!

И Надя, которая всегда стремится отыскать самое простое решение задачи, подробно описала способ передачи параметра по значению, которым она воспользовалась:

— К моменту обращения к процедуре *пшик* интересующие нас значения получены простыми присваиваниями: $m[1]=4$, $m[2]=5$. Еще одно изменение одного из этих значений происходит при выполнении первого оператора процедуры. В начале выполнения процедуры $i=1$. Поэтому $m[1]$ увеличивается на единицу, и, значит, в конце программы оба значения оказываются равными $m[1]=m[2]=5$.

Правда, $m[i]$ употребляется еще и в качестве фактического параметра процедуры *пшик*. Я вычислила значение фактического параметра: $i=1$ и, следовательно, $m[1]=4$. Поэтому обращение имеет вид *пшик*(4); при этом совершенно неважно, каким путем получена эта четверка: она определяет значение параметра x и не изменяет ни $m[1]$, ни $m[2]$. Обе последних величины — это глобальные переменные. Благодаря оператору

$$x \leftarrow x-1;$$

процедура вырабатывает в качестве результата значение $3=4-1$. Но при передаче параметра по значению этот результат оказывается несущественным для нашей задачи — определения $m[1]$ и $m[2]$.

— Теперь, Тимур, твоя очередь.

— Я считаю, что если уже есть процедура, вырабатывающая результат, то надо в ответе, то есть при вычислении $m[1]$ и $m[2]$, воспользоваться этим результатом. А это значит, что параметр процедуры $m[i]$ должен использоваться как на входе, так и на выходе процедуры *пшик*. Поэтому здесь при обращении к процедуре следует применить способ передачи параметра как значения-результата.

Вот как рассуждал дальше Тимур:

На входе процедуры фактический параметр $m[1]$ равен, как говорила Надя, четырем. Далее, после выполнения первого оператора процедуры *пшик*, величина $m[1]$ получает значение 5, но... хитрость этой программы состоит в том, что третий оператор процедуры

$$x \leftarrow x-1,$$

работает с тем же значением параметра x, которое было при входе в процедуру, то есть со значением $m[1]=4$; таким образом, последний оператор процедуры *пшик* выполняется в виде

$$m[1] \leftarrow m[1]-1;$$

при исходном $m[1]=4$ (не взирая на действие первого оператора процедуры *пшик*). Ведь фактический параметр в этом случае означает, кроме всего прочего, величину, которой присваивается результат процедуры.

Следовательно, $m[1]=3$. Ну, а против $m[2]=5$, конечно, нет никаких возражений.

— Егор, у тебя ведь другой результат. Что ты скажешь?

— Ты предупредил нас, папа, о хитрости в этой программе. А самый «хитрый» способ передачи параметров, на мой взгляд, — это передача по адресу. Вот я и воспользовался им.

Рассуждения Егора были такими:

При этом способе в вызываемую процедуру из вызывающей программы передается не значение фактического параметра, а его адрес в памяти. В нашем примере это адрес величины $m[1]$. Поэтому в последнем операторе процедуры *пшик* слева и справа от стрелки присваивания будет фигурировать величина $m[1]$, значение которой к моменту входа в процедуру установилось $m[1]=4$, а после выполнения первого оператора процедуры стало равным пяти. Таким образом, последний оператор восстанавливает положение

$$m[1] \leftarrow m[1]-1;$$

так что в конце концов $m[1]=4$.

— А как думала ты, Диночка?

— Я знаю, папа, что твой любимый способ передачи параметров — это передача по написанию. Вот я и выбрала его, чтобы тебе понравилось...

— Спасибо, — успел смущенно ответить папа на это неожиданное признание. А Дина продолжала. Вот ее рассуждения:

При передаче по написанию каждое вхождение имени формального параметра в вызываемой процедуре текстуально заменяется именем фактического параметра. В нашем случае всюду в процедуре на месте x будет во время выполнения программы стоять $m[i]$. К моменту выполнения последнего оператора процедуры *пшик* $i=2$, и, следовательно, последний оператор процедуры будет выполнен так:

$$m[2] \leftarrow m[2]-1.$$

А так как $m[2]$ было установлено в начале $m[2]=5$, то после завершения процедуры и всей программы $m[2]=4$.

С $m[1]$ совсем просто: будучи установленной в начале программы $m[1]=4$, эта величина увеличивается на 1 действием первого оператора процедуры *пшик*.

Объяснения закончились, и дети молча переглянулись: «Кого-то из них папа похвалит!».

— Молодцы, ребята! Вы хорошо справились с заданием. Правы вы все. Дело в том, что вы ничего не знали о языке, на котором была написана программа, а значит, и о способе передачи параметров, допускаемом в этом языке. Кстати, такого языка и не существует в действительности: я его придумал специально для нашего упражнения. А в каждом из реально существующих языков всегда определен один или несколько разрешенных способов передачи параметров. Так, в хорошо знакомой вам Рапире параметры из вызывающей программы в вызываемую процедуру могут быть переданы только по значению. А в языке Алгол-60 наряду с этим способом употребляется еще и способ по написанию (иногда его называют также передачей по имени). Более того, передача по написанию считается в Алголе наиболее естественным способом общения процедур, так что передача по написанию предполагается у передаваемых параметров «по умолчанию». А в тех случаях, в которых надо воспользоваться передачей по значению, перед именами передаваемых параметров при их описаниях в вызываемой процедуре Алгола-60 обязательно записывают ключевое слово *value* (значение).

В таком языке, как Алгол-*W*, существует в числе нескольких допустимых и тот способ, который применил Тимур, — способ передачи значения-результата. Параметры, передаваемые в процедуру таким способом, отмечаются в ее заголовке ключевым словом *value-result* (значение-результат). В Фортране, например, разрешен способ передачи параметров по адресу (или иногда его еще называют передачей по ссылке). В Паскале параметры передаются чаще всего по значению (что «по умолчанию» никак специально не отмечаются), а тогда, когда используется передача по ссылке — передача параметра-переменной, перед именами соответствующих параметров необходимо писать в заголовке описания процедуры слово *var*. Прочитайте об этом в уроке 20 Заочной школы программирования. А если вам захочется узнать поподробнее о различных способах передачи параметров, то я вам посоветую, например, книгу Т. Пратта «Языки программирования: разработка и реализация», выпущенную в издательстве «Мир» в 1979 году. Вы найдете ее на полке над моим письменным столом.

Должен вам сказать, что многообразие полученных вами результатов объясняется не только различными способами передачи параметров. Тогда, когда параметр является простой переменной (а не индексированной, как в нашем примере), все способы дадут одинаковый результат. И только сложные структуры данных передаются различными способами по-разному.

Давайте подведем итог. Прежде чем программировать обращение к процедурам, надо очень хорошо знать, какие способы передачи параметров разрешены в выбранном языке (а быть может, даже выбор языка определить, исходя из желательного для вас способа передачи); надо знать также правила оформления соответствующего способа передачи в языке. Ясно?

— Ясно, — ответила за всех Надя. Остальные согласно кивнули

А Егор сказал совсем уж порадовавшие отца слова:

— Знаете что: я вам тоже придумаю этюд по программированию. Про рекурсивную процедуру!

— Молодец, давай. Только новый этюд — это на завтра. Сегодня уже поздно.

Квадратное уравнение в задачах по физике

1. $t=\frac{v_0}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{v_0^2}}\right)$; второй корень, отрицательный, не отвечает поставленному в задаче вопросу.

2. $t=\sqrt{\frac{2m}{k}\left(\frac{g}{a}-1\right)}$;

$x_{\max}=\frac{m}{k}\left(g+\sqrt{a(2g-a)}\right)$.

3. $h=14{,}1$ см; второй корень — $h'=151{,}9$ см — лишен физического смысла.

4. $d=L(\sqrt{2}-1)\approx 0{,}41L$; второй корень — $d'=-L(\sqrt{2}+1)$ — не соответствует условию задачи.

5. $I_{1,2}=\frac{\mathcal{E}}{2r}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4rP}{\mathcal{E}^2}}\right)$; $I_1=3$А; $I_2=1$А; оба корня удовлетворяют условию задачи (два значения тока соответствуют двум разным сопротивлениям внешней цепи, при которых выделяется одна и та же мощность).

6. $d=\frac{L}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4F}{L}}\right)=40$ см; второй корень — отрицательный — не соответствует условию задачи.

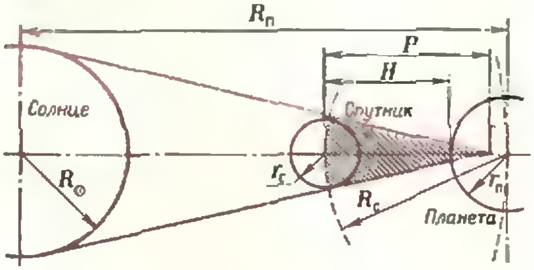
Солнечное затмение 31 июля 1981 года

(см. «Квант» № 7)

1. Вследствие небольшой эллиптичности земной орбиты расстояние Земли от Солнца в течение года изменяется: Земля дальше от Солнца в период лета в северном полушарии и ближе к нему в зимний период. Поэтому угловой размер Солнца летом чуть меньше, чем зимой. А поскольку расстояние Луны от Земли, а значит, и ее угловой размер также испытывают колебания, летом Луна чаще может полностью закрывать солнечный диск, чем зимой.

2. Во время затмения лунная тень движется по поверхности Земли приблизительно с запада на восток со скоростью около 1 км/с (грубо говоря, это — скорость движения Луны по орбите). В ту же сторону, на восток, но с меньшей скоростью вращается вокруг своей оси Земля. Скорость вращения земной поверхности изменяется от максимального значения около 0,5 км/с на экваторе до 0 на полюсах. Поэтому наблюдатель в районе экватора дольше других может находиться в лунной тени, так как он «отстает» от нее с наименьшей скоростью. Вторая, менее важная, причина состоит в том, что размер лунной тени на экваторе чуть больше, чем в полярных областях (ведь наблюдатель на экваторе чуть ближе к Луне, чем на полюсе).

3. Солнечное затмение может наблюдаться, если длина P тени от спутника больше, чем расстояние H от спутника до поверхности планеты (см. рис.): $P>H$. Последняя величина просто связана с радиусом орбиты спутника (R_c) и экваториальным радиусом планеты ($r_п$): $H=R_c-r_п$. А длину тени спутника легко найти, зная его радиус (r_c), расстояние планеты от Солнца ($R_п$) и радиус Солнца ($R_\odot$): $P=r_cR_п/R_\odot$. Воспользовавшись данными, приведенными в статье в таблице (см. с. 27 в «Кванте» № 7), находим, что



на Юпитере происходят полные солнечные затмения всеми его перечисленными в таблице спутниками, а на Марсе вообще не бывает солнечных затмений.

4. Решается так же, как предыдущая задача, только роль спутника теперь играет сама планета. Затмения спутников на Марсе и Юпитере бывают.

5. Если самолет летит со скоростью около 1 км/с, то он сможет «догнать» лунную тень. Такие самолеты существуют, и с их помощью астрономы уже наблюдали полные солнечные затмения, продолжавшиеся на борту самолета целый час!

6. При благоприятных обстоятельствах можно наблюдать солнечное затмение с борта орбитальной станции «Салют» или другого ИСЗ. Но продолжительность полного затмения будет не велика: так как скорость спутника около 8 км/с, а диаметр тени не превышает 270 км, затмение будет длиться менее 270/8≈34 с.

7. Можно, если наблюдатель на Земле расположен так, что Луна и Солнце находятся для него вблизи горизонта. Дело в том, что, во-первых, в момент полного лунного затмения Луна может отклоняться от линии «Солнце — Земля — Луна» на 0,5° (это — разность между угловым радиусом земной тени и радиусом Луны) и, во-вторых, искривление световых лучей в земной атмосфере — рефракция — позволяет нам «заглянуть под горизонт» также примерно на 0,5°.

8. Угловой диаметр Луны больше, когда она находится вблизи зенита, так как в этом случае наблюдатель ближе к ней на длину радиуса Земли.

9. Можно, поскольку Луна, как и Солнце, движется не в плоскости земного экватора и бывает видна на Северном полюсе сравнительно высоко над горизонтом.

Веселая викторина

(см. «Квант» № 7)

Ответы и указания к задачам

1. Перевернуть лист на 180°.
2. Запятую.
3. За 16. Время между двумя ударами равно

2 секундам. При 9 ударах будет 8 промежутков.

4. Да. Например: —1, —2, —3, а также a, 0, —a, для любого целого a.

5. Конечно, может: 2 и 3 копейки (та монета, которая не трехкопеечная, — достоинством 2 копейки).

6. 6 выстрелов: 4 раза в 17 и 2 раза в 16.

7. 30 г.

8. Да. Открыв, скажем, коробку, на которой написано «гвозди», и обнаружив там, скажем, винты, мы определим, что в коробке с надписью «винты» лежат гайки, а там, где написано «гайки», лежат гвозди.

9. 72.

10. Достаточно перелить воду из второго стакана в пятый.

11. 0,5 и —1.

12. Закручивая коврик, постепенно сдвиньте с него стакан.

Выигрышные стратегии к играм

1. Начинающий проигрывает, если в каждой кучке лежит по нечетному количеству камней. Если хотя бы в одной из кучек лежит четное количество камней, то он забирает вторую кучку, а первую делит на две части так, чтобы в них было по нечетному количеству камней. Тогда второй игрок вынужден забрать одну из кучек, а при делении второй вновь возникнет одна кучка с четным количеством камней. Тогда, забрав вторую кучку, первый снова сможет разделить на две части ту кучку, в которой четное количество камней.

2. Если один из колышков соединен уже с двумя другими, то делающий очередной ход выигрывает, соединив эти два колышка. Поэтому игра будет продолжаться до тех пор, пока можно соединять между собой «свободные» колышки. Таких пар свободных колышков $n/2$, если n четно, и $(n-1)/2$, если n нечетно. Если таких пар четное число, то выигрывает второй, а если нечетное, то первый. Поэтому второй выигрывает, если количество колышков имеет при делении на 4 остаток 0 или 1, и проигрывает, если этот остаток равен 2 или 3.

3. Выигрывает второй. После хода первого он обрывает один или два лепестка так, чтобы остальные лепестки разбились на две части, в каждой из которых было бы одинаковое количество лепестков, а затем после каждого хода первого он делает ход, симметричный ему на второй половине ромашки.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

Задание 9. На первый взгляд достаточно поставить белую пешку на b7 и пойти b8Ф×. Но, оказывается, получающееся расположение белых пешек невозможно — съев все 15 черных фигур, белые пешки сместятся на 15 полей влево, а надо — на 16. Выполнить задание можно, только добавив черную пешку на поле c2 и тогда ...c1Ф×.

Задание 10. а) На левой половине доски напрашивается 1. Кb1×. Но здесь ретропат черных (ход b3—b2 невозможен из-за нелегального шаха слоном a1). Значит, очередь хода за черными, и мат дает их пешка, превращаясь в коня: **1...b1К×!**

б) Аналогичная картина. Черные в ретропате и очередь хода за ними — **1...Сg7×!**

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, $\boxed{\text{В. Г. Зубов}}$, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, ~~Р. Н. Кузьмин~~, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина,
С. Лухин, И. Максимов, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

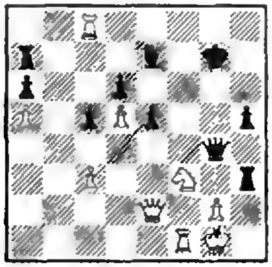
117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21
Сдано в набор 18.6.82 Подписано в печать 28.7.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,63 Т-11166
Тираж 175 280 экз. Цена 40 коп. Заказ 1589

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром» Государственного
комитета СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

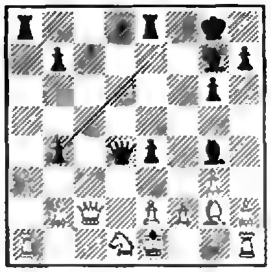
ЖЕРТВА ФЕРЗЯ В ПАРТИЯХ ЧЕМПИОНА МИРА

На нашей шахматной страничке мы часто встречались с комбинациями, в которых жертвовался ферзь — в рассказах о чемпионах мира, в специальных материалах. Жертва ферзя всегда действует на наше воображение, независимо от того, восстанавливается ли материальное равенство немедленно, или операция носит затяжной, позиционный характер.



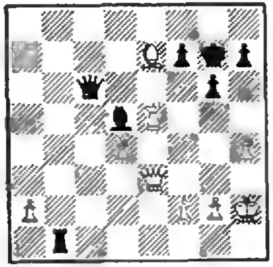
А. Карпов — С. Жолдош (Будапешт, 1973 г.)

31. К:e5!! Ф:e2 32. Лf7+ Крh6 33. Лh8+ Крg5 34. Лg8+ Крh4 35. Кg6+ Крg5 36. К:e7+ Крh4 37. Кf5×.



С. Татан — А. Карпов (Лас-Пальмас, 1977 г.)

Кажется, что положение белых достаточно надежно. Однако чемпион мира ставит под бой ферзя, и ситуация резко меняется. **23...Фd3!! 24. ed.** Допускает изящное развитие атаки, лучше было 24. Фd2. **24...ed+ 25. Крd2 Лe2+!** Видимо, белые не ожидали такого поворота событий. **26. Кр:d3 Лd8+ 27. Крc4.** Все дело в том, что после 27. Сd5 Л:d5+ 28. Крc4 Л:c2+ 29. Кр:d5 Сf3+ черные остаются с лишней фигурой. **27...Л:c2+ 28. Кр:b4 Лcd2! 29. f3 Сf8+ 30. Крa5 Сd7! Белые сдались.** Эта партия была признана лучшей в 1977 году.



А. Карпов — А. Майлс (Амстердам, 1981 г.)

Белые только что увели короля из-под шаха и теперь с затаенным дыханием ожидали f7—f6. Почему, в самом деле, черным не заняться ладьей, тем более, что ей некуда отступать? Увы, романтическую комбинацию 29...f6 30. Фh6+!! Кр:h6 31. Сf8× осуществить не пришлось. Майлс двинул вперед другую пешку — **29...h6,** и реализация перевеса приняла слишком прозаический характер. **30. f3.** Вновь не годится 30...f6, хотя на этот раз решает всего лишь жертва слона — 31. Сf8+! Кр:f8 32. Ф:h6+ Крf7 33. Фh7+ Крf8 34. Фe7+ Крg8 35. Фd8+, и черный слон покидает доску, а масса белых пешек остается. А если черные не берут слона, то они погибают от жертвы ладьи: 31...Крf7 32. Ф:h6 fe 33. Фg7+ Крe6 34. Фe7+ Крf5 35. Ф:e5×.

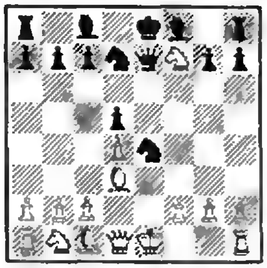
Партия продолжалась еще десять ходов: **30...С:a2 31. Сc5 Лb8 32. d5 Фf6 33. Лh5 Крg8 34. Сd4 Фd6+ 35. Сe5 Лe8 36. Ф:h6 Ф:e5+ 37. Л:e5 Л:e5 38. d6 Сe6 39. Фd2 Сd7 40. Фd4 Лe6 41. Фa7. Черные сдались.**

В следующей забавной партии жертву ферзя против будущего чемпиона мира осуществил его будущий тренер И. Зайцев.

И. Зайцев — А. Карпов (Ленинград, 1966 г.)

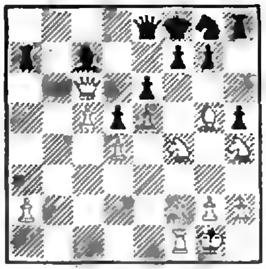
Русская партия

1. e4 e5 2. Кf3 Кf6 3. d4 К:e4 4. Сd3 d5 5. К:e5 Кd7 6. К:f7! Фe7. В случае 6...Кр:f7 7. Фh5+ черный король отправлялся в центр доски. Теперь же черные полагали, что после 7. Кe5 К:e5 8. de Ф:e5 они получат прекрасную позицию. Ответный ход партнера трудно было ожидать.

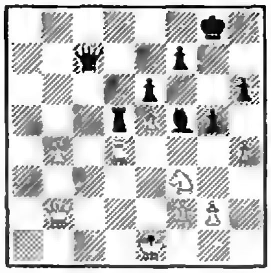


7. К:h8!? Любопытно, что через 15 лет было обнаружено, что белые могут не жертвовать ферзя, а сыграть 7. Фe2!, получая перевес. **7...Кc3+ 8. Крd2 К:d1 9. Лe1 К:f2.** Жертва ферзя самая настоящая, поскольку отыгрывать его нельзя — 10. Л:e7+ С:e7 11. С:h7 Сg5+, и черные берут верх. **10. С:h7.** Белые, как ни в чем не бывало, играют без ферзя. **10...Кe4+ 11. Л:e4! de 12. Сg6+.** Вот, оказывается, что придумал Зайцев. Скучная ничья, которой часто заканчивается русская партия, его не устроила, и он решил, что немного веселья не помешает. **12...Крd8 13. Кf7+ Крe8 14. Кd6++.** Двойной шах на службе у вечного шаха. **14...Крd8 15. Кf7+. Ничья.**

Конкурсные задания

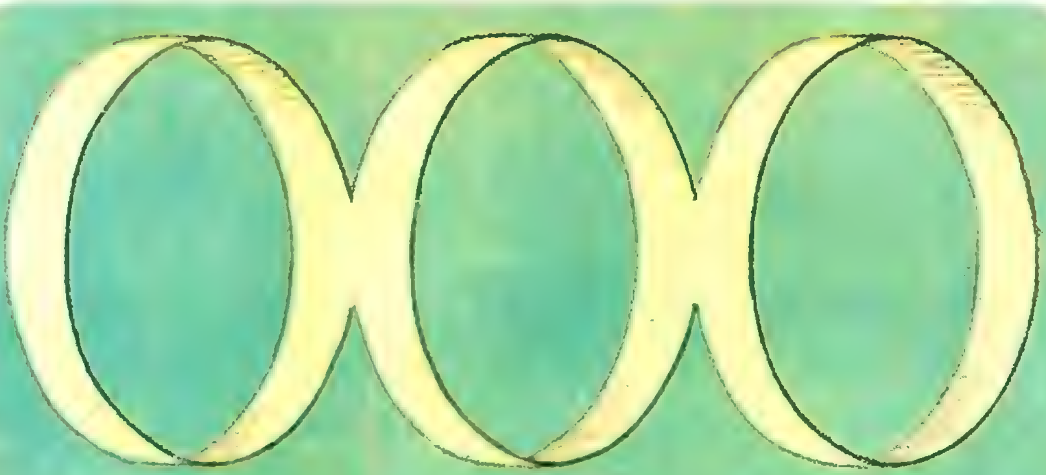


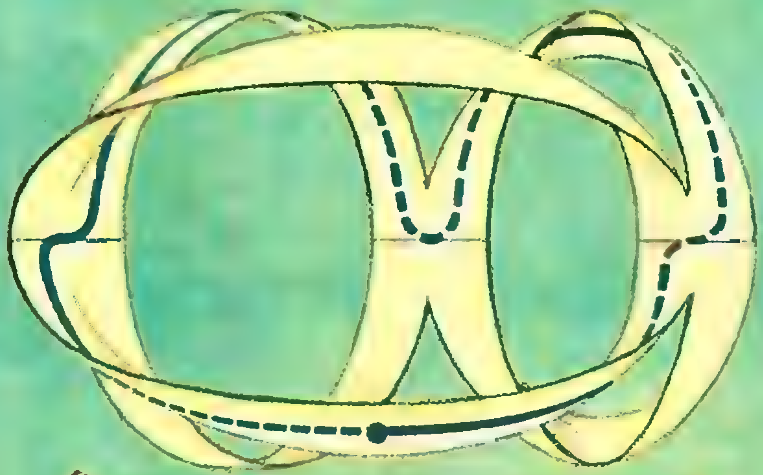
15. Как бы вы сыграли на месте белых?

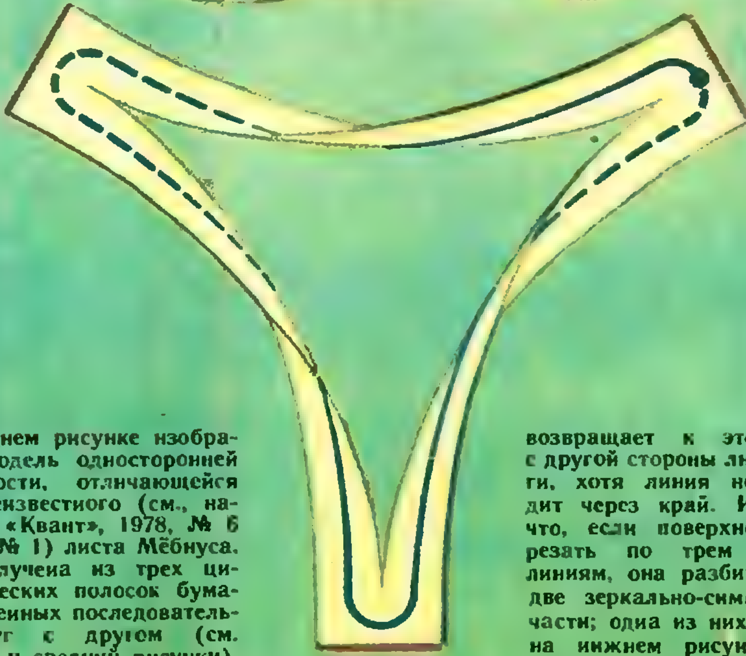


16. Выигрывают ли черные при помощи такой жертвы ферзя: 1...g4 2. Л:d5 gf 3. Лc5 Ф:c5! 4. bc fg?

Срок отправки решений — 25 октября 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).





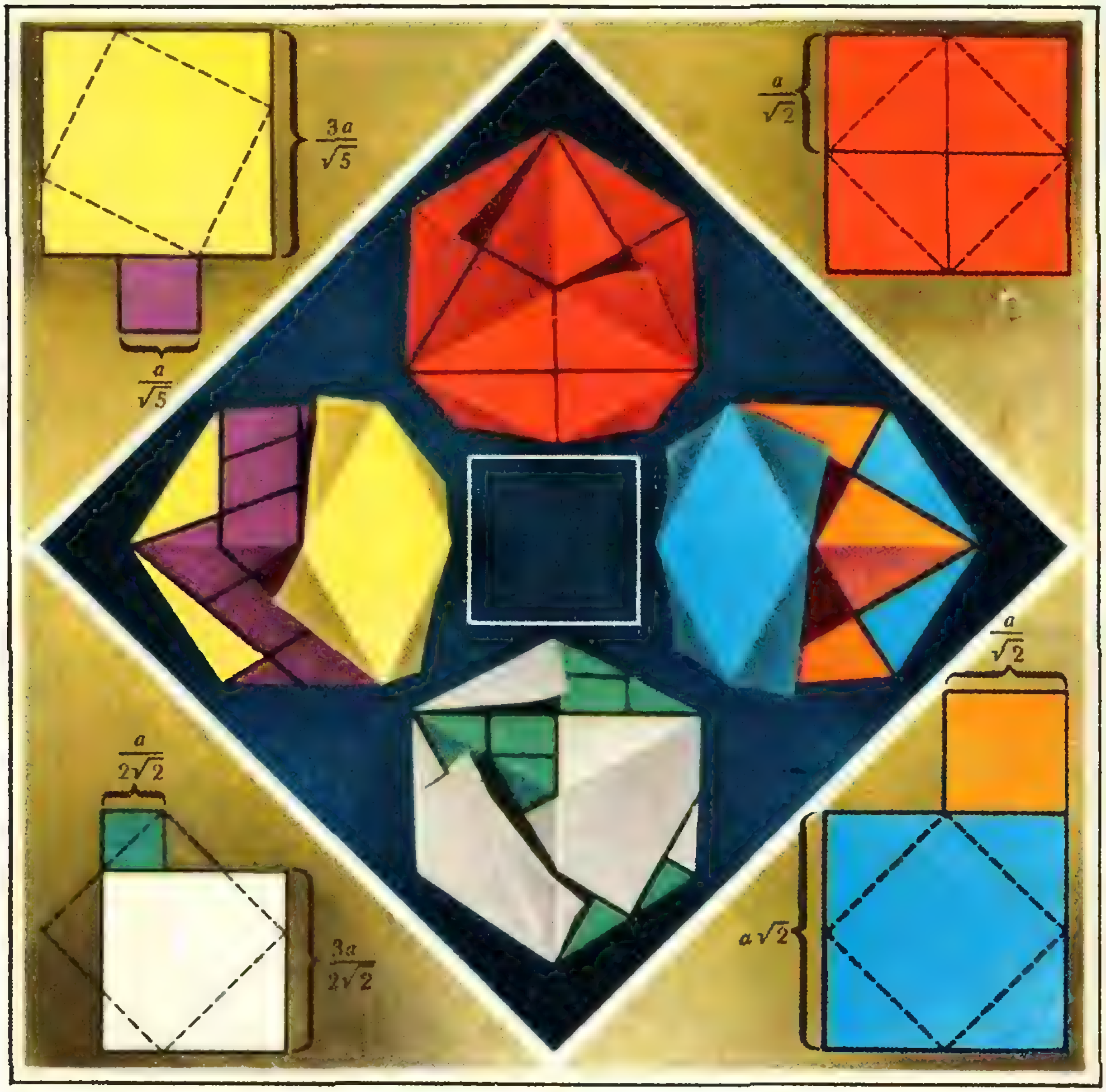


На среднем рисунке изображена модель односторонней поверхности, отличающейся от общеизвестного (см., например, «Квант», 1978, № 6 и 1979, № 1) листа Мёбнуса. Она получена из трех цилиндрических полосок бумаги, склеенных последовательно друг с другом (см. верхний и средний рисунки). То, что поверхность — односторонняя, видно из среднего рисунка: обход из красной точки по синей линии возвращает к этой точке с другой стороны листа бумаги, хотя линия не переходит через край. Интересно, что, если поверхность разрезать по трем красным линиям, она разбивается на две зеркально-симметричные части; одна из них показана на нижнем рисунке. Советуем изготовить эти модели и повозиться с ними (в частности, разрезать их по синим линиям).

А. Кипенский

Цена 40 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке показаны решения четырех задач Ю. Пухначева, сформулированных в этом номере под заголовком «Обклеим куб квадратами». Сверху показан красный куб, обклеенный двенадцатью квадратами со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$; справа — оранжево-голубой куб, обклеенный двумя квадратами со стороной $\sqrt{2}$ и четырьмя — со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$; снизу — бело-зеленый куб $\left(16 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right.$ и $\left.2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$; слева — желто-фиолетовый $\left(12 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right.$ и $\left.2 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.


$\frac{3a}{\sqrt{5}}$
$\frac{a}{\sqrt{5}}$
$\frac{a}{\sqrt{2}}$
$\frac{a}{\sqrt{2}}$
$a\sqrt{2}$
$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$

НОМЕР
9

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Основан в 1970 году

КВАНТ

9
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

В НОМЕРЕ:		IN THIS ISSUE:
С новым учебным годом!	2	Good luck in the new school year!
Народное образование в СССР	3	Public education in the USSR
Ю. Осипов. Гравитационный захват	4	*Yu. Osipov.* Gravitational capture
А. Стасенко. Летать быстрее и дальше	12	*A. Stasenko.* To fly faster and further
А. Буздин, В. Тугушев. Как создавалась физика низких температур	19	*A. Buzdin, V. Tugushev.* How low temperature physics were created
Б. Явелов. Луи де Бройль	28	*B. Yavelov.* Louis de Broglie
Математический кружок		**Mathematics circle**
И. Камышко. Поль Дирак и задача о трех рыбаках	30	*I. Kamyshko.* Paul Dirac and the three fishermen story
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Премии «Кванта»	32	Kvant's prizewinners
Задачи М761—М765; Ф773—Ф777	33	Problems M761—M765; P773—P777
Решения задач М731—М738; Ф743—Ф747	36	Solutions M731—M738; P743—P747
Список читателей, приславших правильные решения	47	List of readers who have sent correct solutions
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	49	Problems
В. Нахшин. Понятие определения и определение понятий	50	*V. Nakhshin.* The notion of definition and the definition of notions
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
Г. Левитас. Используя графики	54	*G. Levitas.* Using graphs
Информация		**Information**
Е. Юносов. IV Московский турнир юных физиков	57	*E. Yunosov.* The IVth Moscow young physicist competition
Ответы, указания, решения	62	**Answers, hints, solution**
Рецензии, библиография (*29*)		**Book reviews** (*29*)
Смесь (*18, 46, 61*)		**Miscellaneous** (*18, 46, 61*)
Шахматная страничка		**The chess page**
Как выигрывать проигрывая (*3-я с. обложки*)		How to win when losing (*3rd cover page*)

На первой странице обложки изображены в натуральную величину сверхпроводящие кабели, используемые в крупных сверхпроводящих системах. В сечении видны тонкие нити сверхпроводника, окруженные металлом с высокой электро- и теплопроводностью.

Об открытии сверхпроводимости читайте в статье А. Буздина и В. Тугушева «Как создавалась физика низких температур».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982

СССР
60
ЛЕТ

С новым учебным годом!

Дорогие ребята!

1982 год богат событиями важного политического значения, каждое из которых имеет прямое отношение к нашим школьным делам.

Отмечается 60-летие образования СССР. Как далеко шагнула наша страна за эти годы! Первой из стран мира она перешла рубеж полного среднего образования подрастающего поколения. Она может гордиться тем, что на этом новом количественном рубеже обеспечивается и глубокий научный уровень подготовки молодежи. Для выпускника советской школы характерно глубокое проникновение и в понимание общественных закономерностей, и в материальный мир. Гармоническое развитие человека достигается познанием научных истин, непременным посильным участием в общественно полезных трудовых делах, приобретением навыков высоко нравственного поведения. Школа стала важнейшим государственным воспитательным учреждением, в котором формируются молодые строители коммунистического общества.

Майский (1982 г.) пленум ЦК КПСС выдвинул Продовольственную программу СССР. Вам предстоит трудиться над претворением ее в жизнь. Впереди у нас большие дела. Все быстрее достижения человеческой мысли облекаются в конкретные дела, новые машины, эффективные технологии. Все совершеннее становится труд, оснащение предприятий. И от вас требуется хорошая подготовка. Современный работник — это человек, глубоко понимающий процессы, происходящие в материальном производстве, умеющий использовать их с максимальной отдачей. Вот почему очень важно иметь в школах разветвленную систему кружков по интересам, факультативных курсов, школьных научных обществ, различных секций. На фундамент основных школьных курсов, в зависимости от интересов учащихся, должны накладываться дополнительные знания. Лучшие учителя не только обогащают вашу память знаниями. Они всемерно развивают ваши способности, стараются привить вам элементы творческого подхода к анализу явлений. Современная педагогика немыслима без применения приемов, развивающих, будоражащих мысль.

Инициатива создания журнала, который вы держите в руках, принадлежит выдающимся ученым и педагогам страны. Это журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Он относится к жанру изданий отнюдь не легкого чтения. Тем не менее его тираж превышает 175 тысяч экземпляров. Для многих молодых людей «Квант» становится первым ориентиром на пути в современную науку. Это ли не показатель огромного желания молодежи вникнуть в мир математики, теоретической физики и других сопредельных наук.

Позвольте пожелать вам новых успехов в овладении богатствами познания природы и общества. Старайтесь вникнуть в существо изучаемых явлений. Помните, что не только количеством материала, который вы запомнили, определяется успех учения, но и глубиной познания этого материала, умением активно его применять на практике.

Министр просвещения СССР
член-корреспондент АН СССР
М. А. ПРОКОФЬЕВ

МПрокофьев

Народное образование в СССР

Советская школа с момента ее возникновения всегда была верным помощником Партии в коммунистическом строительстве. За 60 лет Союза Советских Социалистических Республик каждая пятилетка оставляла в области народного образования свой неповторимый след.

Нелегок был путь страны от почти сплошной неграмотности до Октябрьской революции ко всеобщему среднему образованию. Советское общенародное государство взяло на себя решение всех задач школьного строительства, создание материальной базы школ и их финансирование, подготовку и содержание педагогических кадров, обеспечение школы необходимыми учебными материалами и пособиями. Наше государство ежегодно выделяет на нужды просвещения миллиарды рублей и всеми доступными ему средствами стимулирует его развитие.

В этом году исполнилось 10 лет со дня принятия ЦК КПСС и Советом Министров СССР постановления «О завершении перехода ко всеобщему среднему образованию молодежи и дальнейшем развитии общеобразовательной школы». В нем отмечалось, что в стране создаются все условия для завершения перехода ко всеобщему среднему образованию как одной из важных предпосылок дальнейшего социально-политического и экономического развития нашего общества по пути к коммунизму, роста социалистической сознательности и культуры трудящихся.

Суммируя итоги развития школы за 10 лет со дня принятия постановления, следует отметить, что за это время среднее образование получили 37,5 млн. человек, что составляет почти половину всех людей, получивших среднее образование за все время существования Советской власти.

Осуществление общего, специального и профессионально-технического среднего образования подрастающего поколения имеет историческое и международное значение. В нашей стране успешно развивается и совершенствуется единая система народного образования, которая обеспечивает широкую образовательную подготовку молодежи, хорошо и надежно служит ее духовному, нравственному и физическому развитию, обеспечивает возможность поступления в любой вуз, а также подготовку к труду во всех сферах народного хозяйства. Такая демократическая система народного образования — одно из величайших достижений Советской власти.

В отчетном докладе ЦК КПСС XXVI съезду Коммунистической партии Советского Союза дана высокая оценка достижений советской социалистической системы народного образования. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев в докладе съезду партии сказал: «Взят важный рубеж — завершен переход к обязательному всеобщему среднему образованию».

Ю. Осипов

Гравитационный захват

Как образовалась Солнечная система? Этот вопрос завладел умами ученых, вероятно, с той самой поры, как выяснилось, в каком порядке сорасположены в мировом пространстве Солнце, Земля, другие планеты. Древние верили, что центральной фигурой этого космического сообщества является Земля. Однако истинная картина оказалась иной: планеты, в том числе и наша, обращаются вокруг Солнца по орбитам, близким к круговым и расположенным примерно в одной плоскости. Как же сложился этот хоровод?

В 1796 году французский математик и механик Пьер Симон Лаплас выдвинул свою знаменитую космогоническую гипотезу, предлагавшую ответ на этот вопрос. Лаплас полагал, что Солнечная система образовалась из вращающейся газовой туманности. Под действием сил притяжения между частицами газа туманность сжималась и, в соответствии с законом сохранения момента импульса, вращалась все быстрее. В какой-то момент для частиц, находившихся на экваторе вращающегося сгустка, сила притяжения к его центру оказалась равной центробежной силе инерции, так что орбиты этих частиц далее уже не сужались; другие же частицы продолжали приближаться к центру. Туманность сплющивалась к плоскости, перпендикулярной оси ее вращения. Затем, по предположению Лапласа, она разделилась на центральный сгусток, из которого впоследствии образовалось Солнце, и периферийные кольца, позже сгустившиеся в планеты.

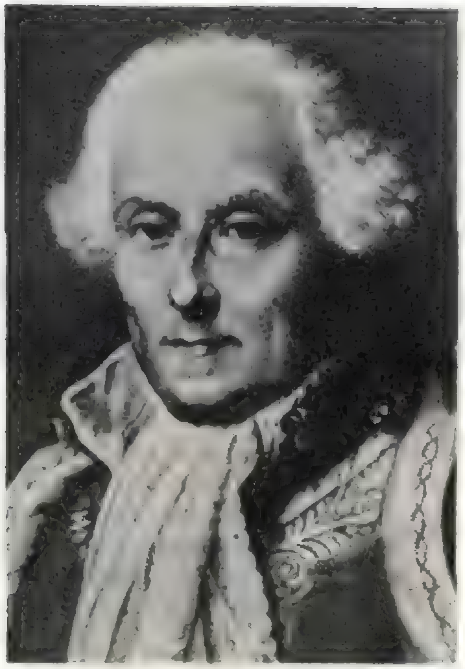
Гипотеза Лапласа хорошо объясняла концентрический характер планетных орбит. Но ведь в околосолнечном хороводе участвуют не только планеты. Вместе с ними вокруг нашего светила обращаются также и кометы. У многих из них орбиты сильно отличаются от круговых, представляют собой весьма вытянутые эллипсы и, что особенно примечательно, не лежат в плоскости планетных орбит, а ориентированы довольно хаотически. Как объяснить такую дисгармонию?

В 1770 году астрономы наблюдали комету, названную кометой Лекселя. В ожидавшийся срок ее следующего появления она не была обнаружена в предвычисленной точке небосвода. Как оказалось, в этом повинен Юпитер: комета была резко сбита со своей орбиты мощным притяжением этой планеты-гиганта в тот момент, когда она миновала его окрестности.

И вот, встав перед необходимостью вписать кометы в свою картину происхождения Солнечной системы, Лаплас выдвинул смелое предположение: среди тел, ее составляющих, есть не только "родные" дети Солнца, но и "приемные"; кометы — это пришельцы из космоса; те из них, которые, пролетая сквозь Солнечную систему, прошли вблизи какой-либо крупной планеты, резко, подобно комете Лекселя, изменили свою орбиту и свернули со своего прежнего, устремленного в бесконечность, пути на эллиптические околосолнечные орбиты.

Правда, Лаплас не доказал своего предположения, видимо, полагаясь на его самоочевидное правдоподобие. Это сочетание правдоподобия и недоказанности предопределило гипотезе гравитационного захвата нелегкую судьбу в истории науки.

Одни ученые, веря в ее будущее строгое обоснование, отводили ей принципиальную роль в своих суждениях о происхождении Солнечной системы. Другие, напротив, относи-



П. Лаплас (1749—1827). Великий французский математик, астроном и механик, выдвинувший гипотезу о возможности гравитационного захвата.

лись к ней с недоверием и настойчиво пытались ее опровергнуть.

А причины для недоверия у скептиков были. К сомнениям побуждали уже самые простые примеры гравитационного взаимодействия.

Задача двух тел

Простейшая система небесных тел, движущихся под действием взаимного притяжения, очевидно, насчитывает всего два тела. Если исследуется вопрос о том, может ли одно из них захватить своим притяжением другое и заставить его обращаться вокруг себя, то естественно предположить "захватывающее" тело весьма массивным, а массу "захватываемого" считать весьма малой.

Условимся не рассматривать случай, когда притягиваемое тело падает на притягивающее. Иными словами, будем считать, что движение не прекращается и его можно прослеживать сколь угодно далеко вспять и сколь угодно далеко вперед во времени.

Чтобы исследовать это движение, воспользуемся известной формулой Ньютона для силы гравитационного взаимодействия между двумя телами масс m_1 и m_2, отстоящими друг от друга на расстояние r:

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}.$$

Поскольку масса одного тела предполагается много большей, чем масса другого, естественно считать это первое, массивное тело (назовем его Солнцем) неподвижным и поместить в его центре начало системы координат. Тогда величина r в знаменателе Ньютоновой формулы представит собой радиус-вектор второго, движущегося тела (назовем его кометой).

Формула Ньютона задает силу притяжения кометы Солнцем, а следовательно, ускорение кометы. Чтобы конкретно описать ее траекторию, надо знать ее положение и скорость в какой-то момент времени.

Ньютон показал, что в зависимости от этих конкретных данных траектория кометы может относиться лишь к одному из трех типов — представлять собой либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу (рис. 1). Принадлежность к тому или иному типу легче всего установить*) по скорости кометы в перигелии (наиболее близкой к Солнцу точке ее орбиты): при определенном значении этой скорости орбита будет параболической, при меньших значениях — эллиптической, при больших — гиперболической. Грубо говоря, эллиптические орбиты — самые

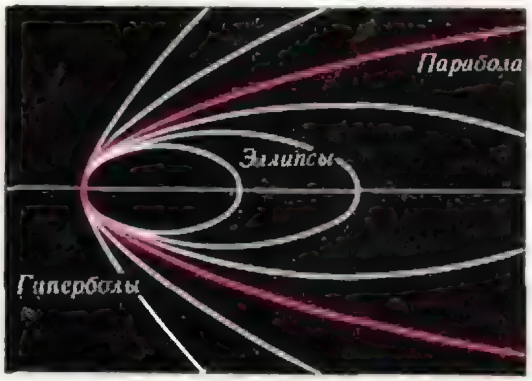
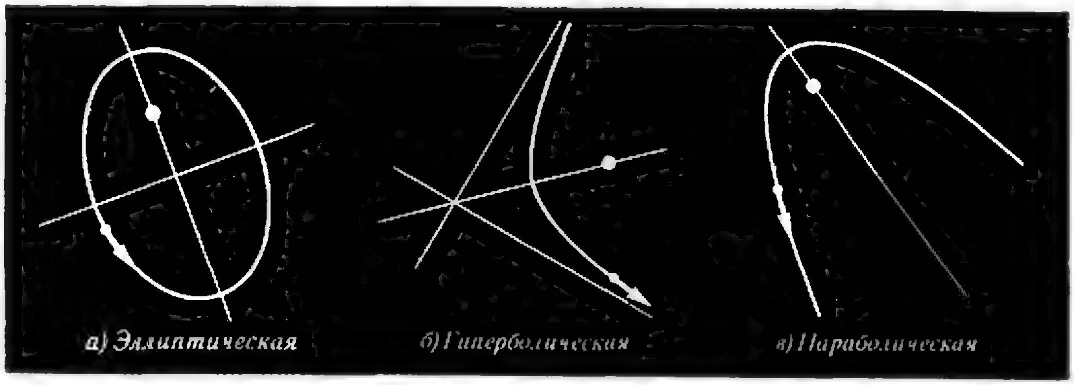


Рис. 1. Семейство эллипсов, переходящее в параболу и гиперболы

---

*) Вывод можно найти в «Кванте», 1976, № 5, с. 11 или в книге В. И. Левантовского «Механика космического полета в элементарном изложении» (М., «Наука», 1980).



а) Эллиптическая б) Гиперболическая в) Параболическая

Рис. 2. Типы орбит в задаче двух тел

"тихоходные", гиперболические — самые "стремительные".

По эллиптической орбите (рис. 2,*а*) комета движется периодически с переменной скоростью, достигающей максимума при каждом прохождении через перигелий и минимума — при прохождении через афелий (наиболее удаленную от Солнца точку эллиптической орбиты).

При движении по гиперболической орбите (рис. 2,*б*) комета прилетает из бесконечности вдоль асимптоты, при приближении к Солнцу поворачивается, облетает его и удаляется в бесконечность вдоль другой асимптоты. При этом на очень большом расстоянии от Солнца скорость можно считать постоянной; при приближении к Солнцу ее величина возрастает, достигая максимума в перигелии, затем убывает и комета уходит на бесконечность с прежней по величине скоростью. Роль Солнца, таким образом, сводится к тому, чтобы повернуть вектор скорости кометы.

У параболической орбиты (рис. 2,*в*) нет асимптоты и, что важно, при удалении на бесконечность скорость кометы стремится к нулю.

Гиперболические и параболические орбиты родственны друг другу: комета прилетает к Солнцу из бесконечности и в бесконечность же удаляется. Эллиптические орбиты качественно отличны от остальных: комета всегда остается на ограниченном расстоянии от Солнца.

Слова, только что послужившие нам для сравнения орбит, помогут отчетливее охарактеризовать процесс гравитационного захвата одного тела другим (или какой-либо системой тел): в предшествующие этому процессу бесконечно давние моменты времени захватываемое тело находилось на бесконечном удалении от захватывающего, а во все последующие пребывает близ него на ограниченном расстоянии. Таким образом, картина движения захватываемого тела сугубо несимметрична во времени по отношению к моменту захвата.

Ничего подобного мы не видим среди типов движения, исчерпывающе описанных Ньютоном для случая двух тел, которые мы условно назвали Солнцем и кометой. В каждом из трех случаев характер движения кометы в бесконечно далеком прошлом и бесконечно далеком будущем совпадают.

Иными словами, гравитационный захват в системе из двух тел невозможен.

А если тел больше?

Задача трех тел

Казалось бы, с появлением третьего участника в ансамбле движущихся тел расчет их движения не должен существенно усложниться. Однако это не так: сложность задачи при переходе от случая двух тел к случаю трех тел резко возрастает. Движение двух тел сможет рассчитать (хотя и не без труда) всякий, кто хорошо освоил методы дифференциального и интегрального исчисления. Задача трех тел представляет собой знаменитую проблему, над которой билось не одно поколение математиков и астрономов.

Легко написать уравнения движения для каждого из тел. Но вот решить получившиеся уравнения, найти траектории тел по заданным их положениям и скоростям в некоторый момент времени в общем случае не удается. Более того, сейчас строго доказано, что найти общее решение задачи невозможно! Дать геометрическое описание решений тоже представляется в высшей степени затруднительным.

Ну, а если подойти к задаче трех тел без желания найти ее точное решение и попытаться определить хотя бы типы их движения? При таком подходе удается достичь некоторых результатов.

Ради ясности можно несколько сузить постановку вопроса наподобие того, как мы поступали при разборе задачи двух тел. Пусть одно из трех тел значительно превосходит по массе остальные. И пусть в какой-то период времени оба легких тела (кометы) находятся поблизости от тяжелого (Солнца). Рассмотрим моменты времени, бесконечно далекие от этого периода, прошлые или будущие по отношению к нему, и будем интересоваться: где в такие моменты находится та или иная комета — на бесконечном удалении от Солнца или в ограниченной его окрестности? В зависимости от ответа на этот вопрос будем классифицировать типы движения.

Подобную классификацию для задачи трех тел предложил французский астроном Ж. Шази (1882—1955). Все мыслимые варианты движения он подразделил на четыре типа:

тип гиперболический (рис. 3,*а*), когда в бесконечно далекие моменты времени и будущего и прошлого обе кометы бесконечно далеки от Солнца;

тип гиперболо-эллиптический (рис. 3,*б*), когда одна из комет находится на ограниченном расстоянии от Солнца, а вторая приходит из бесконечности и уходит в бесконечность;

тип ограниченных движений (рис. 3,*в*), когда все три тела в продолжение бесконечного времени находятся на ограниченных расстояниях друг от друга;

тип осциллирующих движений (рис. 3,*г*), весьма экзотический, когда существует некоторая ограниченная область пространства, где все три тела время от времени оказываются одновременно, но не существует такой ограниченной области, где они оставались бы вечно.

Исходя из этой классификации, для случая трех тел определяют понятия *частичного* и *полного захвата*. Про частичный захват говорят, если в прошлом движение принадлежит гиперболическому типу, а в будущем — гиперболо-эллиптическому.

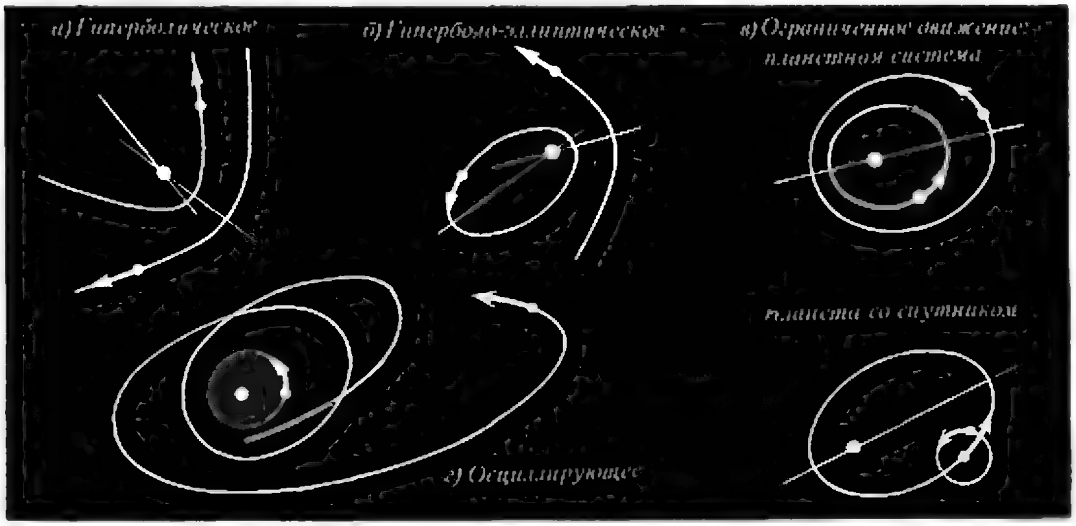


Рис. 3. Классификация движений в задаче трех тел

Иначе говоря, две кометы прилетают к Солнцу из бесконечности, одна из них способствует объединению Солнца и другой кометы в систему и, сыграв свою роль, уходит на бесконечность. *Полный захват* осуществляется, когда система из Солнца и кометы, обращающейся вокруг него по эллиптической орбите, присоединяет к себе вторую комету, прилетевшую из бесконечности, то есть когда в прошлом движение принадлежит гиперболо-эллиптическому типу, а в будущем — типу ограниченных движений.

Логически мыслимы и другие сочетания разнородных типов движения в прошлом и будущем. Вот, например, так называемый *обмен:* комета, прилетев из бесконечности, разрушает систему из Солнца и другой кометы, обращающейся вокруг него по эллипсу, так что эта другая комета улетает на бесконечность, а прилетевшая вместе с Солнцем образуют новую эллиптическую систему.

Ж. Шази: захват невозможен

В определениях частичного и полного захвата, данных в предыдущем разделе, бросается в глаза характерная деталь: поведение системы трех тел в прошлом и будущем принадлежит разным типам.

Следовательно, вопрос о гравитационном захвате в задаче трех тел допускает и такую, более широкую постановку: может ли система в результате гравитационного взаимодействия сменить один тип своего движения на другой?

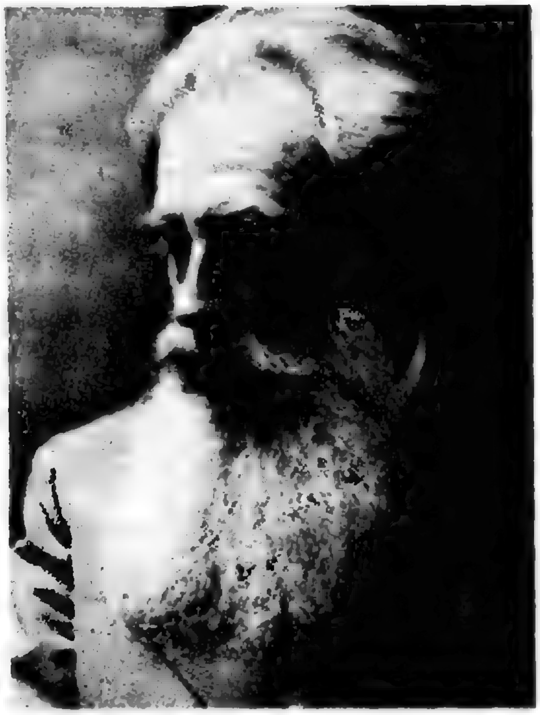
Не кто иной, как сам Шази, в начале тридцатых годов опубликовал категорическое утверждение: подобные процессы невозможны. Иначе говоря, гравитационный захват — как полный, так и частичный — неосуществим и в системе трех тел.

Ну, а обмен? Шази было известно, что еще в начале века путем приближенного численного интегрирования были построены примеры обменного взаимодействия. Однако он счел эти примеры неубедительными на том основании, что по поведению системы на конечном интервале времени нельзя судить о ее поведении на интервале бесконечном. Кроме того, он указывал на ошибки численного интегрирования, которые очень трудно учесть. Шази даже заметил по этому поводу, что "точный математический анализ демонстрирует здесь свое преимущество перед приближенными численными методами исследования".

Мысль о том, что движение тел может иметь неодинаковый характер в прошлом и будущем, в частности идея гравитационного захвата, оказалась дискредитированной. Это заставило многих усомниться ~~в~~ космогонической гипотезе О. Ю. Шмидта, выдвинутой советским ученым в 1944 году. Центральным местом в этой гипотезе было предположение о том, что Солнечная система возникла из газо-пылевого облака, которое Солнцу помогла захватить пролетавшая неподалеку от него звезда.

О. Ю. Шмидт: частичный захват?

Чтобы рассеять сомнения скептиков, Шмидт построил в середине сороковых годов, опять-таки путем численного интегрирования, пример частичного захвата в задаче трех тел. Орбиты всех трех тел в системе координат, связанной с одним из них (P_0), изображены на рисунке 4,*а*. Тело P_1 приходит из бесконечности с умеренной скоростью, тело P_2 — с очень высокой; в какой-то момент они сближаются. В течение короткого времени сближения относительное движение тел P_1 и P_2 можно считать происходящим как в задаче двух тел, то есть по гиперболам. Как мы уже знаем, взаимное притяжение несколько разворачивает эти тела друг относительно друга и далее они продолжают движение с изменившимися скоростями (как если бы двое, бегущих наперерез друг другу, вздумали обменяться рукопожатием). В результате после сближения тело P_1 несколько теряет в абсолютной величине скорости и переходит с гиперболической орбиты относительно P_0 на эллиптическую, а тело P_2 продолжает свой путь по



О. Ю. Шмидт (1891—1956). Выдающийся советский математик, прославленный полярный исследователь. Предложил первый пример частичного захвата в задаче трех тел.

слегка изменившейся гиперболе с несколько увеличенной скоростью.

Этот пример, возможно, станет более понятным, если представить себе противоположную ситуацию «распада», когда тело P_1 «от века» обращалось вокруг P_0, но в какой-то момент налетевшее с огромной скоростью тело P_2 стащило его с орбиты и выбросило на бесконечность, а само продолжило свой путь на бесконечность, немного потеряв в энергии (рис. 4, *б*). Чтобы получить отсюда пример захвата, достаточно представить себе время, текущим вспять.

Пример Шмидта обладал теми же недостатками, что и примеры обмена: расчет охватывал лишь конечный промежуток времени; к тому же ошибки численного интегрирования оказались чрезмерно велики. Когда сравнили значения момента импульса на концах интервала интегрирования, они не совпали. Пример Шмидта получился не убедительным. Казалось, что точка зрения Шази восторжествовала.

К. А. Ситников: частичный захват возможен!

Прошло несколько лет. Пример Шмидта подвергся пересмотру. Результаты свидетельствовали: основная идея ученого верна — небесное тело, прилетевшее к Солнцу на огромной скорости, может «столкнуть» другое тело, пролетающее рядом, с гиперболической орбиты на эллиптическую, а затем удалиться в бесконечность. Более того, выяснилось, что эту идею можно использовать для построения траекторий чисто теоретическими средствами, без численного интегрирования.

В 1952 году К. А. Ситников построил аналитический пример частичного захвата, а в 1956 году В. М. Алексеев — примеры обмена. При этом оказалось, что подобные примеры отнюдь не представляют собою какие-то единичные исключения — небольшое изменение параметров небесных тел не приводило к изменениям качественной картины явления.

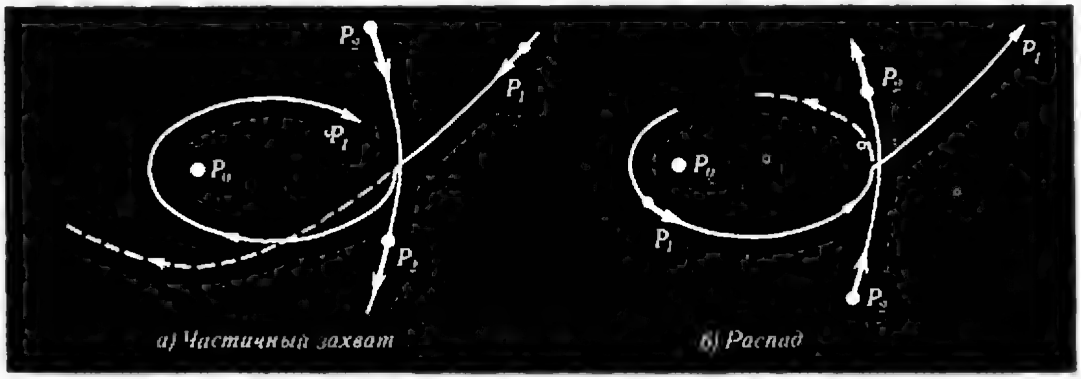


Рис. 4. Примеры частичного захвата и распада

В. М. Алексеев (1932—1980). Выдающийся советский математик, исследования которого в задаче трех тел завершились построением безупречного примера полного захвата.

В сравнительно простых случаях утверждение Шази было опровергнуто.

Но оставалась под сомнением возможность комбинаций других типов движений. Было неизвестно, существуют ли осциллирующие движения вообще, возможен ли полный захват. Дело осложнялось тем, что такие примеры, если бы их и удалось обнаружить, представляли бы собой случаи исключительные.

Равнобедренная задача трех тел

Уже на примере задачи двух тел мы могли убедиться, как много для осмысления общей проблемы значит порою характерный частный случай. При разборе задачи двух тел одно из них мы предполагали значительно тяжелее другого. Это сильно упростило классификацию их движений. Классификация остается справедливой и для общего случая, но если бы мы сразу принялись за него, объяснение потребовало бы больших усилий.

При анализе осциллирующих движений успех также был обусловлен удачным модельным примером. Предложенный А. Н. Колмогоровым, он получил впоследствии название *равнобедренной задачи* трех тел. Слово «равнобедренный» выражает характерную особенность примера: в каждый момент времени треугольник, образуемый тремя телами, оказывается равнобедренным. Два тела, составляющие основание этого треугольника, имеют одинаковую, весьма солидную массу. Назовем их «звездами»; третье же, значительно более легкое, естественно назвать «пылинкой».

Звезды в примере Колмогорова движутся в плоскости по эллиптическим орбитам вокруг своего общего центра масс, пылинка же движется вдоль перпендикуляра к плоскости, восстановленного в этом центре (рис. 5).

В 1960 году Ситников показал, что движение пылинки может носить осциллирующий характер, то есть представлять собой колебания с изменяющимся размахом, причем этот размах временами достигает сколь угодно больших значений.

Такие колебания могут происходить и с постоянным размахом — если звезды движутся по окружности, словно гонясь друг за другом. Но если орбиты звезд — эллиптические и благодаря этому звезды то сближаются, то расходятся, хотя бы незначительно, в движении пылинки возникает эффект раскачки.

Этим примером было доказано существование осциллирующих движений в задаче трех тел.

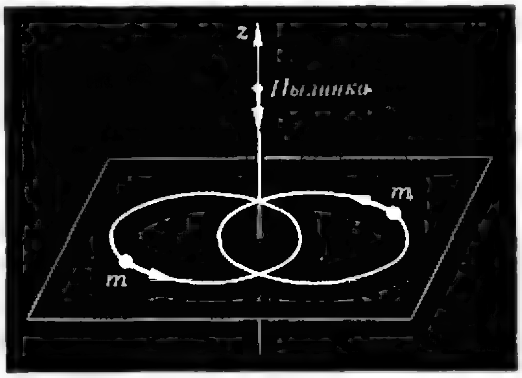


Рис. 5. Равнобедренная задача трех тел

Оставался последний бастион: проблема полного захвата.

В. М. Алексеев: полный захват возможен!

Исходной позицией для штурма последнего бастиона послужила все та же равнобедренная задача трех тел. Исследуя ее, В. М. Алексеев в 1968 году доказал: начальное положение и скорость пылинки можно выбрать так, что ее последующее движение будет принадлежать к типу ограниченных или осциллирующих движений, а приобрести такое положение и скорость пылинка может и прилетев из бесконечности.

В целом же картина движения выглядит так: пылинка приближается из бесконечности к плоскости эллиптического движения двух массивных тел, пронзает эту плоскость, и за это время массивные тела сближаются, силы взаимного притяжения между всеми тремя участниками движения возрастают настолько, что притормаживают пылинку, поворачивают ее вспять и заставляют в последующем совершать колебания с ограниченным или неограниченным размахом. Первая из двух этих возможностей соответствует полному захвату, вторая — *захвату в осцилляцию,* как говорят исследователи.

Как водится, самые последние шаги оказываются самыми трудными. Все те примеры движений, имеющих различный характер в прошлом и будущем, которые были построены до 1968 года, как бы выуживались из огромного океана неизвестности, какой представляет из себя вся совокупность возможных движений в задаче трех тел. Исследования же Алексеева пролили свет на то, как эта совокупность устроена.

Результат Алексеева завершил многолетнюю дискуссию по поводу утверждения Шази: оно оказалось полностью неверным! Самые спорные комбинации разнородных типов из классификации Шази, которыми движение трех тел описывается в прошлом и будущем, оказались осуществимыми, получили строгое аналитическое обоснование.

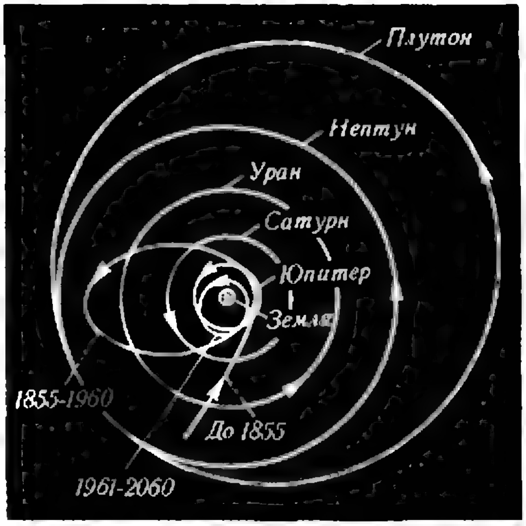


Рис. 6. Катастрофическая трансформация кометы Кирнса-Кви в 1855 г. и эволюция ее орбиты (по расчетам Е. И. Казимирчак—Полонской)

Комета Кирнса-Кви: захват Юпитером?

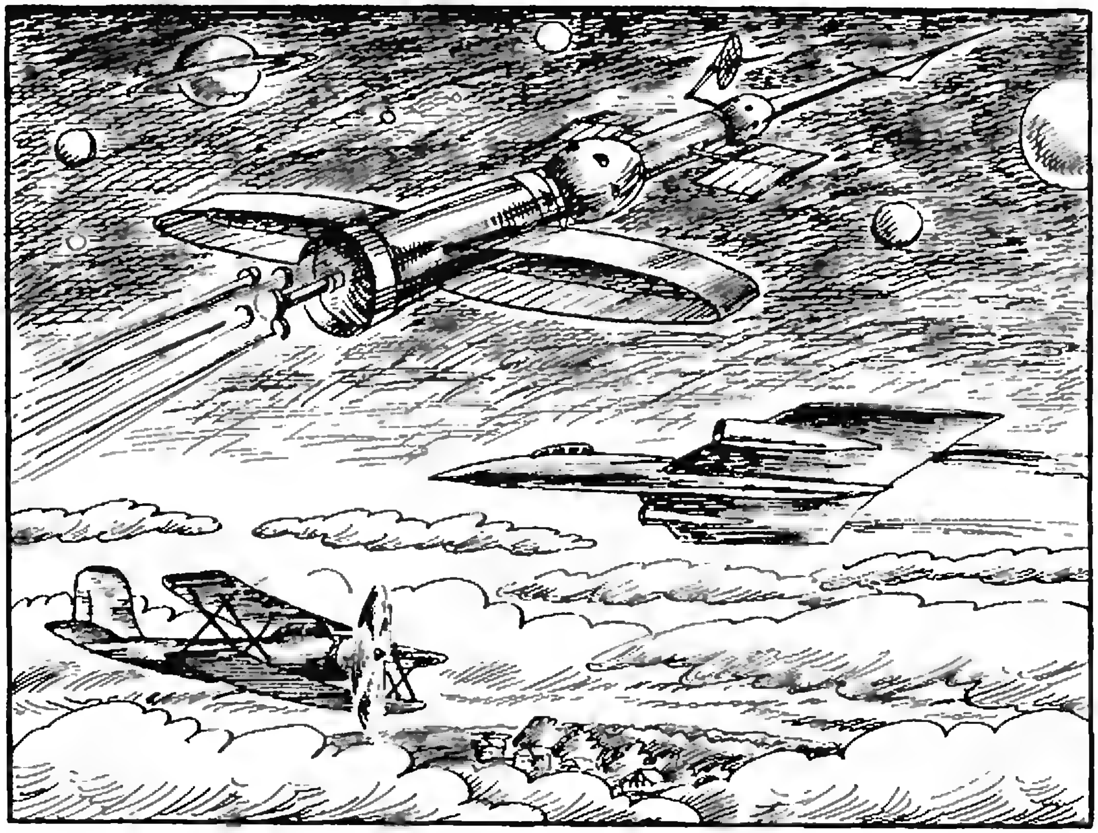
Нельзя сказать, что с опровержением утверждений Шази в проблеме гравитационного захвата не осталось никаких неясностей. Некоторые из них внимательный читатель мог бы подметить даже с помощью этой короткой статьи.

Ну, например: возможен ли такой гравитационный захват кометы, каким он виделся Лапласу — за счет ее прохождения мимо Юпитера или другой планеты-гиганта? Есть основания думать, что ответ — положительный.

Вот как может выглядеть этот захват. Комета, пройдя вблизи Юпитера на гиперболической (по отношению к Солнцу) скорости, тормозится им и переводится на эллиптическую орбиту вокруг Солнца с тем, чтобы при очередной встрече с Юпитером перейти на другую эллиптическую орбиту и т. д.

Некоторое время казалось, что так была захвачена комета Кирнса-Кви, открытая в 1963 году. По результатам полугодового наблюдения были вычислены ее нынешняя и предшествующая орбиты. Получилось (рис. 6), что в 1961 году комета Кирнса-Кви прошла вблизи Юпитера

(Окончание см. на с. 27)



А. Стасенко

Летать быстрее и дальше

Живет она, дошедшая от дедов,
Особая сжигающая страсть
Влечет к себе туманность Андромеды
Сквозь немоту космических пространств

Н. Образцова. Город над морем

Тысячи лет мечтал человек летать и добился этого, «опираясь на силу своего разума», на сумму науки и технологии. Летательный аппарат, по сути дела, — венец технической цивилизации. Не случайно его разработка и постройка и сегодня доступны не всем странам. Мы можем по праву гордиться вкладом русских ученых в осуществление этой общечеловеческой мечты. Одним из них был Константин Эдуардович Циолковский, который впервые обосновал возможность использования ракет для межпланетных сообщений.

Рассмотрим некоторые аспекты физики летательного аппарата, в частности — ракетного двигателя, разработанного Циолковским и описанного в его научных и популярных статьях и книгах.

Почему именно ракета?

В определенном смысле любое движение является реактивным. «Пароход отталкивает воду, дирижабль и аэроплан — воздух, человек и лошадь — земной шар... Такие жалкие реактивные явления мы обыкновенно и наблюдаем на земле. Вот почему они никого не могли поощрить к мечтам и исследованиям... Ракета заключает в самой себе вещества для отброса» (К. Э. Циолковский).

Ракеты начали делать давно, но сначала это была «то гульба, то пальба», как поется в песне. Только Циолковский понял, что ракета — единственное средство для достижения принципиально любой скорости, а значит, и необходимой для преодоления силы земного тяготения. «Только разум и наука могли указать на преобразование этих явлений в грандиозные, почти непостижимые чувству», — писал Циолковский.

Так почему же именно ракета? Постараемся понять это, сравнив ее с другим, казалось бы самым близким ей «по духу», летательным аппаратом — прямоточным воздушно-реактивным двигателем. Но прежде — о самой ракете (рис. 1). Представим себе, что в некоторый произвольный момент времени t ракета имела скорость v. Мысленно разобьем ракету на две части — ту, которая через малый промежуток времени Δt «собирается» отлететь назад (отработанное топливо ракеты), обозначим ее массу через ΔM, и тот «остаток» массой m, который полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v+\Delta v$. Скорость отлетевшей части относительно «остатка» обозначим через u, тогда ее скорость относительно земного наблюдателя будет равна $(v+\Delta v)-u$. Так как разделение произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты не изменился*):

$$(m+\Delta M)\,v=m\,(v+\Delta v)+\Delta M\,(v+\Delta v-u),$$

или

$$\underline{mv}+\underline{\underline{\Delta M\cdot v}}=\underline{mv}+m\Delta v+\underline{\underline{\Delta M\cdot v}}+\uwave{\Delta M\cdot\Delta v}-\Delta M\cdot u.$$

Слагаемые, подчеркнутые прямыми чертами (одной или двумя), взаимно уничтожатся, а слагаемое, подчеркнутое волнистой линией, «исчезнет» вот по какой причине. Здесь и в дальнейшем мы будем все приращения — Δt, Δv, ΔM и другие — считать очень малыми, так что их произведения типа $\Delta M\cdot\Delta v$ будут совсем малыми, или, как говорят математики, второго порядка малости. Итак, что же останется от закона сохранения импульса? Вот какое равенство:

$$m\Delta v=u\Delta M.$$

Если учесть, что отброшенная масса ΔM в точности равна убыли массы ракеты: $\Delta M=-\Delta m$, то полученное равенство можно переписать в виде

$$\frac{\Delta v}{u}=-\frac{\Delta m}{m}. \qquad (1)$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для воздушно-реактивного двигателя (рис. 2). Вот он «готовится» в момент времени t «заглотить» порцию воздуха массой $\Delta m_в$ и, израсходовав массу горючего $\Delta m_г$, выбросить образовавшуюся смесь с относительной скоростью u. При этом, разумеется, изменение массы самого летательного аппарата будет равно $\Delta m=-\Delta m_г$. Запишем закон сохранения импульса для системы двигатель — горючее — воздух:

$$\Delta m_в\cdot 0+(m+\Delta m_г)\,v=(\Delta m_в+\Delta m_г)\,(v+\Delta v-u)+m\,(v+\Delta v)$$

(здесь v — скорость аппарата в момент времени t, $v+\Delta v$ — его новая скорость в момент $t+\Delta t$, первое слагаемое слева отражает тот факт, что поглощенный двигателем воздух первоначально покоился).

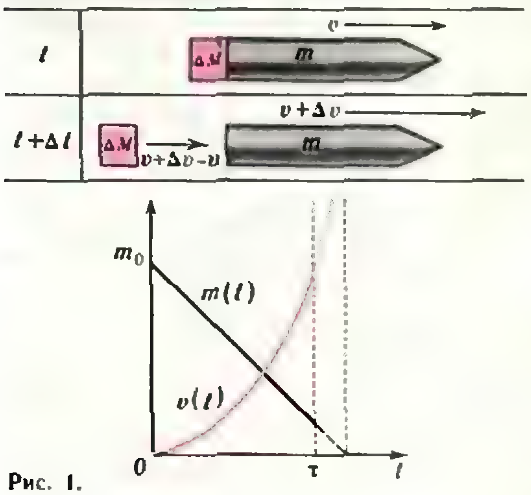


Рис. 1.

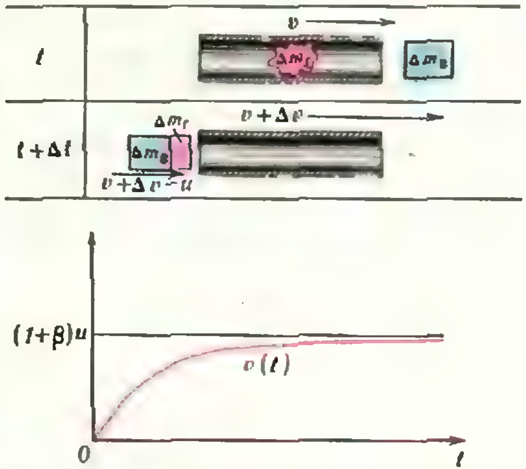


Рис. 2.

---

*) Если эта фраза вам показалась не очень понятной, советуем прочитать главу «Закон сохранения импульса» из школьного учебника «Физика 8».

Отсюда, учитывая сделанные раньше оговорки, после некоторых преобразований получаем

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m} - \frac{\Delta m_{\text{в}}}{m}\left(\frac{v}{u} - 1\right).$$

Пусть горючего подается ровно столько, чтобы оно все прореагировало с кислородом воздуха. Отношение масс $\Delta m_{\text{г}}/\Delta m_{\text{в}}$, конечно, будет зависеть от химического состава горючего, но для данного вещества оно будет постоянной величиной, которую мы обозначим через β. Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m}\,\frac{1+\beta-v/u}{\beta},$$

или

$$\frac{\Delta v}{u} = -\frac{\Delta m}{m}\,\frac{1+\beta-v/u}{\beta}. \qquad (2)$$

Посмотрите внимательно на уравнения (1) и (2). Они имеют нечто общее, а именно: для того чтобы скорость летательного аппарата росла ($\Delta v > 0$), нужно, чтобы масса его убывала ($\Delta m < 0$). Но есть и очень важное отличие: в правую часть уравнения (2) входит множитель $1+\beta-v/u$, который по достижении скорости $v = u(1+\beta)$ становится равным нулю. Это означает, что воздушно-реактивный двигатель, «заглатывающий» покоящийся воздух, не может разогнаться до скорости, существенно большей, чем относительная скорость истечения продуктов сгорания. Скорость такого двигателя имеет предел, который преодолеть невозможно. А для ракеты аналогичного предела нет.

На самом деле этим уже все сказано, однако в принципе можно получить и точные выражения для скоростей ракеты и двигателя.

Тот, кто умеет суммировать бесконечно малые приращения, то есть интегрировать, из выражения (1) легко получит (учитывая, что в момент $t_0 = 0$ $v = 0$ и $m = m_0$)

$$\frac{v-0}{u} = -(\ln m - \ln m_0),$$

или

$$\frac{v}{u} = \ln\frac{m_0}{m}.$$

Это и есть знаменитая формула Циолковского. Историки науки говорят, что он затратил на нее немало времени: первооткрывателю всегда трудно. Сегодня грамотный школьник получит ее за несколько минут, а студент факультета аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (специально тому обученный) — за несколько секунд.

Проанализируем полученную формулу. Если убыль массы ракеты в единицу времени есть величина постоянная (обозначим ее через $\mu = -\frac{\Delta m}{\Delta t}$), то с течением времени масса ракеты изменяется по закону (см. рис. 1)

$$m(t) = m_0 - \mu t.$$

По истечении времени τ, когда сгорит и будет выброшено все топливо, масса ракеты станет равной $m_\tau = m_0 - \mu\tau$, а ее скорость —

$$\frac{v_\tau}{u} = \ln\frac{m_0}{m_\tau}.$$

Очевидно, что ракета достигнет тем большей скорости, чем меньше оставшаяся масса. Это печально, ибо неэкономно, но что поделаешь — такова природа. Хорошо уже то, что найдена лазейка, используя которую можно достичь «скорости убегания» от планеты, хотя и дорогой ценой. Но есть и еще одна возможность — увеличение относительной скорости выброса отработанного топлива.

Вот что писал сам Циолковский по этому поводу: «Чтобы снаряд получил наибольшую скорость, надо, чтобы каждая частица продуктов горения или иного отброса получила наибольшую относительную скорость. Она же постоянна для определенных веществ отброса. Экономия энергии тут не должна иметь места: невозможна и невыгодна».

Итак, нужно постараться увеличить скорость выброса u.

Как выбрасывать массу?

В принципе, это можно делать миллионом способов. Так, в одном из проектов Циолковского реактивная тяга должна была получаться в результате выбрасывания из имеющейся на борту космического корабля пушки сферических ядер. Ясно, что такой способ не многого стоит: большой скорости он дать не может.

Среди множества гораздо более поздних проектов был, например, такой[*] (рис. 3). В геометрическом центре огромной прочной чаши взрываются поочередно доставляемые туда атомные бомбы. При взрыве каждой из них сначала возникает интенсивный выброс электромагнитной энергии в виде гамма- и рентгеновских лучей, видимого света и теплового излучения. Поглощение этой энергии, сопровождающееся испарением тонкого слоя космического корабля, сообщает аппарату импульс в желаемом направлении. Второе воздействие на корабль возникнет, когда осколки бомбы достигнут поверхности чаши и, обладая высокой скоростью, передадут ей свой импульс. Серия из нескольких сотен таких взрывов сможет обеспечить ускорение большой полезной нагрузки и ее взлет с поверхности планеты. (Этот процесс можно сравнить с работой многоступенчатой ракеты, состоящей из мощных ступеней с малыми периодами работы.) Конечно, в этом проекте речь идет о громадном летательном аппарате размером в несколько километров (а может быть, даже и десятков километров). Вот «как далеко может хватить разум человеческий!».

В настоящее время задача разгона и выброса массы реализуется более обыденно: путем пропускания сильно нагретого газа через так называемое сверхзвуковое сопло. Такой вариант получения реактивной тяги — «силою действия струи газа, вытекающего из резервуара, в котором этот газ находится под давлением», — тоже рассматривался Циолковским.

Разберем этот процесс в упрощенном виде, который, однако, позволит сделать многие выводы. Для лучшего понимания нам придется ввести несколько новых для многих читателей понятий — таких, как поток массы, поток импульса и поток энергии[*]. Они часто используются в физике.

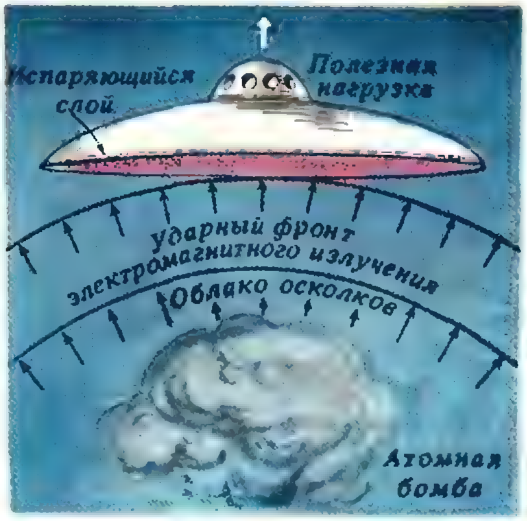


Рис. 3.

Представьте себе речку, в которой вода течет со скоростью u и которая имеет площадь поперечного сечения (перпендикулярного скорости) S. Тогда за единицу времени через это сечение проходит масса воды, равная произведению ϱuS. Эта величина и называется потоком массы. Посмотрите, как она «устроена»: плотность воды ϱ умножается на объем uS, переносимый в единицу времени. Но каждая единица массы (точнее — масса каждой единицы объема) обладает и кинетической энергией $\varrho u^2/2$, и импульсом ϱu. Значит, река переносит не только массу, но и эти величины тоже, причем потоки кинетической энергии и импульса равны соответственно $(\varrho u^2/2)\,uS$ и $\varrho u\cdot uS$. В дальнейшем эти понятия будут нами использованы.

Пусть какая-нибудь жидкость (или газ) движется по каналу переменного сечения с площадью S, зависящей от точки на оси X. Очевидно, что масса жидкости (или газа), проходящая через любое сечение S в единицу времени (поток массы), одинакова:

$$\varrho uS=\mu=\text{const}. \qquad (3)$$

---

[*] Этот и ряд других любопытных проектов описаны в книге У. Корлисса «Ракетные двигатели для космических полетов» (М., «Иностранная литература», 1962).

[*] О понятии потока различных физических величин рассказывается в статье Л. Луганского «Стойте справа, проходите слева...» («Квант», 1982, № 5). (*Прим. ред.*)

Если плотность ϱ постоянна, например, течет несжимаемая жидкость, то это уравнение отражает совсем простую мысль: где канал шире, там течение медленнее, где у́же — быстрее. В отличие от несжимаемой жидкости, газ может сильно расширяться, при этом его плотность уменьшается. Следовательно, при той же площади сечения канала скорость газа будет гораздо больше, чем скорость жидкости. Что и требуется для наших целей. Теперь понятно, почему из ракеты должен выбрасываться именно газ.

Для простоты рассуждений будем считать газ идеальным и одноатомным. Это означает, что он подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$, или

$$p=\varrho\frac{RT}{M} \tag{4}$$

(здесь p — давление, $\varrho=m/V$ — плотность, T — температура, M — молярная масса газа, а R — универсальная газовая постоянная), и что его внутренняя (тепловая) энергия равна

$$\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT.$$

Далее положим, что в газе не происходит никаких химических реакций, тепло к нему ниоткуда не поступает и никуда от него не отводится. Тогда поток суммарной энергии газа, так же как и поток массы, должен сохраняться. Как это записать?

Каждая единица объема газа обладает во время движения кинетической энергией $\varrho u^2/2$ и тепловой энергией ${}^3/_2\varrho RT/M$, поэтому потоки этих энергий равны $(\varrho u^2/2)uS$ и $({}^3/_2\varrho RT/M)uS$. Кроме того, сила давления pS совершает в единицу времени работу, равную pSu, что вызывает соответствующее увеличение потока энергии. Таким образом, поток суммарной энергии равен

$$\left(\frac{\varrho u^2}{2}+\frac{3}{2}\varrho\frac{RT}{M}\right)uS+pSu=\text{const},$$

или, после деления на ϱuS,

$$\frac{u^2}{2}+\frac{3}{2}\frac{RT}{M}+\frac{p}{\varrho}=\text{const}.$$

Преобразуем еще это уравнение, подставив выражение для давления из уравнения Менделеева — Клапейрона. Тогда получим

$$\frac{u^2}{2}+\frac{3}{2}\frac{RT}{M}+\frac{RT}{M}=\frac{u^2}{2}+\frac{5}{2}\frac{RT}{M}=$$
$$=\text{const}=\frac{5}{2}\frac{RT_0}{M}. \tag{5}$$

Здесь мы конкретизировали выражение постоянной, введя температуру T_0, при которой газ покоится ($u=0$).

Теперь, хорошенько поработав, пора получать «урожай». Из последнего уравнения видно, что если бы газ в процессе движения мог охладиться до $T=0$, то он приобрел бы самую большую скорость

$$u_{\max}=\sqrt{\frac{5RT_0}{M}}.$$

При этом вся тепловая энергия газа перешла бы в кинетическую энергию его направленного движения.

Сделаем численную оценку. Допустим, нам удалось нагреть самый легкий одноатомный газ гелий ($M=4$ кг/кмоль) до $T_0=3000$ К. Тогда его можно разогнать до скорости

$$u_{\max}=\sqrt{\frac{5RT_0}{M}}=$$
$$=\sqrt{\frac{5\cdot 8{,}31\cdot 10^3\ \text{Дж/(кмоль}\cdot\text{К)}\cdot 3\cdot 10^3\ \text{К}}{4\ \text{кг/кмоль}}}\approx$$
$$\approx 5{,}6\cdot 10^3\ \text{м/с}\approx 5{,}6\ \text{км/с}.$$

Это приблизительно в полтора раза меньше первой космической скорости, но вся прелесть в том, что ракета может набрать скорость, гораздо большую скорости истечения газа.

И, наконец, остался последний вопрос.

Каким нужно сделать канал?

Иначе говоря, каков должен быть закон изменения площади поперечного сечения S вдоль оси X, чтобы можно было достичь скорости $u_{\max}$?

Выделим объем канала, заключенный между близкими друг к другу сечениями x и $x+\Delta x$, где площади равны S и $S+\Delta S$, а скорости, плотности и давления — u и $u+\Delta u$, ϱ и $\varrho+\Delta\varrho$, p и $p+\Delta p$ соответственно (рис. 4). На участке Δx поток массы $\mu=\varrho uS$ изменяет свой импульс под действием разности $pS-(p+\Delta p)\times(S+\Delta S)$ сил давления, действующих вдоль оси X, и проекции на эту ось силы давления, действующей на боковую стенку канала: $p\cdot 2\pi r(x)\times\Delta x\cdot\operatorname{tg}\alpha=p\cdot 2\pi r(x)\cdot\Delta r=p\cdot\Delta(\pi r^2)==p\Delta S$.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для приращения импульса потока массы μ под действием указанных сил:

$$\mu(u+\Delta u)-\mu u==pS-(p+\Delta p)(S+\Delta S)+p\Delta S,$$

или

$$\underline{\mu u}+\mu\Delta u-\underline{\mu u}==\underline{\underline{pS}}-\underline{\underline{pS}}-\Delta p\cdot S-\underline{\underline{\underline{p\Delta S}}}-\Delta p\cdot\Delta S++\underline{\underline{\underline{p\Delta S}}}.$$

Отсюда, опуская подчеркнутые члены, получим

$$\mu\Delta u=-\Delta p\cdot S,$$

или

$$\varrho u\Delta u=-\Delta p. \qquad (6)$$

Тут кончается физика и начинается формальная обработка полученных результатов. Чтобы собраться с духом, выпишем рядом уравнения (3)—(6):

$$\varrho uS=\text{const},$$
$$p=\varrho\frac{RT}{M},$$
$$\frac{u^2}{2}+\frac{5}{2}\frac{RT}{M}=\text{const},$$
$$\varrho u\Delta u=-\Delta p.$$

Можно полюбоваться и прислушаться: тут вся динамика стационарного течения идеального газа! Но вот что любопытно. Три уравнения выписаны в виде обычных алгебраических соотношений, а последнее — в виде малых приращений. И с этим ничего не поделаешь — ведь и ϱ, и p и u изменяются вдоль канала. Поэтому последнее уравнение трогать не будем, а все другие запишем тоже в виде приращений (подробнее о том, как это сделать, в частности — как найти малое приращение произведения изменяющихся величин, можно прочитать в Приложении к статье):

$$uS\Delta\varrho+\varrho S\Delta u+\varrho u\Delta S=0,$$

или

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho}+\frac{\Delta u}{u}+\frac{\Delta S}{S}=0, \qquad (3')$$

$$\Delta p=\frac{R}{M}(T\Delta\varrho+\varrho\Delta T), \qquad (4')$$

$$u\Delta u+\frac{5}{2}\frac{R}{M}\Delta T=0, \qquad (5')$$

$$\varrho u\Delta u=-\Delta p. \qquad (6)$$

Подставим ΔT из выражения (5′) в равенство (4′), Δp из полученного выражения подставим в (6), оттуда $\Delta\varrho$ — в (3′) и найдем связь между Δu и ΔS:

$$\frac{\Delta u}{u}\left(\frac{3}{5}\,\frac{u^2M}{RT}-1\right)=\frac{\Delta S}{S}.$$

Отметим, что $^5/_3RT/M$ — это квадрат какой-то скорости. Обозначим его через a^2, тогда в скобке будет выражение u^2/a^2-1. На самом деле a^2 — это квадрат скорости звука в одноатомном газе при температуре T, но этот факт нам не понадобится. Просто будем помнить, что есть некоторая важная скорость a, зависящая от T. И этого нам здесь будет достаточно.

Итак, что же видно из последнего уравнения? Если $u<a$, то скобка отрицательна, и для положительного приращения скорости ($\Delta u>0$) приращение площади должно быть отрицательным ($\Delta S<0$), то есть площадь надо уменьшать. По мере увеличения u мы достигнем точки, где $u=a$. Здесь скобка обращается в нуль, и $\Delta S=0$ при любом Δu, в том числе и положительном. И наконец, когда $u>a$, для дальнейшего роста u нужно обеспечить положительное приращение площади ($\Delta S>0$), то есть сечение канала должно увеличиваться. Это и есть качественное описание

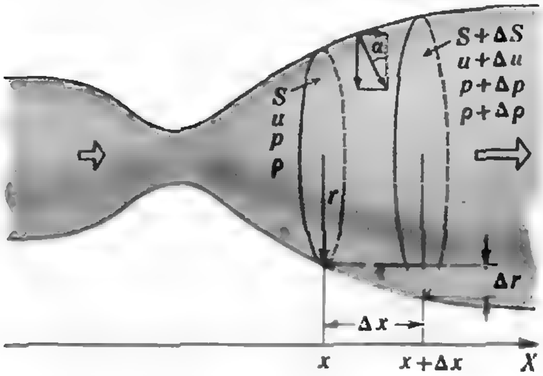


Рис. 4.

сопла, которое позволяет разогнать газ до большой скорости (в частности, при $S \to \infty$ и $T \to 0$ до $u_{\max}$).

* * *

Закончить статью нам хочется словами К. Э. Циолковского, сказанными им в 1935 году: «...До последнего времени я предполагал, что нужны сотни лет для осуществления полетов с астрономической скоростью (8—17 км в секунду)... Но непрерывная работа в последнее время поколебала эти мои пессимистические взгляды: найдены приемы, которые дадут изумительные результаты уже через десятки лет».

Приложение

Покажем, как найти малое приращение произведения нескольких изменяющихся величин.

Рассмотрим величину w, которая является произведением двух величин f и g. Если последние изменились на Δf и Δg соответственно, то приращение величины w равно разности между ее новым значением $w+\Delta w = (f+\Delta f)(g+\Delta g)$ и первоначальным значением $w = fg$:

$$(w+\Delta w)-w=(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg,$$

или

$$\underline{\underline{w}}+\Delta w-\underline{\underline{w}}=\underline{fg}+\Delta f\cdot g+\Delta g\cdot f+\underset{\sim\sim\sim}{\Delta f\cdot\Delta g}-\underline{fg}.$$

Слагаемые, подчеркнутые прямыми чертами (одной или двумя), взаимно уничтожатся, а слагаемым, подчеркнутым волнистой линией, можно будет пренебречь, когда мы захотим рассматривать малые приращения величин Δw, Δf и Δg (произведение $\Delta f\cdot\Delta g$ двух малых приращений совсем мало, и учитывать его не имеет смысла). Таким образом,

$$\Delta w = \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f.$$

В качестве частных случаев легко получить следующие. Если одна из величин, например f, постоянна (обозначим ее через f_0), то ее приращение, естественно, всегда равно нулю, поэтому

$$\Delta(f_0 g) = f_0\Delta g$$

(постоянная величина выносится за знак приращения). Если же обе величины одинаковы ($f = g = v$), то

$$\Delta(fg) = \Delta(v^2) = 2v\Delta v.$$

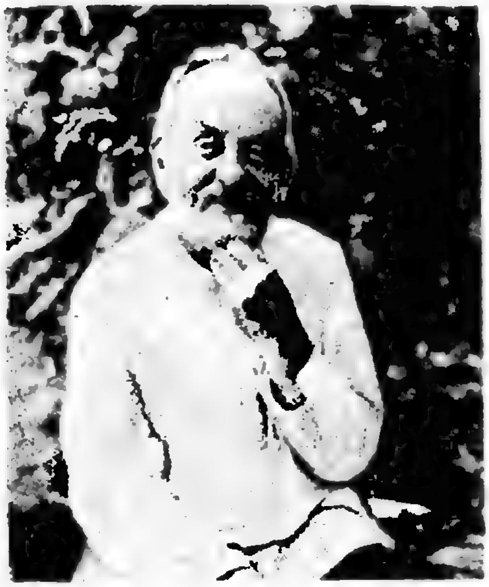
Аналогично можно показать, что малое приращение трех изменяющихся величин равно

$$\Delta(fgz) = gz\Delta f + fz\Delta g + fg\Delta z$$

и так далее.

Возможно, математик, прочитав написанное, нахмурится и выскажет много критических замечаний. И он будет прав. Действительно, все доказательства можно провести более строго и аккуратно, но для понимания статьи достаточно и этого Приложения.

Константин Эдуардович Циолковский



(1857 — 1935)

«Сначала неизбежно идут: мысль, фантазия, сказка. За ними шествует научный расчет. И уже в конце концов исполнение венчает мысль».

К. Э. Циолковский

«Время иногда неумолимо стирает облики прошлого, но идеи и труды Константина Эдуардовича будут все больше и больше привлекать к себе внимание по мере дальнейшего развития ракетной техники. Константин Эдуардович Циолковский был человеком, жившим намного впереди своего века, как и должен жить истинный и большой ученый».

Академик С. П. Королев

«Для нас, космонавтов, пророческие слова Циолковского об освоении космоса всегда будут программными, всегда будут звать вперед».

Ю. А. Гагарин

А. Буздин, В. Тугушев

Как создавалась физика низких температур

Исследования при низких температурах давно привлекали к себе внимание ученых. Еще Лавуазье в XVIII веке писал, что если бы удалось поместить нашу Землю в некую весьма холодную область, и все реки и океаны превратились бы в горы, а воздух перестал бы быть невидимым и превратился бы в жидкость, то такое превращение открыло бы возможность получения новых необычных жидкостей, о свойствах которых ранее не имелось никакого представления. Предвидение Лавуазье о существовании нового, интересного мира низких температур сбылось в полной мере. Исследования при низких температурах являются одним из важнейших направлений в современной физике.

Поведение вещества вблизи абсолютного нуля зачастую не имеет ничего общего с его поведением при обычных температурах. При низких температурах проявляются многочисленные красивые эффекты, которые при обычных условиях, как правило, оказываются замаскированными тепловым движением атомов. Только при низких температурах наблюдается сверхпроводимость — способность вещества пропускать ток, не оказывая ему ни малейшего сопротивления. Открытием этого замечательного явления, не имеющего аналога в классической физике, мы обязаны выдающемуся голландскому ученому Гейке Камерлинг-Оннесу. Камерлинг-Оннес первым получил гелий в жидком состоянии и приступил к всестороннему исследованию его свойств. Именно возможность работать при гелиевых температурах и позволила Камерлинг-Оннесу обнаружить сверхпроводимость. О том, как был получен жидкий гелий и открыта сверхпроводимость, и пойдет речь в этой статье.

Ожижение газов

Проведение исследований при низких температурах непосредственно связано с получением жидких газов. Дело в том, что многие газы могут находиться в жидком состоянии лишь при очень низкой температуре. Жидкий газ, налитый в сосуд, испаряясь, отнимает подводимое снаружи тепло; и пока остается хоть капля жидкого газа, температура поддерживается на уровне его температуры кипения.

История ожижения атмосферных газов начинается с 1877 года. Французский исследователь Кальете проводил опыты по ожижению ацетилена под высоким давлением. Во время одного из опытов аппаратура дала течь, и сжимаемый газ начал просачиваться наружу. Кальете, внимательно следивший за ходом опыта, успел заметить, что сразу же после возникновения течи в сосуде образовалось легкое облачко, которое тут же исчезло. У исследователя возникла догадка, что падение давления в результате утечки вызвало резкое охлаждение ацетилена, и появившееся облачко — сконденсировавшийся газ. Тщательные опыты подтвердили это предположение.

Кальете, не теряя времени, приступил к работе по ожижению атмосферных газов; начал он с кислорода. Толстостенный стеклянный сосуд с кислородом, сжатым до 300 атм, охлаждался испаряющейся двуокисью серы до —29°C. Когда сосуд был разгерметизирован и давление в нем резко упало, Кальете заметил облачко сконденсировавшегося газа. Сомнений быть не могло — удалось получить кислород в жидком состоянии. В декабре

1877 года Кальете сделал сообщение о результатах своих опытов по ожижению кислорода в Парижской Академии наук. Вскоре Кальете удалось получить в жидком виде и азот.

Понять, почему в опытах Кальете газ охлаждался, нетрудно. При достаточно быстром расширении газа не происходит заметного теплообмена между системой и окружающей средой, так что процесс расширения очень близок к адиабатному. Согласно первому закону термодинамики, при адиабатном процессе $\Delta U = A$, то есть изменение внутренней энергии газа равно работе внешних сил над газом. При расширении сам газ совершает положительную работу $(A' > 0)$, и работа внешних сил — отрицательная. Следовательно, $\Delta U < 0$, что и означает охлаждение газа (поскольку внутренняя энергия газа пропорциональна его температуре).

Весьма важным параметром, определяющим ожижение газа, является давление. В конце XVIII века голландский физик Ван Марум, проводя эксперименты с аммиаком с целью проверить справедливость закона Бойля—Мариотта, заметил следующее. Вначале при уменьшении объема, занимаемого газом, давление газа пропорционально увеличивалось. Когда давление достигло значения 7 атм, произошло неожиданное — при дальнейшем сжатии давление не росло. В цилиндре появился жидкий аммиак, и количество жидкости увеличивалось при сжатии.

Именно по пути сжатия и шли исследователи в своих попытках ожижать газы. Однако водород, азот, кислород не удавалось ожижить, как бы сильно их ни сжимали. Ученые полагали, что это «постоянные газы», то есть водород, азот, кислород не могут существовать в виде жидкости. Загадкой оставалось, почему одни газы — «постоянные», а другие — нет. Решить эту загадку помогла теория голландского физика Ван-дер-Ваальса.

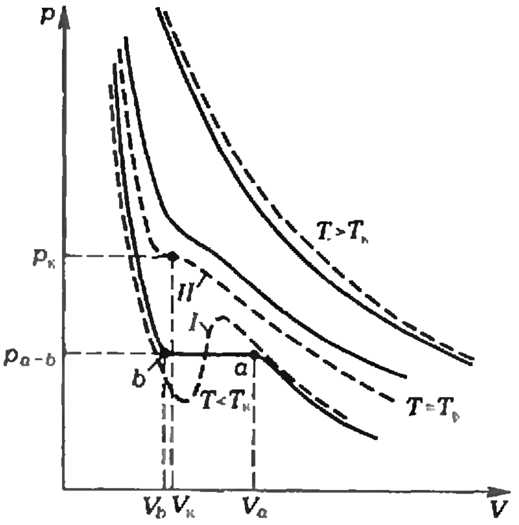


Рис. 1.

Ван-дер-Ваальс во второй половине XIX века предложил довольно простое уравнение, описывающее состояние реальных газов. Как известно, модель «идеальный газ» тем точнее соответствует реальным газам, чем выше температура газа и чем меньше его плотность. При низких температурах и больших плотностях существенную роль играют силы взаимодействия между молекулами газа и тот факт, что молекулы имеют собственный объем. Предложенное Ван-дер-Ваальсом уравнение состояния реальных газов учитывало эти обстоятельства.

На рисунке 1 приведены изотермы реальных газов, получающиеся при измерениях (сплошные кривые), и теоретические изотермы, рассчитанные по уравнению Ван-дер-Ваальса. Как видно из рисунка, и изотермы Ван-дер-Ваальса тем точнее описывают поведение реального газа, чем выше его температура. Иными словами, и уравнение Ван-дер-Ваальса лишь приближенно описывает реальные газы. Однако это уравнение отражает факт существования двух различных состояний вещества, или, как говорят, двух фаз вещества — жидкой и газообразной, и из этого уравнения следует, что существует некоторая критическая температура, при которой исчезает различие между этими фазами.

Основная особенность изотермы *I* на рисунке 1 — наличие участка, на котором давление возрастает с увеличением объема газа.

Как нетрудно понять, наличие участка изотермы *I*, отвечающего падению давления с уменьшением объема, указывает на неустойчивость газа.

Действительно, рассмотрим газ в цилиндре, закрытом поршнем: на некотором участке изотермы *I* (между точками *a* и *b*) случайное уменьшение объема газа привело бы к уменьшению давления на поршень и, следовательно, к дальнейшему сжатию газа. В этой области теория Ван-дер-Ваальса неприменима — здесь происходит конденсация газа в жидкость. При конденсации давление остается постоянным — равным давлению насыщенных паров — на реальной изотерме появляется горизонтальный участок ($V_a - V_b$). После конденсации всего газа мы уже имеем дело с жидкостью. Определить точно, при каком значении V начинается процесс конденсации, можно лишь экспериментально.

По мере увеличения температуры максимум и минимум на участке изотермы, соответствующем неустойчивому состоянию, сближаются, и при некоторой температуре они совпадают (изотерма *II* на рисунке 1). Эта температура $T_к$ — критическая температура — является характерной величиной для каждого газа. При температуре выше $T_к$ газ не может сконденсироваться ни при каких значениях давления. Иными словами, $T_к$ есть максимальная температура, при которой вещество может существовать в жидком состоянии. Соответствующее этой температуре значение критического давления $p_к$ — максимальное давление насыщенного пара (газа), а значение $V_к$ определяет максимальную плотность газа. По мере приближения к критической точке разность плотностей газа и жидкости уменьшается, и в критическом состоянии она обращается в нуль. (Отметим, что для идеального газа $T_к = 0$, то есть конденсация не происходит ни при каких конечных давлениях. Это связано с тем, что в модели идеального газа полностью отсутствует межмолекулярное взаимодействие.)

Теперь понятно, что «постоянными газами» считали газы, которые пытались ожижать при температурах, выше критических; а это сделать невозможно ни при каких давлениях.

На подступах к жидкому гелию

Хотя Кальете и удалось ожижить кислород, перед ним продолжала стоять задача удержания заметного количества кислорода в жидкой фазе — ведь предоставленный самому себе кислород очень быстро испарялся. Эту задачу решить ему не удалось. Дальнейший прогресс в деле ожижения газов связан с именами польских физиков Ольшевского и Вроблевского, усовершенствовавших малопроизводительный прибор Кальете и получивших жидкий кислород «спокойно кипящим в испытательной трубке». Однако, несмотря на настойчивые попытки, Вроблевскому и Ольшевскому не удалось пополнить список ожиженных газов — водород не поддавался ожижению. Первым получил водород в жидком состоянии английский физик Дьюар в 1898 году.

В Голландии эстафету в проведении исследований по ожижению газов принял друг и последователь Ван-дер-Ваальса Камерлинг-Оннес, который возглавил в 1882 году криогенную лабораторию в Лейденском университете. Первым шагом в его научной деятельности на этом пути была экспериментальная проверка теоретических предсказаний Ван-дер-Ваальса относительно критических значений температуры и давления, при которых газ может перейти в жидкое состояние.

В качестве объектов исследований Камерлинг-Оннес использовал различные газы, охлаждая их до все более низких температур и измеряя изотермы. Наибольшее внимание ученого привлек гелий, который к тому времени еще не был ожижен, несмотря на настойчивые попытки. Тот факт, что гелий остается в газообразном состоянии вплоть до крайне низких температур, дает возможность по экспериментальным изотермам гелия получать данные о межмолекулярных взаимодействиях в газе (ведь именно при низких температурах резче проявляются отклонения реального газа от идеального, связанные с межмолекулярным взаимодействием).

В 1907 году Камерлинг-Оннес опубликовал результаты измерений изотерм гелия в интервале температур от +100°C до —216°C. Вскоре после этого последовали измерения при температурах жидкого водорода (—259°C).

Исследования при таких температурах требовали уникального оборудования, мощной технологической базы для сжижения газов. И здесь самое время рассказать о некоторых выдающихся качествах Камерлинг-Оннеса, которые во многом определили успехи Лейденской лаборатории в низкотемпературных исследованиях.

Камерлинг-Оннес понимал, что сложность исследовательской техники требует искусного и хорошо подготовленного вспомогательного персонала. Он чувствовал, что времена профессоров-любителей, проводивших эксперименты с помощью непритязательных самодельных приборов, безвозвратно уходят. Проникновение во все более глубокие тайны природы требовало создания «индустрии» научного приборостроения. Оннес основал при своей лаборатории в 1901 году школу прибористов и стеклодувов. Он постоянно подчеркивал, что физические наблюдения должны выполняться с астрономической точностью; а это требовало радикального изменения технической подготовки эксперимента. По существу, лаборатория Оннеса стала прообразом и моделью для научно-исследовательских институтов XX века.

Понимая важность быстрого ознакомления ученых с научными достижениями, Камерлинг-Оннес основал журнал «Сообщения из физической лаборатории Лейденского университета», в котором печатались сообщения о работах, выполненных в его лаборатории. Двери лаборатории были широко распахнуты перед всеми, кто хотел работать в области криогенной техники. Это был совершенно новый научный стиль, новый тип взаимоотношений между физиками разных стран и научных школ.

Ожижение гелия

Камерлинг-Оннеса интересовали прежде всего значения критических параметров гелия, главным образом — температуры $T_к$. Измеряя изотермы гелия при все более низких температурах, он пришел к выводу, что значение $T_к$ лежит между 5К и 6К. Решено было, что охладить гелий до температуры ниже критической можно при помощи быстрого расширения гелия, сжатого предварительно до давления 100 атм и охлажденного до температуры жидкого водорода. При опытной проверке Камерлинг-Оннес заметил плотное серое облако тумана. Казалось бы, это свидетельствовало о конденсации гелия.

Однако продолжение этих экспериментов показало, что причина появления облака — наличие в гелии незначительной примеси водорода, оставшейся несмотря на тщательную очистку. Когда опыт был повторен с гелием, очищенным еще более тщательно, образование тумана не наблюдалось. Увеличив скорость расширения, Камерлинг-Оннес увидел легкое облачко тумана. Но туман был очень неплотным, и облачко исчезло в течение секунды; так что вопрос об истинном значении критической температуры гелия остался открытым.

Решающий эксперимент был произведен 10 июля 1908 года. Схема этого эксперимента приведена на рисунке 2. Гелий, сжатый до большого давления, из компрессора поступает в теплообменник, где охлаждается жидким водородом. Охлажденный сжатый гелий, пройдя через специальный кран K_1, попадает в приемник, где резко расширяется и охлаждается. Пока температура гелия в приемнике выше $T_к$, конденсации не происходит, и охлажденный гелий возвращается в компрессор через теплообмен-

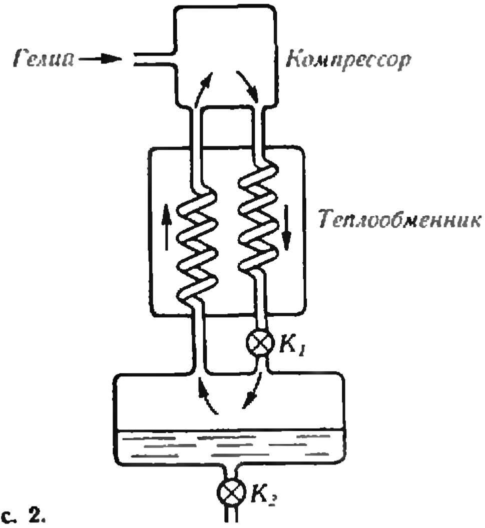


Рис. 2.

ник. В теплообменнике этот гелий дополнительно охлаждает идущий ему навстречу сжатый гелий, так что новая порция газа, попадающего в приемник, имеет более низкую температуру, чем предыдущая. Таким постепенным охлаждением можно добиться того, что температура гелия, расширяющегося в приемник, станет равной критической — начнется конденсация.

Образовавшийся жидкий гелий через специальный кран K_2 попадает в сосуд Дьюара.

Эксперимент начался в 5 часов 45 минут с ожижения 20 литров водорода, необходимого для охлаждения гелия. Эта работа была завершена в 13 часов 30 минут. При предварительном охлаждении аппаратуры с помощью жидкого водорода требовалась исключительная осторожность. Малейшее количество атмосферного воздуха, который мог случайно попасть в систему, подвергло бы риску заключительный эксперимент. В контакте с жидким водородом воздух отвердел бы, примерз к стеклу гелиевого сосуда и сделал бы невозможным дальнейшее наблюдение. Циркуляция гелия началась в 16 часов 20 минут, и с этого момента внутренний криостат ожижителя оказался в области еще не исследованных низких температур.

В течение длительного времени индикатор термометра почти не смещался. После дополнительной регулировки аппаратуры было отмечено постепенное снижение температуры; однако вскоре оно прекратилось. Уже был израсходован почти весь имевшийся жидкий водород, а никаких признаков ожижения гелия еще не было. В 19 часов 30 минут казалось, что все попытки ожижения окончились неудачей, и именно в этот критический момент один из коллег Камерлинг-Оннеса высказал предположение, что отсутствие дальнейшего отклонения индикатора объясняется тем, что термометр погружен в кипящую жидкость. Сосуд осветили снизу, и вдруг неожиданно стал видимым уровень жидкости, ясно различимый благодаря отражению света снизу. Сосуд почти полностью был заполнен жидким гелием (около 60 см^3). Вот как описывает этот торжественный момент Камерлинг-Оннес: «Это было удивительное зрелище — появление впервые жидкости, имеющей почти нематериальный вид. Втекание ее в сосуд не было замечено. Ее присутствие было замечено, когда она уже наполнила сосуд, а ее поверхность выделялась остро, как лезвие ножа. Я был счастлив, что мог показать сгущенный гелий своему многоуважаемому другу Ван-дер-Ваальсу, теория которого до конца оставалась путеводной нитью».

В конце эксперимента Камерлинг-Оннес сделал попытку получить гелий в твердом виде, понижая давление в объеме, где кипела жидкость. Чтобы получить как можно более низкую температуру, он позволил жидкости испаряться до тех пор, пока ее не осталось лишь около 10 см^3, а после этого подсоединил гелиевый криостат к вакуумному насосу, понижающему давление над кипящей жидкостью до 0,01 атм. Но никаких признаков образования твердого гелия не обнаружилось, и Камерлинг-Оннес предположил, что точка отвердевания гелия лежит за пределами возможности его эксперимента. В своих более поздних исследованиях он дважды пытался охладить гелий до твердого состояния и дважды терпел неудачу. Последняя такая попытка была предпринята им в 1922 году. Откачивая пар над жидким гелием с помощью двенадцати насосов, он сумел понизить давление до 0,013 мм рт. ст. и достичь температуры 0,83 К! Однако даже при такой рекордно низкой температуре гелий остался жидким.

Камерлинг-Оннеса в первом же эксперименте поразила очень малая плотность жидкого гелия. Он оказался в 8 раз легче воды; это говорит о том, что легкие атомы гелия находятся на относительно большом расстоянии друг от друга; перевести такую жидкость в твердое состояние гораздо сложнее, чем обычные жидкости.

По этой причине гелий остается жидким вплоть до самых низких температур. Но даже и вблизи абсолютного нуля он остался бы жидким, поскольку здесь его затвердеванию препятствуют законы квантовой механики. Напомним, что с точки зрения классической физики с понижением температуры тепловые колебания частиц вещества становятся все слабее и слабее. Наличие межмолекулярных сил должно в конце концов приводить к затвердеванию вещества. Согласно законам квантовой механики обычное представление о полной остановке атомов при абсолютном нуле оказывается неверным — атомы совершают так называемые «нулевые» колебания, которые не связаны с тепловым движением.

Таким образом, с точки зрения классической физики уникальное поведение жидкого гелия при низких температурах совершенно непонятно. Это вещество при нормальном давлении не затвердевает вплоть до абсолютного нуля. Так, при $T = 1{,}78$ К твердый гелий существует при давлении $p = 30\,000$ атм.

Другое очень странное свойство жидкого гелия было отмечено Оннесом в первом же опыте по ожижению. Измеряя плотность жидкого гелия, он обнаружил, что при понижении температуры от точки кипения она увеличивается, то есть гелий сжимается. При температуре 2,2 К имеет место острый максимум, и при дальнейшем охлаждении гелий увеличивается в объеме, и плотность его падает. Исследования, проведенные Оннесом в последние годы жизни, выявили необычные аномалии в физических свойствах гелия при температуре ниже 2,2 К.

Позднее, уже после смерти Оннеса в 1926 году, были опубликованы результаты исследований жидкого гелия, проведенных его учениками. Так, в 1932 году Кеезом и Клаузиус обнаружили резкое увеличение теплоемкости жидкого гелия вблизи $T = 2{,}2$ К. Через несколько лет стало ясно, что при $T = 2{,}2$ К в жидком гелии происходит фазовый переход, характеризующийся изменением физических свойств. При $T > 2{,}2$ К до точки кипения жидкий гелий представляет собой обычную жидкость (называемую HeI), а вот при $T < 2{,}2$ К у него появляются совершенно необычные свойства. В 1938 году советский физик П. Л. Капица обнаружил, что при $T < 2{,}2$ К жидкий гелий (названный HeII) характеризуется полным отсутствием вязкости: он течет по узкому капилляру без сопротивления, то есть силы трения строго равны нулю. Такое свойство HeII было названо сверхтекучестью. Теория этого явления была создана Л. Д. Ландау.

Работы выдающихся советских физиков получили высочайшую оценку — оба они были удостоены Нобелевских премий.

В своих экспериментах с жидким гелием Камерлинг-Оннес фактически наблюдал переход жидкого гелия в совершенно новое, сверхтекучее состояние, но не сумел оценить величие сделанного им открытия. Не будем забывать, однако, что тогда квантовая физика еще только делала первые шаги; чтобы объяснить поведение жидкого гелия при низких температурах, требовался радикально новый подход, отказ от классических представлений. Это могли сделать и сделали только физики следующего поколения. Во времена же Оннеса само ожижение гелия было огромной научной победой и казалось последней ступенью на пути к абсолютному нулю.

Открытие сверхпроводимости

Располагая возможностью получать температуры лишь на один градус выше абсолютного нуля, Камерлинг-Оннес приступил к исследованию свойств различных веществ при «гелиевых температурах». Определить удельное электрическое сопротивление образца сравнительно легко при любой температуре. Вполне понятно поэтому, что Оннес начал с изучения поведения сопротивления при низких температурах. К тому же в начале века этот вопрос был весьма важен.

Существовали теории, которые давали совершенно противоположные предсказания относительно поведения электропроводности при очень низких температурах.

Согласно одной, при абсолютном нуле электрическое сопротивление должно исчезать. Действительно, электропроводность металла пропорциональна времени между двумя последовательными столкновениями электрона с колеблющимися атомами. При понижении температуры амплитуда колебаний атомов уменьшается. Следовательно, столкновения электрона с атомами становятся более редкими, и проводимость растет; так что при $T=0$ сопротивление становится равным нулю.

С другой стороны, была выдвинута гипотеза, согласно которой электроны проводимости при низких температурах связываются с атомами, что приводит к бесконечно большому сопротивлению при $T=0$.

Камерлинг-Оннес приступил к измерению сопротивления платины при низких температурах. Полученные им результаты не укладывались в рамки существовавших теорий — при понижении температуры сопротивление платины оставалось постоянным. Однако Оннес обратил внимание на то, что величина сопротивления различных образцов при прочих равных условиях была тем меньше, чем чище оказывался металл. Отсюда он заключил, что существование сопротивления при $T \to 0$ — так называемого остаточного сопротивления — связано с примесями, и чистый металл при нулевой температуре должен обладать бесконечной проводимостью. (Оннес, правда, ошибочно полагал, что сопротивление чистых металлов должно плавно уменьшиться до нуля уже при гелиевых температурах.) Задача, таким образом, заключалась в исследовании возможно более чистого образца. Золото можно очистить значительно лучше большинства металлов, в частности лучше платины. Полученные при измерениях величины удельного остаточного сопротивления у золота были много ниже, чем у платины, и падали с увеличением чистоты образца. Камерлинг-Оннес обратился также к исследованию поведения сопротивления ртути. Дело в том, что это вещество при комнатной температуре находится в жидкой фазе, и путем последовательной перегонки можно получать все более и более чистую ртуть.

Результаты экспериментов со ртутью оказались неожиданными. Сопротивление ртути изменялось с понижением температуры не плавно — при температуре несколько ниже точки кипения жидкого гелия оно резко падало и становилось неизмеримо малым.

28 апреля 1911 года Камерлинг-Оннес сообщил о результатах своих экспериментов Нидерландской Королевской академии. Открытое им явление он назвал сверхпроводимостью.

В 1913 году в своей лекции при получении Нобелевской премии Оннес высказал предположение, что явление сверхпроводимости может быть связано с квантованием энергии, открытым Планком в конце прошлого века. Однако должно было пройти около полувека, пока была построена полная теория сверхпроводимости.

Обнаружив переход в совершенно неизвестное ранее состояние, Камерлинг-Оннес задался целью досконально изучить его свойства. Первым вставал вопрос: насколько же малым становится сопротивление образца в сверхпроводящей фазе? Оннесу необходимо было научиться измерять предельно малые удельные сопротивления. С этой задачей он

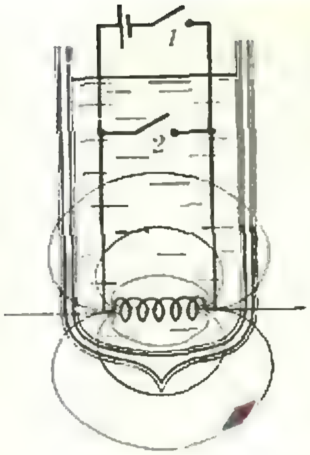


Рис. 3.

блестяще справился, разработав новый остроумный метод измерения.

Катушка из свинцового провода (рис. 3) путем замыкания ключа *1* может быть подключена к батарее, а с помощью ключа 2 может быть замкнута накоротко. В начале эксперимента ключ *1* был замкнут, а *2* — разомкнут. Охлаждаемая жидким гелием в сосуде Дьюара катушка находилась в сверхпроводящем состоянии. При этом ток от батареи, проходящий через катушку, создавал вокруг нее магнитное поле, которое легко обнаруживалось по отклонению стрелки компаса, расположенной снаружи сосуда Дьюара. Затем ключ *2* замкнули, а ключ *1* разомкнули. Сверхпроводящая обмотка оказалась замкнутой накоротко. Стрелка компаса, однако, оставалась отклоненной, что указывало на наличие тока в катушке, уже отсоединенной от батареи. Наблюдая за стрелкой на протяжении нескольких часов (пока не испарился весь гелий из сосуда), Оннес не заметил ни малейшего изменения в отклонении стрелки. Это и означало отсутствие сопротивления обмотки — ведь при наличии сопротивления энергия рассеивалась бы в катушке, ток уменьшался бы, и это можно было бы заметить по изменению отклонения стрелки компаса.

По результатам эксперимента Камерлинг-Оннес пришел к выводу, что сопротивление сверхпроводящей свинцовой катушки по меньшей мере в 10^{11} раз меньше ее сопротивления в нормальном (не сверхпроводящем) состоянии.

Самое длительное зафиксированное до сих пор существование незатухающего тока — около двух лет. (Этот ток циркулировал бы и поныне, если бы не перерыв в снабжении жидким гелием, вызванный забастовкой транспортных рабочих.) Даже спустя два года не было замечено никакого ослабления величины циркулирующего тока, что позволяет с полным основанием считать сопротивление сверхпроводника равным нулю.

Практическое применение сверхпроводимости сулило блестящие перспективы. Ведь сверхпроводящий электромагнит совсем не потребляет электроэнергию, и с его помощью можно было бы легко получать сильные магнитные поля. В обычном электромагните получение сильного магнитного поля требует больших токов, что приводит к выделению колоссального количества тепла в обмотках. Последнее обстоятельство и ограничивает предельную величину магнитного поля, создаваемого электромагнитом. Применение сверхпроводников в трансформаторах, электромоторах и генераторах также сулило огромные преимущества, с лихвой окупающие необходимость работать при гелиевых температурах.

Оннес первым приступил к созданию сверхпроводящего магнита. Однако здесь его ждало разочарование. Эксперименты в Лейдене показали, что в магнитном поле, превышающем некоторое пороговое значение, сверхпроводимость исчезает. Величины этих пороговых полей оказались очень малыми — несколько сотен эрстед, что существенно ниже полей даже в небольших электрических машинах. Пропускание сильного электрического тока также разрушало сверхпроводимость — возникавшие магнитные поля оказывались выше пороговых уже при сравнительно слабых токах.

Лишь много времени спустя были открыты сверхпроводящие материалы, способные выдерживать сильные магнитные поля и пропускать большие токи без разрушения сверхпроводимости. Понадобилось более сорока лет для создания первых сверхпроводящих магнитов, имеющих пракическое значение. В настоящее время основные исследования в области сверхпроводимости направлены на создание материалов, которые переходили бы в сверхпроводящее состояние при сравнительно «высоких» низких температурах — хотя бы в области азотных температур (температура кипения азота — 77,4 K). Пока наибольшая температура такого перехода — 24 K (у соединения Nb_3Ge).

В современной физике исследования свойств вещества при низких температурах играют огромную роль. В полной мере сбываются слова Камерлинг-Оннеса, образно писавшего: «Из всех областей физики приходят к нам толпой вопросы, ожидающие решения от измерений при гелиевых, температурах. Заглядывая в будущее, я вижу, что всюду... производятся измерения в криостатах, в которых доставляется жидкий гелий... им можно распоряжаться так же легко, как водою... Эта работа должна приподнять покрывало, которым тепловое движение при обычных температурах закрывает от нас внутренний мир атомов и электронов».

Гравитационный захват

(Начало см на с 4)

и перешла с орбиты, афелий которой располагался между орбитами Нептуна и Урана, на короткопериодическую орбиту с перигелием, довольно близким к орбите Земли (последнее обстоятельство и сделало возможным ее обнаружение). Согласно тем же вычислениям, на большой эллипс комету Кирнса-Кви вывел Юпитер в 1855 году, захватив с гиперболической орбиты.

К сожалению, позднейшие наблюдения и вычисления не подтвердили захвата. Представления астрономов о прошлом кометы Кирнса-Кви радикально изменяются при каждом уточнении ее нынешней орбиты. Поистине «беззаконная комета в кругу расчисленных светил»!

Таким образом, проблема поставленная Лапласом почти два столетия назад, все еще вызывает острые дискуссии. С одной стороны, гравитационный захват осуществим, это доказано строго и окончательно. С другой стороны, до сих пор не выяснено, была ли захвачена Солнечной системой хотя бы одна из принадлежащих ей комет. Ни об одной из них, наблюдавшихся до сих пор, нельзя с достоверностью утверждать, что она действительно пришла из межзвездных пространств. На 1979 год (дата издания последнего каталога кометных орбит) надежно определены орбиты 659 комет, из которых только 98 имеют гиперболический тип. Но где гарантия, что они были гиперболическими и до момента первого наблюдения этих комет?

В настоящее время считается, что на границе Солнечной системы находится гигантское облако комет — облако Оорта, которое по размерам в 100—150 тысяч раз превосходит орбиту Земли. Считается, что те кометные орбиты, которые кажутся нам параболическими или слабо гиперболическими, в своей подавляющей части являются на самом деле сильно вытянутыми эллипсами, обход которых совершается за времена до 400 тысяч лет. Но вот вопрос: образовалось ли облако Оорта одновременно со всей Солнечной системой или оно время от времени пополняется за счет гравитационного захвата комет, странствующих в межзвездных пространствах? Здесь мнения расходятся. Будем надеяться, что ответ на этой вопрос даст будущее.

Б. Явелов

Луи де Бройль

Девяносто лет назад в небольшом городке Дьеппе на французском берегу Ла-Манша родился Луи де Бройль, один из основоположников квантовой теории. Род де Бройлей — очень старый, аристократический, его многочисленные представители прославились как военачальники, дипломаты, высокопоставленные сановники.

Но молодого Луи де Бройля, так же как и его брата Мориса (который был старше на 17 лет), лавры предков прельщали мало — они оба стали учеными. К концу первого десятилетия нынешнего века Морис де Бройль приобрел репутацию одного из самых авторитетных физиков Франции. Его младший брат, окончивший в 1909 году лицей в Париже, вначале решил посвятить себя гуманитарным наукам и в 1910 году получил в Парижском университете (в знаменитой Сорбонне) звание лиценциата (низшая ученая степень во Франции) истории. Но тяга к физике и математике — сложившаяся не без влияния брата — возобладала, и в 1913 году Луи де Бройль в той же Сорбонне получил еще одно звание лиценциата, на этот раз — лиценциата точных наук.

В 1914 году началась первая мировая война, и будущий великий физик был мобилизован и определен радистом на радиостанцию, которая помещалась в Эйфелевой башне. Шесть лет он занимался радио, или, как тогда говорили, «беспроволочным телеграфом», и только в 1920 году получил возможность вернуться к физике. Он начал работать в частной лаборатории своего брата, где занялся экспериментами с высокочастотным электромагнитным излучением (в частности — с рентгеновскими лучами). Глубоко заинтересовавшись тесно связанными с этой работой проблемами квантовой теории, стоявшими тогда в центре внимания физиков, Луи де Бройль уже в начале 1922 года приступил к теоретическим попыткам продвинуться в понимании сущности квантовых явлений.

В 1924 году де Бройль защитил докторскую диссертацию, которая называлась «Исследования по теории квантов». Научным консультантом де Бройля был Поль Ланжевен (1872—1946) — выдающийся французский физик, человек передовых научных и политических взглядов (Ланжевен был большим другом нашей страны, в 1944 г. он вступил во Французскую коммунистическую партию). В этой работе де Бройль выдвинул идею о волновых свойствах материи: он предположил, что любая материальная частица наряду с корпускулярными свойствами обладает и волновыми свойствами. Если масса частицы m, скорость ее v, то этой частице соответствует волна, длина которой определяется по формуле

$$\lambda = h/mv,$$

где h — постоянная Планка.

При энергии электрона 200 эВ соответствующая ему волна имеет длину $\sim 10^{-10}$ м, то есть такую же, как длина волн рентгеновского излучения. Можно было ожидать, что если электроны действительно обладают волновыми свойствами, то при прохождении электронов через кристаллическую решетку должна происходить дифракция — как при прохождении через кристалл рентгеновских лучей.

Действительно, в 1927 году впервые наблюдалась дифракционная картина при прохождении электронов через металлическую фольгу.

Основная идея теории де Бройля — уподобление движущихся материальных объектов волнам — шла вразрез с привычными представлениями об окружающем мире, и большинству физиков она казалась несуразной, дикой, даже сумасшедшей. Лишь немногие с пониманием отнеслись к революционным взглядам де Бройля. Но среди этих немногих были Ланжевен и Эйнштейн, сказавший, что своей работой де Бройль «приподнял краешек великого занавеса».

Прошло два года, и этот занавес был полностью поднят — на сцене физики во всем величии и блеске предстала новая наука — квантовая механика, важнейшей частью которой является переосмысленная и углубленная волновая теория де Бройля.

В 1929 году выдающиеся заслуги де Бройля перед наукой были отмечены присуждением ему Нобелевской премии по физике; множество научных учреждений и организаций различных стран мира сделали французского ученого своим членом, Луи де Бройль — иностранный член АН СССР.

После своего эпохального открытия Луи де Бройль продолжал заниматься принципиальными вопросами квантовой теории, проблемами сверхвысокочастотных электромагнитных колебаний, философией и историей физики, много времени уделял он и преподаванию физики, в частности, в той же Сорбонне, где когда-то учился сам. Свой живой интерес к физике великий ученый не утратил и по сей день.

Рецензии, библиография

Этот прочный непрочный мир

Каждый человек, мало-мальски интересующийся, как устроен наш мир, рано или поздно задает себе вопрос: «Почему наш мир устроен так, а не иначе?» В самом деле, почему, например, все предметы не разваливаются на составляющие их молекулы и атомы? А если атомам и молекулам так нравится держаться друг за друга, то почему наш мир состоит из отдельных предметов, и не представляет из себя единую монолитную глыбу?

Ответы на эти вопросы в первую очередь пытается дать физика. Ученым многое ясно уже и теперь. А как быть тем, кто знает физику еще слишком мало, только начал ее изучать? Махнуть на все рукой: мол, интересно, конечно, но не по зубам? Не стоит отчаиваться. Физики сами охотно рассказывают обо всем, что знают, и стараются делать это просто и понятно, так сказать «на пальцах».

Вот и на наши «почему?» можно найти ответы в книге «Портрет трещины» (М., «Металлургия», 1981), написанной физиком профессором В. М. Финкелем. Научная работа автора непосредственно касается обсуждаемых в книге проблем.

Открыв книгу, мы сразу же знакомимся с главными «действующими лицами», нарисованными художником Р. В. Левицким: это — металл с атомами, вакансиями и дислокациями, ус, напряжение, трещина, температуры.

Не будет преувеличением сказать, что настоящее и будущее человечества зависят от того, какими материалами мы пользуемся сейчас и какие придут им на смену. Ведь наше спокойствие, удобства, а иногда и жизнь зависят от прочности и надежности окружающих нас предметов: домов, дорог, мостов, автомобилей, поездов, самолетов... Читая книгу, мы постепенно начинаем понимать, как сложны и оригинальны механизмы прочности и разрушения, определяющие многие физические свойства тел.

Автор разбирает эти вопросы на самом современном уровне: читатель попадает в таинственный микромир — мир атомов и молекул. Довольно строгое изложение отнюдь не сухо, во многом — благодаря удачным аналогиям, цитатам из литературных произведений, образно иллюстрирующим сложные физические проблемы.

А теперь предоставим слово автору:

«Книга, лежащая перед вами, посвящена разрушению, его природе и его многообразным проявлениям: и когда оно обнаженное зло, и когда оно жизненно важно и успешно служит людям... Возможно, и хорошо, если природа была бы проще, чем она есть, но зато как чудесно, что так еще много неизвестного, даже опасно неизвестного, к чему можно приложить свои мужество, ум и руки...

Книга рассчитана на любознательного читателя, и автор стремился написать ее так, чтобы она была интересна и небесполезна и школьнику, и специалисту-инженеру.

Преисполненный этой надеждой, автор отдает свою книгу на суд читателей».

Нам кажется, что надежды автора оправдаются.

А. Аринштейн

И. Камышко

Поль Дирак и задача о трех рыбаках

Совсем недавно, 8 августа этого года, отмечалось восьмидесятилетие выдающегося физика современности, лауреата Нобелевской премии Поля А. М. Дирака. С его именем связаны многие яркие достижения квантовой теории, и, может быть, самое впечатляющее среди них — предсказание первой античастицы — «антиэлектрона», или, как его назвали потом, позитрона. Напомним вкратце, как обстояло дело*).

Дирак составил уравнение, описывающее поведение электронов с учетом эффектов теории относительности. Это уравнение прекрасно объясняло ряд экспериментальных фактов, но обнаружилась и некая «странность»: части его решений отвечали отрицательные значения энергии электрона. Что было с ними делать? Отмахнуться от них или попытаться выявить скрытый в них физический смысл? Для Дирака ответ был ясен. Приведем его слова, сказанные, правда, в лекции, посвященной А. Эйнштейну и теории относительности, но вполне применимые и к нему самому: «Любой, кто понимает глубокую гармонию, связывающую между собой явления природы и общие математические принципы, должен чувствовать, что если теория так прекрасна и изящна, как теория Эйнштейна, то она в основном, безусловно, верна». И он высказывает оригинальную и исключительно смелую, особенно для того времени, гипотезу: решения его уравнения, лишенные, как казалось, физического смысла, в действительности описывают неизвестную пока элементарную частицу, почти ничем не отличающуюся от электрона, но с противоположным (положительным) электрическим зарядом той же величины. Так позитроны были предсказаны. А уже в следующем, 1932 году они были зарегистрированы в космических лучах.

---

*) Подробнее об открытии позитрона рассказано в статье А. Борового «Год чудес» («Квант», 1982, №№ 4, 5).

Вероятно, именно этот эпизод из богатой творческими победами жизни Поля Дирака способствовал возникновению одной легенды, уже много лет кочующей в разных вариантах по научно-популярным книжкам.

Рассказывают, что в юности ему попалась такая задача: *Три рыбака занимались ловлей рыбы в темную ночь. Устав, они улеглись спать, не поделив улова. На рассвете один из них проснулся и, не желая тревожить товарищей, поделил рыбу на три равные части; взяв свою часть, он уехал домой. При дележе у него одна рыбина оказалась лишней и он ее выбросил в море. Затем проснулся второй. Не зная, что первый уже уехал со своей долей, он тоже разделил рыбу на три части, одну из которых забрал себе, и уехал, а оказавшуюся и у него лишней рыбину он, как первый, выбросил в море. Наконец, проснулся третий рыбак. Не зная о том, что проделали первые два, он поступил, как они, то есть разделил рыбу на три части, забрал себе треть, а оставшуюся и у него рыбину выбросил в море, после чего уехал домой. Спрашивается, сколько всего рыб было выловлено?*

Ответ (приписываемый Дираку): «Было выловлено... минус две рыбы». Легко проверить, что формально все правильно. Первый рыбак, обнаружив всего минус (!) две рыбы, одну рыбу выбрасывает и из оставшихся (—3) рыб честно берет одну треть. В точности то же самое проделают второй и третий рыбаки, каждый из которых тоже унесет ровно минус одну рыбу. И хотя, по собственному свидетельству знаменитого физика, это решение ему сообщил профессор математики Дж. Уайтхед из Оксфорда*), понять авторов «легенды о Дираке и отрицательных рыбах» можно. Трудно найти более простой и изящный пример, который бы так же хорошо иллюстрировал дерзость идей и веру в «непостижимую эффективность математики в естественных науках» (как выразился другой нобелевский лауреат — американский физик Ю. Вигнер) — качества, столь присущие современной физике и физикам.

Но задача о рыбаках любопытна и сама по себе. Давайте попробуем ее решить. Переведем условие на язык уравнений. Пусть $N=N_0$ — количество всей выловленной рыбы, N_1 — количество рыбы, оставшейся после первого дележа, N_2 — после второго, N_3 — после третьего. Тогда, очевидно, $N_1=\frac{2}{3}(N_0-1)$ и, вообще, при $k=0,\ 1,\ 2$

$$N_{k+1}=\frac{2}{3}(N_k-1). \qquad (1)$$

Требуется найти такое целое число N, чтобы и числа N_1, N_2 и N_3 были целыми. Потребуем к тому же, чтобы все они были неотрицательными. Даже при этом ограничении задача, разумеется, имеет бесконечно много решений. Мы постараемся вывести общую формулу для числа N.

Откажемся пока от условия неотрицательности (!). Заметим, что задача допускает решение, причем только одно, при котором все N_k равны одному и тому же числу D. Из (1) для числа D получается уравнение $D=\frac{2}{3}(D-1)$, откуда $D=-2$. Это «решение Дирака». Пусть теперь (N_k) — произвольная последовательность, удовлетворяющая соотношению (1). Рассмотрим разность N'_k двух решений задачи — N_k и решения Дирака: $N'_k=N_k-D=N_k+2$. Поскольку

$$N'_{k+1}=N_{k+1}-D=\frac{2}{3}(N_k-1)-$$

$$-\frac{2}{3}(D-1)=\frac{2}{3}(N_k-D)=\frac{2}{3}N'_k,$$

последовательность (N'_k) является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$N_k=N'_k-2=\left(\frac{2}{3}\right)^k N'_0-2=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^k(N+2)-2. \qquad (2)$$

(Окончание см. на с. 62)

---

*) Об этом пишет М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971), гл. 24. В этой книге, а также в книге «Заочные математические олимпиады» (М., «Наука», 1981), § 5, разобраны похожие задачи.

Премии «Кванта»

В 1981/82 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальными премиями, учрежденными редакционной коллегией журнала.

Книгами Библиотечки «Квант» с автографами авторов награждаются:

АЛЕКСЕЕВ Игорь (г. Москва, с. ш. № 179)
БАБАЕВ Азер (г. Баку, с. ш. № 145)
БАЗАЛИЙ Ярослав (г. Донецк, с. ш. № 17)
БЕСПАЛОВ Юрий (г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса, с. ш. № 53)
ГОХБЕРГ Александр (г. Донецк, с. ш. № 17)
ГРИНИВ Остап (г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ)
ДУБИЦКАС Артурас (г. Таураге, с. ш. № 1)
ЕЛИСЕЕВ Максим (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ЖЯКОНИС Миндаугас (г. Каунас, с. ш. № 2)
КИСИЛЬ Владимир (г. Одесса, с. ш. № 33)
КОМОВ Владимир (г. Александров, с. ш. № 2)
КУБЫШКИН Александр (г. Киев, с. ш. № 145)
НИКОЛАЕВСКИЙ Юрий (г. Харьков, с. ш. № 131)
НИКОНОВ Андрей (г. Кировград, с. ш. № 2)
ОВЕЦКИЙ Михаил (г. Донецк, с. ш. № 17)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев, с. ш. № 145)
ПЕРЕЛЬМАН Григорий (г. Ленинград, с. ш. № 239)
ПИРОЖЕНКО Андрей (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
РАДИОНОВ Александр (пос. Никольское Ленинградской обл.)
РАХМАНОВ Малик (г. Алма-Ата, РФМШ)
СИНЮКОВ Юрий (ст. Селезни Тамбовской обл.)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
УГРИНОВСКИЙ Роман (г. Хмельник, с. ш. № 3)
ХОХЛОВ Андрей (г. Москва, с. ш. № 36)
ЦВЕТКОВ Павел (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ШУГАЙ Александр (г. Запорожье, с. ш. № 23)
ШУКЛИН Михаил (г. Пермь, с. ш. № 32)
ЩЕДРИН Юрий (г. Брянск, с. ш. № 39)
ЯРОШ Валерий (г. Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ)

Подпиской на журнал «Квант» на 1983 год награждаются:

АЛЕКСЕЕВ Максим (г. Москва, с. ш. № 2, 9 кл.)
ЕРОШКИН Олег (г. Днепропетровск, с. ш. № 15, 10 кл.)
ЖЯМАЙТИС Раймундас (г. Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.)
ЛЕЙЦИН Леонид (г. Чернигов, с. ш. № 10, 10 кл.)
ПУСТИЛЬНИК Михаил (г. Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.)
РОЗЕНВАЙН Наталия (г. Киев, с. ш. № 206, 10 кл.)
ТИЩЕНКО Андрей (г. Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.)
ФЕЛЬДМАН Виктор (г. Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.)

За интересные работы по моделированию многогранников книгами Библиотечки «Квант» награждается

ГОРОХОВСКИЙ Дмитрий (г. Черкассы, с. ш. № 4)

За успешное участие в XVI Всесоюзной физико-математической олимпиаде школьников подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются:

ЕРШОВ Анатолий (г. Златоуст)
ИСХАКОВ Тимур (г. Душанбе, с. ш. № 8, 9 кл.)
ОГНЁВ Андрей (г. Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2, 9 кл.)
ХОМЯКОВ Николай (г. Улан-Удэ, с. ш. № 35, 9 кл.)

Подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются победители конкурса машинных рисунков («Квант», 1981, № 9), итоги которого были подведены в июле на Летней школе юных программистов в Новосибирском Академгородке:

ВОРНОВИЦКИЙ Юрий (г. Кишинев, с. ш. № 13)
ЗВЕРИНСКИЙ Семен (г. Москва, с. ш. № 772)
КУЗЕНКОВ Евгений (п. Нижнегородец Горьковской обл.)

За активную работу с учащимися и пропаганду физико-математических знаний, в результате чего многие школьники достигли значительных успехов в нашем конкурсе, за активное участие в Турнире юных физиков подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются школы №№ 134, 145 (г. Баку), 17 (г. Донецк), 842 (г. Зеленоград), 145 (г. Киев), 239 (г. Ленинград), 11, 50 (г. Львов), 2 (г. Масаллы), 16, 50 (г. Минск), 2, 7, 38, 43, 46, 52, 57, 91, 179, 444, 710 (г. Москва), 1 (п. Нововоронежский), 103 (г. Ташкент), 1 (г. Фрязино), 82 (п. Черноголовка), РФМШ (г. Алма-Ата), ФМШ № 1 при ЕрГУ (г. Ереван), ФМШ № 2 при КГУ (г. Киев), ФМШ № 45 при ЛГУ (г. Ленинград), ФМШ № 18 при МГУ (г. Москва), ФМШ № 165 при НГУ (г. Новосибирск), ФМШ им. В. М. Комарова (г. Тбилиси).

задачник кванта

Задачи

M761 — M765; Ф773 — Ф777

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1982 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M761, M762» или «Ф773». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M761. Через произвольную точку P на стороне AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно (рис. 1). Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три одинаковые части.

Э. Готман

M762. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнены неравенства

$$a+b+c<\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}<\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

M763*. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB (рис. 2). Найдите отношение $|QA|:|QD|$, если известно отношение $|AC|:|BD|=k$.

В. Дубровский

M764*. Докажите, что каждое из уравнений а) $x^2+y^3=z^5$; б) $x^2+y^3+z^5=t^7$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

О. Мазуров

M765. Пусть B — конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих одной прямой.
а) Докажите, что найдутся три точки множества B такие, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества B.
б)* Назовем *триангуляцией* множества B семейство треугольников с множеством вершин B, не налегающих друг на друга и в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества B можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого B существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества B. Укажите способ построе-

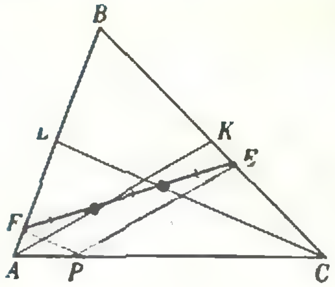


Рис. 1.

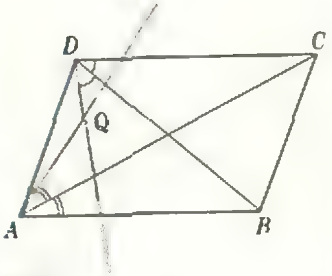


Рис. 2.

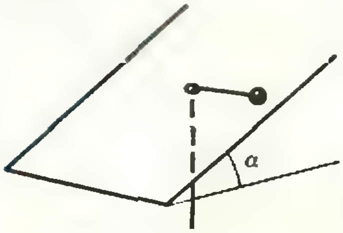


Рис. 3.

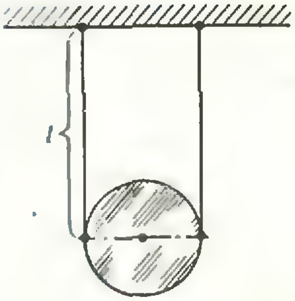


Рис. 4.

ния такой триангуляции.

в)* Докажите, что если никакие четыре точки множества *B* не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна.

Ф. Вайнштейн

Ф773.*) На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить. Свободный конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент тело лежит на плоскости так, что нить горизонтальна (рис. 3). Нить начинают медленно вытягивать; при этом тело к моменту достижения отверстия описывает половину окружности. Найти величину коэффициента трения тела о плоскость. (10)

Ф774. Для многих веществ существуют такие значения температуры $T_{\text{тр}}$ и давления $p_{\text{тр}}$, при которых все три фазы вещества — газообразная, жидкая и твердая — находятся в равновесии друг с другом — так называемая тройная точка. Для воды $T_{\text{тр}} = 0{,}0075$°C, $p_{\text{тр}} = 4{,}58$ мм рт. ст; удельная теплота парообразования в тройной точке равна $r = 595{,}8$ кал/г, удельная теплота плавления — $\lambda = 79{,}7$ кал/г. Найти удельную теплоту сублимации (прямого перехода из твердого состояния в газообразное) воды вблизи тройной точки.

В. Давыдов

Ф775. Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в сеть на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1 = 2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2 = 2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра? (9)

А. Зильберман

Ф776. В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1 = 30$°C). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau = 5$ мин. Для того чтобы чайник не остыл, в него капают горячую воду ($t_2 = 45$°C). Масса одной капли $m_{\text{к}} = 0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной 30°C? На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще?

Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит 0,3 литра воды. Температура окружающего воздуха $t_0 = 20$°C. (8)

А. Зильберман

---

*) Задачи Ф773, Ф775 и Ф776 предлагались на заключительном туре Всесоюзной физической олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

Ф777. На невесомой нерастяжимой нити подвешен блок. Расстояние между точками подвеса нити равно диаметру блока; длина вертикальных участков нити равна l (рис. 4). Определить период малых колебаний системы в плоскости, перпендикулярной оси блока.

В. Ильин

Problems

M761 — M765; P773 — P777

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 31 st 1982 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics Problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: 'KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners appears in this issue. If you have an origi-

M761. From an arbitrary point P on the side AC of the triangle ABC lines PE and PF are drawn parallel to the medians AK and CL, E and F being points on BC and AB respectively (see figure Рис. 1). Prove that the medians AK and CL divide the segment EF into three equal parts.

E. Gotman

M762. Prove that for all positive numbers a, b, c we have the inequalities

$$a+b+c<\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}<\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

M763*. A parallelogram $ABCD$, which is not a rhombus, is given. The line symmetric to AB with respect to the diagonal AC intersects the line symmetric to DC with respect to the diagonal DB at the point Q (see figure Рис. 2). Find the ratio $|QA|:|QD|$, if the ratio $|AC|:|BD|=k$ is given.

V. Dubrovski

M764*. Prove that each of the equations a) $x^2+y^3=z^5$; b) $x^2+y^3+z^5=t^7$ has an infinite number of positive integer solutions.

O. Mazurov

M765. Let B be a finite set of points on the plane, not all contained in one straight line.

a) Prove that three points can be found in B such that the circle passing through them does not contain any points of B in its interior.

b)* Let us call a family of triangles with the set of vertices B a *triangulation* of B, if they don't overlap and their union is a convex polygon (a triangulation of B may be obtained by joining pairs of its points by line segments until it is no longer possible). Prove that for any B there exists a triangulation such that any circle circumscribed about any triangle of the triangulation contains no points of B in its interior. How can such a triangulation be constructed?

c)* Prove that if no circle contains any four points of B, then the triangulation described in b) is unique.

F. Vainstein

P773. A. solid is placed on a rough plane, inclined at an angle α to the horizontal. A light unstretchable string is tied to the solid, its free end passing through a little hole in the plane. At the initial moment, the string is horizontal (see figure Рис. 3), then it is slowly pulled until the solid reaches the hole, having described a semi-circle. Find the friction coefficient of the solid against the plane.

P774. For many substances, there exist values of temperature T_{tr} and pressure p_{tr} for which all three states of the substance — gaseous, liquid and solid — are in equilibrium with each other — the so-called triple point. For water $T_{tr}=$

nal problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

$=0{,}0075$ C, $p_{tr}=4.58$ mm Hg, the specific heat of evaporation is $r=595.8$ cal/g and the specific heat of melting is $\lambda=79.7$ cal/g. Find the specific heat of sublimation (the direct passage from solid to gas) of water at the triple point.

V. Davydov

P775. A high precision multi-range ammeter has a separate scale for each range of measurement. The ammeter is plugged into a network at range 10 mA and registers a current of $I_1=2.95$ mA; when it is switched over to the 3 mA range, it shows $I_2=2.90$ mA. What was the current in the network before the ammeter was plugged in?

A. Zilberman

P776. A small tea-kettle is filled with warm water ($t_1=30$°C). The kettle cools by 1 degree in time $\tau=5$ min. To keep the water warm, hot water ($t_2=45$°C) is added to it drop by drop. The mass of one drop is $m_d=0.2$ g. How many drops per minute are required to keep the temperature at 30°C? By how many degress will the water warm up in one minute, if the frequency of dripping is tripled? Assume that the water temperature evens out very quickly. The extra water drips out of the kettle's nose. The kettle contains 0.3 litres of water. The surrounding air temperature is $t_0=20$°C.

A. Zilberman

P777. A pulley is suspended by a weightless unstretchable string; the length of the vertical parts of the string is l (see figure Рис. 4). Find the period of small oscillations of the system in the plane perpendicular to the pulley's axis.

W. Ilyin

Решения задач

М731 — М738; Ф743 — Ф747

М731. *Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9; второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9; затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т. д.; выигрывает тот, у кого впервые получится произведение больше а) тысячи; б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?*

а) Задача решается разбором с конца (рис. 1). Если в конце концов один из игроков $П$ предложит другому игроку — назовем его $В$ — любое из чисел от 112 до 999, то игрок $В$ выигрывает (умножением на 9). Следовательно, если $В$ предложит своему партнеру $П$ любое из чисел от 56 до 111, то у $П$ получится не менее 112 (даже если он умножит только на 2) и не более 999 (даже если он умножит на 9), и игроку $В$ будет обеспечен выигрыш. Теперь ясно, что если $П$ называет любое из чисел от 7 до 55, то $В$ может попасть в выгодный ему промежуток [56; 111]. Наконец, чтобы $П$ обязательно попал в этот роковой для него промежуток [7; 55], игроку $В$ достаточно назвать на первом шаге любое из чисел 4, 5, 6. Итак, начинающий при правильной игре выигрывает.

б) Этот случай может быть разобран примерно так же — «с конца». Однако мы приведем общее решение, позволяющее оценить ситуацию при игре не только до 1000 или до 1 000 000, но и до любого числа. С этой целью «прологарифмируем» условие игры. Игра, можно считать, начинается с того, что первый игрок получает число 1 и умножает его на любое из чисел 2, 3, ..., 9. Перейдем к логарифмам: начинающий имеет число $\lg 1=0$ и может прибавить к нему любое из чисел $a_1=\lg 2$, $a_2=\lg 3$, ..., $a_8=\lg 9$. Затем партнер прибавляет к результату любое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$, затем начинающий и т. д. Выигрывает тот, кто первым доберется до числа $\lg 1\,000\,000=6$. Теперь можно сформулировать более общее условие игры. Заданы положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (для удобства расположенные в порядке возрастания: $a_1<a_2<\ldots<a_k$); начинающий прибавляет к числу 0 любое из этих чисел, затем его партнер прибавляет к результату любое из этих чисел, затем снова начинающий и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит результат, не меньший заданного положительного числа C.

Решать задачу в такой ее общей постановке мы будем при следующем дополнительном предположении: $a_{i+1}-a_i\leqslant a_1$ (при любом $i=1, 2, \ldots, k-1$), смысл которого выяснится при решении. Заметим, что в первоначальном варианте задачи это условие выполнено:

$$a_{i+1}-a_i=\lg(i+2)-\lg(i+1)=\lg\frac{i+2}{i+1}<\lg 2=a_1$$

при любом $i=1, 2, \ldots, 8$.

Обозначим через I_0 полуинтервал $C\leqslant x<C+a_1$, а через $I_1, I_2, \ldots$ — полуинтервалы, получающиеся из I_0 сдвигами вниз на расстояния a_1+a_k, $2(a_1+a_k), \ldots$ (см. рис. 2). Эти полуинтервалы назовем *красными*, а полуинтервалы, расположенные между ними ($[C-a_k, C[$, $[C-2a_k-a_1, C-a_k-a_1[, \ldots$) — *черными*; числа, принадлежащие этим полуинтервалам, будем также называть, соответственно, *красными* и *черными*. Заметим, что длина любого красного полуинтервала равна a_1, а любого черного — a_k.

Пусть игрок, получивший от своего напарника сумму s, своим ходом увеличивает ее на одно из чисел $a_1, \ldots, a_k$ и в результате получает сумму s'. Тогда

1) если s принадлежит красному полуинтервалу, то *при любом ходе* s' будет принадлежать следующему за ним черному полуинтервалу;

2) если s принадлежит черному полуинтервалу, то всегда *можно сделать такой ход*, что s' попадет в следующий за ним красный полуинтервал.

Действительно, пусть $s\in I_l=[b-a_1, b[$; тогда, поскольку $a_1<a_2<\ldots<a_k$, $s'\in[b, b+a_k[$, но это и есть соседний с I_l черный полуинтервал. Пусть теперь s принадлежит черному полуинтервалу $[d-a_k, d[$. Тогда очередным ходом можно получить сумму $s+a_k\geqslant d$, которая либо попадет в следующий красный полуинтервал $[d, d+a_1[$, либо даже «перескочит» через него. Перебирая все возможные ходы, то есть $s+a_1, \ldots, s+a_k$, мы всегда можем найти среди них такой, что сумма s принадлежит $[d, d+a_1[$ (ведь в последовательности $s, s+a_1, \ldots, s+a_k$ расстояния между соседними точками не превосходят a_1 — здесь используется условие $a_{i+1}-a_i\leqslant a_1$ — и потому красный полуинтервал длины a_1 обязательно захватит хотя бы одну из них; см. рис. 3).

С помощью утверждений 1) и 2) легко доказывается следующая

Теорема. *Если число 0 черное, то начинающий (при правильной игре) всегда выигрывает, если же число 0 красное, то начинающий (при правильной игре партнера) непременно проигрывает.*

Доказательство. Допустим, что 0 — черное число. Тогда в силу утверждения 2) начинающий своим первым ходом может получить красное число. Его партнер при любом своем ходе попадет в черный полуинтервал (утверждение 1)), после чего начинающий снова сделает сумму красной и т. д. Таким образом начинающий все время может получать суммы, принадлежащие полуинтервалам I_l, с каждым своим ходом уменьшая номер l на 1, и в конце концов попадет в полуинтервал I_0, то есть первым получит сумму, большую или равную C. А его партнеру придется довольствоваться проигрышными черными полуинтервалами. В случае, если 0 — красное число, роли игроков меняются: партнер становится активным и все время «прыгает» по красным полуинтервалам. Теорема доказана.

Заметим, что если сделанное выше дополнительное предположение не выполняется, то «выигрышные» множе-

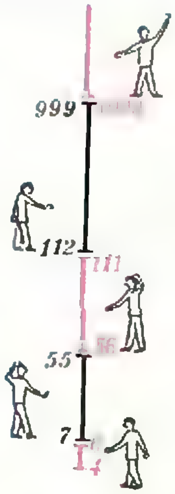


Рис. 1.

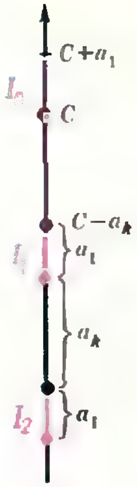


Рис. 2.

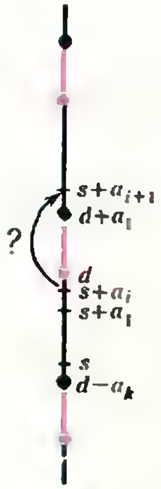


Рис. 3.

ства уже не являются полуинтервалами, и могут иметь более сложную структуру*).

Для нашей задачи б) «выигрышные» (то есть красные) полуинтервалы имеют вид

$$I_l=[6-l\lg 18;\ 6-l\lg 18+\lg 2[\ =\ \left[\lg\frac{10^6}{18^l};\ \lg\frac{2\cdot 10^6}{18^l}\right[,$$

где $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, поскольку $a_1=\lg 2$, $a_k=a_8=\lg 9$, $a_1+a_k=\lg 18$, а $C=\lg 10^6=6$. Так как $0\in I_5$, начинающий проигрывает. Снова переходя от логарифмов к самим числам, мы из I_l получаем полуинтервалы $\left[\frac{10^6}{18^l};\ \frac{2\cdot 10^6}{18^l}\right[$, где $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Наконец, учитывая, что произведения все время получаются целые, получаем следующие «выигрышные» отрезки (расположенные в порядке возрастания):

$$[10;\ 19],\ [172;\ 342],\ [3087;\ 6172],\ [55556;\ 111111].$$

Зная эти отрезки (и, еще лучше, имея в руках микрокалькулятор), партнер начинающего может легко осуществлять правильную стратегию игры.

В. Болтянский

◆

М732. *а) В треугольник ABC вписаны два разных прямоугольника так, что на основании AC лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах AB и BC — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника ABC и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник ABC прямоугольника, две вершины которого лежат на $[AC]$, тоже равен 10.*

б) В четырехугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон AB, BC, CD, DA лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырехугольника $ABCD$ можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников и периметр которого также равен 10.*

а) Ответ: $S_{ABC}=\frac{25}{2}$. Введем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy, начало O которой совпадает с основанием высоты BO треугольника ABC, ось Ox проходит через вершину B, и ось Oy — через вершины A и C (рис. 1). Пусть $KLMN$ — прямоугольник, вписанный в $\triangle ABC$, и пусть $|NK|=|ML|=x$ — абсцисса точек K и L. Поскольку точки K и L лежат на прямых AB и CB соответственно, их ординаты y_1 и y_2 являются линейными функциями от x. Следовательно, и периметр прямоугольника $KLMN$ $p(x)=2(x+y_1(x)-y_2(x))$ — линейная функция. По условию эта функция в двух разных точках принимает одно и то же значение $p=10$, поэтому $p(x)=10$ при всех x, то есть периметр любого прямоугольника, вписанного в $\triangle ABC$ так, что две его вершины лежат на стороне AC, равен 10. Кроме того, $p(0)=2|AC|=10$ и $p(|OB|)=2|OB|=10$. Следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|OB|=\frac{25}{2}$.

То же самое рассуждение можно было провести, пользуясь не системой координат и линейными функциями, а подобием треугольников ANK и AOB, KBL и ABC, опираясь на которое нетрудно выразить периметр прямоугольника через длины постоянных отрезков AC и OB и переменного — NK.

б) Ответ: $S_{ABCD}=\frac{25}{2}$.

Первое решение. Возьмем на стороне AB четырехугольника $ABCD$ произвольную точку K и построим прямоугольник $KLMN$, вершины L и N которого лежат, соответственно, на прямых BC и AD, а стороны параллельны сторонам данных прямоугольников (рис. 2). Если K совпадает с вершиной A, то прямоугольник $KLMN$ вырождается в отрезок AC_1 (точка C_1 лежит на (BC)), а если $K=B$, то — в отрезок BD_1 ($D_1\in(AD)$). Докажем, что точка M всегда лежит на отрезке C_1D_1, причем этот отрезок совпадает со стороной CD, то есть что прямоугольник $KLMN$ вписан в четырехугольник $ABCD$.

Пусть $\overrightarrow{AK}=t\overrightarrow{AB}$, где $0<t<1$, тогда $\overrightarrow{KB}=(1-t)\overrightarrow{AB}$ и, поскольку треугольники AKN и ABD_1, а также BKL и BAC_1, подобны, $\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{KN}=t\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{KL}=(1-t)\overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{C_1A}+t\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{C_1A}+(t-1)\overrightarrow{C_1A}+t\overrightarrow{AD_1}=t(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AD_1})=t\overrightarrow{C_1D_1}$. Это

---

*) Интересный, но, видимо, трудный вопрос: будет ли в общем случае разбиение точек на красные и черные, начиная с некоторого места, периодическим?

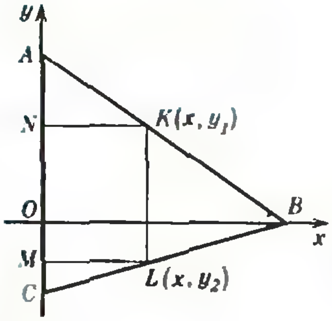


Рис. 1.

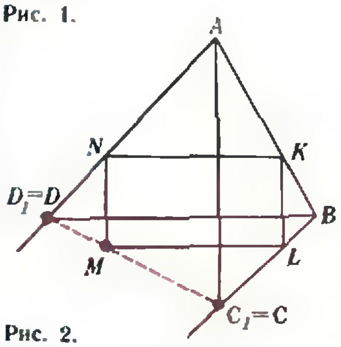


Рис. 2.

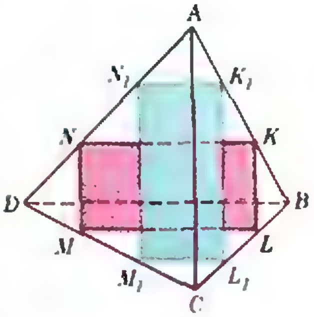


Рис. 3.

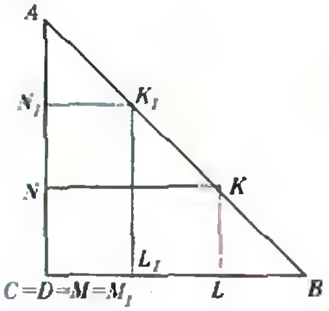


Рис. 4.

значит, что точка M лежит на прямой C_1D_1. Но по условию при двух различных положениях точки K точка M попадает на сторону CD, поэтому отрезок C_1D_1 совпадает с $[CD]$. Попутно мы получаем, что диагонали AC и BD параллельны сторонам вписанных прямоугольников.

Найдем периметр прямоугольника $KLMN$:

$$p=2(|KL|+|KN|)=2((1-t)|AC|+t|BD|),$$

следовательно, p — линейная функция от t. Отсюда, как и в пункте а), заключаем, что $p=10$ при всех положениях точки K. В частности, при $K=A$ получаем, что $p=p(0)=2|AC|=10$, а при $K=B$, что $p=p(1)=2|BD|=10$. Легко доказать, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha$, где α — угол между его диагоналями. В нашем случае диагонали перпендикулярны, поэтому $S_{ABCD}=\frac{25}{2}$.

Второе решение. Четырехугольник $ABCD$ с вписанными в него прямоугольниками $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$ можно рассматривать как проекцию тетраэдра $ABCD$ и двух его сечений (см. рис. 3). В самом деле, приподнимем прямоугольник $K_1L_1M_1N_1$ над плоскостью чертежа так, чтобы его стороны остались параллельны сторонам прямоугольника $KLMN$. Четыре плоскости, проведенные через соответственные стороны «приподнятого» прямоугольника и прямоугольника $KLMN$, ограничивают тетраэдр $ABCD$. Выполним параллельную проекцию, при которой «приподнятый» прямоугольник переходит в $K_1L_1M_1N_1$. Тогда тетраэдр спроектируется в четырехугольник, описанный около данных прямоугольников, то есть в исходный четырехугольник $ABCD$.

Грани ABC и ADC тетраэдра проходят через параллельные отрезки KL и MN и пересекаются по ребру AC. Поэтому оно параллельно этим отрезкам и, следовательно, плоскости чертежа. Отсюда вытекает, что любая его параллельная проекция на эту плоскость, в частности диагональ AC четырехугольника $ABCD$, равна и параллельна ребру AC. Аналогично любая проекция ребра BD, в частности диагональ BD четырехугольника $ABCD$, равна и параллельна ребру BD. Теперь спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость чертежа по-другому — параллельно ребру CD. Проекции точек C и D совпадут, и мы получим прямоугольный треугольник ABC, в который вписаны два прямоугольника периметра 10 (см. рис. 4). При этом катеты AC и BC этого треугольника равны и параллельны диагоналям AC и BD исходного четырехугольника. Любому прямоугольнику, вписанному в $\triangle ABC$ так, как показано на рисунке 4, отвечает некоторое сечение тетраэдра и некоторый прямоугольник, вписанный в четырехугольник $ABCD$. Таким образом, задача сводится к пункту а).

Отметим, что решение можно было бы довести до конца и не пользуясь второй проекцией, чисто стереометрическими рассуждениями. Другие примеры применения «выхода в пространство» при решении планиметрических задач можно найти в статье И. Шарыгина «Выход в пространство» («Квант», 1975, № 5, с. 45); см. также решение задачи M735 в этом номере журнала.

В. Дубровский, А. Егоров

◆

M733. *а) При каких натуральных m число 31^m-1 делится на 2^m? б)* Докажите, что для любого нечетного a и натурального m существует бесконечно много натуральных k таких, что a^k-1 делится на 2^m. в)* Докажите, что для любого нечетного a существует лишь конечное число натуральных m таких, что a^m-1 делится на 2^m.*

а) Ответ: $m=1, 2, 4, 6, 8$. Доказательство будет приведено в решении пункта в).

б) Первое решение. Пусть $c_k=a^k-1$. Разложим c_k на множители при $k=2^n$:

$$c_k=a^{2^n}-1=(a^{2^{n-1}}-1)(a^{2^{n-1}}+1)=$$
$$=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1). \qquad (1)$$

Если a нечетно, то в этом произведении $n+1$ четных сомножителей, и поэтому c_k делится на 2^{n+1}. Итак, при всех $k=2^n$, где $n-1\geqslant m$, число c_k делится на 2^m.

Второе решение. Рассмотрим остатки, которые дают числа c_1, c_2, c_3, ... ($c_k=a^k-1$) при делении на 2^m. Число различных остатков конечно, поэтому среди чисел c_k найдутся два, скажем c_n и c_l ($n>l$), дающие при делении на 2^m одинаковые остатки. Их разность кратна 2^m, и так как $c_n-c_l=a^n-a^l=a^l(a^{n-l}-1)=a^l\cdot c_{n-l}$ и a нечетно, на 2^m делится c_{n-l}. Из формулы для разности вытекает также, что вместе с c_{n-l} на 2^m делятся и все члены бесконечной последовательности c_{n-l}, $c_{2(n-l)}$, $c_{3(n-l)}$, ...

Мы рекомендуем читателю доказать, что вообще множество всех чисел c_k, делящихся на 2^m, имеет вид $\{c_r, c_{2r}, \ldots, c_{i\cdot r}, \ldots\}$, где $r=2^t$, $t\leqslant m$.

в) Обозначим через $d(N)$ показатель наибольшей степени двойки, на которую делится целое число N. Пусть $d(m)=n$, тогда $m=2^n\cdot s$, где s нечетно. Поскольку $c_m=a^{2^n\cdot s}-1=(a^{2^n}-1)(a^{2^n(s-1)}+a^{2^n(s-2)}+\ldots+1)$, а сумма во второй скобке нечетна, $d(c_m)=d(a^{2^n}-1)$. Заметим теперь, что сомножители вида $a^{2^l}+1$ в разложении (1) при $l\geqslant 1$ делятся на 2 и не делятся на 4 (в самом деле, число a нечетно, поэтому a^{2^l} — квадрат нечетного числа и дает при делении на 4 остаток 1). Отсюда следует, что $d(c_m)=d(a^2-1)+n-1$ при $n\geqslant 1$; если же $n=0$, то $d(c_m)=d(a-1)$.

Для делимости c_m на 2^m необходимо, чтобы выполнялось неравенство $d(c_m)\geqslant m$, то есть $d(a-1)\geqslant m$ при m нечетном и $d(a^2-1)+n-1\geqslant m=2^n\cdot s$ при m — четном. Первое неравенство выполняется лишь для конечного количества чисел m, а второе неравенство приводится к виду

$$s\leqslant\frac{d(a^2-1)+n-1}{2^n}.$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, оно может выполняться лишь для конечного множества пар $(n; s)$ при любом фиксированном a.

Возвращаясь к пункту а), положим $a=31$. Искомые числа m удовлетворяют неравенству $m\leqslant d(31-1)=d(30)=1$, если m нечетно, и неравенству $s\leqslant(d(31^2-1)+n-1)/2^n$, если $m=2^n\cdot s$, где $n\geqslant 1$, s — нечетно. Первое неравенство дает $m=1$. Второе приводится к виду $s\leqslant(5+n)/2^n$, поскольку $d(31^2-1)=d(30\cdot 32)=6$. Отсюда получаем возможные пары $(n; s)$: это (1; 1), (1; 3), (2; 1) и (3; 1), то есть $m=2$, 4, 6, 8.

В. Прасолов

◆

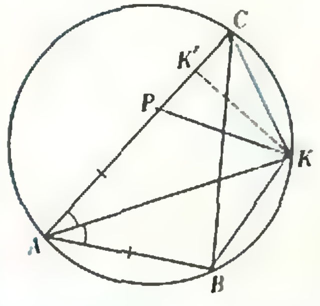
M734. *Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке K. Докажите, что длина проекции отрезка AK на прямую AB (или AC) равна полусумме длин сторон AB и AC.*

Пусть для определенности $|AB|<|AC|$. На стороне AC рассмотрим точку P, симметричную B относительно прямой AK (см. рисунок). Очевидно, $|AP|=|AB|$, $|PK|=|BK|$. Из равенства углов BAK и CAK вытекает равенство дуг BK и CK, на которые они опираются, а из равенства дуг следует равенство стягивающих их хорд BK и CK. Таким образом, $|CK|=|BK|=|PK|$, и поэтому проекция K' точки K на сторону AC является серединой отрезка CP. Следовательно,

$$|AK'|=|AP|+|PK'|=|AB|+\frac{|AC|-|AB|}{2}=$$

$$=\frac{|AB|+|AC|}{2}.$$

А. Егоров



М735. *а) Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосками, суммарная ширина которых меньше 1.*

б) Назовем слоем толщины h часть пространства, заключенную между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Докажите, что шар диаметра 1 нельзя покрыть несколькими слоями, суммарная толщина которых меньше 1.

Одно из самых простых решений задачи а) опирается на задачу б), поэтому мы начнем с пространственной задачи.

б) Площадь поверхности части сферы радиуса r, заключенной между двумя пересекающими сферу параллельными плоскостями, равна $2\pi rh$, где h — расстояние между этими плоскостями*). Это значит, что площадь части поверхности сферы диаметра 1, содержащейся в слое толщины h, не больше πh. Поэтому сумма площадей частей сферы, содержащихся в нескольких слоях, не больше πs, где s — суммарная толщина всех слоев. А так как $s<1$, площадь покрытой слоями части сферы меньше площади поверхности всей сферы, равной π. Следовательно, на сфере найдутся непокрытые точки.

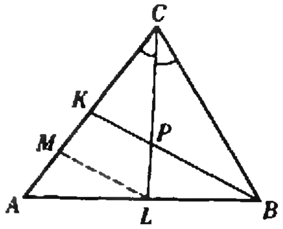
а) Рассмотрим круг радиуса 1 как проекцию шара радиуса 1. Каждой полоске поставим в соответствие слой, толщина которого равна ширине полоски (этот слой заключен между двумя плоскостями, перпендикулярными плоскости круга и проходящими через границы полосок). Если бы круг был полностью покрыт полосками, то весь шар был бы покрыт слоями, суммарная толщина которых была бы меньше 1. Но это, по доказанному в пункте б), невозможно.

С. Шлосман

◆

М736. *Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите равенство*

$$\frac{|PC|}{|PL|}-\frac{|AC|}{|BC|}=1$$



Проведем отрезок LM, параллельный BK (см. рисунок). Ясно, что

$$\frac{|PC|}{|PL|}=\frac{|KC|}{|KM|},\quad \frac{|BL|}{|KM|}=\frac{|LA|}{|MA|}.$$

Поскольку CL — биссектриса угла C, $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{|LA|}{|LB|}$. Поэтому $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{|MA|}{|KM|}$, и, следовательно,

$$\frac{|PC|}{|PL|}-\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|KC|}{|KM|}-\frac{|MA|}{|KM|}=\frac{|KA|-|MA|}{|KM|}=$$

$$=\frac{|KM|}{|KM|}=1,$$

что и требовалось.

З. Анджапаридзе

◆

М737. *Обозначим через d_k количество таких домов в вашем городе, в которых живет не меньше k жителей ($d_1\geqslant d_2\geqslant d_3\geqslant\ldots$), и через c_m — количество жителей в m-м по величине населения в доме ($c_1\geqslant c_2\geqslant c_3\geqslant\ldots$). Докажите равенства*

а) $c_1+c_2+c_3+\ldots=d_1+d_2+d_3+\ldots;$

б) $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\ldots=d_1+3d_2+5d_3+\ldots+(2k-1)d_k+\ldots,$

$d_1^2+d_2^2+d_3^2+\ldots=c_1+3c_2+5c_3+\ldots+(2m-1)c_m+\ldots$

а) Представим себе, что все жители города выстроены в несколько шеренг, причем в m-й шеренге стоят все жители m-го по численности дома, и шеренги выравнены по левому флангу (на рисунке люди изображены точками). Таким образом, c_m — это число людей в m-й шеренге. Заметим теперь, что число людей в k-й колонне равно d_k. В самом деле, в k-й колонне стоит по одному человеку из каждой шеренги, содержащей не менее k человек; по условию, число таких шеренг равно d_k. Например, на рисунке изображен случай, когда

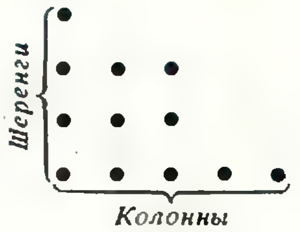
$$c_1=5,\ c_2=c_3=3,\ c_4=1,\ d_1=4,\ d_2=d_3=3,\ d_4=d_5=1.$$

Из сказанного сразу следует, что каждая из сумм $c_1+c_2+\ldots+c_m+\ldots$ и $d_1+d_2+\ldots+d_k+\ldots$ есть общее число жителей города: первый раз мы пересчитали их, сгруппировав в шеренги, а второй раз — в колонны. Это доказывает утверждение а).

б) Дадим левофланговым во всех шеренгах по одному флажку, следующим за ними людям — по 3 флажка и т. д., так что все люди в k-й колонне получат по $2k-1$ флажков. Сосчитаем двумя способами общее количество розданных флажков. Так как каждый из d_k человек в k-й колонне получил $2k-1$ флажков, общее число флажков равно $d_1+3d_2+5d_3+\ldots$ С другой стороны, люди из m-й шеренги получили $1+3+\ldots+(2c_m-1)=c_m^2$ флажков, так что общее число флажков равно $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_m^2+\ldots$ Приравнивая эти выражения, получаем первое равенство пункта б).

---

*) См., например, «Геометрия 9—10» (1981), с. 233.



Второе равенство можно доказать аналогично, но проще приказать всем собравшимся жителям повернуться на 90°. При этом шеренги превратятся в колонны, а колонны в шеренги, так что теперь c_m — это количество людей в m-й колонне, а d_k — в k-й шеренге. Записывая для нового построения уже доказанное равенство, получим требуемое.

Массивы точек, подобные изображенному на рисунке, называются диаграммами Юнга. Они играют важную роль в современной комбинаторике и находят интересные применения в программировании. Об этом можно прочитать в третьем томе замечательной книги Д. Кнута «Искусство программирования для ЭВМ» (М., «Мир», 1978).

А. Зелевинский

M738*. *Докажите, что а) количество прямых различных направлений, на которые данный n-угольник дает одинаковые по величине проекции, не превосходит $2n$; б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника четно; в) для треугольника это число больше 3 тогда и только тогда, когда он остроугольный.*

Прежде всего заметим, что проекция произвольного многоугольника M на любую прямую l совпадает с проекцией на эту прямую содержащей его полосы, края которой перпендикулярны l и проходят через вершины многоугольника (рис. 1). Пересечение всех таких полос есть выпуклый многоугольник M'. Очевидно, $M'\supset M$, проекции многоугольников M и M' на любую прямую совпадают и число сторон M' не превосходит числа сторон M*). Поэтому без всякого ущерба можно заменить многоугольник M на M' и в дальнейшем считать данный многоугольник выпуклым.

Фиксируем прямую l_0, перпендикулярную одной из сторон данного многоугольника, и обозначим через l_φ прямую, в которую переходит l_0 при повороте на угол φ против часовой стрелки (центр поворота роли не играет), а через $L(\varphi)$ — длину проекции многоугольника на прямую l_φ. В задаче рассматривается число точек φ на отрезке $[0;\pi]$ (или на любом другом отрезке длины π), в которых функция $L(\varphi)$ принимает одно и то же значение.

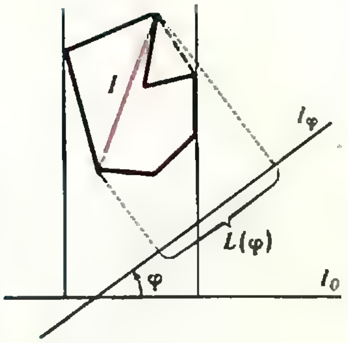


Рис. 1.

а) Проекция данного n-угольника на прямую l_φ совпадает с проекцией на эту прямую некоторого отрезка I — диагонали или стороны n-угольника, зависящего, конечно, от направления прямой l_φ. При этом смена отрезков I может происходить только при переходе через направления, перпендикулярные сторонам n-угольника, поскольку он выпуклый. Следовательно, отрезок $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ разбивается на k промежутков, где $k\leqslant n$, на каждом из которых функция $L(\varphi)$ совпадает с длиной проекции фиксированного отрезка I_j, $j=1, \ldots, k$, соединяющего вершины данного n-угольника. Если отрезок I_j параллелен прямой l_{α_j}, а его длина равна a_j, то длина проекции этого отрезка на прямую l_φ (то есть значение функции $L(\varphi)$ на j-м промежутке) равна $a_j|\cos(\varphi-\alpha_j)|$. Поэтому проекция любого из отрезков I_j на прямую l_φ может иметь заданную длину не более чем при двух значениях φ, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, а количество точек на отрезке $[0;\pi]$, в которых функция $L(\varphi)$ принимает любое заданное значение, не больше $2k\leqslant 2n$.

б) Как мы видели, график функции $L(\varphi)$ состоит из нескольких кусков синусоид; эскиз такого графика показан на рисунке 2. Отметим, что $L(0)=L(\pi)$.

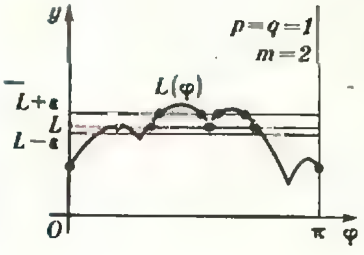


Рис. 2.

Пусть функция $L(\varphi)$ принимает некоторое значение L в наибольшем числе точек, среди которых имеется p точек максимума и q точек минимума; остальные m точек — «обычные»: в них график функции $y=L(\varphi)$ переходит с одной стороны прямой $y=L$ на другую. Число таких переходов четно, поскольку $L(0)=L(\pi)$. Во всяком случае, это верно, если $L\neq L(0)$. Если же $L=L(0)$, то можно

---

*) Любой выпуклый многоугольник, содержащий M, содержит также и M'; M' называют *выпуклой оболочкой* M.

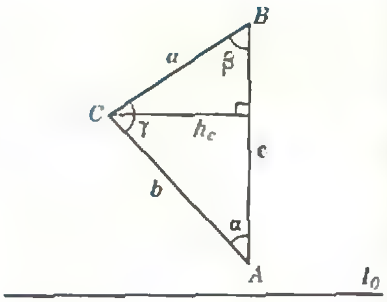


Рис. 3.

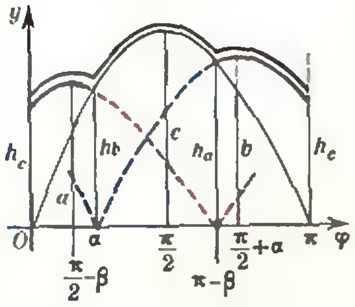


Рис. 4.

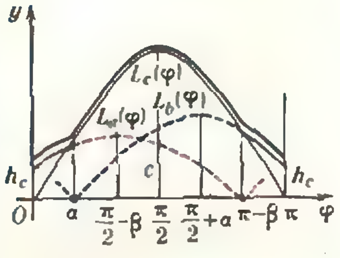


Рис. 5.

рассматривать функцию $L(\varphi)$ на отрезке $\varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0$, где $L(\varphi_0) \neq L$. При этом числа p, q и m не изменятся (точки 0 и π надо считать за одну). Итак, m — четное число.

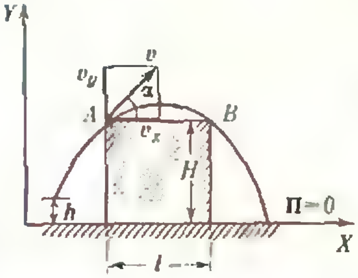
Покажем, что $p=q$. Сдвинем прямую $y=L$ вверх на расстояние ε (рис. 2). Если ε достаточно мало, то каждой «обычной» точке пересечения графика функции $L(\varphi)$ с прямой $y=L$ будет отвечать одна «обычная» точка на прямой $y=L+\varepsilon$, каждая из q точек минимума как бы «раздвоится», а точки максимума исчезнут. Общее число точек пересечения графика и прямой станет равно $m+2q$, а так как увеличиться оно не может, $m+2q < m+p+q$, то есть $q<p$. Аналогично доказывается, что $q>p$. Следовательно, $p=q$, и число $m+p+q$ четно.

в) Рассмотрим $\triangle ABC$. Пусть c — его наибольшая сторона, $c>b>a$ (обозначения см. на рисунке 3). Прямую l_0 проведем перпендикулярно стороне AB. Направления высот треугольника ABC соответствуют значениям $\varphi=0$, $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\pi-\beta$. Поэтому на отрезке $0<\varphi<\alpha$ проекция треугольника на прямую l_0 совпадает с проекцией стороны BC, то есть $L(\varphi)=L_a(\varphi)=a\left|\cos\left(\varphi-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)\right|$, на отрезке $[\alpha; \pi-\beta]$ — с проекцией стороны AB: $L(\varphi)=L_c(\varphi)=c|\cos\varphi|$, а на отрезке $[\pi-\beta; \pi]$ — с проекцией стороны AC: $L(\varphi)=L_b(\varphi)=b\left|\cos\left(\varphi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)\right|$. Если треугольник — тупоугольный или прямоугольный, то $\alpha+\beta=\pi-\gamma<\frac{\pi}{2}$, поэтому, как легко проверить, точки максимума функций $L_a(\varphi)$ и $L_b(\varphi)$ — $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\frac{\pi}{2}+\alpha$ — попадают на отрезок $[\alpha; \pi-\beta]$, на котором $L(\varphi)=L_c(\varphi)$. В этом случае функция $L(\varphi)$ сначала возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ от h_c до c, а затем убывает от c до h_c (рис. 4). Каждое свое значение она принимает не более двух раз. Если $\triangle ABC$ — остроугольный, то $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, и максимумы функций $L_a(\varphi)$ и $L_b(\varphi)$ попадают внутрь отрезков $[0; \alpha]$ и $[\pi-\beta; \pi]$. Поэтому функция $L(\varphi)$ имеет три максимума и шесть промежутков монотонности (рис. 5). Поскольку $h_c<h_b<a<b<c$, любое значение из интервала $]h_b; a[$ функция $L(\varphi)$ принимает не менее четырех раз — на первых трех и последнем промежутках монотонности (см. рис. 5). Заметим еще, что если $h_a<a$, то любое значение из интервала $]h_a; a[$ принимается шесть раз — по разу на каждом промежутке монотонности функции $L(\varphi)$.

В. Прасолов

◆

Ф743. *С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через стену высотой H и толщиной l, если бросать его с высоты h?*



Камень, брошенный с минимальной начальной скоростью v_0, достаточной, чтобы камень перелетел через стену, описывает траекторию такую, как показано на рисунке. В точках A и B траектория касается кромок стены; скорость v камня в точке A составляет угол $\alpha=45°$ с горизонтом. Время t, в течение которого камень летит от точки A до точки B, определяется условием

$$v_y = v\sin\alpha - gt/2 \Rightarrow t = 2v(\sin\alpha)/g.$$

Величина скорости v связана с толщиной стены l соотношением

$$l = v_x t = 2v\cos\alpha\cdot v(\sin\alpha)/g = v^2/g \Rightarrow v = \sqrt{gl}.$$

Связь между v_0 и v найдем из закона сохранения энергии:

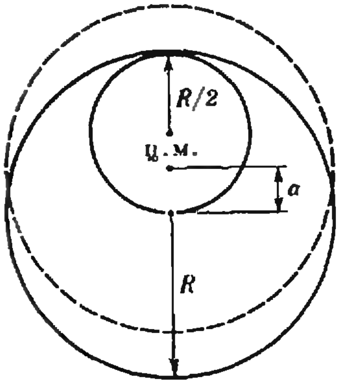
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mgH,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g(H-h)} = \sqrt{g(l+2H-2h)}.$$

О. Савченко

Ф744. *Космический аппарат представляет собой жесткую тонкостенную сферу радиуса $R=2$ м, наполненную газом. Внутри аппарата находится шар радиуса $r=R/2$, наполненный тем же газом, что и весь аппарат, но при большем давлении. Шар касается внутренней поверхности аппарата. В результате повреждения шар лопнул. Найти, во сколько раз изменилось давление внутри аппарата, если оказалось, что весь аппарат при этом сместился на расстояние $a=0{,}5$ м. Массой оболочек пренебречь; температуру считать неизменной.*



При изменениях, происходящих внутри аппарата, положение центра масс (ц. м.) аппарата не меняется.

В начальный момент ц. м. аппарата определяется как ц. м. системы «шар с плотностью ϱ_1 + шар с плотностью $\varrho_2-\varrho_1$», где ϱ_1 — плотность газа, заполняющего сферу радиуса R, ϱ_2 — плотность газа, заполняющего шар радиуса $R/2$.

После того как лопнул шар, ц. м. аппарата определяется как ц. м. сферы радиуса R, заполненной газом с плотностью ϱ, где ϱ — плотность газа в сфере после повреждения шара.

Тот факт, что после повреждения шара весь аппарат сместился на расстояние a, означает, что ц. м. аппарата с целым шаром находится на расстоянии a от центра сферы (см. рисунок). Из этого условия найдем соотношение между ϱ_1 и ϱ_2:

$$\frac{4}{3}\pi R^3\varrho_1 ag=\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}(\varrho_2-\varrho_1)\left(\frac{R}{2}-a\right)g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{R+14a}{R-2a}.$$

Плотность газа в аппарате, после того как лопнул шар, определяется условием

$$\frac{4}{3}\pi R^3\varrho_1+\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}(\varrho_2-\varrho_1)=\frac{4}{3}\pi R^3\varrho\Rightarrow\varrho=\frac{7}{8}\varrho_1+\frac{1}{8}\varrho_2.$$

Давление p газа в аппарате после повреждения шара может быть найдено из условия $\frac{p}{p_1}=\frac{\varrho}{\varrho_1}$, где p_1 — начальное давление газа внутри тонкостенной сферы.

Таким образом,

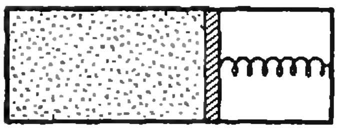
$$\frac{p}{p_1}=\frac{\varrho}{\varrho_1}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{R}{R-2a}=2,$$

то есть давление газа внутри аппарата увеличилось в 2 раза.

А. Буздин

◆

Ф745. *Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплоизолированным поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда содержится 1 моль идеального одноатомного газа, в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Пренебрегая теплоемкостью сосуда, поршня и пружины, определить теплоемкость системы.*



Пусть T_1 — начальная температура газа под поршнем, T_2 — температура газа после того, как системе сообщено тепло ΔQ. Поскольку трение отсутствует и сосуд теплоизолирован, все тепло ΔQ идет на изменение ΔU внутренней энергии системы, то есть $\Delta Q=\Delta U$. Изменение внутренней энергии системы складывается из изменения внутренней энергии газа и изменения потенциальной энергии сжатой пружины (теплоемкостью сосуда, поршня и пружины пренебрегаем).

Внутренняя энергия одного моля одноатомного идеального газа при нагревании от температуры T_1 до температуры T_2 увеличивается на

$$\Delta U_1=\frac{3}{2}R(T_2-T_1).$$

Потенциальная энергия сжатой пружины изменяется на величину

$$\Delta U_2=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2),$$

где x_1 и x_2 — значения абсолютной деформации пружины при температурах газа T_1 и T_2 соответственно. Найдем связь между параметрами газа под поршнем и деформацией пружины.

Из условия равновесия поршня следует, что

$$p=\frac{F}{s}=\frac{kx}{s}\Rightarrow x=\frac{ps}{k}\qquad(\bullet)$$

(p — давление газа, s — площадь поршня, k — упругость пружины). Согласно закону Менделеева — Клапейрона для 1 моля идеального одноатомного газа выполняется соотношение

$$pV = RT \Rightarrow p = RT/V.$$

При деформации пружины x объем, занимаемый газом под поршнем, равен $V = xs$ и $p = RT/xs$. Подставляя это выражение в (•), находим

$$x^2 = RT/k.$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии сжатой пружины при нагревании системы равно

$$\Delta U_2 = \frac{R}{2}(T_2 - T_1).$$

Полное изменение внутренней энергии системы при нагревании от температуры T_1 до температуры T_2 равно

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2R(T_2 - T_1),$$

и теплоемкость системы равна

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{T_2 - T_1} = 2R.$$

Б. Клячин

Ф746. *Электрическая батарея, использующая β-радиоактивность, представляет собой металлическую сферу, внутри которой помещен изолированный от нее кусочек радиоактивного вещества (рис. 1). Ежесекундно распадаются ν атомов. Считая, что энергия электронов, образующихся при распаде, равновероятно распределена от минимального значения W_{min} до максимального W_{max}, определить ЭДС батареи. Какой наибольший ток может давать такая батарея? До каких сопротивлений нагрузки батарею можно считать генератором тока?*

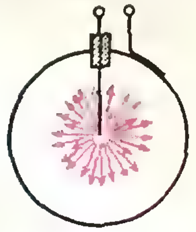


Рис. 1.

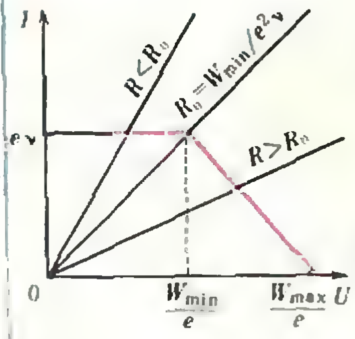


Рис. 2.

◆

Пусть клеммы батареи замкнуты на нагрузку, и напряжение на клеммах равно U. Найдем ток, текущий через нагрузку, то есть установим вольт-амперную характеристику батареи.

До сферы долетают электроны с энергией $W > eU$. В стационарном режиме (при постоянном U) заряд сферы остается неизменным. Следовательно, число электронов, попадающих ежесекундно на сферу, равно числу электронов, возвращающихся за это же время через нагрузку к кусочку радиоактивного вещества.

При $eU < W_{min}$ все электроны долетают до сферы, переносимый ими в единицу времени заряд и есть максимальный ток, который может давать такая батарея, то есть

$$I_{max} = e\nu.$$

При большем напряжении, когда $W_{min} < eU < W_{max}$, на сферу попадают только те электроны, энергия которых $W > eU$; эти электроны и определяют ток, текущий через нагрузку (остальные электроны возвращаются в центр сферы, минуя нагрузку). Доля этих электронов от общего числа электронов, вылетающих из кусочка радиоактивного вещества, равна

$$n = \frac{W_{max} - eU}{W_{max} - W_{min}}$$

(ввиду равномерного распределения электронов по энергии). Ток, текущий при этом через нагрузку, равен

$$I = e\nu n = e\nu\frac{W_{max} - eU}{W_{max} - W_{min}}.$$

Наибольшее напряжение U_{max} на разомкнутых клеммах батареи (ЭДС батареи) определяется условием

$$eU_{max} = W_{max} \Rightarrow U_{max} = W_{max}/e.$$

Как только это напряжение достигнуто, заряд сферы и кусочка радиоактивного вещества перестают меняться.

При рисунке 2 приведена зависимость тока от напряжения. На этом же графике изображены вольт-амперные характеристики нагрузки с сопротивлением R (при различных значениях R). Ординаты и абсциссы точек пересечения графиков дают значения тока и напряжения в цепи при данном значении R. При

$$R < R_0 = W_{min}/e^2\nu$$

ток остается постоянным независимо от сопротивления нагрузки. При таких сопротивлениях батарею можно считать генератором тока.

И. Воробьев

Ф747. *Космонавты во время вывода космического корабля на орбиту заметили на некоторой высоте H_0 тонкий светящийся слой (полное внутреннее отражение света в атмосфере). Как по графику (рис. 1) зависимости коэффициента преломления атмосферы n от расстояния R до центра Земли определить H_0?*

Пусть слой, в котором происходит полное внутреннее отражение света, находится на расстоянии R_0 от центра Земли (точка O на рисунке 2) и имеет толщину ΔR. Коэффициент преломления атмосферы для этого слоя обозначим n_0 (поскольку слой тонкий, можно считать, что на расстоянии ΔR величина n постоянна).

Рассмотрим луч AB, который направлен к верхней границе слоя вдоль касательной к нижней его границе в точке A. Если этот луч испытает полное внутреннее отражение на верхней границе слоя (в точке B), то и любой другой луч, попавший снизу в выделенный слой, отразится от верхней границы.

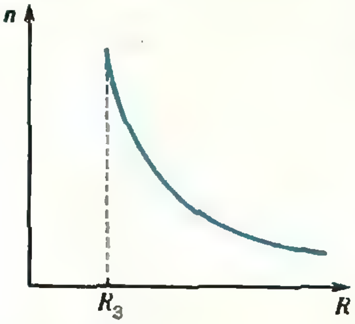


Рис. 1.

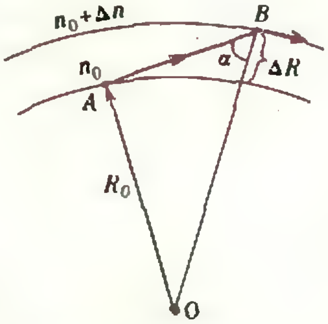


Рис. 2.

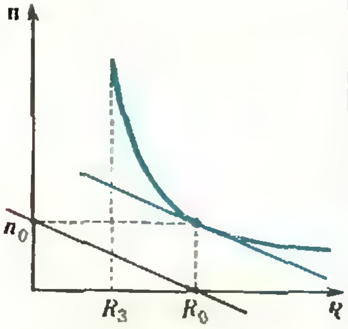


Рис. 3.

Запишем условие полного внутреннего отражения для луча AB:

$$\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{n_0+\Delta n}{n_0}=1+\frac{\Delta n}{n_0},$$

где $n_0+\Delta n$ — коэффициент преломления атмосферы за верхней границей выделенного слоя. Поскольку слой тонкий, можно считать, что

$$\sin\alpha=\frac{R_0}{R_0+\Delta R}=1-\frac{\Delta R}{R_0+\Delta R}\approx 1-\frac{\Delta R}{R_0},$$

и, следовательно,

$$1+\frac{\Delta n}{n_0}=1-\frac{\Delta R}{R_0},$$

откуда

$$\frac{\Delta n}{n_0}=-\frac{\Delta R}{R_0},\quad \text{или}\quad \frac{\Delta n}{\Delta R}=-\frac{n_0}{R_0}=n'(R_0).$$

Таким образом, касательная к графику $n(R)$ в точке, соответствующей значениям n_0 и R_0, должна быть наклонена под углом φ таким, что $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{n_0}{R_0}$, то есть эта касательная должна быть параллельна прямой, проходящей через точки с координатами $(0, n_0)$ и $(R_0, 0)$ (рис. 3).

Высота H_0 равна

$$H_0=R_0-R_3.$$

О. Батищев

Любопытный факт

7 октября 1959 года станция «Луна-3» сфотографировала обратную, невидимую с Земли сторону Луны и передала снимки на Землю. Через 15 лет после этого старший научный сотрудник Днепропетровского исторического музея В. Пименов нашел в газете «Московские губернские ведомости» за 1848 год хроникальную заметку, в которой говорилось о решении «мещанина Никифора Никитина за крамольные речи о полете на Луну сослать в поселение Байконур».

(Из книги Я. Голованова «Дорога на космодром»)

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М706 — М720 и Ф723 — Ф747 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

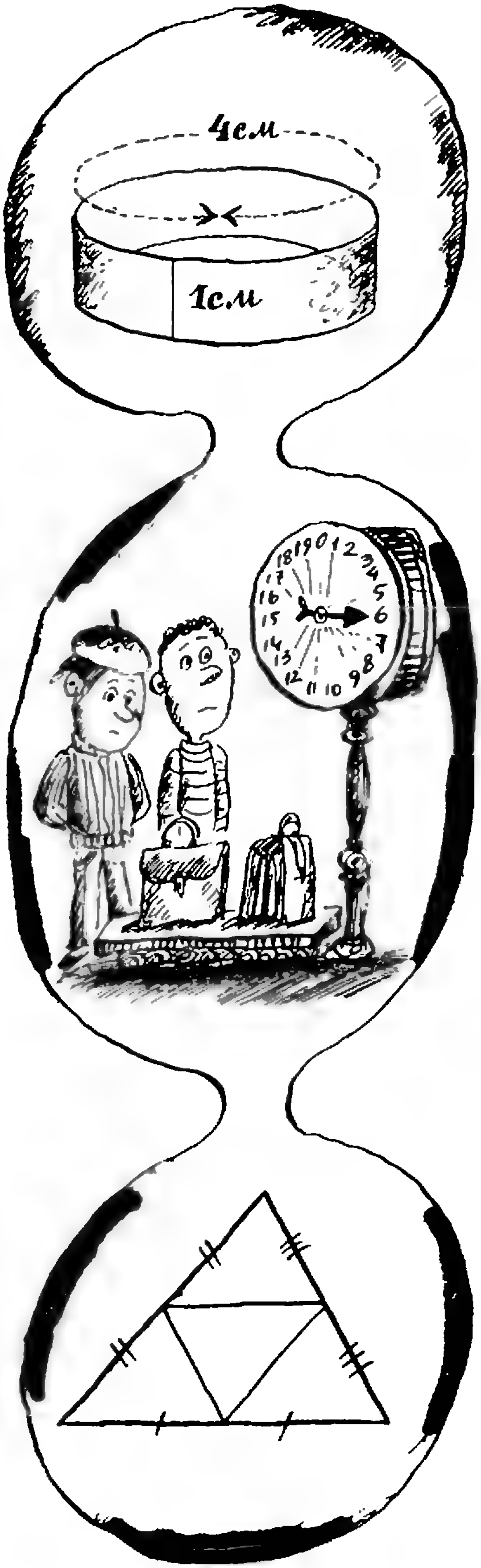
Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **М706, М707, М711, М712, М717** и **М720**. Остальные задачи решили: *З. Авалиани* (Батуми) 16; *М. Алексеев* (Москва) 13, 18, 19; *С. Амшинский* (Ленинград) 08, 16, 19; *В. Арабидзе* (Тбилиси) 18; *М. Арасланов* (Запорожье) 18; *В. Барабинов* (Киев) 16, 19; *А. Баронов* (Ростов) 18; *А. Борискин* (Москва) 16, 18; *М. Бродицкий* (Кишинев) 08; *Б. Вейцман* (Одесса) 16, 19; *Г. Виннер* (Свердловск) 08, 13, 19; *И. Волгин* (Белорецк) 16; *Г. Ганев* (Ямбол, НРБ) 16, 18, 19; *Р. Георгиев* (Ямбол, НРБ) 16, 18, 19; *Ю. Гончаренко* (Киев) 16, 18, 19; *А. Гохберг* (Донецк) 08, 13, 15, 16, 18, 19; *О. Гринив* (Киев) 08; *А. Громов* (Ленинград) 13; *И. Димитров* (Ямбол, НРБ) 16, 18, 19; *А. Добрин* (Киев) 16, 18, 19; *А. Дубицкас* (Таураге) 08, 09, 13, 15, 16, 18, 19; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 13, 15, 16, 18, 19; *П. Зусманович* (Алма-Ата) 16; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) 13, 16, 18; *Т. Кидышев* (Москва) 18; *В. Каллер* (Киев) 16, 19; *Д. Калюжный* (Одесса) 18, 19; *В. Камаев* (Куйбышев) 16; *Д. Камунтавичюс* (Вильнюс) 18, 19; *А. Карпович* (Киев) 13, 15, 16, 19; *Н. Кащенко* (Киев) 18; *Д. Кирьянов* (Красноуфимск) 19; *В. Кисиль* (Одесса) 08; *Е. Клебанов* (Горловка) 19; *Д. Коршунов* (Новосибирск) 16, 19; *Е. Кочнин* (Волжский) 18; *Л. Лейцин* (Чернигов) 08; *П. Лисоньек* (Оломоуц, ЧССР) 19; *Ш. Лыонг* (Львов) 16; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 18; *С. Мамедов* (Баку) 08, 16; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) 16, 18, 19; *О. Матнеев* (Свердловск) 19; *Ю. Николаевский* (Харьков) 08, 13, 15; *И. Николов* (Ямбол, НРБ) 16, 18, 19; *А. Никонов* (Кировград) 08, 15; *О. Нотыч* (Киев) 16; *М. Овецкий* (Донецк) 08, 15; *Р. Оруджев* (Баку) 16; *Г. Перельман* (Ленинград) 08, 09; *Д. Першеев* (Москва) 18; *С. Путинцев* (Невинномысск) 13, 15; *А. Родионов* (Москва) 18; *Л. Рудый* (Кировск Мурманской обл.) 16, 19; *А. Сикса* (Киев) 08, 15; *А. Сохет* (Харьков) 15, 16, 19; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) 08; *В. Толстых* (Кемерово) 18; *Г. Трунов* (Москва) 08; *Е. Тюрин* (Вильнюс) 08; *Р. Угриновский* (Хмельник) 08, 16; *Н. Федин* (Омск) 16; *Ю. Харкевич* (с. Лобачевка Волынской обл.) 16; *А. Хельвас* (Киев) 13; *С. Хирман* (Киев) 13, 15, 16; *А. Хохлов* (Москва) 08, 19; *В. Хрычиков* (Севастополь) 16, 18, 19; *П. Цветков* (Подольск) 08; *И. Шапчев* (Ямбол, НРБ) 16, 18, 19; *З. Шебзухов* (Москва) 08; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) 16, 18; *П. Этингоф* (Киев) 16, 19; *С. Юровский* (Мытищи) 08; *В. Ярош* (Ленинград) 08; *Н. Яцкевич* (Саратов) 16.

Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф723—Ф725, Ф731, Ф738, Ф740** и **Ф743**. Остальные задачи решили: *Е. Абедимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) 26—28, 35, 36; *Я. Абдуллаев* (Геокчай) 35; *М. Авдеев* (Новосибирск) 34—37; *А. Айрипетян* (Ереван) 28, 29; *Т. Акопян* (Ереван) 34—36; *И. Алексеев* (Москва) 27, 28, 32—37; *Э. Алиев* (Баку) 27; *А. Амбарцумян* (Кафан) 27, 35, 37; *О, Андреев* (Киев) 28, 29, 35, 37, 39, 44, 45; *Е. Антонян* (Ереван) 39, 44, 45; *А. Асланян* (Ереван) 29; *А. Астахов* (Железнодорожный) 27, 30; *А. Бабаев* (Баку) 26, 27; *Э. Багдасарян* (Баку) 26; *Ю. Баданов* (Новосибирск) 39, 44, 45; *Я. Базалий* (Донецк) 26,27; *Ф. Байкабулов* (Ташкент) 39, 41; *В. Баринов* (Севастополь) 39, 45; *Г. Баранов* (Донецк) 28, 30, 34, 36, 37, 39, 42, 44, 45, 47; *Д. Басалаев* (Черногорск) 33, 36, 44, 45; *С. Бережной* (Кривой Рог) 39, 44; *Ю. Беспалов* (Киев) 26; *А. Благодарев* (Пенза) 45; *А. Бойко* (Хабаровск) 45; *А. Брезгунов* (Новосибирск) 39; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) 39, 41, 42, 44, 47; *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) 26, 27, 39; *В. Будовский* (Харьков) 33, 34, 36; *В. Булавас* (Паневежис) 36, 45; *О. Важеевский* (Москва) 36, 44, 45; *В. Вайншток* (Калинин) 45; *В. Васильев* (Таганрог) 39, 44, 45; *Б. Вейцман* (Одесса) 26—30, 33, 35—37, 42; *Г. Волынцев (Владивосток)* 36; *Р. Върбанов* (Тервел, НРБ) 26, 27, 33—37; *С. Выгран* (Запорожье) 26, 27; *С. Вылегжанин* (с. Золотое Поле Крымской обл.) 26, 33, 35, 37; *А. Вышкварь* (Ленинград) 42; *И. Гавриков* (Москва) 28, 35, 37; *И. Гайович (Киев)* 27, 34—36, 45; *Д. Гесслер* (Москва) 26—28, 32, 39, 41; *А. Гинев* (Винница) 26; *В. Гомоз* (Ереван) 41; *Д. Гороховский* (Черкассы) 28, 32; *М. Гостев* (Липецк) 38, 44, 45; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 33, 44, 45; *А. Гриненко* (Конотоп) 28; *О. Гришин* (Тула) 27, 35, 45; *К. Гуляев* (Воскресенск) 44, 45; *И. Гурович* (Одесса) 26; *Т. Дагдаев* (Ширин) 29; *А. Дешковский* (Барановичи) 26; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) 41, 44, 45; *И. Доценко* (Москва) 26—28, 30, 32; *А. Дунаевский* (Киев) 26, 33—37, 39, 41, 42, 44—47; *О. Драгунов* (Барабинск) 26; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) 26—30, 32, 34, 36, 41, 44, 45; *В. Евстратов* (Ленинград) 26, 28—30; *С. Ефимов* (Баку) 44, 45; *В. Житомирский* (Харьков) 33, 34, 36, 39, 41, 44, 45; *Н. Жохов* (Александров) 34; *Г. Жуков* (Шумерля) 26; *М. Жяконис* (Каунас) 26—30, 33, 34, 36, 37; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) 26—30, 32—37, 39, 41, 44—46; *А. Заболотный* (Улан-Удэ) 44, 45; *В. Зайцев* (Москва) 39, 44, 45; *Ц. Зайцев* (Горький) 36, 39, 45; *Ю. Зандаров* (Кургантепа) 33, 37; *Ю. Звегинцев* (Харьков) 33—37, 39, 42, 44, 46; *Э. Звенигородский* (Киев) 28; *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) 27, 29; *Р. Искендеров* (Джалилабад) 26, 27 ; *А. Ишханян* (Джермук) 35; *М. Йотов* (София, НРБ) 39, 41; *Е. Кабаков* (Ленинград) 33, 34, 39, 41; *Т. Кадышев* (Москва) 26—29, 39, 42; *А. Камашев* (Ижевск) 35, 41; *В. Карасев* (Великие Луки) 27; *Д. Карманский* (п. Шортанды Целиноградской обл.)

36; *А. Карнаухов* (Ижевск) 41, 44; *Е. Касперский* (Долгопрудный) 28, 32; *С. Кастелли* (Болград) 26, 33, 34, 36, 39, 44—46; *В. Кадыенок* (Рязань) 41, 44—47; *С. Киянов* (Ленинград) 35—37, 41, 42, 44, 45; *С. Кияшко* (Краснодар) 35; *Н. Клейницкий* (Жодино) 26, 28, 30; *М. Козаченко* (Ровно) 44, 45; *М. Колбин* (Свердловск) 27; *В. Комов* (Александров) 26, 28—30, 32, 33, 35, 37; *Р. Кононов* (Новосибирск) 44—46; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 26—30, 33—36, 39, 41, 45; *Н. Косматов* (Москва) 39, 45; *Г. Костышин* (Минск) 26, 27, 35—37; *В. Криман* (Винница) 26, 28, 32, 33, 37, 39, 45, 46; *Е. Крылов* (Великие Луки) 28; *И. Крылов* (Куйбышев) 44; *С. Крюковский* (Владивосток) 26; *А. Кубышкин* (Киев) 26—28, 30, 33, 35—37; *О. Кузнецов* (Тулун) 26; *Е. Кузнецова* (Липецк) 35, 37, 44; *В. Кузьмин* (Горловка) 44; *О. Кузьмин* (Ташкент) 26; *О. Кузьминова* (Электросталь) 41; *И. Куколев* (Сызрань) 26, 30; *Ф. Курбанов* (п. Ленин Аз.ССР) 26; *Н. Кухиркин* (Москва) 38, 45; *А. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 28, 30, 33, 35, 36, 39, 41, 44—46; *Д. Ларионов* (Чебоксары) 39; *И. Линшиц* (Винница) 28, 32, 39; *С. Лиханский* (Херсон) 42, 45; *А. Лихачев* (Барнаул) 44; *С. Логунов* (Великие Луки) 26—28; *Д. Локшин* (Москва) 45, 46; *О. Лопин* (Фрунзе) 33—35, 44, 45; *Ю. Лупина* (Кокчетав) 27, 29, 39, 45; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 33, 45; *Л. Макарова* (Гайсин) 37; *М. Маловичко* (Северодонецк) 26—28, 30; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) 28, 30, 32—37, 41, 44, 45; *Л. Маркович* (Брест) 33—37, 39, 42—47; *И. Медков* (Москва) 28, 34; *Р. Микаилов* (Геокчай) 35, 41; *В. Михайловский* (Магнитогорск) 45; *И. Мокеев* (Ангарск) 36; *В. Молчанов* (Киев) 26, 27, 39; *Е. Морозов* (Запорожье) 34—39, 42, 45—47; *П. Морозов* (Тула) 35—37, 42; *С. Москаленко* (Киев) 28, 30; *С. Москвичев* (п. Заречье Калужской обл.) 26; *Д. Мукушев* (с. Аркат Семипалатинской обл.) 26, 27; *Б. Мурзахметов* (Джезказган) 28; *С. Мусаев* (Баку) 35, 36, 39, 44, 45; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 36, 39; *А. Накас* (Вильнюс) 33, 35—42; *С. Некрасов* (Череповец) 28; *О. Нечипоренко* (ст. Северская Краснодарского кр.) 35, 42; *К. Никашев* (Салават) 27; *А. Носков* (Москва) 34, 36, 37; *И. Осташевский* (Челябинск) 34; *С. Очеретяный* (Житомир) 41; *Е. Паланкер* (Ереван) 26; *И. Паробий* (Киев) 39; *Е. Парубец* (Киев) 39, 45; *С. Парфенов* (Москва) 34,39; *В. Пекар* (Киев) 35, 36, 44, 45; *В. Пентегов* (Киев) 26, 27; *К. Первушин* (Ташкент) 39; *Т. Петруша* (Чирчик) 35; *И. Пильников* (Тамбов) 27, 30, 36, 37, 39, 45; *С. Пильтяй* (Ангарск) 26, 27, 30; *А. Пироженко* (Мытищи) 26, 27; *А. Позолотин* (Воронеж) 33—37; *В. Поляков* (Кривой Рог) 42; *М. Пустыльник* (Свердловск) 26, 28—46; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) 26—29, 31, 32; *М. Рахманов* (Алма-Ата) 26—32; *М. Розенберг* (Ленинград) 26, 33, 34, 36, 45; *Н. Розенвайн* (Киев) 30, 32, 34, 35, 37, 39, 42, 45, 47; *С. Розыскнов* (Керчь) 35, 37; *В. Ромашин* (Донецк) 33, 34, 36—38, 42, 44, 45; *Б. Румянцев* (Ленинград) 33, 35—37, 39, 42; *В. Рыбенков* (Махачкала) 41, 44, 45; *А. Рыляков* (Саратов) 26, 28, 31, 33, 36, 39, 44, 45; *Р. Садыгов* (Сиазань) 45; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 44; *А. Самоделов* (Великие Луки) 27; *Д. Свирида* (Москва) 26, 27, 29, 32; *И. Семененко* (Киев) 33—36, 41; *С. Семенков* (Витебск) 27, 35; *А. Семенов* (Саратов) 33—37; *Ф. Серженко* (Запорожье) 26—28, 35, 36, 44, 45; *Н. Сидоранов* (Москва) 26; *С. Симанов* (Долгопрудный) 41; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) 27—29; *С. Сипливец* (Волгоград) 26, 28, 29, 33, 35, 36, 39, 42; *И. Сираков* (Ямбол, НРБ) 26, 27; *С. Сириченко* (Киев) 36; *М. Скорик* (Киев) 28, 30, 35, 37, 39, 44, 45; *Н. Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) 30, 36, 37; *С. Смородин* (п. Писцово Ивановской обл.) 44, 45; *С. Смук* (Киев) 28; *И. Соколова* (Феодосия) 28, 30, 34, 37; *И. Соколовский* (Покров) 35; *О. Стасюк* (Винница) 45; *М. Стежко* (Брест) 29—36, 39; *И. Степанов* (Ленинград) 26; *Р. Сулейманов* (Ангиабад) 44, 45; *А. Сурков* (Ленинград) 43—45; *Ю. Талденко* (Сумы) 26, 27; *К. Тарасов* (Новокузнецк) 26, 27; *А. Тенсин* (Реутово) 44, 45; *Т. Терешков* (Елец) 26; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) 26—29, 33—37, 44, 45; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 27, 30, 33—35, 37, 39; *О. Третьяков* (Омск) 26, 35—37; *Г. Трунов* (Москва) 26, 29; *В. Туровский* (Баку) 26, 27; *О. Фатьянов* (Курск) 44, 45; *Н. Федин* (Омск) 26, 28, 29, 33, 34, 36, 41, 44—46; *Р. Федыня* (Нововолынск) 39; *А. Фельдман* (Саратов) 35, 44, 45; *В. Фельдман* (Саратов) 26, 28, 30, 35, 36, 39, 44—46; *И. Филянов* (Владимир) 26; *А. Фомин* (Ленинград) 35, 36; *Б. Хвостов* (Москва) 29; *А. Хельвас* (Киев) 26, 29, 32, 34—37, 39, 42, 44—47; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 27; *Е. Хорунова* (Киев) 26, 37; *С. Цонев* (София, НРБ) 44, 45; *А. Цыганок* (Енакиево) 32; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) 34, 36, 44—46; *С. Чеканов* (Саратов) 28—30, 34, 36, 41, 44—46; *С. Черкас* (Минск) 42; *А. Чернышев* (Новосибирск) 39; *И. Чечеткин* (Киев) 39, 44; *А. Чудновский* (Киев) 39, 44; *А. Шатов* (Киев) 27; *Ю. Шмидт* (Андижан) 44, 45; *И. Шойхет* (Ташкент) 33, 37, 42, 45; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) 35, 37; *М. Шуклин* (Пермь) 26—30, 32, 34—37, 41; *Ю. Щедрин* (Брянск) 26—28, 32; *В. Щедров* (Великие Луки) 26, 28; *А. Щетинин* (Запорожье) 35, 36; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) 41; *Б. Юдин* (Люберцы) 26; *Н. Юзва* (д. Таловая Красноярского кр.) 41; *А. Юшкявичус* (Каунас) 39; *А. Якунин* (Москва) 36, 44; *Н. Яцкевич* (Саратов) 26, 28, 35—37, 41; *М. Арамян* (Ереван) 28; *Г. Волынцев* (Владивосток) 36; *В. Ефимов* (Баку) 38, 40; *К. Милеев* (Брест) 33—35; *К. Мишин* (Днепропетровск) 30, 39; *А. Шугай* (Запорожье) 37, 41, 42, 45.

КВАНТ для младших школьников



Задачи

1. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

2. Из полоски бумаги шириной 1 см склеили цилиндрическое кольцо с окружностью длиной 4 см так, как показано на рисунке. Можно ли из этого кольца изготовить квадрат а) площади 1 см^2; б) площади 2 см^2? Бумагу разрешается как угодно складывать, но рвать ее, конечно, нельзя.

3. Школьники Вадик и Саша увидели весы и взвесили на них свои портфели. Весы показали, что массы портфелей — 3 кг и 2 кг. Когда они поставили на весы оба портфеля, то весы показали 6 кг.

— Как же так? — воскликнул Саша.— Два плюс три не равняется шести!

— Разве ты не видишь? — ответил Вадик.— Просто у весов сдвинута стрелка.

Так сколько же весили портфели на самом деле?

4. Любой треугольник можно разрезать на четыре одинаковых треугольника, подобных исходному, так, как показано на рисунке. Найдите треугольник, который можно разрезать на три одинаковых треугольника, ему подобных.

Эти задачи нам предложили
В. Александров, Ю. Аленков, В. Произволов, Л. Штейнгарц

В. Нахшин

Понятие определения и определение понятий

Петя Шариков пришел из школы невеселый.

— Ты почему такой хмурый сегодня? — спросила его старшая сестра Таня.— Или двойку принес?

— Угу,— ответил Петя.— По истории.

— Новости! — сказала Таня.— Но ты ведь вчера готовился?

— Готовился. И вообще, этот материал я знаю лучше многих в классе: средние века. Уйму книг перечитал об этом.

— Так за что же тебе двойку-то влепили?

— Понятия не имею! Вызывает меня Иван Миронович и говорит: «А сейчас Шариков нам определит понятие "феодализм".» Я подумал — чего ему понадобилось? Определить — это ведь значит "найти"...

— Ясное дело! — вступил в разговор младший брат Пети Коля.— Нам сегодня на математике задали задачку, там надо было определить площадь поля. Значит — найти.

— Ну вот, я так и подумал. И стал искать на карте страны, где был феодализм. Чувствую, что-то не то. А учитель говорит: «Садись, Шариков, ничего-то ты не знаешь!» И поставил двойку!

— Эх ты,— посочувствовала Таня.— Неужели ты не понимаешь, что "определить" — это значит "дать определение"?

— Спасибо, пояснила. «Учиться — заниматься ученьем.» «Гулять — заниматься гуляньем.» А если я спрошу у тебя, что значит "дать определение", ты скажешь "определить"?

— Нет, я так не скажу! — замотала головой Таня.

— А я знаю,— снова вмешался в разговор младший Шариков.— Мы как раз сейчас по русскому языку проходим: определение — это второстепенный член предложения, отвечающий на вопрос: какой? какая? какие? Например: плохая оценка.

— Выходит, по-твоему, учитель хотел узнать от меня, какой бывает феодализм? Что означает — какой? Хороший, плохой, отсталый, мрачный, несправедливый? Да мало ли можно придумать определений! И все они будут правильными?

— А помнишь, Петя, позавчера по телику была передача "Человек и закон", и там народный суд вынес "частное определение",— вспомнил вдруг Коля.

— Да, знаю, это когда пишут на работу кому-то, кто виноват, но кого не осудили. А вот я еще вспомнил: наша классная руководительница сказала, что каждому ученику в школьном саду надо определить участок работы... Значит, в этом случае, выделить, что ли?

— А я помню, папа рассказывал о том, как начинал работать на заводе и ему определили оклад 120 рублей. Здесь "определили" значит — установили? Назначили? Странное слово! Сколько значений, и все разные! Чего же хотел учитель от тебя?

Таня сказала:

— Разве вы забыли, что слово может иметь много значений? Между прочим, Петюня, среди всех значений слова "определение" ты не назвал еще одного, а именно: «Определение — это предложение, сообщающее, что означает данное понятие.» А ведь именно этого хотел от тебя учитель. Он хотел, чтобы ты сказал, что означает понятие "феодализм"! А чтобы ты знал, как это надо делать, тебе прежде всего надо знать, что такое "понятие". Знаешь ли ты это?

— О понятии — не имею никакого понятия,— сострил Петя.

— Шутки в сторону. Дело в том, что слово "понятие" в русском языке тоже имеет разные значения, что видно даже из твоей остроты. Итак, что же такое "понятие"?

Оба Шарикова задумались. Младший сопел, старший вздыхал, но сказать что-либо никто не решился.

— Смотрите,— сказала Таня и быстро нарисовала три разных треугольника.

— Что это такое?

— Треугольник!

— А это?

— И это — треугольник.

— А это?

— И это — треугольник.

— Вопрос, мальчики: почему одним словом "треугольник" вы называете такие разные вещи? Ведь и размеры у них — разные. И цвет — различный. И вообще они мало похожи друг на друга!

— Как "почему"! — закричали оба в голос.— Ясное дело! Потому, что все они — треугольники!

— Не ясно. Почему же они треугольники-то?

— Да потому, что у них три угла! — сказал Коля.

— Образованные замкнутой ломаной линией из трех отрезков,— добавил Петя.

— Молодцы! Проследим за вашей мыслью. Вы мысленно отбросили у множества предметов все несущественные признаки и оставили, на ваш взгляд, самый существенный! Вот так и возникает ПОНЯТИЕ! У целого класса предметов, даже, может быть, у бесконечного их множества, отбрасываются несущественные признаки, оставляется один признак — самый общий и самый существенный! И обратите внимание. В данном случае возникает понятие о треугольнике "вообще", хотя в природе не существует "треугольника вообще": каждый нарисованный треугольник неповторим! Так вот, друзья мои, запомните раз и навсегда: любая наука начинается именно тогда, когда в ней возникают понятия, а не конкретные предметы.

— Для чего же науке так уж нужны "понятия"? Не понимаю.

— Не понимаешь? А ты представь на миг, что в геометрии нет понятий, и мы имеем дело с конкретными предметами. Ты знаешь, что сумма углов в треугольнике равна 180°?

— Кто же этого не знает!

— Так вот,— сказала Таня.— У тебя есть конкретный треугольник — деревянный или металлический. Ты прикладываешь к его углам транспортир и убеждаешься: так и есть, в сумме углы составляют 180°. Но это — у твоего, конкретного. А у другого, другой формы?

— Снова измерю!

— А у нового... у тысячного? У миллионного? Ты затратишь на эти измерения всю жизнь и все равно ничего не докажешь. Можешь ли ты быть уверен, что для миллион первого эта сумма будет такою же? Нет, пока твое предположение не будет доказанным. Когда вы в классе на уроке геометрии доказали эту теорему, вы ведь в своем доказательстве опирались не на конкретный треугольник, нарисованный на доске мелом! Вы доказали эту теорему, опираясь на свойства понятия треугольника, и тем самым доказа́ли ее для каждого из представителей этого понятия! Вот, братцы мои, для чего нужны понятия в науке. Они попросту экономят человеку и время, и силы. Впрочем "экономят" — это не то слово. Именно они делают науку возможной. Был такой великий ученый — Анри Пуанкаре. Его спросили: «Что такое математика?» и он ответил: «Математика — это искусство называть одним и тем же словом разные, на первый взгляд, вещи.»

— Искусство?!

— Да, причем понятия есть не только в математике. В любой науке есть свой круг понятий. А овладеть этим кругом понятий и помогает "определение".

— А как это определение помогает овладеть понятиями? — спросил Петя.

— Весьма просто, мальчики. Пример из той же геометрии. Что такое квадрат?

— Квадрат? Ромб, у которого все углы прямые.

— Спасибо, Шариков Петр. Вот ты и произнес определение квадрата. Ну, а что же такое — ромб?

— Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны.

— И снова — определение, на сей раз ромба. А теперь проследим, как ты это сделал. Сперва ты сказал: «Квадрат — это ромб», то есть свел понятие квадрата к понятию ромба. Квадрат есть частный случай ромба, так как каждый квадрат — ромб, но не каждый ромб — квадрат. Если первое понятие есть частный случай второго, то оно называется видовым для второго, а второе — родовым для первого!

— Я это знаю! Потому что и в ботанике есть роды и виды.

— Совершенно верно! Но продолжим наши геометрические рассуждения. Во втором определении родовым понятием стал параллелограмм, а ромб для него видовым, то есть и здесь ты проделал ту же операцию: свел видовое понятие к родовому. Но это еще не все! Ведь ты не просто указал родовое понятие. Ты отметил, какой именно частный случай родового представляет собой видовое понятие. Квадрат — не просто ромб, а ромб с прямыми углами. Ромб — не просто параллелограмм, а параллелограмм с конгруэнтными сторонами. Вывод? В любом определении нового понятия проделываются две операции: во-первых, мы указываем ближайшее родовое понятие, известное ранее, а во-вторых, сообщаем — каким именно частным случаем родового понятия является наше новое понятие*).

— Ну, Татьяна, ты — голова! — сказал Петя Шариков своей сестре.— Ловко ты владеешь этим искусством!

— Я еще только учусь, мальчики,— скромно сказала Таня, первокурсница университета.

— А почему ты сказала «ближайшее родовое понятие?» Как это понять?

— Потому что, скажем, для квадрата родовым будет не только ромб, но и параллелограмм, и четырехугольник, и фигура, но тогда определение станет более громоздким. Например: квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и конгруэнтными сторонами. Чем дальше родовое понятие, тем больше видовых отличий придется перечислять — это просто неэкономно! А теперь потренируйтесь-ка, мальчики! Вот вам несколько фраз. Являются ли они определениями? «Тигр — это животное.»

— Нет, это — не определение,— сказал Петя.— Здесь все сведено к родовому понятию, но не указано, какой частный случай.

— Верно. А это: «Евклид — знаменитый древнегреческий математик, автор "Начал".»?

— Да!—воскликнули мальчики.

— Увы, нет,— сказала Таня.— Определение может быть дано только понятию, а не конкретному объекту, хотя бы человеку. А вот еще фраза: «Бегемот — это гиппопотам.»

---

*) Первокурсница Таня еще не знает, что не все определения укладываются в эту схему — см., например, «Квант», 1978, № 6. с. 33. (*Прим. ред.*)

— Нет. Здесь понятие заменено синонимом, но не сведено к родовому.

— Ну, кажется мне, вы все поняли. Тогда скажите: всякому ли понятию может быть дано определение?

Петя задумался:

— По-видимому, нет. Ведь, давая определение, мы сводим понятие к другому, родовому для него. В свою очередь, для этого родового существует свое родовое. И так далее, и так далее. Если идти все дальше по цепочке определений, мы будем переходить к все более общим понятиям, каждое из которых будет выражаться каким-то словом в языке. Если предположить, что эта цепочка определений продолжается без конца, получится, что в языке бесконечно много слов! Но это не так. Значит, где-то нас ждет остановка.

— Да, ты рассудил оригинально! Ты сейчас дал, я бы сказала, языковое решение общенаучной проблемы. Но дело здесь не столько в ограниченности языка, сколько в существовании самых общих понятий. Вернемся к примеру с квадратом. Мы ведь затронули пока только два звена в цепочке определений. Но ведь можно пойти и дальше. Что такое "параллелограмм"?

— Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

— Идя дальше, можно получить "фигуру", "ломаную", "отрезок", "прямую" и, наконец, "точку". Здесь мы вынуждены остановиться! Прямая и точка — самые общие понятия в геометрии. Родовых понятий для них не существует. Поэтому им нельзя дать определение!

— Странно! Такие простые и наглядные понятия, а определения дать нельзя. Танюша, а как математики узнали, что нельзя? Как сам Евклид до этого додумался?

— А Евклид, кстати, попытался это сделать. В своих "Началах" он написал «Точка есть то, что не имеет размеров» и «Прямая — линия, которая одинаково ориентирована по отношению ко всем своим точкам.» Евклид явно считал эти фразы определениями.

— Погоди-ка. А чем же они — не определения?

— Давайте разберемся. Первая фраза нехороша уже тем, что "то" — это не родовое понятие для точки.

— Ну, хорошо. А может быть попробуем усовершенствовать,— предложил Петя.— Почему нельзя сказать так: «Точка — это фигура, не имеющая размеров»?

— Потому что сама "фигура" определяется как "множество точек". Но что же такое те точки? И второе: "отсутствие точки" ведь тоже не имеет размеров! Так что все это весьма туманно. А по поводу второго "определения" — прямой — Феликс Клейн, немецкий математик, писал: «Смысл его совершенно темен. Например, под него подойдут и окружность, и винтовая линия.»

— И все же мне кажется, что можно придумать определение прямой,— сказал Петя.

— Попытайся! Но должна тебе сказать — до тебя это пытались сделать в течение веков многие математики. И все их усилия оказались тщетными. Потому-то точка и прямая считаются самыми общими понятиями.

— Вот с этим-то я и не согласен. Ведь "прямая" — частный случай линии, не так ли?

— Верно. Итак, начинай свое определение: «Прямая — это линия, которая...

— Которая... которая обладает свойством прямизны. Нет, пожалуй, это нехорошо — само это "свойство прямизны" звучит как самое общее понятие.

— Разумеется.

— Но погоди, я еще не сдаюсь. А почему нельзя сказать: прямая — это линия, расстояние между двумя любыми точками которой короче, чем длина участка любой другой линии, проходящей через те же две точки?

— А что такое расстояние?

— Расстояние — это длина отрезка, соединяющего две точки.

— А что такое отрезок?

— Отрезок — это... это часть прямой. Ага, я понял. «А что такое

(Окончание см. на с. 56)

Г. Левитас

Используя графики

В книге С. Страшевича и Е. Бровкина «Польские математические олимпиады» (М., «Мир», 1978) есть две интересные задачи о многочленах (задачи 7 и 13 на с. 12—13). Сформулируем их так:

Задача 1. *Какому условию должны удовлетворять коэффициенты трехчленов x^2+mx+n и x^2+px+q, чтобы их корни перемежались?*

Задача 2. *Какому условию должны удовлетворять коэффициенты многочлена x^3+ax^2+bx+c, чтобы три его различных корня образовывали арифметическую прогрессию?*

Решения, данные в книге, используют внепрограммный материал — комплексные числа и теорему Виета для кубических уравнений. Кроме того, очень непрост, на мой взгляд, сам поиск решения этих задач, что и делает их поистине «олимпиадными».

Но если решать эти задачи, используя графики, их сложность существенно понижается как в отношении поиска решения (оно теперь получается переводом наглядных фактов на аналитический язык и обоснованием их), так и в отношении используемого аппарата. Предлагаемое здесь решение не требует внепрограммного материала; зато необходимо отчетливое представление о том, как графики могут располагаться на координатной плоскости.

* * *

Первая задача — вполне под силу восьмиклассникам.

Представим себе, как должны расположиться конгруэнтные параболы $y=x^2+mx+n$ и $y=x^2+px+q$, чтобы точки их пересечения с осью абсцисс перемежались. Видно (рис. 1), что такие параболы *имеют ровно одну общую точку, причем она лежит ниже оси абсцисс.*

Докажем, что это условие необходимо и достаточно для перемежаемости корней.

Сколько, прежде всего, общих точек могут иметь наши параболы? Уравнение $x^2+mx+n = x^2+px+q$ равносильно уравнению $(m-p)x=q-n$, которое либо имеет корнем любое действительное число (при $m=p$ и $n=q$ — в этом случае параболы совпадают), либо вовсе не имеет корней (при $m=p$ и $n \neq q$; как расположены параболы в этом случае?), либо (при $m \neq p$) имеет один корень — число $x_0=\frac{q-n}{m-p}$.

Пусть сначала корни x_3, x_4 трехчлена x^2+px+q перемежаются с корнями x_1, x_2 трехчлена x^2+mx+n (см. рис. 1). Тогда из точек $A(x_3; 0)$, $B(x_4; 0)$ второй параболы одна лежит «внутри» первой параболы, другая — «вне» ее (рис. 2). Значит, вторая парабола пересекает первую, причем пересечение происхо-

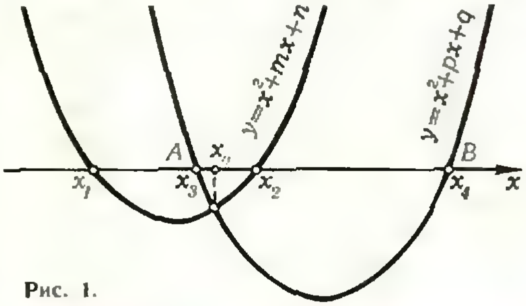


Рис. 1.

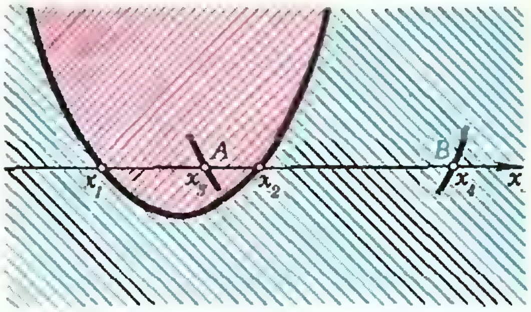


Рис. 2.

дит на том участке второй параболы, который лежит между A и B, а весь этот участок лежит ниже оси абсцисс.

Пусть теперь параболы имеют ровно одну общую точку и пусть эта точка лежит ниже оси абсцисс. Так как она лежит ниже оси абсцисс, она расположена между корнями каждой параболы. Значит, один корень каждой параболы лежит «внутри» другой параболы, а второй корень — «вне» ее, то есть корни перемежаются.

Итак, расположение парабол на рисунке 1 равносильно перемежаемости корней. Значение каждого из данных трехчленов в точке x_0 отрицательно. Запишем этот факт, например, для первого трехчлена: $x_0^2+mx_0+n<0$, или

$$\left(\frac{q-n}{m-p}\right)^2+m\left(\frac{q-n}{m-p}\right)+n<0.$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентами m, n, p, q. Его можно упростить:

$$(q-n)^2+(m-p)(mq-np)<0.$$

Проверьте, что получится, если x_0 подставить во второй трехчлен.

* * *

Вторая задача — для тех, кто знает, что такое производная. Представим себе график многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, различные корни α, β, γ которого образуют арифметическую прогрессию (рис. 3). Задача упростится, если произвести параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс так, чтобы средний корень β попал в начало координат. Получим многочлен $g(x)=(x+\beta)^3+a(x+\beta)^2+b(x+\beta)+c$, имеющий корни x_1, 0, $-x_1$ (рис. 4). Видно, что функция g нечетна.

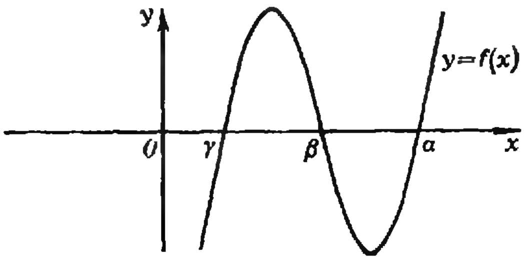


Рис. 3.

Докажем это. Если в выражении $g(x)$ раскрыть скобки и привести подобные члены, коэффициент при x^3 окажется равным 1. Обозначим остальные коэффициенты буквами A, B, C: $g(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Поскольку числа x_1, 0 и $-x_1$ служат корнями многочлена $g(x)$,

$$\begin{cases} x_1^3+Ax_1^2+Bx_1+C=0 \\ C=0 \\ -x_1^3+Ax_1^2-Bx_1+C=0 \end{cases}$$

откуда $A=C=0$; значит, $g(x)=x^3+Bx$ — нечетная функция.

Полученная нами информация о расположении графика функции g пока еще неполна. Ведь нечетны и те функции, графики которых изображены на рисунке 5, однако эти кубические многочлены имеют всего по одному корню. Чтобы появились еще два корня, необходимо «изогнуть» график в начале координат. Для этого надо, чтобы касательная к графику в этой точке образовывала с осью абсцисс тупой угол, то есть чтобы производная $g'(0)$ была отрицательной.

В самом деле, если $g'(0)=B\geqslant 0$, то производная $g'(x)=3x^2+B$ положительна при всех $x\neq 0$, и функция g возрастает на всей прямой. В этом случае многочлен $g(x)$ не может иметь трех (различных) корней.

Пусть теперь, обратно, функция g нечетна и $g'(0)<0$. Поскольку g нечетна, $g(0)=0$. Поскольку $g'(0)<0$,

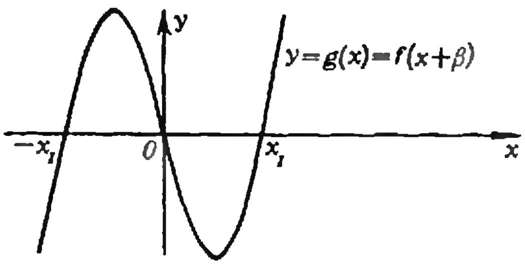


Рис. 4.

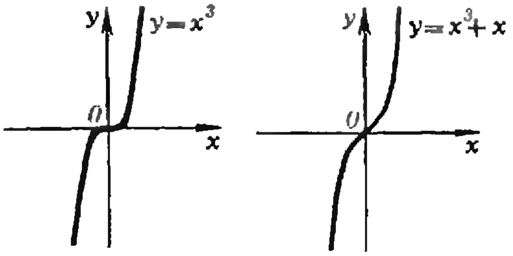


Рис. 5.

функция g отрицательна на некотором интервале правее точки 0 (почему?). Но при больших x (как говорят математики, «на плюс бесконечности») $g(x)>0$. Значит, где-то правее точки 0 многочлен $g(x)$ (непрерывная функция!) имеет корень x_1. Так как функция g нечетна, $g(-x_1)=$ $=-g(x_1)=0$. Итак, многочлен $g(x)$ имеет корни x_1, 0, $-x_1$, образующие арифметическую прогрессию. Значит, арифметическую прогрессию образуют и корни α, β, γ данного многочлена $f(x)$.

Итак, условие «*g нечетна и* $g'(0)<0$», то есть

$$\begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ B<0 \end{cases}$$

равносильно существованию трех корней, образующих арифметическую прогрессию.

$$g(x)=(x+\beta)^3+a(x+\beta)^2+$$
$$+b(x+\beta)+c=x^3+(3\beta+a)x^2+$$
$$+(3\beta^2+2a\beta+b)x+(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c).$$

Значит, $A=3\beta+a=0$, откуда $\beta=-\frac{a}{3}$.

Поэтому условие

$$\begin{cases} C=0 \\ B<0 \end{cases}$$

принимает вид

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+b\cdot\frac{a}{3}-c=0 \\ 3\left(\frac{a}{3}\right)^2-2a\cdot\frac{a}{3}+b<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2a^3-9ab+27c=0 \\ a^2-3b>0 \end{cases}$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентами a, b, c.

Понятие определения и определение понятий

(Начало см. на с. 50)

эта прямая?» Сказка про белого бычка! Но вот тебе еще одно определение. Попробуй-ка придраться: «Прямая — это линия, обладающая тем свойством, что если поместить на нее зрачок глаза, то она будет представляться глазу точкой.»

Таня засмеялась:

— Видишь ли, твое "определение" предполагает, что свет распространяется прямолинейно — иначе ты бы мог увидеть и другие точки. Но что такое прямолинейно? По прямой! И мы опять топчемся на месте.

— Д-да, все это очень интересно. Я все-таки еще попытаюсь подумать. Но почему учителя нам никогда не рассказывают обо всех этих вещах? Ведь все это несложно понять!

— Каких учителей ты имеешь в виду?

— Разумеется, по математике.

— Но разве материал об определениях и понятиях относится только к математике? Это вопросы общенаучного характера. В любой науке есть свои родовые и видовые понятия. Поэтому все это нельзя отнести к какому-нибудь одному школьному предмету! Этот материал относится к философии, к тому ее разделу, где изучается научное знание.

— Вот здорово! — сказал Коля.— Теперь и мы — философы, знаем, как строится любая наука.

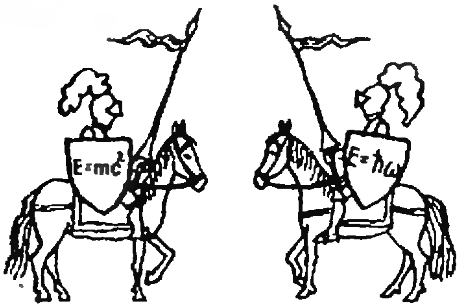
— О нет, мальчики, до такого знания нам с вами еще далеко. Понятия и определения — важные элементы науки, но не самое главное, что в ней есть.

— А что главное? Доказательства?

— Нет. Главное — идеи, утверждения.

— А что это такое? Расскажи, Тань!

— Об этом, мальчики, в другой раз. Заговорилась я с вами, опаздываю на лекцию! Подумайте над сегодняшним разговором. Поиграйте в "понятия-определения", как в "казаки-разбойники"! Дело стоящее, уверяю вас.



IV Московский турнир юных физиков

Загадок больше на земле, Гораций,
Чем изощренный ум придумать может.
В. Шекспир «Гамлет»

IV Московский Турнир был проведен физическим факультетом МГУ с 23 декабря 1981 г. по 4 апреля 1982 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. 32 школы Москвы и Московской области приняли участие в этом своеобразном соревновании старшеклассников.

Мы расскажем, как проходил Турнир, и приведем полный текст заданий, предложенных на конкурсах. Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров занимательной науки, турниров юных физиков.

Как обычно, Турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 17 задач на срок два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 15-ти школ. Коллективный характер этого тура дал возможность участвовать в конкурсе всем желающим — каждый учащийся мог способствовать успеху своей школы.

Для примера расскажем, как решали задачу «Автобус» десятиклассники школы № 179. Для исследования тряски в автобусе они сделали переносную установку, преобразующую механические толчки в электрические импульсы, пропорциональные амплитуде встряхиваний. Эти импульсы записывались на магнитофон.

На такой установке в автобусе кольцевого маршрута ребята в течение двух часов записывали встряхивания в шести точках автобуса от ближайшей до самой удаленной от водителя. Обработка полученных данных показала, что действительно на заднем сидении трясет больше, чем на переднем. Это явление было разумно объяснено и обосновано количественными результатами эксперимента.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов Турнира. Ими стали команды московской школы № 179, ФМШ № 18 при МГУ и школы № 842 (г. Зеленоград).

III тур (финал) проходил на физическом факультете МГУ. В его программу входили: физбой команд — финалистов Турнира, конкурс капитанов и конкурс болельщиков.

Живо, интересно, с большой пользой для всех участников проходили эти коллективные состязания юных физиков в умении решать сложные задачи, убедительно излагать свои решения, полемизировать. На физбоях команды по очереди выступали в роли докладчиков, оппонентов и рецензентов. Докладчики излагали суть решения задач (предложенных командам заранее), оппоненты высказывали свои критические замечания, пытались найти ошибки в рассуждениях докладчиков, рецензенты оценивали дискуссии докладчик—оппонент, представители жюри комментировали их выступления и подводили итоги.

После подведения итогов финала состоялось торжественное закрытие IV Турнира юных физиков. Переходящий приз (магазин сопротивлений из лаборатории выдающегося русского физика Н. А. Умова) за победу в Турнире был вручен команде ФМШ № 18 при МГУ. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты в этом состязании, ценными физическими приборами.

В заключительном слове профессор В. Л. Бонч-Бруевич выразил глубокую признательность учителям, воспитавшим в своих учениках любовь к знаниям, и пожелал всем юным участникам Турнира сохранить и развивать тот интерес к науке, который они проявили в этом состязании*).

Задачи заочного коллективного конкурса

Условия задач сформулированы максимально кратко. Необходимые дополнительные данные и оговорки следует вводить, опираясь на здравый смысл.

1. **«Галактика».** Астроном исследует спектр излучения некоторой галактики, которая видна «с ребра». Щель спектрографа установлена вдоль ребра галактики. Оказалось, что спектральные линии имеют форму наклон-

---

*) V Турнир юных физиков для школ Москвы и Московской области начнется 5 декабря 1982 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, предложения и заявки на участие в ТЮФ-V присылайте по адресу: 117234, Москва, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, Оргкомитет ТЮФ.

Участники конкурса капитанов пытаются зарядить электроскоп ровно на 2 деления.

Теория задачи «Газ»...

...опровергается экспериментом.

Фото В. Александрова

ных прямых. Как с помощью этого спектра определить массу галактики? Что можно сказать о распределении массы в галактике?

2. «Венера». В какой фазе Венера выглядит наиболее яркой для Земного наблюдателя?

3. «Капилляр». Предложите способы измерения диаметра капилляра, представляющего собой сужение в средней части длинной толстостенной стеклянной трубки. Диаметр трубки 3 мм, длина трубки 3 см, диаметр капилляра порядка 1 мкм, длина капилляра порядка 1 мм.

4. «Капля». Две расплавленные капли олова и цинка, медленно остывая, застыли. Оказалось, что при этом оловянная капля имеет шарообразную форму, а у цинковой просматриваются плоские грани. Как это объяснить?

5. «Испарение». Определите экспериментально интенсивность испарения (в кг/с) воды из наполовину заполненного цилиндрического сосуда (стакана). Произведите численные оценки с учетом влажности воздуха в помещении. Рассмотрите следующие случаи:

а) Сосуд открыт.

б) Сосуд накрыт фольгой, в которой сделано круглое отверстие площади 20% от площади сечения сосуда.

в) Сосуд накрыт фольгой, в которой сделано множество хаотически расположенных отверстий диаметром порядка 100 мкм. Суммарная площадь отверстий составляет 10% от площади сечения сосуда.

6. «Шерсть». Шерстяная нить сплетена из множества отдельных ворсинок. Исследуйте прочность такой нити на разрыв в зависимости от ее длины. Объясните результаты эксперимента.

7. «Придумай сам». Самостоятельно сформулируйте физическую задачу-проблему и решите ее.

Примерный список тем.

«Антистатик». В чем принцип действия антистатика, который в последнее время широко используется в быту?

«Центр тяжести». Есть мнение, что длинная однородная балка, лежащая на земле, имеет два центра тяжести. Внесите ясность в этот вопрос.

«Парашют». Можно ли в качестве парашюта использовать длинную полосу легкой и прочной материи?

«Кирпич». Как наиболее эффективно сушить влажные кирпичи?

«Чай». Почему пятно от высохшей на стекле капли чая имеет резко очерченную границу?

«ЛЭП». Почему так неэкономно (с большим провисом) развешены провода линии электропередачи?

«Тигр и клетка». Используя стробоскопические методы, можно нарисованного тигра посадить в нарисованную клетку. Как это сделать?

«Температура». В безветреную погоду вы измерили температуру воздуха термометром ($t=23°C$). Затем вы сели на велосипед и поехали со скоростью 10 м/с. Что теперь покажет термометр? Что покажет тот же термометр, помещенный в пучок молекул, летящих в одном направлении с одинаковыми скоростями?

«Целлофан». Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить скомканный кусочек целлофана, то он предстанет в виде красочного разноцветного «кристалла». Предложите интересные опыты с поляризованным светом.

8. «Супербол». Супербол (мячик из плотной резины диаметром около 5 см) падает с высоты 30 см на горизонтальную поверхность гладкой стальной плиты. Сколько произойдет ударов? Какова длительность одного удара? Сколько времени будет «скакать» супербол? Считать, что при каждом отскоке в тепло переходит 20% кинетической энергии супербола.

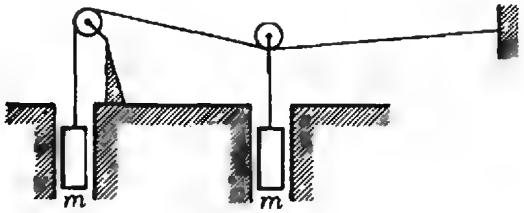
9. «Удар». Два одинаковых упругих кубика лежат вплотную друг к другу на гладком столе. Как они отскочат после лобового удара гладкого упругого шарика такой же массы? Рассмотрите следующие случаи:

а) Грани кубиков сухие.

б) Соприкасающиеся грани кубиков смочены водой.

в) Те же грани смочены машинным маслом.

10. «Период». Определить период малых колебаний в следующей системе:



Трения нет, блоки невесомы, нить нерастяжима и невесома, массы грузов m.

11. «Автобус». Известно, что в автобусе «трясет» больше на заднем сиденье, чем на переднем. Почему?

12. «Трение». Большой диск вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. На его горизонтальную поверхность опускают маленький диск, способный вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, смещенной относительно оси большого диска. Через некоторое время за счет трения малый диск тоже будет вращаться. Какова установившаяся скорость малого диска? Рассмотрите следующие случаи:

а) Малый диск не выступает за края большого диска.

б) Малый диск выступает за края большого диска.

13. «Сахар». В пачках быстрорастворимого сахара часто встречаются слипшиеся по большой грани «столбики» из 2—4 кусочков. Если коснуться поверхности горячего чая концом такого столбика (большой гранью крайнего кусочка), то нижний кусочек быстро отделяется от столбика, не успев намокнуть. Если же коснуться поверхности чая боковой гранью столбика (малыми гранями кусочков), то разделение происходит через значительно большее время, только после достаточно сильного размокания кусочков. Исследовать и объяснить это явление.

14. «Кубик» Однородный кубик плавает на поверхности воды. При каких значениях плотности кубика его верхняя грань горизонтальна?

15. «Наушник». Если к клеммам головного наушника присоединить достаточно длинные (метровые) куски свободного провода, то наушник «заговорит» (правда, не всегда). Какую радиопередачу вы вероятнее всего услышите? Объясните это явление.

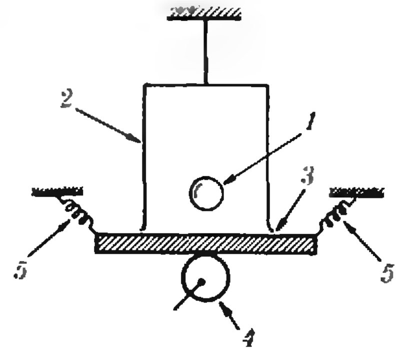
16. «Поле». В однородном магнитном поле $B=0{,}5$ Тл, линии индукции которого горизонтальны, вблизи поверхности Земли падает ребром вниз однородный медный диск. Плоскость диска параллельна линиям индукции магнитного поля. Диаметр диска 3 см, толщина диска 3 мм. Оценить ускорение диска без учета сопротивления воздуха.

17. «Кит». Как определить объем кита, плавающего у берегов Гренландии?

Задачи финального физбоя

На решение этих задач с представлением отчетов в жюри Турнира командам был дан 1 час времени.

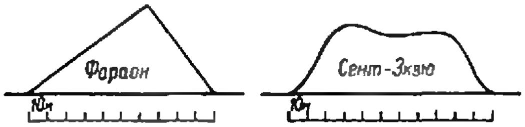
1. «Супербол». Плита совершает колебания с амплитудой A и частотой ν. Определить, на какую максимальную высоту h может подскочить супербол.



1. Супербол;
2. Стеклянный цилиндр (экран);
3. Текстолитовая плита;
4. Мотор с эксцентриком;
5. Пружины подвеса.

Оценить, через какое время τ от начала процесса можно ожидать, что супербол подскочит на высоту $0{,}99h$, если $A=1$ мм, $\nu=50$ Гц, при каждом отскоке 20% кинетической энергии супербола в системе отсчета, связанной с плитой, переходит в тепло.

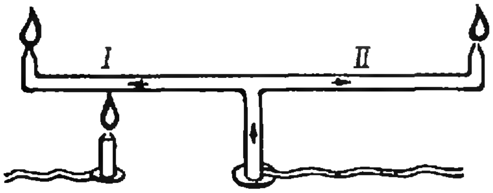
2. **«Горка».** Длинный поезд ($L=500$ м) движется по инерции без трения по горизонтальному участку железной дороги и наезжает на горку типа



а) Фараон; б) Сент-Экзю.

При какой минимальной скорости v поезд перекатится через горку? Считать, что колеса поезда не отрываются от рельсов.

3. **«Газ».** Газ подается в середину медной трубки диаметром 1 мм и расходится по двум коленам длины 30 см каждое, заканчивающимся горелками



При нагревании одного колена отдельной горелкой размеры факелов заметно изменяются. Объяснить это явление. Определить изменение расхода газа в колене I при нагревании его на 600 °С. Все необходимые данные найти в справочнике.

4. **«Шар».** Определить время падения резинового надувного шара (диаметр $d=0{,}65$ м, масса оболочки $m=120$ г) с балкона физической аудитории МГУ (высота $H=8{,}6$ м). (Для предварительных экспериментов давались резиновые шары меньших размеров, но на балкон участников не пускали.)

5. **«Ртуть».** На часовое стекло в слабый (5%) раствор азотной кислоты быстро вливают ртуть в виде 20—30 мелких капелек диаметром порядка 1 мм. Капельки сливаются друг с другом. Определить экспериментально закон изменения числа капелек ртути с течением времени. Дать теоретическое обоснование. (Участникам давалась серия фотографий, сделанных с интервалом в 1 секунду; читатели могут поставить эксперимент в школе.)

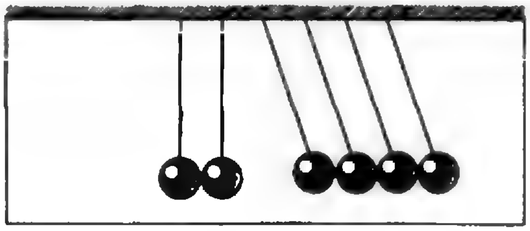
Задания конкурса капитанов

Капитаны выполняли задания с двумя помощниками. Время на обдумывание каждого задания — 3 минуты.

1. **«Шутка».** Радий тяжелее олова? (на этот вопрос предлагалось дать шуточный ответ.)

2. **«Дерево».** Определить массу и плотность деревянного цилиндра (диаметр основания около 20 мм, высота около 10 мм). Даны: деревянный цилиндр, мензурка 100 мл, колба с водой 500 мл, штангенциркуль.

3. **«Шары».** На нитях подряд подвешены 6 шаров. 4 отклонили, затем отпустили.



Что будет после удара?

4. **«Микроскоп».** Можно ли и как сделать телескоп из микроскопа?

5. **«Телескоп».** Чем плох телескоп, сделанный из микроскопа?

6. **«Электроскоп».** Зарядить электроскоп так, чтобы стрелка отклонилась ровно на два деления. Даны: электроскоп, эбонитовая палочка, кусочек кроличьей шкурки.

7. **«Дифракционная решетка».** Почему дифракционные максимумы разных порядков имеют разную интенсивность?

8. **«Атом».** Оцените диаметр возбужденного атома водорода ($n=100$).

Задания конкурса болельщиков

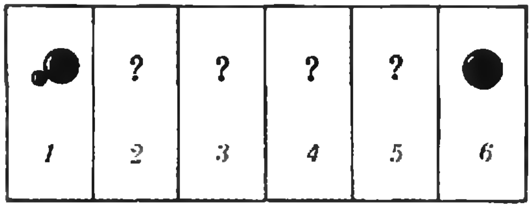
На выполнение заданий конкурса было отведено 50 минут. Болельщики присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов Турнира. (Симпатии болельщиков склонились в пользу команды школы № 842.)

1. **«Горы».** Как объяснить названия «Фараон» и «Сент-Экзю» в задаче «Горка»?

2. **«Пинг-понг».** Определить время падения с балкона аудитории шарика для пинг-понга ($m=2{,}5$ г, $d=37{,}5$ мм, $H=8{,}6$ м).

3. **«Слияние».** На часовом стекле рядом лежат 2 капли ртути.

Нарисовать 4 промежуточные стадии слияния капелек ртути



4. **«Кислота».** Почему опыт по слиянию капелек ртути производят в слабом растворе азотной кислоты?

5. **«Ртуть».** Какова будет толщина слоя ртути, вылитой на горизонтальную поверхность стеклянной пластины? Масса ртути более 100 г.

6. **«Приз»** Что означает надпись

$$1\ \mathrm{Ohm}=106{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mm}^2}\ \mathrm{Hg}\ 0\,^\circ\mathrm{C}$$

на переходящем призе Турнира?

Зам. председателя оргкомитета Турнира
Е. Юносов

Как определить объем кита, плавающего у берегов Гренландии?

Такая задача была предложена командам школьников на IV Московском турнире юных физиков. Команда школы № 91 представила 91 решение. Часть из них мы предлагаем вниманию читателей.

Во всех решениях плотность кита принимается равной плотности воды, откуда

$$V_{\text{кита}} = M_{\text{кита}}/\varrho_{H_2O}.$$

«Пружина»

Берем пружину заданной жесткости k. Прикрепляем к ней КИТА. Измеряем период колебаний T. Тогда масса КИТА равна

$$M_{\text{кита}} = \frac{T^2 k}{4\pi^2}.$$

Отсюда находим и его объем.

«Масштабы»

В задаче № 1 (см. с. 57) требовалось измерить параметры галактики. После этого легко видеть, что объемом КИТА по сравнению с объемом галактики можно пренебречь.

«Очень простой метод»

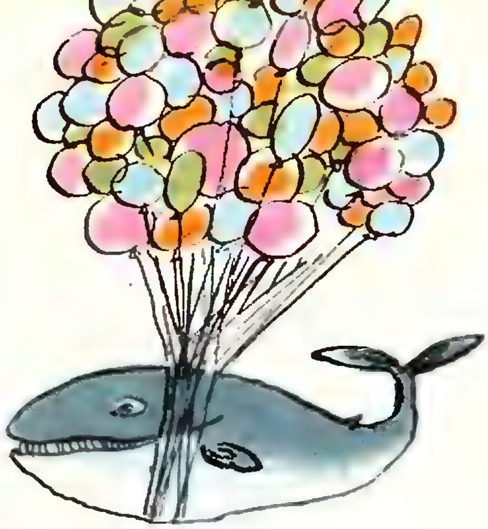
Надо измерить КИТА сантиметром!

«Ателье»

Надо заказать КИТУ костюм. Тогда в мастерской КИТА безусловно как следует измерят.

«Подсадная утка»

В Доме игрушки закупается надувной игрушечный КИТ. Он надувается, при этом измеряется его объем. Затем он доставляется к берегам Гренландии и отпускается плавать. Так как в условии задачи не оговорено, какой именно КИТ имеется в виду, то этот КИТ удовлетворяет условию. Объем его известен заранее.



«Воздушные шарики»

Возьмем много воздушных шариков одинаковой подъемной силы F. Будем их прикреплять к КИТУ один за другим. При некотором числе n шариков КИТ начнет взлетать. Отсюда найдем силу тяжести, действующую на КИТА: $P_{\text{кита}} = nF$, а потом — его объем.

«Луна»

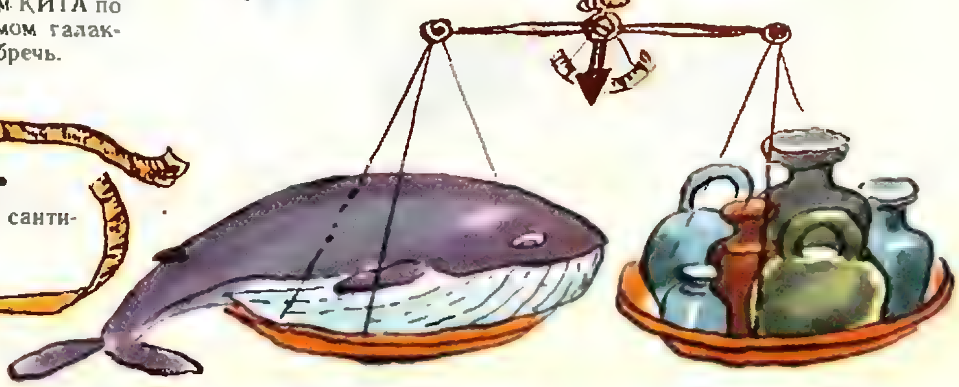
КИТ, как всякое тело, обладающее массой, действует на Луну с силой

$$F = \gamma \frac{M_{\text{кита}} \cdot M_{\text{Луны}}}{R^2},$$

где R — расстояние от КИТА до Луны (известно). Остается измерить силу F по изменению орбиты Луны под действием КИТА.

«Гениально простой метод»

КИТА нужно взвесить. Положить на весы и ВЗВЕСИТЬ! Потом запросто находится его объем.



Поль Дирак и задача о трех рыбаках

(Начало см. на с. 30)

Отсюда видно, что числа N_k будут целыми при $k=0$, 1, 2 и 3 тогда и только тогда, когда число $N+2$ делится на $3^3=27$. Поэтому $N=-2+27n$, где n — любое целое число. Число N_3, а значит, и N_k при $k<3$, будет неотрицательным, если $n\geqslant 1$. В частности, наименьшее неотрицательное решение $N_{\min}=25$ получается при $n=1$, а при $n=0$ получается решение Дирака $N=-2$. Интересно отметить, что это же число -2 является пределом последовательности (N_k) (определенной формулой (1) для всех $k\geqslant 1$) при любом $N_0=N$ (см. (2)).

Упражнения

1. Пусть последовательность (x_k), $k=0, 1, 2, \ldots$, определяется рекуррентной формулой $x_{k+1}=ax_k+b$, где $|a|<1$. Докажите, что, независимо от значения x_0, при $k\to\infty$ она стремится к корню уравнения $x=ax+b$.

2. Обобщенная задача о рыбаках. Пусть рыбаков было r и при каждом дележе на r равных частей они выбрасывали по q рыб ($q<r$). Докажите, что тогда $N=-(r-1)q+r^r n$. При каких n все числа N_k, $k=0, 1, \ldots, r$, будут неотрицательными?

Ответы, указания, решения

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. Заметим, что в задаче не сказано что дороже — конфеты или пряник. Поэтому нужно исследовать два случая. Обозначим количество денег у Вадика через x копеек, тогда всего у ребят будет $3x$ копеек. Из утверждения Вадика следует, что пряник стоит $(6x-2):8$ копеек, а из утверждения Кости следует, что конфета стоит $(3x-3):6$ копеек. Если конфета дороже пряника, то

$$(3x-3):6=(6x-2):8+2,$$

откуда $x=7$ копеек; если же предположить, что конфета дешевле пряника на 2 копейки, то

$$(3x-3):6=(6x-2):8-2,$$

откуда $x=-9$ копеек, что невозможно. Таким образом, у Вадика осталось 7, а у Кости 14 копеек.

2. Ответ: 250 см². Действительно, сдвинутое стекло пересекается с неподвижным по прямоугольнику размерами 10 см × 25 см. Если закрыть окно, то этот прямоугольник исчезнет, то есть открытая часть окна покроется площадью этого прямоугольника (см. рис. 1).

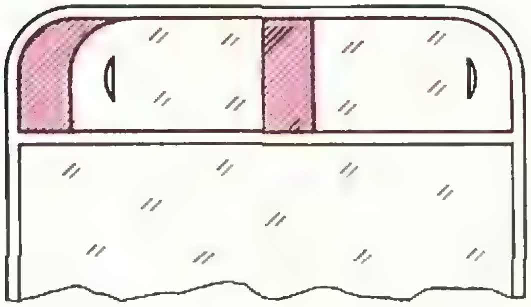


Рис. 1.

3. Поставьте сосуд на вершину A (рис. 2, *а*) и начните наливать в него воду. Наливая ее, добейтесь, чтобы поверхностью воды был треугольник A_1BD (см. рис. 2, *а*). Легко посчитать, что в этот момент вода займет $\frac{1}{6}$ объема сосуда. Затем, не проливая воду, поставьте сосуд на ребро AD (рис. 2, *б*). Поворачивая куб, добейтесь, чтобы поверхность воды проходила через ребро BC (см. рис. 2, *б*). Отметьте на ребре AA_1 точку X пересечения с поверхностью воды. Тогда $|AX|=\frac{1}{3}|AA_1|$ (почему?). Теперь, поставив сосуд на основание $ABCD$, долейте воду до отметки X.

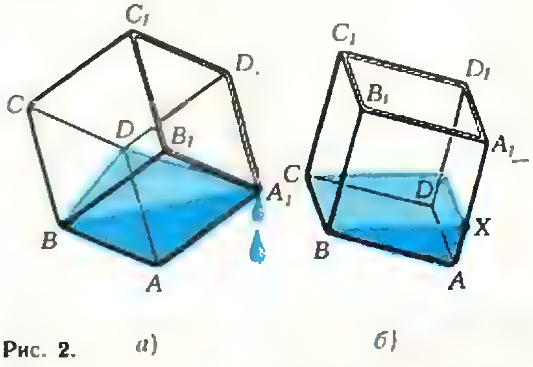


Рис. 2. *а)* *б)*

4. Ребята стоят в таком порядке: Олег, Юра, Володя, Миша, Саша.

В чем разница?

(см. «Квант» № 8)

При $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$. В задаче 1 область определения функции $S_1(x)=\frac{|CD|}{2l}x(l-x)$ — интервал $]0;l[$, в задаче 2 область определения функции $S_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x(l-x)$ — полуинтервал

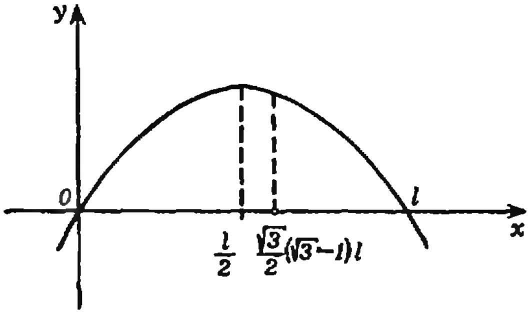


Рис. 3.

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l;\ l\right[$. Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l > \frac{l}{2}$, функция S_2 принимает наибольшее значение при $x=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$ (рис. 3). При $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$ искомого треугольника не существует!

Почему так?

(см. «Квант» № 8)

Потому что для **конуса** за площадь боковой поверхности необходимо принять предел отношения приращения объема конуса к приращению «боковой высоты» h (см. рис. 4),

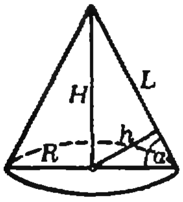


Рис. 4.

а не к приращению радиуса основания R, то есть производную функции $V(h)$ по h. Поскольку $R=\frac{h}{\sin\alpha}$ и $H=\frac{h}{\cos\alpha}$,

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Значит,

$$S=\pi\cdot\frac{h^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Так как $L=\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{h}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$,

$$S=\pi RL.$$

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Э. Закон, 1953 г.) **1. Кра1!** Крh1 (проигрывает 1...Кр:h3 2. Фе1 Крh2 3. Фh4+ Крg1 4. Крb1 и дальше ферзь всякий раз загоняет черного короля на g1, а белый король приближается к нему) 2. Фе4 Крh2 3. Фе5+ Крh1 4. Фd5 Крh2 5. Фd6+ Крh1 6. Фс6 Крh2 7. Фс7+ Крh1 8. Ф:h7 g1Ф+ 9. Фb1 с выигрышем; 6...h6 7. Крb1! Крh2 8. Фd6+ Крh1 9. Ф:h6 g1Ф+ 10. Фс1 с выигрышем.
Задание 12 (Т. Кок, 1937 г.). **1. h7 Фb8++ 2. Кр:d5 Фа8+ 3. Крe5 Фb8+ 4. Крe4 Фа8+ 5. Крf4 Фb8+ 6. Крf3 Фа8+ 7. Крg3 Фb8+ 8. Крg2 Фа8+ 9. Крh2 Фb8+ 10. Крh1 Фа8+ 11. Сg2 с выигрышем.**

Задачи наших читателей

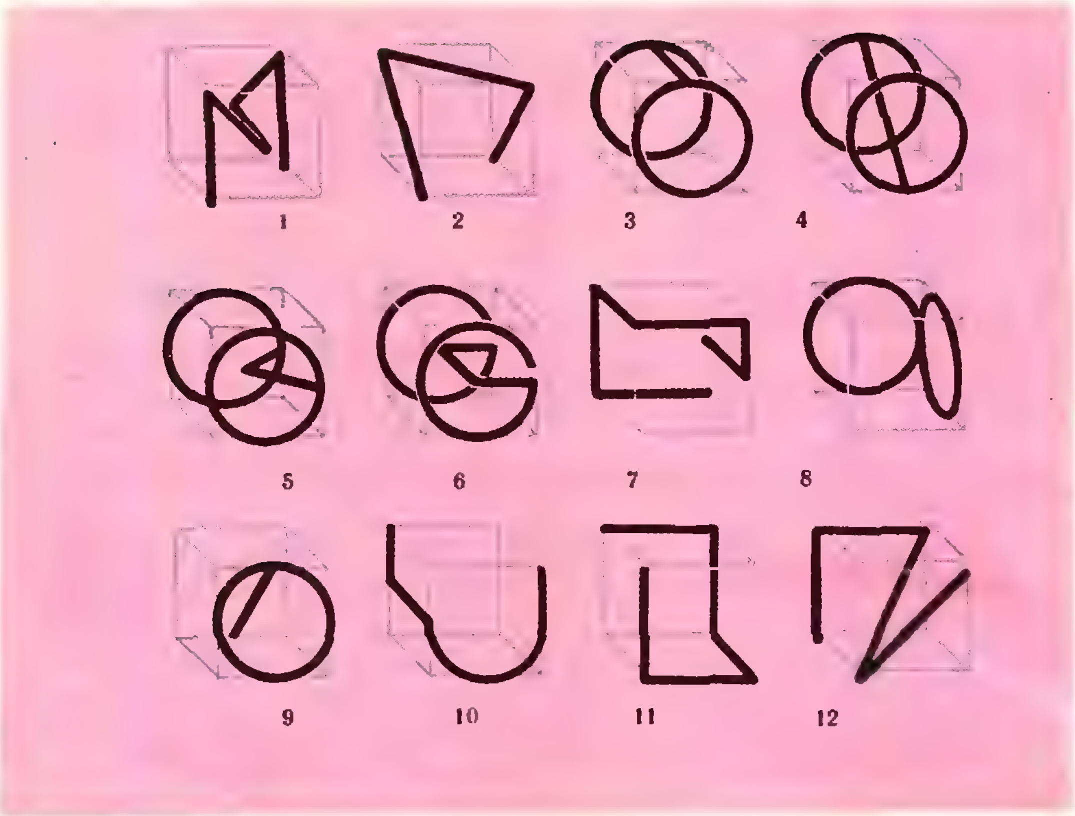
(см. «Квант» № 7, с. 60)

В k-м столбце рассматриваемой таблицы стоят числа $k+9n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), то есть все числа, дающие при делении на 9 остаток k. Поскольку $(k+9n)^2=k^2+9(2nk+9n^2)$, квадраты всех этих чисел также дают один и тот же остаток при делении на 9 и потому стоят в одном столбце.
Пусть дано произвольное число $a=a_1+10a_2+{}+100a_3+\ldots$ Обозначим сумму его цифр через $\Sigma(a)$, тогда $\Sigma(a)=a_1+a_2+a_3+\ldots={}=a-9(a_2+11a_3+\ldots)$, поэтому числа a и $\Sigma(a)$ дают одинаковые остатки при делении на 9 и, значит, стоят в одном столбце.
После первого возведения в квадрат произвольного числа a из k-го столбца и сложения цифр результата мы получим число $\Sigma(a^2)$, остаток которого при делении на 9 равен:

$$\begin{array}{rccccccccc} k= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \Sigma(a^2)= & 1 & 4 & 9 & 7 & 7 & 9 & 13 & 10 & 9. \end{array}$$

При повторении этих операций число из 1-го, 3-го, 6-го, 8-го или 9-го столбца остается в этом же столбце; числа из 4-го переходят в 7-й и обратно; из 2-го и 5-го в 7-й, затем в 4-й, опять 7-й и т. д.
Покажем, что после достаточного числа повторений результат станет меньше 27. Если a — m-значное число, то $a\geqslant 10^{m-1}$. С другой стороны, число a^2 имеет в этом случае не более $2m$ знаков; следовательно, $\Sigma(a^2)\leqslant 9\cdot 2m={}=18m$. Но $10^{m-1}>18\ m$ при $m\geqslant 3$ (докажите!), поэтому, если a записывается не менее, чем тремя знаками, $\Sigma(a^2)<a$. Значит, повторяя наши операции, мы можем уменьшать число, пока оно не станет двузначным. Далее, для любого двузначного числа a имеем $\Sigma(a^2)\leqslant 18\cdot 2=36$, а квадрат любого числа $a\leqslant 36$ не превосходит $36^2=1296$, поэтому для суммы его цифр имеем $\Sigma(a^2)<\Sigma(999)=27$ (999 — не квадрат).
Теперь остается рассмотреть числа, меньшие 27. Для 1-го и 8-го столбцов это 19, 10 и 1: $\Sigma(19^2)=10$, $\Sigma(10^2)=1$, а 1 порождает последовательность 1, 1, 1 ... Для 3-го, 6-го и 9-го столбцов — это 18 и 9: $\Sigma(18^2)=9$, $\Sigma(9^2)=9$, которые порождают последовательность 9, 81, 9, ... Для 4-го столбца — это 22 и 13: $\Sigma(22^2)=16$, $\Sigma(16^2)=13$, $\Sigma(13^2)=16$, которые порождают последовательность 13, 169, 16, 256, 13, ... Для 2-го, 5-го и 7-го столбцов получается та же последовательность. Для сравнения советуем читателю решить задачу № 2 из книги Г. Штейнгауза «Сто задач» (М., «Наука», 1976).

Четвертая страница обложки
(см. «Квант» № 7)
Ответы показаны на рисунках.



Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, В. Дубровский, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-31-73

Сдано в набор 17.7.82. Подписано в печать 26.8.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,91 Т-16733
Цена 40 коп. Заказ 1798 Тираж 175 634 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

КАК ВЫИГРЫВАТЬ ПРОИГРЫВАЯ

Удивительный случай произошел с ведущим страничку в канун Нового года в одной из шахматных редакций.

— Сыграем партию в шахматные поддавки? — предложил мне заглянувший в редакцию гроссмейстер Д. Бронштейн.

Не каждый день удается встретиться за доской с известным гроссмейстером, и я, не раздумывая, согласился. Цель игры очень проста и удобна — надо избавиться от всех своих фигур, либо запатовать их. Взятие, как и в шашках, обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля.

Мне достались белые, и мы начали поддаваться.

Е. Гик — Д. Бронштейн

1. e4 d5 2. ed Ф:d5 3. Кс3. Сделав ход конем, я поудобнее разместился в кресле, полагая, что предстоит долгая и упорная борьба. Но меня ожидал неприятный сюрприз.

— Вынужден огорчить вас, — мягко сказал гроссмейстер. — Теперь вы неизбежно съедаете все мои фигуры!

Последовало ошеломляющее **3...Ф:g2.** Дальнейшее течение этого поединка уже не зависело от меня, и я еле успевал снимать с доски черные фигуры. **4. С:g2 b6 5. С:a8 Кс6 6. С:c6 a5** (в поддавках на шах можно не реагировать) **7. С:e8** (короли в этой игре берутся) **7...Кf6 8. С:f7 Се6 9. С:e6 Кd7 10. С:d7 e6 11. С:e6 Лg8 12. С:g8 g6 13. С:h7 c5 14. С:g6 a4 15. К:a4 c4 16. К:b6 Сс5 17. К:c4 С:f2.** Пришлось сдаться, так как после вынужденного 18. Кр:f2 от черных фигур на доске не остается и следа.

Комбинация Бронштейна была одной из самых длинных за всю историю шахмат! Я чувствовал, что гроссмейстеру известна тайна поддавков и все же вызвал его на реванш. Мы перевернули доску и начали новую партию.

Д. Бронштейн — Е. Гик

1. d4 f5 2. e4 fe 3. Фh5 g6 4. Се2. Вообще-то этот ход был неправильным — белому ферзю полагалось взять одну из моих пешек g6 или h7. Однако я тактично не стал делать замечание гроссмейстеру. Сам же продолжал играть строго по правилам. **4...gh.** Последовал мгновенный ответ **5. С:h5.**

Как и в первой партии, белый слон вошел в игру и, казалось, сейчас займется истреблением черных фигур. Реванш был близок, оставалось только найти наиболее изящный способ довести дело до конца. Внезапно Бронштейн прервал мои поиски.

— Над чем задумались, маэстро? — проявил он искреннюю заинтересованность.

— Над тем, как закончить эту встречу жертвой слона на f2, — я решил не скрывать от партнера своих намерений.

— Простите, но вашему королю мат! — сказал гроссмейстер.

— Какой мат, ведь мы играем в поддавки!?

— С чего вы взяли? Речь шла только о первой партии, а о второй мы не договаривались.

Лишь теперь до меня дошел смысл происшедшего. На доске стоял натуральный мат. Мат, который каким-то загадочным образом объявил моему королю белый слон спустя всего пять ходов после начала игры...

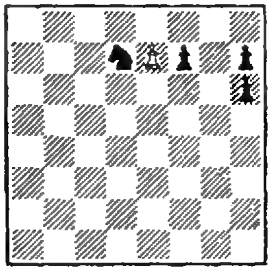
— С Новым годом! — лукаво улыбнулся Бронштейн и удалился из комнаты, оставив мне в качестве новогоднего сюрприза эту сказочную позицию.

Много дней я был не в себе и успокоился только тогда, когда опубликовал эту рождественскую историю в том самом издании, в стенах которого она произошла. Однако впереди меня ждала еще одна неожиданность. Вскоре я получил письмо от одного специалиста по поддавкам, в котором сообщалось, что излюбленный ход О. Бендера 1. e2—e4 после ответа 1...b7—b5! приводит белых к форсированной гибели. Таким образом, в первой партии матча оба партнера ошиблись на первом же ходу! Вот убедительные варианты, обнаруженные мною в конверте:

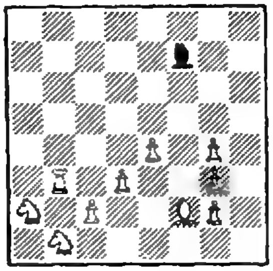
1. e4? b5! 2. С:b5 Кf6! (тихий ход) 3. С:d7 К:e4 4. С:c8 (возможность 4. С:e8 рассмотрена ниже) 4...К:d2 5. С:d2 Ф:d2 6. Ф:d2 (не меняют дела и другие взятия на d2) 6...Кa6 7. С:a6 Лc8 8. С:c8 f5 9. С:f5 Лg8 10. С:h7 c5 11. С:g8 Крf7 12. С:f7 e6 13. С:e6 c4 14. С:c4 a6 15. С:a6 Сa3 16. ba g5 17. Ф:g5.

В случае 4. С:e8 решает 4...Ф:d2 5. Ф:d2 К:d2 6. Кр:d2 Лg8 7. С:f7 c5 8. С:g8 g6 9. С:h7 e5 10. С:g6 e4 11. С:e4 Кc6 12. С:c6 Сb7 13. С:b7 Лc8 14. С:c8 a6 15. С:a6 c4 16. С:c4 Сa3 17. К:a3.

Конкурсные задания

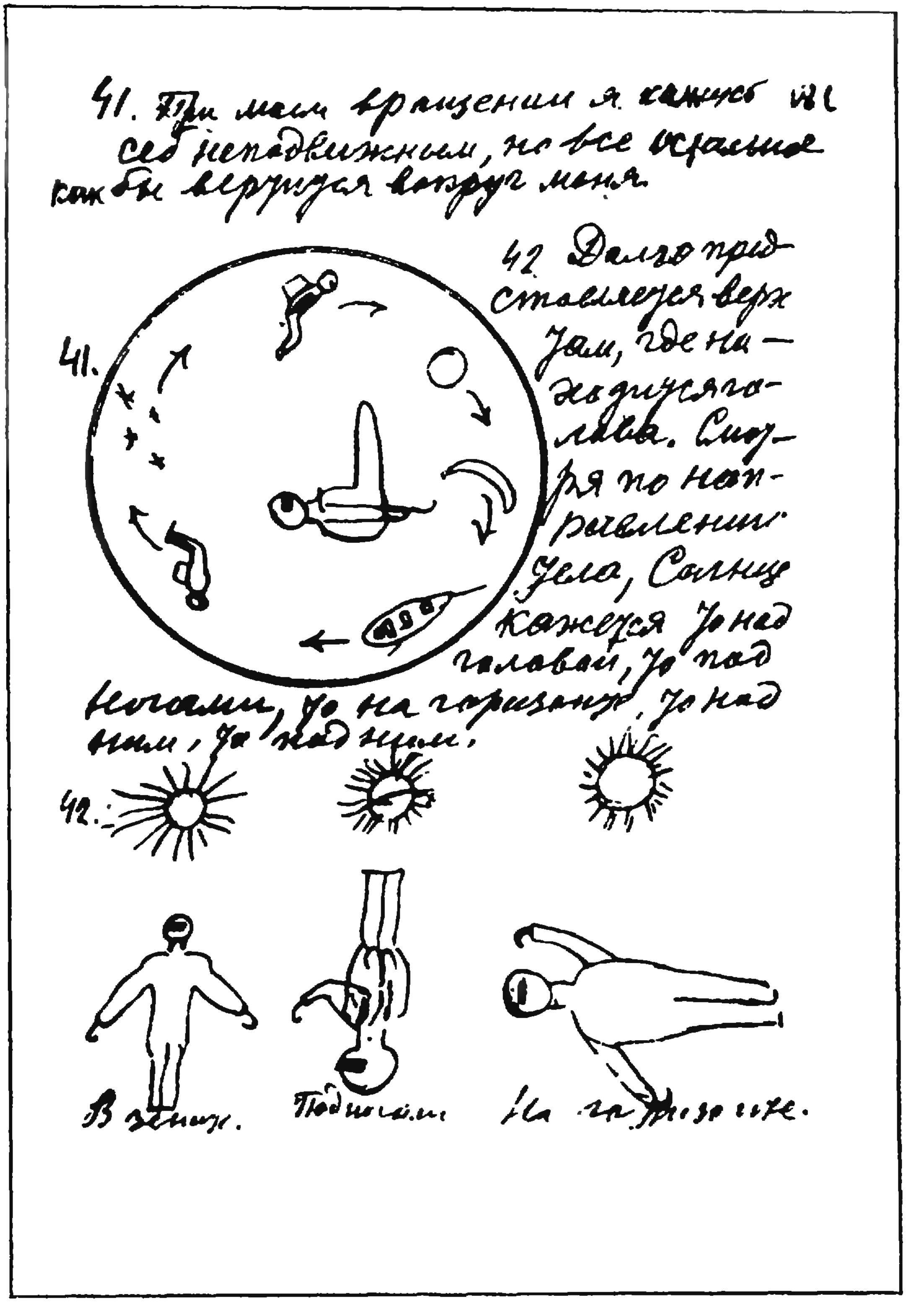


17. Белые начинают и делают ничью в поддавки.



18. Белые начинают и выигрывают в поддавки.

Срок отправки решений — 25 ноября 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18»).


41. При моем вращении я кажусь себе неподвижным, но все остальное как бы вертится вокруг меня.

42. Долго представляется верх там, где находится голова. Смотря по направлению тела, Солнце кажется то над головой, то под ногами, то на горизонте, то над ним, то под ним.

41.
42.
В зените.
Под ногами.
На горизонте.

На этой странице мы воспроизводим рисунки К. Э. Циолковского из его «Альбома космических путешествий». «Альбом» был задуман ученым как первое пособие для будущих покорителей межпланетных пространств.

Циолковский впервые на основании строго научного анализа показал, что в космических полетах сразу после прекращения работы двигателей будет возникать состояние невесомости. Особенностью творческой деятельности ученого было органическое сочетание точного расчета и образной наглядности, и «Альбом космических путешествий» — яркий тому пример.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

НА МАРКАХ — К. Э. ЦИОЛКОВСКИЙ

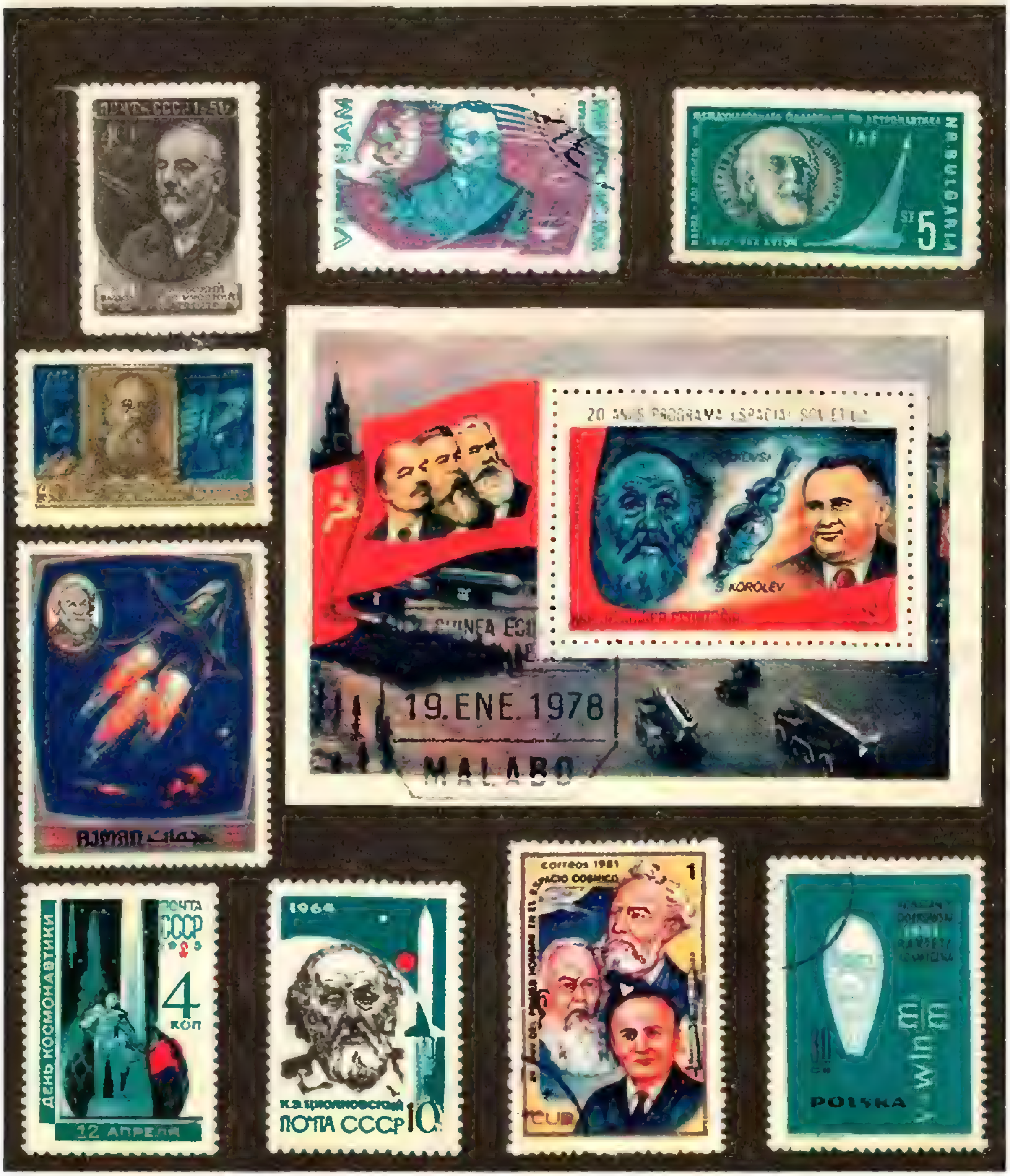
Исполнилось 125 лет со дня рождения Константина Эдуардовича Циолковского — замечательного русского ученого, основателя теории космического полета.

Циолковский первым создал строгую математическую теорию движения одноступенчатых и многоступенчатых ракет, обосновал возможность полетов к планетам Солнечной системы, разработал и научно обосновал конструкцию цельнометаллического дирижабля, дал основы теории жидкостного реактивного двигателя.

Творческое наследие Циолковского богато оригинальными идеями, многие из которых осуществлены совсем недавно, а другие еще ждут своего осуществления.

Имя К. Э. Циолковского пользуется огромной популярностью во всем мире, что находит естественное отражение и в филателии. Первая советская марка, посвященная Циолковскому, была выпущена в 1951 году; вторая — в 1957 году к столетию со дня рождения ученого. Марка 1957 года с соответствующей надпечаткой оказалась первой в мире маркой, посвященной первому искусственному спутнику Земли. С тех пор в Советском Союзе и за рубежом появилось много марок и почтовых блоков, посвященных К. Э. Циолковскому.

В. Рудов


ПОЧТА СССР 1951
VIETNAM
N.R. BULGARIA
5
20 ANOS PROGRAMA ESPACIAL SOVIETICO
KOROLEV
GUINEA ECUATORIAL
19. ENE. 1978
MALABO
AJMAN
ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ
ПОЧТА СССР 1965
4 коп
12 АПРЕЛЯ
1964
К.Э. Циолковский
ПОЧТА СССР 10
correos 1981
CUBA
1
POLSKA

НОМЕР
10

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Основан в 1970 году

КВАНТ 10

1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

А. Михайлов. Значение астрономии	2	*A. Mikhailov.* The importance of astronomy
Б. Гнеденко. Михаил Васильевич Остроградский	5	*B. Gnedenko.* Mikhail Vassilievich Ostrogradski
М. Левинштейн. Эффект Ганна	11	*M. Levinstein.* The Gann effect
Д. Ногин. Кто пойдет за лимонадом?	19	*D. Nogin.* Who will fetch the lemonade?
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
А. Варламов. Сто лет назад	22	*A. Varlamov.* One hundred years ago
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М766 — М770; Ф778 — Ф782	26	Problems M766 — M770; P778 — P782
Решения задач М739 — М745; Ф748 — Ф757	29	Solutions M739 — M745; P748 — P757
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	44	Problems
А. Бендукидзе. Треугольник Паскаля	45	*A. Bendukidze.* Pascal's triangle
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
В. Данилин. Кинематика. Относительность движения	48	*V. Danilin.* Cinematics. The relativity of motion
Искусство программирования		**The art of programming**
Стандартные приемы программирования. Урок 1	52	Standart methods of programming. Lesson 1
Рецензии, библиография		**Book reviews**
М. Ядренко, М. Козлов. Путешествие в мир случайных событий	56	*M. Yadrenko, M. Kozlov.* A trip in the world of random events
М. Левинштейн. Эйнштейн — изобретатель	56	*M. Levinstein.* Einstein — inventor
А. Егоров. Новые книги (*43, 57*)		*A. Egorov.* New books (*43, 57*)
Информация		**Information**
О. Овчинников, С. Резниченко, Г. Яковлев. Всероссийская олимпиада школьников	59	*O. Ovchinnikov, S. Reznichenko, G. Yakovlev.* All-Russian school olumpiad
Ответы, указания, решения	63	**Answers, hints, solutions**
Наша обложка (*4*)		**Our cover page** (*4*)
Смесь (*18, 55, 58*)		**Miscellaneous** (*18, 55, 58*)
Шахматная страничка		**The chess page**
Еще раз о жертве ферзя (*3-я с. обложки*)		Queen sacrifices once more (*3 rd cover page*)

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982

А. Михайлов

Значение астрономии

Часто недооценивают значение астрономии и ее роль в истории человечества. Считают, что астрономия помогла выработать правила для измерения времени и ориентировки на Земле и открыла много интересного на звездном небе, но все это не так важно по сравнению с тем, что нам дали другие науки, например физика и химия. Лишь в наш космический век важность астрономии стала более очевидной. Однако можно утверждать, что если бы не было астрономии, то и всемирная история была бы другой.

Чтобы обосновать такое утверждение, предположим, что все небо постоянно покрыто густыми облаками, не позволяющими видеть Солнце, Луну, планеты и звездное небо вообще. Тем не менее происходила бы смена дня и ночи, было бы заметно, что ночи периодически бывают более светлыми, что это явление имеет какую-то связь с морскими приливами. Для объяснения всего этого придумали бы хитроумные теории, скорее всего — весьма далекие от действительности.

Благодаря астрономии, более двух тысяч лет назад люди узнали, что Земля — шар. Это следовало из изменения полуденной высоты Солнца и кульминационной высоты звезд при передвижении наблюдателя в меридианном направлении. Это показывала также круглая тень Земли при ее падении на Луну во время лунных затмений. До нас дошла первая удачная попытка определения длины окружности земного шара, предпринятая Эратосфеном в III веке до н. э. При условии невидимости небесных светил всего этого не мог-

---

Александр Александрович Михайлов — известный советский астроном и гравиметрист, академик АН СССР, Герой Социалистического Труда, в течение почти двадцати лет (1947—1964) — директор Главной астрономической обсерватории в Пулкове.

ло быть, и Земля считалась бы плоской, со всех сторон окруженной океаном.

Может быть, скажут, что выпуклость морской и земной поверхности, заметная при удалении предметов на море и на равнине, является доказательством шарообразности Земли. Но по другим наблюдениям можно сделать вывод о вогнутости Земли: при поднятии на возвышение остается незаметным «на глаз» понижение линии горизонта, а долины вокруг создают впечатление впадины. Так что можно было бы представить, что фигура Земли похожа на опрокинутую чашу, на неровном днище которой находится суша, а загнутые вниз стороны покрыты океаном.

Если бы не было известно о шарообразности Земли, то, по всей вероятности, Америка не была бы открыта, многое было бы иным и, прежде всего,— развитие мореходства. В древнем мире плавали вдоль берегов, углубляться в океан, подвергаясь большой опасности, не было никакой надобности. Морской путь из Европы в богатую сокровищами Индию пролегал вдоль берегов Африки с огибанием ее южной конечности. А мысль о достижении восточных стран Азии движением на запад, вокруг Земли, не могла бы возникнуть, не знай люди, что фигура Земли — «замкнутая».

Но, может быть, все же были какие-то способы обнаружить шарообразность Земли без астрономических наблюдений? Да, такие способы в принципе имелись, но осуществить их было почти невозможно. Это — изменения понижения морского горизонта при поднятии на высоту и сферического избытка в углах больших треугольников на суше.

Понижение горизонта выводится геометрически так, как показано на рисунке. Представим себе, что мы находимся в точке A на высоте h над поверхностью шара радиуса R. Проведем мысленно касательную к шару из точки A в точку B, лежащую на горизонте. Угол BAE (см. рисунок), равный углу α, который составляет эта касательная с плоскостью горизонта, и называется понижением горизонта на высоте h. Как видно из рисунка, $|AB| = d = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$, и по теореме Пифагора

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2 = R^2 + R^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

Отсюда, пренебрегая малым членом h^2, находим $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2h/R}$, или, поскольку угол α мал и $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$,

$$\alpha = \sqrt{2h/R}\ \text{(радиан)}.$$

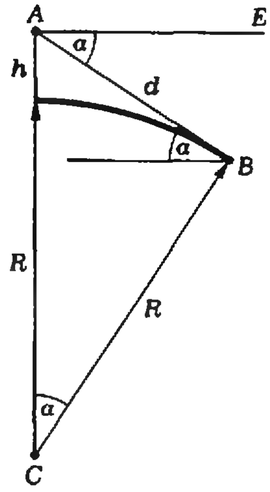
Понятно, что если α оказывается постоянным на данной высоте h в любом месте Земли, то это означает, что $R = \mathrm{const}$, то есть Земля — шар. Таким образом, измеряя α, можно было бы обнаружить шарообразность Земли. Однако...

Приняв в формуле для α $R = 6370$ км и переводя радианную меру угла в градусную (1 рад $= 3437',7$), для Земли получаем

$$\alpha \approx 60',91\sqrt{h}$$

(в это выражение надо подставлять h, измеренное в километрах).

Предположим, что мы находимся на высоте $h = 1$ км над уровнем моря. Тогда наша формула дает понижение горизонта почти в 61′ — величину, вполне измеримую даже небольшим теодолитом. Но на деле все не так просто. Свет, проходя через слои воздуха разной плотности, испытывает преломление, и поэтому луч зрения AB оказывается не прямым, он искривляется, обращаясь обычно вогнутостью вниз.



Так что на самом деле теодолит будет измерять не понижение горизонта, а угол, величина которого может на несколько десятков процентов отличаться от α. Такой способ измерения кривизны очень ненадежен и не может дать доказательства шарообразности Земли, тем более, что он применим только на морской поверхности, где горизонт представляется правильной линией и можно уверенно фиксировать высоту.

Другой способ, который, казалось бы, позволял обнаружить шарообразность Земли,— это, как мы уже говорили, измерение сферического избытка в углах треугольников. Сумма углов треугольника, сторонами которого являются дуги больших кругов шара, оказывается больше 180 градусов. Математический расчет показывает, что эта разница — ее и называют сферическим избытком — равна

$$\varepsilon = 206265\, S/R^2 \text{ угловых секунд,}$$

где S — площадь треугольника, R — радиус шара. Допустим, что удалось измерить на Земле углы огромного треугольника со сторонами по 100 км (вершинами его, очевидно, могли бы быть только высокие горы). Площадь такого равностороннего треугольника $S = 4330$ км² и $\varepsilon = 22''$. Эту величину можно «уловить» хорошим теодолитом, но такие инструменты были созданы для астрономических целей; для гораздо более «грубых» землемерных работ такая точность была не нужна. Таким образом, и этот способ был бы неосуществим.

Итак, можно быть уверенным, что без астрономических наблюдений шарообразность Земли не была бы открыта, и история человечества во многом была бы иной. Без астрономии огромный ущерб понесли бы наука и техника. Главная причина этого — незнание закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном в конце XVII века именно благодаря астрономическим наблюдениям. Закон всемирного тяготения пронизывает все точные науки, без него не могли бы развиваться механика, ряд разделов магнетизма и электричества, воздухоплавание, не говоря уже о космонавтике. Не могло бы быть и речи о теории относительности.

Скорость света была впервые измерена Рёмером в 1676 году по наблюдениям спутников Юпитера. Вероятно, она была бы измерена экспериментальным путем и без астрономических наблюдений, но, несомненно, много позже, и это затормозило бы развитие оптики. Химия также была обогащена астрономией: вспомним, что гелий был сначала открыт на Солнце и уже после найден на Земле. Астрономия ставила перед математикой ряд задач, решение которых способствовало развитию этой науки.

Возможно, кто-то скажет: радиоастрономия не боится облачного неба и может развиваться даже при отсутствии видимости небесных объектов. Но ведь радиоастрономия существует всего около пятидесяти лет, а возникла она и развивалась благодаря своему более старому «родственнику», даже «прародителю» — оптической астрономии.

Наша обложка

25 лет тому назад, **4 октября 1957 года в СССР** был осуществлен запуск первого искусственного спутника Земли. Героический труд советских ученых, инженеров, рабочих открыл человечеству путь в космос. Началась новая эра в истории науки и техники — эра космических полетов.

На первой странице обложки изображен «Спутник-1», установленный на демонстрационном стенде. «Спутник-1» — первое в мире искусственное небесное тело, выведенное на эллиптическую орбиту в околоземное космическое пространство. Эволюция движения этого спутника под влиянием верхних слоев атмосферы позволила определить ее основные физические характеристики.

К настоящему моменту в СССР запущено более 1400 искусственных спутников.

Б. Гнеденко

Михаил Васильевич Остроградский

Михаил Васильевич Остроградский, один из крупнейших представителей отечественной дореволюционной науки, оставил значительный след в прогрессе математики, механики, математического образования и русской технической культуры. Полученные им научные результаты до сих пор широко используются в науке, входят в ее фундамент и излагаются в учебниках.

Родился М. В. Остроградский 24 сентября 1801 года в деревне Пашенная Кобелякского уезда Полтавской губернии. Восьми лет его отдали в Полтавскую гимназию, поместив в имевшийся при ней пансион, называвшийся «домом воспитания бедных дворян». В ту пору надзирателем в этом пансионе был известный украинский поэт И. П. Котляревский.

По обычаю дворян того времени мальчик был записан на государственную службу в канцелярию полтавского гражданского губернатора. Конечно, никаких обязанностей по службе он не нес и «числился в отпуску до окончания наук». Однако даже при таком пребывании на службе продвижение по служебной лестнице шло своим чередом: двенадцатилетним мальчиком Остроградский стал коллежским регистратором. Когда в 1828 году после возвращения из Парижа он добивался разрешения на право жительства в Петербурге, этот чин пригодился ему.

Ostrogradsky

OSTROGRADSKY.

Né à Pachenna (Petite Russie).

В первый месяц занятий в гимназии М. В. Остроградский был отмечен в ведомостях по способностям «средственным», по прилежанию «прилежным» и по поведению «исправным». В конце же первого года обучения в ведомости стояли такие оценки: поведение — «добронравный», способности — «острый». Однако обучение в гимназии было поставлено крайне плохо и ученики мало что из нее выносили. А. И. Ротмистров, у которого на квартире жили Михаил и его старший брат Осип, в одном из писем их родителям так характеризовал состояние учебных занятий в полтавской гимназии: «...учение по гимназии Полтавской всем ученикам мало пользы приносит, даже кончившие на словах арифметику на деле ее вовсе не знают... Лучше сказать, чему учат их, и сами не ведают». В результате подобных писем отец решил Осипа определить на гражданскую службу, а Михаила отвезти в Петербург и определить на воинскую службу в один из гвардейских полков. Кстати, это решение было исполнением страстного желания самого мальчика. В 1816 г. отец взял мальчиков из гимназии и повез в Петербург, но по дороге под влиянием брата жены, который горячо настаивал на определении племянника в Харьковский университет, круто изменил решение.

В 1816 г. М. Остроградский был зачислен вольнослушателем в Харьковский университет. Первый год ушел на предварительную подготовку. Поскольку Остроградский «на всех экзаменах получил весьма хорошие одобрения», он был переведен в студенты университета. Однако эти успехи еще не были результатом напряженной работы. Просто сказывались незаурядные способности молодого человека. Перелом наступил в связи с переходом на квартиру к университетскому преподавателю математики Андрею Федоровичу Павловскому, который, не будучи творческим математиком, был широко начитан и увлечен своим предметом. Заметив математические способности Остроградского, Павловский сумел пробудить сначала интерес, а затем и страстное увлечение молодого студента наукой. Через два—три месяца Остроградский начал поражать своего учителя успехами: то, на что Павловскому приходилось затрачивать большое время и серьезные усилия, Остроградский усваивал как бы шутя и при этом успевал замечать недостатки изложения, логические ошибки и промахи в доказательствах.

На интересы Остроградского внутри математики значительное влияние оказал ректор Харьковского университета и профессор математики Тимофей Федорович Осиповский (1765—1832). В ту пору его трехтомный курс математики пользовался большим успехом. Сам он блестяще читал курсы математического анализа, механики и астрономии. Его интерес к прикладной математике пробудил у Остроградского желание заниматься наукой именно в этом направлении. Вдобавок заметим, что Осиповский по своим философским установкам был материалистом. Заметим, что в ту пору отстаивать материалистические взгляды было делом большого гражданского мужества. В России господствовали аракчеевские порядки, а цели просвещения, согласно взглядам министра просвещения, состояли «в поддержании постоянного и спасительного согласия... между христианским благочестием, просвещением умов и существованием гражданским».

В период аракчеевской реакции серьезно пострадали многие либеральные профессора. Среди них был и Т. Ф. Осиповский — он был отстранен от ректорского поста и лишен права преподавания. Это сказалось и на Остроградском как на верном ученике своего учителя — в 1820 году было решено лишить его диплома об окончании университета, а также не присуждать ему звания кандидата наук (первое научное звание).

Причиной гонений на Остроградского было заявление профессора философии Дудровича, носящее характер доноса, попечителю учебного округа Карнееву. Вот небольшие выдержки из этого «произведения»:

«Ваше превосходительство! Милостивый государь!

Явная ко мне ненависть г. ректора Харьковского университета Осиповского, питаемая им единственно потому, что я всеми силами стараюсь защищать благие намерения начальства, доходит уже до крайности. За мой отказ экзаменовать студента Остроградского из философии он самым непристойным образом изливал на меня досаду, крича громко и в ярости, в присутствии г.г. профессоров, что я сумасшедший, записался в мистики...

Я уверен, что ваше превосходительство изволите совершенно понимать, каких разумеет г. ректор мистиков... Это — вы, без сомнения, ваше превосходительство, которого он считает верхом сумасшедших мистиков и которого милостью и начальническим благорасположением я пользоваться имею счастье. Это, без сомнения, также и его сиятельство господин министр духовных дел и народного просвещения, которого он публично, в заседании училищного комитета 9-го сего октября, называл невеждою, не читавшим ничего другого, кроме Библии... Сей то рассудок г. ректора является причиною, что ни один почти из обучающихся в Харьковском университете по части математики студентов, коих он глава, почитающий явно все за вздор и сумасшествие, что не подлежит его математическим выкладкам, не ходит ни на богопознание и христианское учение, ни на лекции по части философии...»

В создавшихся условиях Остроградскому не на что было надеяться в Харькове, и он принял решение отправиться для продолжения математического образования в Париж. Осенью 1822 г. Остроградский уже был в Париже и со всей страстью отдался научным занятиям. Выдающиеся французские математики Лаплас, Пуассон, Фурье и Коши оказали сильное влияние на характер математического творчества начинающего ученого. Однако в значительной степени научные вкусы Остроградского и выбор им области научных исследований сложились под влиянием Осиповского.

Впервые имя Остроградского появилось в научной печати в 1825 году, когда в одном из мемуаров Коши, посвященных теории дифференциальных уравнений с частными производными, были сказаны такие слова: «Наконец, один русский молодой человек, Остроградский, одаренный большой проницательностью и весьма сведущий в исчислении бесконечно малых, дал новое доказательство упомянутых мною выше формул». В 1826 г. Остроградский представил в Парижскую Академию наук свою первую самостоятельную работу «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», которая была рекомендована к печати, но напечатана лишь в 1832 году. Эта проблема была выдвинута Академией на соискание премии в 1816 г., и ей были посвящены исследования таких выдающихся математиков, как Лаплас, Лагранж, Коши и Пуассон. (Премия полностью не была присуждена никому. Часть же премии получили Лаплас и Пуассон.) Те же лица постановили печатать работу Остроградского. Одно это показывает, что результаты Остроградского существенно дополняли ранее полученные результаты.

В связи с этим мемуаром Остроградского рассказывают одну легенду о его парижской жизни. Красочный рассказ об этом содержится в докладной записке академика А. Н. Крылова, относящейся к началу тридцатых годов, в Президиум Академии наук СССР.

«В 1826 г. с Остроградским случилось происшествие, о котором рассказывали старики, его знавшие... С 1821 г. началась война греков за освобождение от турецкого владычества, приведшая к Наваринскому сражению в 1827 г. За все семь лет в Архипелаге, постепенно усиливаясь, развилось такое пиратство, что коммерческое мореплавание стало почти невозможным без военного конвоя — грабили алжирцы, тунисцы, турки, левантийцы, египтяне и греки.

В те времена банковские сношения еще не были развиты и для пересылки денег в Париж отцу Остроградского приходилось, подобно другим, покупать у экспортеров хлеба в Ростове, Херсоне или Одессе вексель на какого-нибудь марсельского купца, который затем поручал своему дебитору или кредитору оплатить этот вексель в Париже».

Далее А. Н. Крылов рассказывает, что в 1826 г. Остроградский по какой-то причине не получил своевременно денег от отца; по жалобе хозяина гостиницы, которому Остроградский задолжал «за харч и постой», он был посажен в долговую тюрьму «Клиши»; здесь он написал свой мемуар и послал его Коши; Коши представил мемуар Академии и выкупил Остроградского из тюрьмы.

Я не думаю, что этот факт имел место в действительности. Вероятно, отец, желая быстрейшего возвращения сына на родину, перестал высылать ему деньги, и молодой ученый, оставшись без средств к существованию, обратился к своим учителям за содействием. Известно, что те рекомендовали Остроградского на должность преподавателя математики в коллеж Генриха IV, куда он и был принят на работу. Когда в конце 1827 г. Остроградский покидал Париж, ему был дан из коллежа похвальный отзыв: «...он полностью оправдал те надежды, которые возлагали на него лица, рекомендовавшие его нам».

В начале 1828 г. Остроградский возвратился в Россию и немедленно попал под надзор полиции. По-видимому, под подозрение попадал каждый, кто возвращался из-за границы. Возможно, оказывала последействие докладная записка профессора Дудровича.

Вскоре после приезда в Петербург Остроградский начал преподавание в одном из старейших специальных учебных заведений России — в Морском кадетском корпусе. С этим учреждением он не порывал самой тесной связи до конца жизни. Через два года Остроградский был приглашен для чтения курса механики в Институт корпуса инженеров путей сообщения, с которым он также был непрерывно связан всю жизнь. Спустя еще два года Остроградский начал преподавать в Главном педагогическом институте, в котором много сделал для повышения уровня математического образования. Ему удалось воспитать не только превосходных специалистов для страны, но и крупных ученых, работавших преимущественно в прикладных областях знания. Среди его непосредственных учеников назову лишь И. А. Вышнеградского — основоположника теории автоматического регулирования и Н. П. Петрова — создателя гидродинамической теории смазки.

По словам лиц, лично знавших Остроградского, он «любил, чтобы к нему собирались в дом способнейшие его ученики и в беседах с ним о вопросах науки черпали многое для своего развития».

Вскоре после возвращения из Франции Остроградский представил Петербургской Академии наук заметки о притяжении сфероидов, об определенных интегралах и о теории теплоты. В третьей заметке была выведена знаменитая «формула Остроградского», преобразующая интеграл по объему в интеграл по поверхности, и задолго до Римана был высказан принцип локализации в теории сходимости тригонометрических рядов. В следующем году Остроградский представил статьи, относящиеся к механике, теории теплоты и теории упругости.

Тогда же он начал чтение публичных лекций по небесной механике. Лекции собирали большое число слушателей и по достоинству были расценены как выдающееся событие в жизни столицы России.

В 1828 г. Остроградский был избран адъюнктом Академии, в 1830 г.— экстраординарным академиком, а спустя год с небольшим — ординарным академиком.

По поручению Академии Остроградский каждый год давал несколько отзывов на различные математические работы. С этим поручением связан печальный эпизод — отрицательные отзывы о двух работах Н. И. Лобачевского («О началах геометрии» и «О сходимости бесконечных рядов»). По-видимому, Остроградский не понял их, потому что они слишком обогнали время и были изложены сложно.

С 1847 г. на Остроградского была возложена обязанность главного наблюдателя за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях. Лучшей кандидатуры найти в ту пору было невозможно, поскольку среди преподавателей и слушателей он пользовался непререкаемым авторитетом, был превосходным организатором и считался первым математиком России. В этой новой должности он должен был не только отвечать за программы и учебные планы, но и проводить инспекцию в губернских кадетских корпусах, проводить совещания преподавателей, руководить составлением учебных пособий, присутствовать на выпускных и приемных экзаменах, следить за пополнением библиотек, руководить комиссией по испытанию кандидатов на преподавательские должности. Сохранилось много отзывов Остроградского на пробные лекции лиц, подвергавшихся экзаменам на должность преподавателя. Он требовал достаточно широкого знания предмета, отчетливых представлений о понятиях, лежащих в основе математики, а также об ее методах. Он не прощал неряшливости изложения и неумения излагать ясно и четко свои мысли.

Но как бы велика ни была занятость Остроградского педагогическими проблемами и организацией математического образования, основные свои силы он отдавал развитию математической науки. На первое место следует поставить его работы в области механики, математической физики и математического анализа.

Им была, в частности, построена общая теория удара (1854 г.) и далеко продвинута разработка общих принципов механики.

В области математической физики им были разработаны методы исследования распространения тепла в жидкости и твердых телах. Эти исследования непосредственно примыкают к работам французских коллег — Фурье, Пуассона и Ляме. В ряде работ шло как бы соревнование между Остроградским и Пуассоном. Некоторые из результатов Остроградского по теории передачи тепла в многогранниках им не были опубликованы, и о них известно только из книги Ляме, в которой был назван их истинный автор. Ряд работ был посвящен вопросам теории упругости и теории магнитных явлений.

Каждая задача математической физики приводила Остроградского к постановке задач анализа. Некоторые из этих задач всерьез опередили свое время, и их решение было получено много лет спустя после смерти их автора.

Остроградский вывел правило преобразования переменных под знаком кратного интеграла, которое теперь излагается во всех учебниках математического анализа, зачастую даже без указания имени автора.

Теория чисел, алгебра и теория вероятностей лежали на периферии научных интересов Остроградского, но и здесь он сделал превосходные работы.

Все его статьи по теории вероятностей связаны с приложениями к теории страхования, организации пенсионных касс, оценке качества массовой продукции. Так, в 1846 г. он опубликовал статью, посвященную выборке шаров из урны без возвращения. Полученный при этом математический результат незначителен и рассуждения совершенно элементарны, но не это является идейной основой работы, а та цель, которую ставил перед собой автор, ради чего он производил выкладки и писал статью. Вот что пишет Остроградский по этому поводу:

«Чтобы понять важность этого вопроса, заметим, что постановка его уместна, когда имеются затруднения при получении большого числа предметов, обладающих некоторыми качествами, и когда нужно затратить некоторое время на каждый предмет для того, чтобы убедиться в наличии этих качеств. Армейские поставщики часто должны делать работу подобного рода. Для них шарами, заключенными в урне, служат получаемые предметы: белые, например,— предметы, обладающие требуемыми условиями для приемки, а черные — те, которые им не удовлетворяют... Таким образом, решение предложенного нами вопроса может служить поставщикам для сокращения, приблизительно до двадцатой части, механической работы, чаще всего очень утомительной, по проверке очень большого числа мешков с мукой или кусков сукна».

Это направление исследований (названное впоследствии статистическими методами приемочного контроля) приобрело в наши дни большое значение в связи с развитием массового производства и резким увеличением приемно-сдаточных операций. Оно находит многочисленные повседневные применения и приносит народному хозяйству огромную экономию материалов, труда и времени, а также средств.

Скончался Остроградский в Полтаве 1 января 1862 года.

Рукописи Остроградского сохранились в очень плохом состоянии. По-видимому, он относился к ним небрежно. Многие записи Остроградский делал на клочках бумаги. В частности, на нескольких клочках бумаги были обнаружены новые алгоритмы для приближения иррациональных чисел.

Общеметодологические взгляды Остроградского можно охарактеризовать как естественнонаучный материализм. Однажды Остроградский заявил: «Я был полным материалистом и атеистом, признавал только то, что можно осязать, вымерять и свесить». В рукописях Остроградского имеется такая запись:

«Порой мы слепо верим в вещи точно не доказанные. Это зависит от склонности нашего организма, от наших чувств. Следует верить только в вещи доказанные, ибо вера, о которой шла речь, меняется с нашим положением, с нашим организмом. Обжорство не является свойством, осужденным божественным законом, так как высшее существо не вмешивается в столь низкие дела, как наш желудок. Это неверно: для бога нет ни малых, ни больших дел. Сказанное нами содержит противоречие. Следует верить лишь в доказанные вещи. Но мы не можем доказать существование высшего существа; таким образом, мы не должны верить в бога».

Конечно, то, что мы только что прочитали, наивно. Но оно показывает, что Остроградский пытался найти и логические мотивы для развенчания религии и идеи существования бога. В этом плане приведенный отрывок представляет интерес.

В заключение добавим, что Остроградский был очень высокий, сильный и полный человек. На экзаменах для него ставили рядом два стула. Он любил украинский язык и высоко ценил поэзию Шевченко. Много его стихотворений знал наизусть. Любил шутку и часто использовал ее на своих лекциях. Студенты любили Остроградского и его лекции, поскольку он стремился донести до них не вычислительные детали, а суть предмета и его связи с другими областями знания.

Исполнилось 75 лет
члену редакционной коллегии
нашего журнала,
известному советскому физику,
лауреату Государственной премии,
действительному члену Академии
педагогических наук СССР
Валентину Александровичу
Фабриканту.
Редакционный совет,
редакционная коллегия
и редакция журнала «Квант»
поздравляют
Валентина Александровича
с днем рождения
и желают ему здоровья,
долгих лет жизни
и новых больших успехов
в его благородной деятельности
ученого и педагога.

М. Левинштейн

Эффект Ганна

Около двадцати лет назад, в начале шестидесятых годов, английский физик Джон Ганн решил исследовать вольтамперные характеристики сравнительно новых тогда полупроводников — арсенида галлия и фосфида индия — в сильных электрических полях. Неожиданно Ганн обнаружил удивительное явление: когда напряжение, приложенное к образцу, превышало определенное значение, ток в полупроводнике *при постоянном напряжении* начинал периодически меняться со временем. Это было поразительно и совершенно непонятно.

Опытный экспериментатор, известный специалист в области физики полупроводников, Ганн не мог подыскать никакого объяснения этому эффекту. Он описал результаты своих наблюдений в 1963 году в короткой заметке, которая сразу привлекла внимание десятков физиков и инженеров во всем мире. Физикам представлялось интересным объяснить это удивительное явление. Инженеры сразу поняли, что открытие Ганна означает появление нового полупроводникового генератора, который может работать в области сверхвысоких частот. Такие генераторы были очень нужны во многих областях радиоэлектроники, в том числе — в радиолокации и системах связи.

Десятки специалистов размышляли над природой открытого Ганном явления. Однако прошел год, пока его удалось объяснить.

Попытаемся и мы разобраться в природе эффекта Ганна.

Представим себе, что мы, как в свое время Ганн, задались целью изучить вольтамперную характеристику (то есть зависимость тока от напряжения) какого-нибудь полупроводника, например германия (Ge), кремния (Si) или арсенида галлия (GaAs).

Пусть в нашем распоряжении имеется массивный монокристалл, представляющий собой полупроводник n-типа (в нем основные носители заряда — электроны) с удельным сопротивлением ϱ. Сначала вырежем из этого монокристалла образец правильной формы, удобнее всего — прямоугольный параллелепипед. (Дело это непростое, так как полупроводники довольно трудно поддаются механической обработке, и нам придется воспользоваться инструментом, режущая кромка которого содержит сверхтвердые материалы — корунд, эльбор или алмаз.) Теперь прикоснемся к боковым граням образца измерительными концами тестера (прибора для измерения сопротивлений). Естественно ожидать, что сопротивление изготовленного нами образца будет равно

$$R_0 = \varrho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{\sigma h d},$$

где $\sigma = 1/\varrho$ — удельная проводимость полупроводника, а l, h, d — геометрические размеры образца (рис. 1). Однако значение сопротивления, которое зарегистрирует прибор, окажется в миллионы раз большим, чем величина, предсказываемая этой формулой. Дело в том, что в местах соприкосновения металлических концов тестера с полупроводником возникает тонкий приповерхностный заряженный слой — так называемый

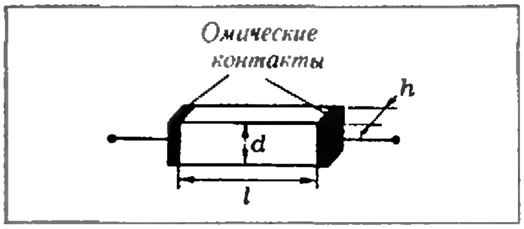


Рис. 1. Образец с контактами.

Новые полупроводниковые материалы получают обычно в виде крошечных монокристаллов размером в доли миллиметра. Однако такие хорошо изученные и широко применяемые полупроводники, как Ge (1), Si (2), GaAs (3), современная технология позволяет получать в виде монокристаллов объемом в десятки и сотни кубических сантиметров.

барьер металл — полупроводник, и прибор будет измерять сопротивление барьера, а не сопротивление образца.

Чтобы обойти эту трудность, боковые грани образца необходимо снабдить «омическими контактами», в которых барьеры отсутствуют. Как правило, такие контакты получают, вплавляя в боковые грани определенные металлы (индий, олово) или сплавы (германий — золото, германий — серебро). Изготовить хороший «омический контакт» нелегко. Приходится подбирать материал контакта, температуру и режим вплавления, атмосферу, в которой следует производить вплавление (часто это бывает атмосфера водорода или инертного газа), определенным образом подготавливать поверхность боковых граней.

Но вот все трудности позади, и тестер, подключенный к боковым граням образца, показывает, что сопротивление равно расчетному значению R_0. Теперь можно приступить к измерению вольтамперной характеристики.

Пока напряжение U, приложенное к образцу, не велико, ток, как и следует ожидать, пропорционален напряжению — выполняется закон Ома $I=U/R_0$. Однако при бо́льших напряжениях ток начинает расти значительно быстрее, чем этого требует закон Ома (кривая *1* на рисунке 2). В этом нет ничего удивительного: когда ток и напряжение велики, образец разогревается джоулевым теплом. Как известно, полупроводники тем, в частности, и отличаются от металлов, что с ростом температуры их проводимость увеличивается, то есть удельное сопротивление уменьшается. При нагревании полупроводника все больше электронов разрывают свои связи с атомами кристаллической решетки и становятся свободными. Увеличивается концентрация свободных электронов — падает удельное сопротивление материала и уменьшается сопротивление образца. Значит, при том же напряжении на образце ток становится больше. Увеличение тока влечет за собой еще больший разогрев образца, еще большее увеличение концентрации электронов, и т. д. Вот почему так резко возрастает ток, когда разогрев образца джоулевым теплом становится заметным.

(Решив задачу 1, помещенную в конце статьи, можно найти, при каких напряжениях и токах вольтамперная характеристика начнет отличаться от омической за счет нагрева образца протекающим током.)

Интересно оценить, какова скорость упорядоченного перемещения электронов вдоль поля (дрейфовая скорость электронов) в условиях, когда джоулев разогрев начинает вызывать резкое увеличение тока в образце с ростом напряжения. Движение электронов в полупроводнике подобно движению тела в вязкой жидкости: внешняя сила определяет установившуюся скорость движения. Поэтому дрейфовая скорость электронов $v_д$ пропорциональна напряженности электрического поля —

$$v_д = \mu E = \mu \frac{U}{l}. \qquad (*)$$

Коэффициент пропорциональности μ называют *подвижностью*. Как видно из формулы (*), подвижность численно равна дрейфовой скорости при напряженности поля, равной единице. Если размерность v — м/с, а размерность E — В/м, то размерность μ — $м^2/(В \cdot с)$. Диапазон значений подвижности электронов у различных полупроводников очень широк: от $\sim 10^{-5}\ м^2/(В \cdot с)$ до $\sim 10^2\ м^2/(В \cdot с)$. При комнатной температуре для Ge $\mu \approx 0{,}5\ м^2/(В \cdot с)$, для Si — $0{,}1\ м^2/(В \cdot с)$, для GaAs — $0{,}8\ м^2/(В \cdot с)$. Как показывают расчеты (см. задачу 1), значение напряженности поля, при котором влияние джоулева разогрева начинает искажать вид вольтамперной характеристики, не превышает $\sim 10^4$ В/м. При этом значения дрейфовой скорости электронов — не больше 10^3—10^4 м/с.

Важно подчеркнуть, что когда вследствие джоулева разогрева полупроводника ток начинает резко увеличиваться с ростом напряжения, величина подвижности не меняется. Ток возрастает за счет того, что разогрев вызывает появление «дополнительных» электронов.

Итак, джоулев разогрев искажает форму вольтамперной характеристики полупроводника в области высоких напряжений, и его необходимо устранить. Это можно сделать, прикладывая к образцу напряжение в виде коротких импульсов. В соответствии с законом Джоуля — Ленца, количество тепла, выделяющегося в образце, пропорционально времени прохождения тока, а следовательно, длительности импульса. Если использовать короткие импульсы напряжения и прикладывать их к образцу редко, так чтобы в промежутке между импульсами выделившееся в образце тепло успело полностью рассеяться, можно достичь очень сильных электрических полей, не нагревая образец (задача 2).

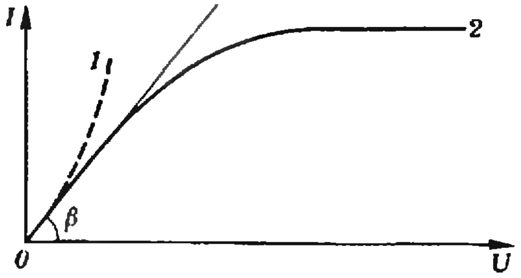


Рис. 2. Качественный вид вольтамперной характеристики для Ge и Si на постоянном токе (кривая *1*) и в импульсном режиме (кривая *2*); $\operatorname{tg}\beta = 1/R$.

Теперь для изучения вольтамперных характеристик потребуются приборы более сложные, чем вольтметр и амперметр. Необходимы генератор, вырабатывающий импульсы напряжения, и осциллограф, чтобы наблюдать импульсы тока и напряжения. Запасемся этими приборами и продолжим наши исследования.

Влияние разогрева устранено, вольтамперная характеристика вновь стала линейной и остается омической до гораздо бо́льших значений напряжения, чем на постоянном токе. Однако по мере роста напряжения вновь наблюдается отклонение от закона Ома. Для Ge и Si с увеличением напряжения ток растет медленнее, чем по линейному закону. При очень больших напряжениях ток практически перестает зависеть от напряжения — насыщается (кривая *2* на рисунке 2).

Проводя эксперименты с образцами различной длины l, можно заметить, что отклонение от закона Ома и насыщение всегда наступают при одних и тех же значениях напряженности электрического поля $E = U/l$.

Первое, что приходит в голову при попытке объяснить это явление, — предположить, что по какой-то причине с ростом поля E начинает убывать концентрация n электронов в образце. Однако это не так. Контрольные эксперименты показывают, что в чистых Ge и Si концентрация электронов при тех полях, в которых наблюдается насыщение тока, от поля не зависит. Поскольку сила тока

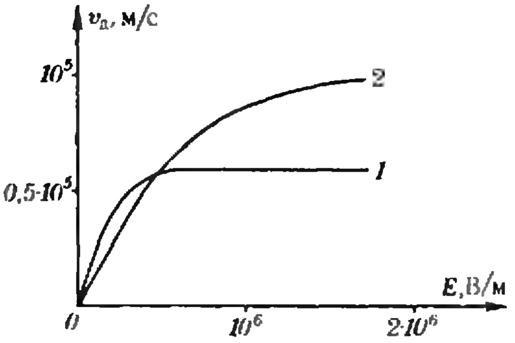


Рис. 3. Зависимость дрейфовой скорости электронов $v_д$ от напряженности электрического поля E для Ge (кривая 1) и Si (кривая 2).

равна $I = env_д hd$, насыщение тока при неизменной концентрации электронов означает, что *в Ge и Si дрейфовая скорость электронов в сильных электрических полях от напряженности поля не зависит.*

На первый взгляд такая ситуация кажется очень странной. Электрическое поле, ускоряющее электроны, растет, а скорость направленного движения электронов не меняется. Вспомним, однако, что дрейфовая скорость электронов определяется двумя процессами: ускорением электронов полем и их торможением в результате столкновений с атомами кристаллической решетки. Величина подвижности как раз и определяется процессами столкновения электронов с кристаллической решеткой. Так вот оказывается, что при больших полях эффективность этих процессов повышается, и подвижность электронов в Ge и Si с ростом поля уменьшается. В очень сильных полях подвижность падает обратно пропорционально напряженности поля. При этом (см. формулу (*)) дрейфовая скорость электронов перестает зависеть от напряженности поля E — насыщается (рис. 3).

Насыщение дрейфовой скорости электронов в Ge и Si в сильных электрических полях было открыто задолго до того, как Ганн приступил к своим исследованиям. То обстоятельство, что свойства электронов в сильных полях могут очень заметно отличаться от свойств электронов в слабых электрических полях, также было хорошо известно. Но эффект, который Ганн наблюдал в образцах арсенида галлия (GaAs) и фосфида индия (InP), был просто поразителен.

Судите сами. К образцу прикладывались импульсы напряжения (рис. 4, *а*). Пока амплитуды импульсов были меньше некоторой пороговой величины $U_п$ (этот случай показан на рисунке 4, *а* пунктиром), все было понятно. Ток через образец нарастал, пока нарастало напряжение, оставался постоянным, когда напряжение не менялось, и уменьшался, когда напряжение спадало (пунктирная кривая на рисунке 4, *б*). Меняя амплитуду импульса напряжения и измеряя амплитуду соответствующего этому напряжению тока, можно было построить вольтамперную характеристику образца. Она приблизительно соответствовала закону Ома.

Но стоило напряжению превысить значение $U_п$ (сплошная кривая на рисунке 4, *а*), как ток *при постоянном напряжении* начинал периодически изменяться со временем (этот случай показан на рисунке 4, *б* сплошной кривой). Проделав измерения на образцах различной длины l, Ганн установил, что пороговое напряжение пропорционально длине

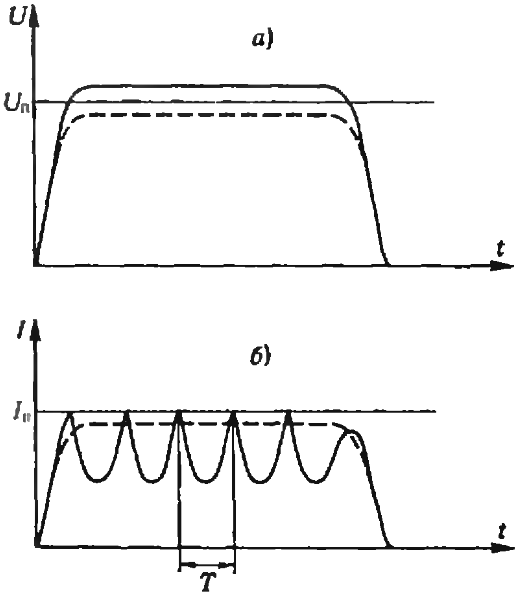


Рис. 4. Зависимость от времени напряжения на образце (*а*) и тока через образец (*б*) в экспериментах Ганна. Пунктиром показан случай, когда $U < U_п$, сплошными кривыми — когда $U > U_п$.

образцов: $U_п = E_п l$, где $E_п$ — приблизительно одинаковое для всех образцов значение напряженности поля. Для GaAs величина $E_п$ составляла примерно $3{,}2 \cdot 10^5$ В/м. Период колебаний тока был также пропорционален длине образца и равнялся приблизительно $T \approx 2l/v_п$, где $v_п \approx \mu E_п$.

Пытаясь понять, что происходит в образце, когда возникают колебания, Ганн проделал замечательное по уровню экспериментального мастерства исследование открытого им эффекта. Он установил, что, когда напряжение на образце превышает пороговое значение $U_п$, характер протекания тока и распределение напряженности электрического поля в образце совершенно меняются. При $U < U_п$ ток в образце представляет собой поток электронов, текущих от того контакта образца, к которому приложен «минус» источника напряжения (от катода), к контакту, к которому приложен «плюс» (к аноду); электрическое поле распределено вдоль образца однородно (пунктирная кривая на рисунке 5). В этих условиях вольтамперная характеристика образца соответствует закону Ома. Но как только напряжение, подаваемое на образец, достигает порогового значения $U_п$, характер распределения поля вдоль образца резко меняется. В образце у катода возникает узкая область очень сильного поля — «домен»*). Хотя ширина этой области невелика, но поле в ней настолько сильное, что на домене падает значительная часть приложенного к образцу напряжения (рис. 5). Домен движется от катода к аноду со скоростью, приблизительно равной $v_п/2$. Достигнув анодного контакта, домен разрушается. Немедленно после этого у катода зарождается новый домен, и все повторяется сначала.

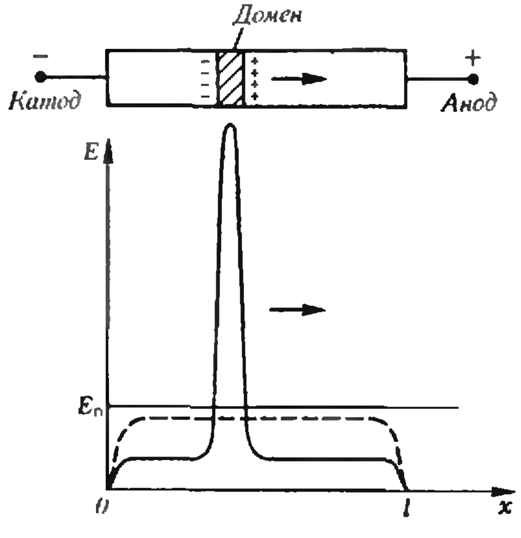


Рис. 5. Распределение электрического поля в образце при $U < U_п$ (пунктирная кривая) и при $U \geqslant U_п$ (сплошная кривая). Стрелка указывает направление распространения домена от катода к аноду. В верхней части рисунка схематически показано движение домена по образцу.

Легко понять, как связано периодическое движение домена по образцу с колебаниями тока, которые Ганн наблюдал в своих первых экспериментах.

Пусть к образцу приложили напряжение, равное $U_п$. В образце возник домен, и значительная часть напряжения упала на домене. Но это значит, что на долю остальной части образца, где домена нет, приходится теперь меньшее напряжение; следовательно, поле вне домена упало (сравните пунктирную и сплошную кривые на рисунке 5). Упало и значение скорости электронов, пропорциональное полю, а следовательно, и ток, текущий через образец.

Пока домен движется вдоль образца, ток не меняется. Когда домен, достигнув анода, начинает разрушаться, падение напряжения на нем уменьшается. При этом поле в остальной части образца растет, и, следовательно, растет ток. Но как только поле в образце в районе катода станет равным пороговому значению $E_п$, в образце начнет формироваться новый домен, и ток снова начнет уменьшаться. Пока напряжение, приложенное к образцу, превышает пороговое значение $U_п$, этот процесс периодически повторяется (см. рис. 4, *б*).

---

*) Слово «домен» происходит от латинского слова dominicus (хозяйский, господский). В средние века «доменом» называлось личное владение крупного феодала. В физике слово «домен» используется для обозначения области, свойства которой резко отличаются от свойств окружающего ее материала. Существуют ферромагнитные, сегнетоэлектрические домены, домены сильного и слабого поля. На рисунке 5 показан *домен сильного поля*.

Замечательные эксперименты Ганна позволили «увидеть», *что* происходит в образце, когда в нем возникают колебания тока. Однако они не отвечали на вопрос, *почему* в образце образуется домен, в чем физическая причина образования домена.

На этот вопрос в 1964 году сумел ответить американский физик Герберт Кремер. Он напомнил, что незадолго до открытия Ганна на основании теоретических расчетов было показано, что в арсениде галлия, фосфиде индия и некоторых других полупроводниках зависимость дрейфовой скорости электронов от напряженности поля должна иметь такой вид, как на рисунке 6. В определенном диапазоне значений напряженности поля E, начинающемся со значения $E_п$, дрейфовая скорость электронов падает с увеличением напряженности поля. Исходя из формулы (*), мы должны заключить, что в этом диапазоне значений E подвижность μ электронов уменьшается с увеличением E так резко, что дрейфовая скорость уменьшается, хотя напряженность электрического поля растет.

Как же связаны эффекты, которые наблюдал Ганн, с таким видом зависимости скорости электронов от поля?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала очень простую задачу.

Пусть к образцу приложено напряжение $U_1 < U_п$. При этом поле вдоль образца распределено однородно и равно $E_1 = U_1/l$. Дрейфовая скорость электронов v_1 равна $v_1 = \mu E_1$ (см. рис. 6), и ток представляет собой поток электронов, текущих со скоростью v_1 от катода к аноду. Предположим теперь, что где-то в образце случайно образовался небольшой участок, в котором напряженность поля чуть-чуть больше, чем значение E_1. За счет хаотического характера движения электронов в кристалле маленькие отклонения поля от среднего значения E_1 (флуктуации поля) возникают непрерывно, и наша задача — проследить за тем, что произойдет с такой флуктуацией, когда она возникнет.

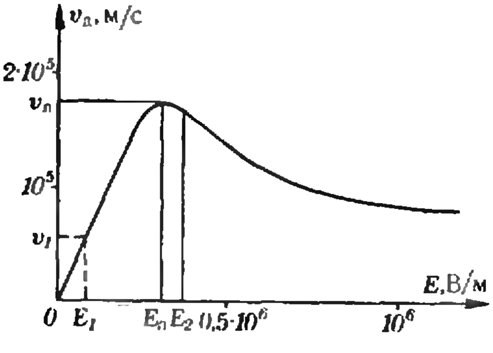


Рис. 6. Зависимость дрейфовой скорости электронов $v_д$ для GaAs от напряженности электрического поля E. Аналогичная зависимость характерна и для многих других полупроводников (InP, GaInSb, InGaAsP и др.).

Если на каком-то участке образца поле стало несколько больше, чем в остальном образце, то это значит, что на границах этого участка скопились электрические заряды: отрицательный со стороны катода и положительный со стороны анода (см. рис. 5). Иными словами, слева от выделенного участка образовался небольшой избыток электронов, а справа — небольшой «дефицит» электронов. Складываясь с полем внешнего источника, поля этих «объемных» избыточных зарядов усиливают поле внутри выделенного участка.

Что произойдет с такой флуктуацией поля дальше?

Поскольку мы рассматриваем случай, когда $E_1 < E_п$, скорость электронов пропорциональна полю. Следовательно, электроны внутри флуктуации движутся быстрее, чем электроны в остальной части образца. Это значит, что флуктуация будет «убегать» от избыточных электронов слева и «догонять» тот участок справа, где электронов не хватает. В результате флуктуация поля рассосется.

А теперь посмотрим, что произойдет с флуктуацией, когда напряженность E_2 поля в образце несколько больше, чем пороговое значение $E_п$ (см. рис. 6). Будем по-прежнему считать, что вначале поле распределено вдоль образца однородно; за счет флуктуации зарядов возникают объемные заряды; в результате в малом участке образца поле оказывается бо́льшим, чем во всем остальном образце. *Но теперь большему полю со-*

ответствует меньшая дрейфовая скорость (см. рис. 6)! Значит, флуктуация движется медленнее, чем электроны слева и справа от нее. В результате слева к уже имеющимся в избытке электронам притекут, догоняя флуктуацию, новые электроны. Справа, где наблюдался «дефицит» электронов, их станет еще меньше: электроны «убегут» от флуктуации. Таким образом, объемный заряд станет больше, и увеличится поле внутри флуктуации. Но увеличению поля при $E > E_п$ соответствует уменьшение дрейфовой скорости. В результате флуктуация станет двигаться еще медленнее, еще больше электронов накопится слева от флуктуации и еще меньше их станет справа, поле внутри флуктуации станет еще больше, и т. д.

Итак, в условиях, когда дрейфовая скорость электронов уменьшается с ростом поля, однородное распределение поля неустойчиво по отношению к малой флуктуации поля: раз возникнув, такая флуктуация начинает неудержимо нарастать.

Когда прекратится рост объемного заряда на границах флуктуации и, следовательно, рост флуктуации? Для этого, очевидно, необходимо, чтобы скорость электронов внутри флуктуации сравнялась со скоростью электронов вне ее.

Пока избыточное поле внутри флуктуации мало́, на ней падает маленькое напряжение, и ее присутствие в образце практически не сказывается на скорости электронов вне флуктуации. Однако по мере нарастания поля внутри флуктуации, на ней начинает падать все большее и большее напряжение. При этом напряжение на остальной части образца становится меньше (ведь полное напряжение, приложенное к образцу, постоянно). Поле вне «флуктуации» падает. Слово «флуктуация» взято в кавычки, поскольку как-то неудобно называть флуктуацией — словом, обозначающим небольшое случайное отклонение, — такое образование, которое поглощает заметную долю приложенного к образцу напряжения. Такая сильно выросшая флуктуация и есть домен. Вне домена скорость электронов падает с уменьшением поля, т. к. поле вне домена всегда меньше, чем $E_п$. Таким образом, по мере роста домена скорость электронов вне домена уменьшается. В конце концов скорости электронов внутри и вне домена сравняются и рост домена прекратится. По образцу от катода к аноду будет «бежать» неизменный по форме (стабильный) участок сильного поля — домен.

Эти домены и наблюдал Ганн в своих экспериментах. Максимальное поле в домене E_{max} может быть очень большим. При среднем поле на образце $E_п = U_п/l = 3{,}2$ кВ/см величина E_{max} может составлять $20 \div 300$ кВ/см.

За годы, прошедшие со времени открытия Ганном эффекта возникновения колебаний тока в GaAs и InP, в научных журналах опубликовано более 2,5 тысяч работ, посвященных исследованию эффекта Ганна и различных связанных с ним физических явлений.

Эффект Ганна наблюдался к настоящему времени более чем в двадцати полупроводниковых соединениях: антимониде индия (InSb), антимониде мышьяка (AsSb), в германии, подвергнутом сжатию, в кремнии, охлажденном до низких температур, в тройных полупроводниковых соединениях GaAlAs, InGaSb, InAsP, в четверном соединении InGaAsP и многих других полупроводниках.

Основное применение ганновских диодов (так принято называть образцы, в которых наблюдается эффект Ганна) — генераторы сверхвысокой частоты.

Когда отраженный от цели импульс радиолокатора возвращается к антенне радарной установки, его необходимо усилить. Схема чувствительного современного усилителя обязательно включает в себя сравнительно маломощный, но очень стабильный и малошумящий генератор (гетеродин). Ганновские диоды успешно работают в качестве гетеродинов во многих современных радиолокаторах.

Каждый год в мире в результате автомобильных катастроф гибнут сотни тысяч людей. Одна из основных причин аварий — превышение дозволенной скорости. В городе за соблюдением предельной скорости следят патрульные машины ГАИ, снабженные специальными радиолокаторами, автоматически фиксирующими превышение скорости. Передатчиками в таких не очень мощных радиолокаторах служат диоды Ганна. В Швеции разработана специальная дорожная система «ложный полицейский», использующая ганновские диоды. Вдоль шоссе расставлены тысячи небольших металлических будок так, чтобы от каждой будки была видна следующая. В одной из нескольких десятков будок установлен автоматический радиолокатор. Если в пределах видимости локатора машина превысит дозволенную скорость, по сигналу локатора сработает фотокамера и зафиксирует номер автомобиля. Затем водителю будет вручено требование уплатить штраф на круглую сумму. (В какой именно будке установлен локатор, водитель не знает — локатор переносится с места на место дорожной полицией. Поэтому он вынужден соблюдать дозволенную скорость на всем пути.)

С каждым годом все более широкое распространение получает телевизионное вещание через искусственные спутники Земли. Для того чтобы телевизионный сигнал с Земли достиг спутника, этот сигнал преобразовывают, повышая частоту сигнала в десятки и сотни раз. Такой же сверхвысокочастотный (СВЧ) сигнал транслируется со спутника, принимается наземными трансляционными станциями, снова преобразуется в обычный телевизионный сигнал и в таком виде передается на антенны наших телевизоров.

Расчеты показывают, что гораздо удобнее и выгоднее принимать телевизионные передачи со спутников прямо на антенны индивидуальных телевизоров, а преобразование СВЧ сигнала в обычный телевизионный осуществлять с помощью небольшой приставки в каждом телевизоре. Идеальный элемент для такого преобразователя — диод Ганна.

Так что, быть может, не далек день, когда диод Ганна появится практически в каждом доме.

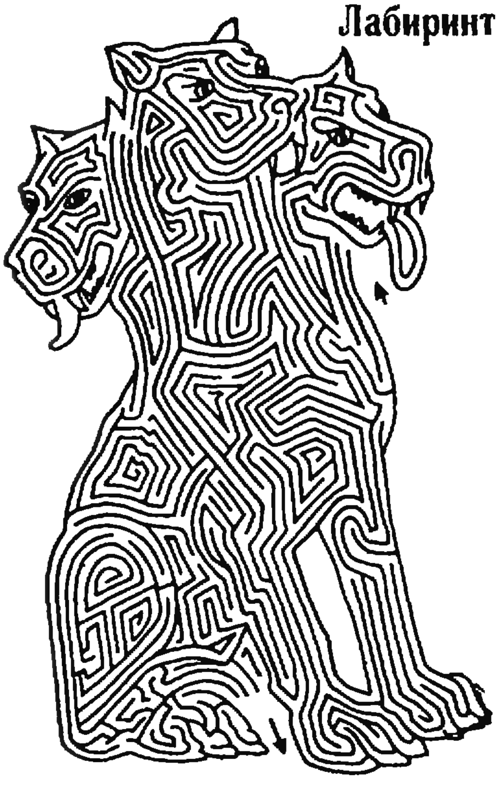
Задачи

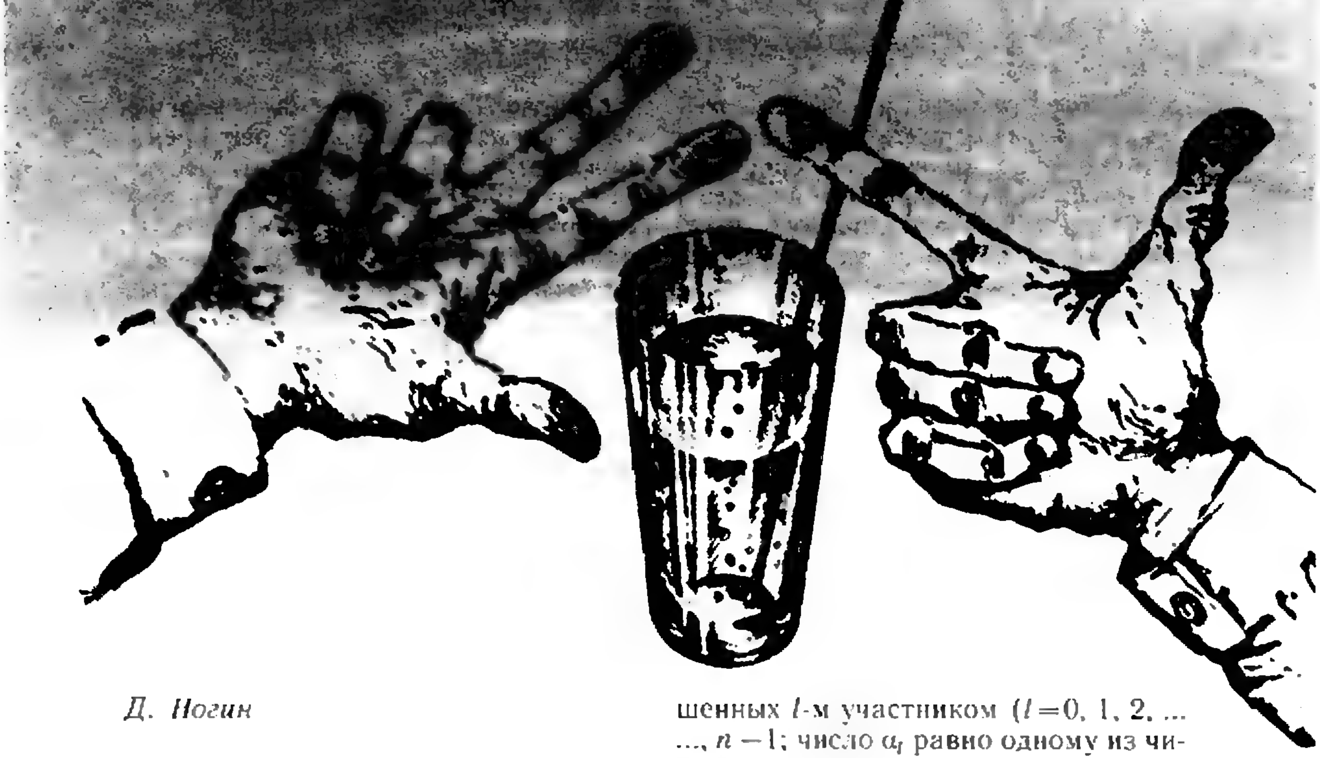
1. Образец, показанный на рисунке 1, подключен к источнику постоянного напряжения. Охлаждение образца осуществляется за счет отвода тепла через боковые грани площадью $S = l \times d$; за единицу времени через каждую грань отводится тепло $Q = \alpha S \cdot \Delta T$, где ΔT — разность температур между нагретым образцом и окружающей средой, α — постоянный коэффициент теплоотдачи. При относительном перегреве образца на $\Delta T = 5$ град становятся заметны отклонения от закона Ома. Приняв $\alpha = 10^2$ Вт/(м^2 · град), размеры образца равными $l = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $d = 10^{-3}$ м, $h = 10^{-4}$ м и считая, что удельное сопротивление его ρ лежит в пределах $10^{-4} \div 10^1$ Ом·м (типичные значения для полупроводников), определите, при каком значении напряженности поля в образце и при какой плотности тока станут заметными отклонения от закона Ома.

2. Полупроводниковый образец (такой же, как в задаче 1) подключен к источнику импульсного напряжения. Отклонения от закона Ома наблюдаются при том же, что и в задаче 1, относительном перегреве образца $\Delta T = 5$ град. Какой длительности импульсы надо использовать, чтобы достичь полей напряженности $E \sim 2 \cdot 10^6$ В/м без отклонений от закона Ома? Теплоемкость образца (в расчете на единицу объема) принять равной $c = 1{,}5 \times \times 10^6$ Дж/(м^3·град). Считать, что за время импульса образец не успевает охладиться.

3. Современная полупроводниковая технология позволяет получать образцы из GaAs длиной $l = 10^{-6}$ м. С какой частотой колеблется ток в таком образце в условиях эффекта Ганна? Подвижность электронов в GaAs $\mu = 0{,}7$ м^2/(В·с), $E_п = 3{,}2 \cdot 10^5$ В/м. (Сравните длину волны этих колебаний с длиной волны, на которой транслируются радиопередачи.)

Лабиринт





Д. Ногин

Кто пойдет за лимонадом?

В жаркий летний день собрались n человек и решили, что кто-то из них должен сходить за лимонадом. Как часто делается в таких случаях, они встали в круг и стали «бросать на пальцах». При такой жеребьевке каждый по сигналу показывает какое ему вздумается число пальцев (при одном варианте «бросания» — на одной руке, при другом — на двух), после чего число пальцев суммируется и отсчитывается (начиная с нуля) с заранее выбранного человека в заранее выбранном направлении. Тот, на ком счет кончается, и бежит за лимонадом.

Казалось бы, шансы оказаться выбранным у всех участников одинаковы. Но так ли это?

Пусть максимальное число выбрасываемых пальцев равно m; через α_l обозначим число пальцев, выброшенных l-м участником ($l=0, 1, 2, \dots, n-1$; число α_l равно одному из чисел $0, 1, \dots, m$). Число m обычно равно 5 (при «бросании» на одной руке) или 10 (при «бросании» на двух руках), но в принципе может быть любым заранее выбранным — вместо «выбрасывания пальцев» можно договориться писать числа на бумаге.

Посмотрим, что будет при $n=2$, $m=10$. Очевидно, $\alpha_0+\alpha_1=0$ в единственном случае — когда $\alpha_0=0$ и $\alpha_1=0$. Вообще, если $i\leqslant 10$, то $\alpha_0+\alpha_1=i$ в следующих $i+1$ случаях:

$$\begin{aligned}&\alpha_0=0,\ \alpha_1=i\\&\alpha_0=1,\ \alpha_1=i-1\\&\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\&\alpha_0=i,\ \alpha_1=0.\end{aligned}$$

Каждому варианту (α_0, α_1) можно сопоставить вариант $(10-\alpha_0, 10-\alpha_1)$. Поэтому число вариантов, когда $\alpha_0+\alpha_1=10+k$, совпадает с числом вариантов, когда $\alpha_0+\alpha_1=10-k$.

Счет кончается на участнике с номером 0, если общее число выброшенных пальцев четно, то есть $\alpha_0+\alpha_1\in\{0, 2, 4, \dots, 20\}$. Таких вариантов $1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1=61$. Вариантов с нечетным числом выброшенных пальцев $2+4+6+8+10+10+8+6+4+2=60$. Каждый из рассмотренных 121 вариантов равновозможен. Поэтому у участника с номером 0 шансов быть выбранным больше, чем у участника с номером 1.

Эта заметка основана на докладе, который в ноябре 1981 г. десятиклассник Митя Ногин (с. ш. № 91 г. Москвы) сделал на XIII празднике юных математиков в Батуми («Квант», 1982, № 4).

Чтобы уточнить эту оценку, введем понятие вероятности события. Отношение p количества способов, которыми может произойти интересующее нас событие, к общему количеству равновозможных вариантов называется *вероятностью* этого события. Очевидно, $0 \leqslant p \leqslant 1$.

В нашем случае ($n=2$, $m=10$) обозначим через p_0 вероятность события, состоящего в том, что за лимонадом пошел нулевой участник, а через p_1 — что пошел первый. Тогда $p_0 = \frac{61}{121} \approx 0{,}504$, $p_1 = \frac{60}{121} \approx 0{,}496$.

Нетрудно посчитать, что в случае «бросания» на одной руке при $n=2$ и $n=3$ шансы игроков быть выбранными одинаковы и равны соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, а при $n=4$ $p_0=0{,}248$, $p_1=p_3=0{,}25$, $p_2=0{,}252$. С ростом n перебор вариантов все более усложняется. Он проведен нами с помощью ЭВМ до $n=100$, исходя из следующих соображений.

Обозначим через $\Pi^n_m(N)$ количество представлений числа N в виде суммы n целых неотрицательных слагаемых, каждое из которых не превосходит числа m (при этом представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными!). Обозначим также через Π_i количество способов «бросания пальцев», при которых выбор падает на i-го участника, через Π — общее количество вариантов «бросания пальцев», через p_i — вероятность выбора i-го участника. Таким образом, $p_i = \frac{\Pi_i}{\Pi}$.

Числа Π_i и Π легко выражаются через $\Pi^n_m(N)$. Поскольку максимально возможное число «выкинутых пальцев» равно mn,

$$\Pi = \sum_{k=0}^{mn} \Pi^n_m(k).$$

Так как выбор падает на i-го участника, если число «выкинутых пальцев» имеет вид $i+kn$, причем, очевидно, $k \leqslant m$ (заметим, что при $N>mn$ $\Pi^n_m(N)=0$),

$$\Pi_i = \sum_{k=0}^{m} \Pi^n_m(i+kn). \qquad (1)$$

Число $\Pi^n_m(N)$ может быть подсчитано при помощи простой рекуррентной формулы. Количество интересующих нас представлений числа N, при которых первое слагаемое есть 0, равно, очевидно, $\Pi^{n-1}_m(N)$; количество таких представлений, при которых первое слагаемое есть 1, равно $\Pi^{n-1}_m(N-1)$; при которых первое слагаемое есть 2 — $\Pi^{n-1}_m(N-2)$; и т. д. Поскольку первое слагаемое принимает одно из значений 0, 1, 2, ..., m,

$$\Pi^n_m(N) = \Pi^{n-1}_m(N) + \Pi^{n-1}_m(N-1) + \ldots$$

$$\ldots + \Pi^{n-1}_m(N-m) = \sum_{k=0}^{m} \Pi^{n-1}_m(N-k) \qquad (2)$$

(в этой сумме некоторые слагаемые могут равняться 0: если N — «маленькое», то, начиная с некоторого k, может быть $N-k<0$ — тогда $\Pi^{n-1}_m(N-k)=0$; кроме того, если N — «большое», то, вплоть до некоторого k, может быть $N-k>m(n-1)$ — тогда тоже $\Pi^{n-1}_m(N-k)=0$).

Вычислив $\Pi^2_m(k)$ при всех $0 \leqslant k < N$, мы затем с помощью (2) найдем $\Pi^3_m(N)$ и т. д.

Соотношение (2) позволяет также доказать, что *при $n=m+1$ шансы всех участников равны.* Действительно,

$$\Pi_i = \sum_{k=0}^{m} \Pi^n_m(i+kn) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} [\Pi^{n-1}_m(i+kn) +$$

$$+ \Pi^{n-1}_m(i+kn-1) + \ldots$$

$$\ldots + \Pi^{n-1}_m(i+kn-m)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \{\Pi^m_m(i+km+k) +$$

$$+ \Pi^m_m(i+km+k-1) + \ldots$$

$$\ldots + \Pi^m_m(i+km+k-m)\}.$$

«Фигурная скобка» при каждом k имеет вид

$$\Pi^m_m(a) + \Pi^m_m(a-1) + \Pi^m_m(a-2) + \ldots$$

Оказывается, «фигурные скобки» при соседних k «стыкуются»: первое слагаемое в «фигурной скобке» с $k=t$ равно $\Pi^m_m(i+tm+t)$, последнее сла-

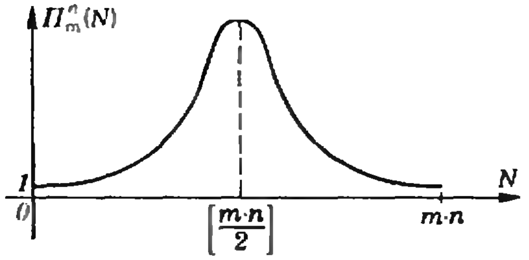
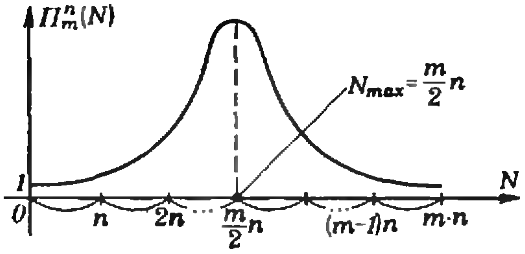
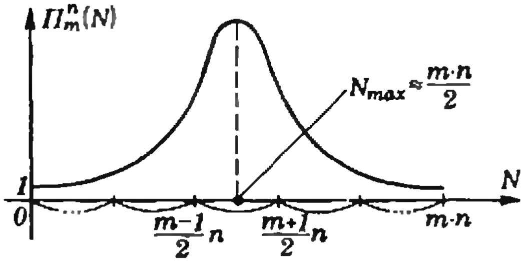


Рис. 1.



а) Число m чётно



б) Число m нечётно

Рис. 2.

гаемое в «фигурной скобке» с $k=t+1$ равно $\Pi^m_m(i+tm+t+1)$. Значит,

$$\Pi_i=\Pi^m_m(i+m^2+m)+\Pi^m_m(i+m^2+m-1)+\ldots+\Pi^m_m(i-m).$$

Поскольку, с одной стороны, при $t>mn$ и при $t<0$ $\Pi^n_m(t)=0$ и, с другой стороны, $i\leqslant n-1=m$, мы получаем

$$\Pi_i=\Pi^m_m(m^2)+\Pi^m_m(m^2-1)+\ldots+\Pi^m_m(0)=\sum_{k=0}^{m^2}\Pi^m_m(k),$$

то есть Π_i не зависит от i.

Однако для других значений n и m *«бросание на пальцах» может оказаться очень несправедливым.* Например, вычисленные на ЭВМ для $n=100$, $m=5$ значения p_0 и p_{50} таковы: $p_0=0{,}063\%$, $p_{50}=2{,}332\%$, то есть одно больше другого почти в сорок (!) раз (при средней вероятности быть выбранным, равной $\frac{100\%}{n}=1\%$).

Нетрудно понять, что число $\Pi^n_m(N)$ при $N=0$ равно 1, затем с увеличением N оно растет, при $N=\left[\frac{mn}{2}\right]$ достигает максимума, потом резко убывает и при $N=mn$ вновь становится равным 1. Эта зависимость изображена на рисунке 1.

Таким образом, основной вклад в сумму Π_i (см. (1)) вносит слагаемое, для которого $N=i+kn$ ближе всего к $\left[\frac{mn}{2}\right]$.

Если m четно, то $\frac{mn}{2}$ — целое число и $\left[\frac{mn}{2}\right]=\frac{mn}{2}$. Значит, максимум функции $\Pi^n_m(N)$ достигается при $\frac{m}{2}\cdot n$ и счет, ведущийся по кругу, составленному n участниками, завершается на игроке с номером 0 (см. рис. 2, *а*).

Если же m нечетно, максимум $\Pi^n_m(N)$ достигается при $N=\frac{m-1}{2}n+\left[\frac{n}{2}\right]$, а максимум Π_i приходится на $i=\left[\frac{n}{2}\right]$, то есть на игрока*), стоящего напротив нулевого (рис. 2, *б*). В частности, при $m=5$ с наибольшей вероятностью за лимонадом побежит игрок, стоящий напротив того, с которого начинается счет; при $m=10$ — игрок, с которого начинается счет. Эта разница шансов тем больше, чем больше n и чем меньше m.

Для обычного класса средней школы ($n\sim40$) при «выбрасывании пальцев» одной руки ($m=5$) встать напротив начинающего выгоднее (в несколько раз), чем быть им. Однако хотелось бы верить, что овладевшие теорией не будут использовать ее в корыстных целях, а расскажут о ней своим одноклассникам.

---

*) Если n нечетно, то напротив нулевого игрока стоят два игрока ($i=(n-1)/2$ и $i=(n+1)/2$) и максимум Π_i приходится на каждого из них.

А. Варламов

Сто лет назад

У многих журналов есть рубрика «О чем писал наш журнал сто лет назад», из которой читатель узнает об интересных или курьезных, с современной точки зрения, фактах, имевших место в те времена. Нашему журналу до векового юбилея еще далеко, так что нам такую рубрику заводить пока рано. Впрочем, попытаемся представить, о чем мог бы писать журнал, аналогичный нашему, сто лет тому назад.

Тогда еще не были открыты явления сверхпроводимости и сверхтекучести, никто даже не подозревал о возможности создания лазеров и термоядерных реакторов, спутников и космических ракет. Поэтому на первый взгляд кажется, что любознательным гимназистам, интересующимся физикой, читать было не о чем. Однако читали и небезуспешно — выросло поколение замечательных физиков, создавших сложную современную физическую науку.

Недавно автору этих строк в руки попала ветхая книга Б. Доната «Физика в играх для юношества», изданная в конце XIX века. В те времена изучение физики носило более «опытный», наглядный и занимательный характер.

Ниже приводится описание нескольких забавных экспериментов, взятых из указанной книги.

Фонтан, бьющий по приказанию

Устройство такого фонтана показано на рисунке 1. Бутыль *А* (вместимостью около одного литра) с двумя горлышками (верхним и боковым) установлена на подставку *В*, рядом с которой находится резервуар *С* для сбора воды. Оба горлышка закрыты резиновыми пробками с вставленными в них изогнутыми трубками *а* и *в*. Трубка *в* служит для основного стока фонтана, а трубка *а*, конец которой немного не доходит до дна резервуара, играет роль своеобразного замка.

Если трубка *а* открыта, воздух поступает в бутыль, и вода свободно вытекает из нее через трубку *в*, увеличивая количество воды в резервуаре. Как только уровень воды достигает отверстия трубки *а*, доступ воздуха в бутыль прекращается, и вода перестает течь из трубки *в* — фонтан иссяк!

Для того чтобы он заработал вновь, необходимо открыть отверстие в трубке *а*. Для этой цели служит трубка *с* в дне резервуара. Если ее диаметр меньше диаметра трубки *в*, во время работы фонтана приток воды в резервуар превышает ее расход, и в некоторый момент отверстие трубки *а* закроется — фонтан тут же «умолкнет». Когда же количество воды убавится настолько, что конец трубки *а* откроется, фонтан заработает снова.

Скрыв от посторонних глаз внутреннее устройство фонтана (например, оклеив бутыль древесной корой), этот опыт можно показывать в качестве фокуса. Только нужно поменять местами причину и следствие. Пусть не фонтан то бьет, то «молчит», а вы, глядя на

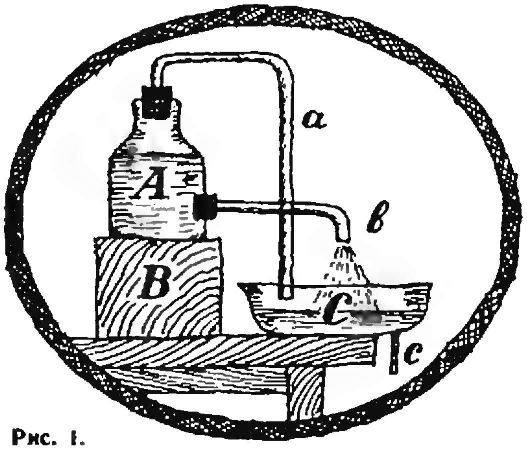


Рис. 1.

конец трубки *a*, в соответствующие моменты ему приказываете: «Фонтан, бей! Фонтан, остановись!».

Говорящая фигурка

Этот опыт основан на волновых свойствах звука, и для него вам понадобятся два вогнутых сферических зеркала с радиусом кривизны порядка одного метра.

Так как эти зеркала должны отражать звук, а не свет, то в особом блеске их поверхности надобности нет. Достаточно, чтобы размеры шероховатостей и неровностей были значительно меньше длины звуковой волны. Характерные длины волн человеческой речи составляют от десятков сантиметров до нескольких метров, так что неровности зеркальной поверхности не должны превышать 1—2 сантиметров. (Проведите аналогичный анализ для световых волн и получите численную оценку допустимых шероховатостей оптических зеркал.)

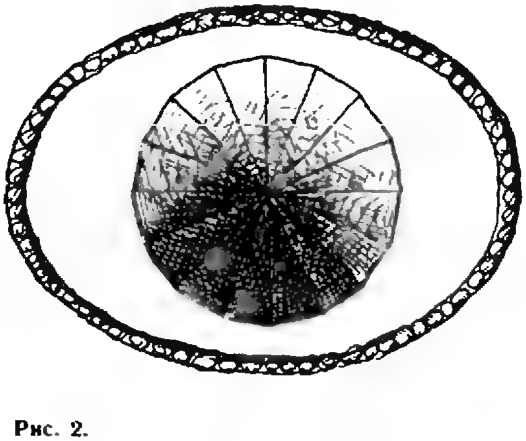


Рис. 2.

Такое зеркало нетрудно изготовить самостоятельно. Возьмите кусок картона, разрежьте его на одинаковые остроугольные равнобедренные треугольники (чем их будет больше, тем лучше), соберите из них пирамидальную поверхность и соседние боковые стороны треугольников сшейте (рис. 2). Чем длиннее треугольники вы возьмете, тем шире у вас получится зеркало. Для опыта вполне подойдут треугольники с длиной боковой стороны 30—40 см.

Сшитый картон намочите, чтобы он размяк и от этого растягивался, и при помощи большого плоского блюда придайте ему требуемую форму. Затем окончательно разровняйте зеркало по лекалу, которое тоже можно сделать самостоятельно. На куске картона длиной около 70 см и шириной 30 см начертите дугу окружности радиуса 1 м так, чтобы захватить ею всю длину картонного листа (рис. 3). Теперь аккуратно вырежьте полученную часть круга — лекало готово. Вставьте лекало в зеркало и добейтесь того, чтобы оно свободно вращалось внутри зеркала, не задевая за неровности. Сделав это, поставьте зеркало в тень сушиться.

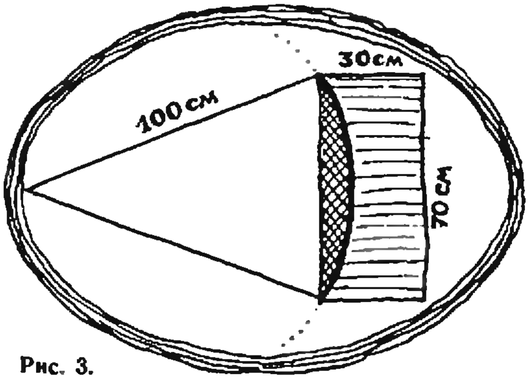


Рис. 3.

Для нашего опыта понадобятся два, по возможности одинаковых, зеркала. Повесьте их на стены в двух комнатах одно напротив другого так, чтобы между зеркалами находилась дверь. (Расстояние от стены до стены может достигать десяти метров.) Зеркала обязательно должны висеть строго напротив друг друга. Чтобы проверить это, в фокусе одного зеркала (он нахо-

дится на расстоянии, равном половине радиуса, от вершины зеркала) поместите часы. Их ход должен быть слышен громче всего в фокусе второго зеркала.

Теперь, когда система настроена, в фокусе одного зеркала поставьте куклу или какую-нибудь фигурку и объявите собравшимся друзьям, что она умеет отвечать на самые разные вопросы, которые ей будут шептать на ухо. Второе зеркало от зрителей нужно как-то скрыть, например занавесить дверь простыней или ярко осветить комнату с фигуркой и оставить затемненной вторую комнату.

Разумеется, один вы с этим опытом не справитесь — у фокуса дальнего зеркала должен находиться ваш надежный помощник. Здесь он услышит все, что будут говорить фигурке на ухо, и сможет отвечать на задаваемые вопросы. А в соседней комнате эти ответы будут восприниматься исходящими от самой фигурки. Объяснить это нетрудно. Если источник звука находится в фокусе одного зеркала, то, отразившись от него, волны будут распространяться вдоль оси обоих зеркал, и после отражения от второго зеркала они соберутся в его фокусе.

Еще лучше, если у помощника будет рупор, через который можно слушать вопросы и давать ответы. Кроме того, что рупор усиливает звуки, он сильно искажает голоса, а это, безусловно, еще усилит эффект опыта.

Поющий бокал

Оказывается, из тонкостенного стеклянного бокала можно извлекать различные музыкальные звуки, причем весьма своеобразным способом. Впрочем, судите сами.

Вымойте руки горячей водой, чтобы удалить с пальцев жировые вещества. Обмокните палец в воду и аккуратно водите им по краю бокала, постоянно смачивая палец водой. Сначала бокал будет издавать неприятный скрипящий звук, но затем, когда края хорошо оботрутся, звуки станут мелодичнее. Меняя силу нажима пальца, вы сможете менять и тон извлекаемого из бокала звука. Кроме того, высота тона зависит еще от размеров бокала, толщины его стенок и количества содержимого в нем.

Заметим, что не любой бокал способен издавать приятные поющие звуки, поэтому поиск подходящего бокала может оказаться долгим и хлопотливым. Лучше всего поют (а не скрипят) очень тонкие бокалы, имеющие форму параболоида вращения, на длинной и тонкой ножке. Тон звучания можно менять, подливая в бокал воду — чем больше в бокале будет воды, тем ниже он будет звучать.

(И еще одно замечание к наблюдению. Когда уровень воды поднимется до середины бокала, на ее поверхности появятся волны, возникающие из-за сотрясения стенок бокала. Сильнее всего волнение будет в том месте, где в данный момент находится ваш палец.)

Интересно, что на основе описанного явления знаменитый американский ученый Бенджамин Франклин (открывший, в частности, атмосферное электричество) создал весьма оригинальный музыкальный инструмент. Целый ряд хорошо отшлифованных стеклянных чашек, просверленных в середине, на одинаковых расстояниях друг от друга прикреплялись к одной общей оси. Под ящиком, в котором находилась эта система, была приделана педаль (как у швейной машины), приводящая ось во вращение. От простого прикосновения мокрых пальцев к вращающимся чашкам окружающие звуки усиливались до фортиссимо или падали до шепота.

Сейчас трудно представить себе этот удивительный музыкальный инструмент, но люди, слышавшие его, уверяли, будто бы гармония его звуков потрясающим образом действовала как на самого исполнителя, так и на слушателей. В 1763 году свой образец этого инструмента Франклин подарил англичанке мисс Дэвис. В течение нескольких лет она демонстрировала его во многих странах Европы, а затем этот удивительный инструмент бесследно исчез.

Зеркало, которое не путает правой и левой сторон

Возьмите два обычных зеркала без рам, составьте их краями под прямым углом друг к другу зеркальной стороной вовнутрь и посмотрите прямо в угол вдоль его биссектрисы. Вы увидите свое изображение. Затем закройте один глаз, например правый,— ваше изображение закроет тоже правый глаз; поднимите левую руку — в зеркале окажется поднятой также левая рука. Почему?

Это понять нетрудно. Изображение своей левой половины в левом зеркале непосредственно вы видеть не можете, так как (следуя закону отражения) отраженные от него лучи идут не к вам, а в противоположную сторону и на своем пути встречают второе, правое зеркало. В нем-то и получается окончательное изображение вашей левой половины, которое вы увидите, так как правое зеркало расположено соответствующим для этого образом. Другими словами, одно зеркало незаметно «передает» изображение другому, в результате происходит не одно отражение, а два, так что левая половина естественно переходит снова в левую, а правая — в правую.

Теперь попробуйте плавно увеличивать угол раствора зеркал. Вначале пропадет середина лица с носом, потом останутся только одни уши, а при некотором угле изображение лица исчезнет вовсе, но при угле, близком к 180°, появится обычное изображение лица в плоском зеркале. Если опыт проводить в обратном порядке, то все будет происходить наоборот: сначала лицо начнет расплываться в ширину, нос распухнет, рот вытянется в длину, потом на переносице появится третий глаз и ... тому подобное.

Чтобы понять, почему так ведет себя изображение, попробуйте нарисовать ход лучей в такой зеркальной системе для различных углов между зеркалами.

задачник кванта

Задачи

М766 — М770; Ф778 — Ф782

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задач мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 10 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М766, М767» или «Ф778». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М766. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом натурального числа.

Ю. Ионин

М767. а) Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит $1+\sqrt{2}$ (рис. 1, *а*).
б) Каждая из трех прямых делит площадь данной фигуры пополам. Докажите, что площадь части фигуры, заключенной в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит $1/4$ всей площади фигуры (рис. 1, *б*).

В. Прасолов

М768*. Сумма n чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1, равна s. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, что сумма выбранных чисел будет отличаться от $s/3$ не более чем на $1/3$.

В. Гринберг

М769*. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке L, их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 2). Пусть R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите равенства

$$\text{а) } \frac{|LA_1|\cdot|LC_1|}{|LB|} = R; \quad \text{б) } \frac{|LA|\cdot|LC|}{|LB_1|} = r;$$

$$\text{в) } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{2r;}{R}.$$

Р. Мазов

М770*. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC. Докажите, что если углы PAB, PBC, PCA конгруэнтны, то пирамида $PABC$ — правильная.

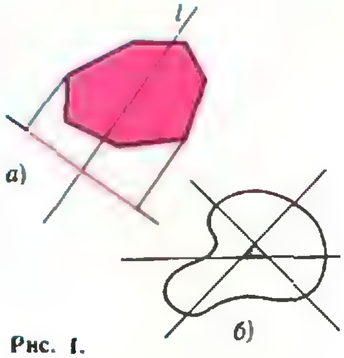


Рис. 1.

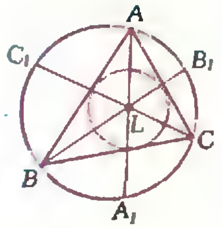


Рис. 2.

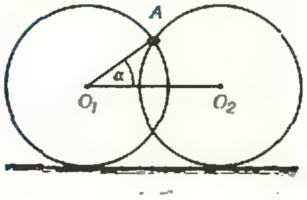


Рис. 3.

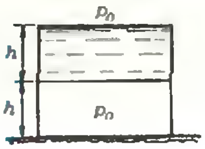


Рис. 4.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requi-

Ф778. Колечко массы m, свободно скрепляющее два тонких обруча массы M, начинает соскальзывать вниз; обручи при этом разъезжаются в разные стороны по шероховатой горизонтальной поверхности. Определить ускорение колечка в начальный момент времени, если угол AO_1O_2 (рис. 3) равен α. Трение между колечком и обручами отсутствует.

С. Кротов

Ф779. Квадрат, состоящий из двух половинок, отношение масс которых равно двум, находится на шероховатой поверхности. Под каким углом α к границе раздела половинок необходимо тянуть веревку в горизонтальной плоскости, чтобы квадрат двигался поступательно? Точка приложения силы лежит в точке пересечения стороны квадрата и границы раздела.

Э. Алиев

Ф780. Цилиндрический сосуд высотой $2h$, поровну разделенный перегородкой, содержит в верхней части воду (ее плотность ρ), в нижней — воздух при атмосферном давлении p_0 (рис. 4). В перегородке открывается небольшое отверстие, так что вода начинает протекать в нижнюю часть сосуда. Какой толщины будет слой воды в нижней части сосуда, когда воздух начнет проходить из отверстия вверх? Температура постоянна. Ускорение силы тяжести равно g.

В. Бородин

Ф781. Между двумя незаряженными металлическими концентрическими сферами радиусов a и b находится точечный заряд q на расстоянии c от центра сфер. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если им замкнуть сферы?

В. Комов

Ф782. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0=100$ В и подключили к нему резистор. При этом за некоторый интервал времени выделилась в виде тепла энергия $W_1=1$ Дж, а еще за такой же интервал — энергия $W_2=0{,}3$ Дж. Определить емкость конденсатора.

А. Зильберман

Problems

M766 — M770; P778 — P782

M766. Prove that the sum of squares of three consecutive integers cannot be the cube of a naturel number.

Yu. Ionin

M767. a) The straight line l splits a convex polygon into two parts of egal area; the parts are projected perpendicularly on a line orthogonal to l. Prove that the quotient of lengths

res no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 31st 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

of the projections is no greater that $1+\sqrt{2}$ (see figure Рис. 1, *a*, p. 27).

b) Each of three lines splits a given plane figure into two parts of equal area. Prove that the area of the parts of the figure in the triangle formed by the lines is no greater that 1/4 of that of the entire figure (see Рис. 1, *б*).

V. Prasolov

M768*. The sum of n numbers of absolute value no greater than 1 is s. Prove that some of these numbers may be chosen so that the sum of the chosen numbers will differ from $s/3$ by no more that 1/3.

V. Grinberg

M769*. The bissectors of triangle ABC intersect at the point L, their prolongations intersect the circumscribed circle at the points A_1, B_1, C_1 (see figure Рис. 2), R is the radius of the circumscribed circle, r of the inscribed one. Prove that

$$\text{a) } \frac{|LA_1|\cdot|LC_1|}{|LB|}=R; \quad \text{b) } \frac{|LA|\cdot|LC|}{|LB_1|}=r;$$

$$\text{c) } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{2r}{R}.$$

R. Mazov

M770*. The base of the triangular pyramid $PABC$ is the equilateral triangle ABC. Prove that the pyramid will be regular if the angles PAB, PBC, PCA are congruent.

P778. A small ring of mass m freely links two thin hoops of mass M begin to slide down while the hoops roll apart on a rough horizontal surface. Find the acceleration of the ring at the initial moment of time, if the angle AO_1O_2 egnals α (see figure Рис. 3). There is no friction between the ring and the hoops.

S. Krotov

P779. A square, consisting of two rectangular halves whose masses have the quotient 2, is placed on a rough surfase. A rope in the horizontal plane, applied to the point where the separating line of the halves intersects the side of the sjuare, is pulled so that the sjuare moves rectilinearly what is the angle α between the separating line and the string.

F. Aliev

P780. A cylindrical receptacle of height $2h$, separated into two equal halves by a horizontal partition, contains water (of density ϱ) in the top half and air (under atmospheric pressure p_0) in the bottom one (see figure Рис. 4). A small hole in the partition is opened, so that water begins to flow into the bottom half of the receptacle. How thick will the layer of water in the bottom be when the air will start moving upward through the hole? The temperature is constant. The acceleration of gravity is g.

V. Borodin

P781. A point charge q is placed between two uncharged metallic concentric spheres of radii a and b at the distance c from the centre of the spheres. What charge will flow through a thin conductor connecting the spheres?

V. Komov

P782. A capacitor is charged to $U_0=100\ V$ and connected to a resistance. After a certain interval of time, the energy $W_1=1\ J$ is produced (in the form of heat), then in the following (equal) interval only $W_2=0.3\ J$ is produced. Find the capacity of the condensator.

A. Zilberman

Решения задач

М739 — М745; Ф748 — Ф757

М739. *Докажите, что при любом значении x, для которого левая часть имеет смысл, выполнены равенства*

$$\left[\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]:\left[\operatorname{tg} x\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-3;$$

$$\left[\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]:\left[\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\times\ldots\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]=c_n$$

где n — нечетное число, $n>0$, c_n — константа (зависящая от n).

в) Найдите c_n для каждого нечетного n.

а) Положим $\operatorname{tg} x=z$, $\operatorname{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}=t$, тогда $\operatorname{tg}(2\pi/3)=-t$. Используя формулу тангенса суммы, получим (при $zt\neq\pm1$)

$$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{z+\frac{z+t}{1-zt}+\frac{z-t}{1+zt}}{z\cdot\frac{z+t}{1-zt}\cdot\frac{z-t}{1+zt}}=$$

$$=\frac{z(1-z^2t^2)+2z+2zt^2}{z(z^2-t^2)}=\frac{-3z^3+9z}{z^3-3z}=-3.$$

б) Используя формулы приведения $\operatorname{tg}(x+\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=\operatorname{tg} x$ и нечетность n, нетрудно проверить, что и числитель, и знаменатель дроби

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)}=c_n$$

обращаются в 0 в одних и тех же точках промежутка $[0;\pi[$: $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\pi$ (и теряют смысл — «обращаются в бесконечность» — также в одних и тех же точках $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\pi$, которые мы в дальнейшем исключаем из рассмотрения). Положим $\operatorname{tg} x=z$, $\operatorname{tg}\pi k/n=t_k$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). Числитель и знаменатель дроби $f(x)$ можно, заменив $\operatorname{tg}(x+\pi k/n)$ на $(z+t_k)/(1-zt_k)$, представить в виде отношений многочленов от z:

$$z+\frac{z+t_1}{1-zt_1}+\ldots+\frac{z+t_{n-1}}{1-zt_{n-1}}=\frac{S_1(z)}{R(z)},$$

$$z\cdot\frac{z+t_1}{1-zt_1}\cdot\ldots\cdot\frac{z+t_{n-1}}{1-zt_{n-1}}=\frac{S_2(z)}{R(z)},$$

где $R(z)=(1-zt_1)\ldots(1-zt_{n-1})$, а оба многочлена $S_1(z)$ и $S_2(z)$ имеют степень n и одни и те же корни $t_0=0$, t_1, t_2, ..., t_{n-1}. Тот факт, что дробь $f(x)$, то есть $S_1(z)/S_2(z)$, есть константа, сразу вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если многочлен $az^n+bz^{n-1}+\ldots+d=p(z)$ степени n имеет n различных корней $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, то он тождественно равен $a(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$.*

Доказательство леммы можно провести индукцией по степени n многочлена $p(z)$. Для $n=1$ оно очевидно: $az+b=a(z-z_0)$, где $z_0=-b/a$. Пусть $p(z)$ — многочлен степени $n+1$ со старшим коэффициентом a и корнями $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Тогда $p(z)=p(z)-p(z_n)=az^n+bz^{n-1}+\ldots+d-(az_n^n+bz_n^{n-1}+\ldots+d)=a(z^n-z_n^n)+b(z^{n-1}-z_n^{n-1})+\ldots=(z-z_n)q(z)$, где $q(z)$ — некоторый многочлен степени со старшим коэффициентом a и корнями $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. По предположению индукции $p(z)=(z-z_0)\cdot a(z-z_0)(z-z_1)\cdot\cdots(z-z_{n-1})=a(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n)$, то есть утверждение леммы справедливо и для многочлена степени $n+1$. (В доказательстве использовалось тождество

$$z^k-a^k=(z-a)(z^{k-1}+z^{k-2}a+\ldots+za^{k-2}+a^{k-1}),$$

из которого видно, что z^k-a^k делится на $z-a$.)

в) Найти константу c_n для любого (нечетного) n значительно труднее. Ответ: $c_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$, то есть $c_3=-3$, $c_5=5$, $c_7=-7$ и т. д. Во всех решениях, которые мы упомянем ниже, используются соображения, связанные с корнями многочленов.

$$\prod_{k=1}^{2m} \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2m+1} = (-1)^m(2m+1);$$

$$\prod_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2m+1};$$

$$\prod_{k=1}^{m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m};$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}};$$

$$\prod_{k=1}^{m} \cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m}};$$

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3};$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{ctg}\frac{(4k+1)\pi}{4m} = m;$$

$$\sum_{k=0}^{2m-1} \operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m}\right) = -\frac{2m}{\operatorname{tg}2mx};$$

$$\sum_{k=0}^{2m} \operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right) = (2m+1)\cdot\operatorname{tg}(2m+1)x;$$

$$\prod_{k=0}^{2m} \operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right) = (-1)^m\cdot\operatorname{tg}(2m+1)x;$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sin nx.$$

Константа c_n может быть получена как отношение старших коэффициентов многочленов $S_1(z)$ и $S_2(z)$. У первого старший коэффициент равен $t_1t_2\dots t_{n-1}$, у второго 1, поэтому $c_n=t_1t_2\dots t_{n-1}$. Найти знак произведения $t_1t_2\dots t_{n-1}$ нетрудно: среди тангенсов $t_k=\operatorname{tg}\pi k/n$ ровно $(n-1)/2$ отрицательных (причем $t_{n-k}=-t_k$). Ряд читателей заметили, что произведение $|t_1t_2\dots t_{n-1}|$ можно выразить как отношение $Q'_n(0)/P_{n-1}(0)$, где $Q_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева, определяемые условиями $Q_n(2\cos\varphi)=2\cos n\varphi$, $P_{n-1}(2\cos\varphi)=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ (см. статью Н. Васильева и А. Зелевинского в «Кванте», 1982, № 4, с. 17)*). Приведем похожее, но более прямое рассуждение.

Заметим, что $\operatorname{tg}nx$ обращается в 0 в точках $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\pi$ и может быть выражен как отношение $s_n(z)/r_n(z)$ двух многочленов от $\operatorname{tg}x=z$; по индукции, опираясь на формулу

$$\frac{r_{n+2}(z)}{s_{n+2}(z)}=\operatorname{tg}(n+2)x= \frac{\operatorname{tg}nx+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}nx\cdot\operatorname{tg}2x}=\frac{(1-z^2)s_n(z)+2zr_n(z)}{(1-z^2)r_n(z)-2zs_n(z)},$$

можно определить старшие и младшие члены этих многочленов:

$$\frac{s_3(z)}{r_3(z)}=\frac{-z^3+3z}{-3z^2+1},\ \frac{s_5(z)}{r_5(z)}=\frac{z^5-10z^3+5z}{5z^4-10z^2+1},\dots$$

$$\dots,\frac{s_n(z)}{r_n(z)}=\frac{e_nz^n+d_nz^{n-2}+\dots+nz}{e_nnz^{n-1}+\dots+1},\ \text{где } e_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (1)$$

При этом многочлен $s_n(z)$ должен иметь n корней $t_0=0, t_1, \dots, t_{n-1}$ и потому по лемме равен

$$s_n=e_nz(z-t_1)\dots(z-t_{n-1})=e_nz^n+\dots+e_nt_1\dots t_{n-1}z. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что $t_1t_2\dots t_{n-1}=e_nn$.

Приведем еще один способ отыскания c_n. Подставим в тождество $f(x)=c_n$ значение $x=\pi/4n$. Используя формулы приведения $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=1/\operatorname{tg}x$, нетрудно показать, что произведение тангенсов углов $\frac{\pi}{4n}, \frac{5\pi}{4n}, \dots, \frac{(4n-3)\pi}{4n}$, стоящее в знаменателе, равно $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Найти сумму в числителе можно, опираясь на тот факт, что для всех этих углов $\operatorname{tg}nx=1$, и используя формулу (1) (по существу, именно отысканию этой суммы была посвящена задача М100 — см. «Квант», 1972, № 4). Эта сумма равна n.

В заключение отметим, что наши рассуждения позволяют доказать целый ряд замечательных тождеств, показанных на полях (убедитесь в справедливости этих тождеств; одно из них встречалось в задаче М135 — «Квант», 1972, № 12; ряд соотношений между тригонометрическими функциями подобного рода и интересных следствий из них разобран в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М., ГТТИ, 1954), задачи 130—145).

В. Алексеев, А. Егоров

◆

М740. *Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — отвеча-*

а), б). Будем считать, что пшено заполняет какую-то часть кастрюли без пустот, наподобие жидкости.

Пусть радиус цилиндрической кастрюли R, а пшена насыпано столько, что оно поднялось до высоты H

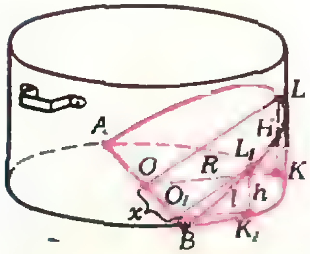
---

*) Более того, $Q'_n(x)=nP_{n-1}(x)=|t_1\dots t_{n-1}|\cdot P_{n-1}(x)$ при всех x.

ла соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа — и зажми ее пальцем! До этого уровня и надо налить воду». — «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — гордо ответила тетя Люда.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту всегда получится одинаковым.

б) Чему равно это отношение?



М741. *а) Найдите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само это число).*

б) Укажите все такие числа.

(см. рисунок). Вычислим объем, занятый пшеном. Для этого воспользуемся формулой $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, где V — объем некоторого тела, проектирующегося на отрезок $[a, b]$ оси Ox, а $S(x)$ — площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и пересекающей ее в точке с координатой x. Пусть O — центр основания цилиндра; ось Ox направим по диаметру AB (см. рисунок). Плоскость, перпендикулярная этой оси, пересекает тело, заполненное пшеном, по треугольнику $O_1L_1K_1$. Так как $\triangle O_1L_1K_1 \sim \triangle OLK$ (см. рисунок), $\frac{l}{R}=\frac{h}{H}$. Поэтому $S(x)=\frac{1}{2}lh=\frac{1}{2}\frac{H}{R}l^2$, а так как $l^2=R^2-x^2$, $S(x)=\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)$. Следовательно, объем пшена равен $V=2\int\limits_0^R \frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{R}\int\limits_0^R (R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}HR^2$. Поскольку общий объем воды и пшена равен πR^2H, отношение объемов воды и пшена равно $\left(\pi-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}-1\approx 3{,}7$ и не зависит от количества пшена и размеров кастрюли*).

Другое решение пункта а) легко получить из следующей общей теоремы: *при растяжениях (сжатиях) вдоль оси объемы всех тел умножаются на один и тот же коэффициент, равный коэффициенту растяжения (сжатия).* Попробуйте доказать эту теорему.

В. Семенова

◆

а) Ответ: $2^4\cdot 3^2\cdot 5=720$. Очевидно, это число делится на 30; в пункте б) будет показано, что оно имеет ровно 30 делителей.

б) Ответ: $2\cdot 3^2\cdot 5^4$, $2\cdot 3^4\cdot 5^2$, $2^2\cdot 3\cdot 5^4$, $2^2\cdot 3^4\cdot 5$, $2^4\cdot 3\cdot 5^2$, $2^4\cdot 3^2\cdot 5$.

Количество делителей $d(n)$ натурального числа n легко найти, разложив n на простые множители. Действительно, пусть $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1<p_2<\ldots<p_k$ — простые числа, и α_i — натуральные ($i=1, 2, \ldots, k$). Тогда любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$, где $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$. Следовательно, всего различных делителей столько же, сколько существует упорядоченных наборов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ при $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$, то есть

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

В нашем случае $d(n)=30=2\cdot 3\cdot 5$. Поэтому в выражении для n должно быть не больше трех сомножителей. А так как к тому же число n должно делиться на 30, его разложение на простые множители должно иметь вид $n=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$, причем $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=30$. Последнему соотношению удовлетворяют тройки чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4)$ $(2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)$, и только они.

М. Левин

---

*) Разумеется, в нашем решении не учитывалось, что крупинки не полностью заполняют отведенный им объем, между ними остаются просветы, — у нас крупа считалась «жидкостью». (Для одинаковых жестких шариков эти просветы составляют не менее $1-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\approx 36\%$ объема при так называемых «решетчатых» упаковках. До сих пор неизвестно, можно ли расположить шарики плотнее, если отказаться от условия «решетчатости»; см., например, книгу Д. Гильберта, С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М., «Наука», 1981), § 7.)

М742. *На а) окружности, б) сфере радиуса 1 расположены n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.*

а), б) Пусть O — центр данной окружности (сферы), $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — данные точки, $\vec{x}_i=\overrightarrow{OX_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, s — сумма квадратов попарных расстояний между точками. Тогда, поскольку $|X_iX_j|^2=(\vec{x}_j-\vec{x}_i)^2$,

$$\begin{aligned}2s=&(\vec{x}_1-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_1-\vec{x}_n)^2+\\&+(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_2-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_2-\vec{x}_n)^2+\ldots+\\&+(\vec{x}_n-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_n-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_n-\vec{x}_n)^2=\\&=2n(\vec{x}_1^2+\vec{x}_2^2+\ldots+\vec{x}_n^2)-\\&-2[(\vec{x}_1\vec{x}_1+\vec{x}_1\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_1\vec{x}_n)+(\vec{x}_2\vec{x}_1+\vec{x}_2\vec{x}_2+\ldots\\&\ldots+\vec{x}_2\vec{x}_n)+\ldots+(\vec{x}_n\vec{x}_1+\vec{x}_n\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n\vec{x}_n)]=\\&=2n(\vec{x}_1^2+\vec{x}_2^2+\ldots+\vec{x}_n^2)-2\vec{x}\cdot\vec{x},\end{aligned}$$

где $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n$. Поэтому $s=n^2-|\vec{x}|^2<n^2$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n=\vec{0}$.

Полученная нами формула для суммы квадратов попарных расстояний между точками X_i является очень частным случаем формулы Лагранжа для так называемого «момента инерции» системы точечных масс. Подробнее о моменте инерции, формуле Лагранжа и их применении в геометрии можно прочитать в статьях М. Балка и Н. Григорьева «Механика помогает геометрии» («Квант», 1973, № 11) и З. Скопеца «Расстояние между центроидами двух систем точек» («Квант», 1975, № 3).

В. Прасолов

◆

М743. *В стране N городов. а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или пароходом. Докажите, что, пользуясь лишь каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или пароходом. Докажите, что можно выбрать не менее N/2 городов и один из трех видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город. в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число N/2 большим вообще говоря, нельзя.*

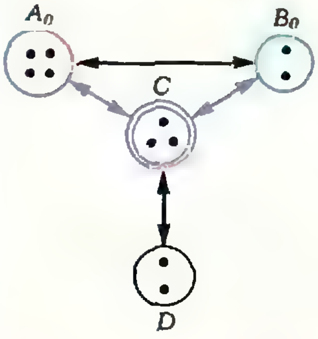


Рис. 1.

а) Утверждение легко доказывается индукцией по N. Для двух городов оно очевидно. Докажем его для $N+1$ города, предполагая, что оно справедливо для N городов.

Пусть Γ — один из $N+1$ городов, тогда оставшиеся N городов по предположению индукции соединены одним видом транспорта, например водным. Если хотя бы один из этих N городов имеет пароходное сообщение с городом Γ, то все ясно. В противном случае любой из этих городов связан самолетом с городом Γ, а значит, и с любым другим из них (с пересадкой в Γ).

б) Переформулируем задачу так:

Даны N точек, каждые две из которых соединены красным, синим или черным отрезками. Будем говорить, что какие-то из этих точек образуют *красную* (*синюю* или *черную*) *связку*, если их можно обойти, двигаясь только по красным (синим или черным) отрезкам. Надо доказать, что можно выбрать связку, содержащую не менее $N/2$ точек.

Пусть A — связка с наибольшим числом точек; для определенности будем считать, что она красная. Пусть B — наибольшая по числу точек не красная связка (например, синяя). Разобьем данные N точек на 4 непересекающихся множества: A_0 — точки, входящие в A, но не входящие в B; B_0 — точки, входящие в B, но не в A; $C=A\cap B$ — точки, входящие и в A, и в B; D — точки, не входящие ни в A, ни в B (см. рис. 1).

Предположим, что число точек в A меньше $N/2$, тогда и в связке B меньше $N/2$ точек; следовательно, множество D не пусто. Заметим теперь, что любой отрезок, соединяющий точку из A_0 с точкой из B_0 или точку из C с точкой из D, является черным (в противном случае одна из связок A или B не была бы максимальной). Отсюда вытекает, что множество C не пусто (иначе $A_0\cup B_0=A\cup B$ — черная связка, содержащая больше точек, чем A), а также, что $C\cup D$ — черная связка. Поскольку число точек в связках $A=A_0\cup C$ и $B=B_0\cup C$ не меньше, чем в связке $C\cup D$, множества A_0 и B_0 не пусты. Таким образом, все данные N точек разбиваются на две связки — $A_0\cup B_0$ и $C\cup D$. Одна из них должна содержать не менее $N/2$ точек, а это противоречит тому, что число точек в максимальной связке A меньше $N/2$.

Полученное противоречие доказывает утверждение б).

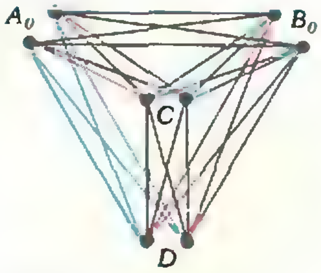


Рис. 2.

в) Построим пример множества из $N=4k$ точек с соединяющими их отрезками трех цветов, в котором число точек в максимальной связке равно в точности $N/2$. (Для $N=4k+r$ при $r=1$, 2, 3 построение аналогично, но максимальный размер связки будет равен $[N/2]+1$, причем можно доказать, что в этих случаях связка такого размера найдется всегда.)

Разделим все точки на 4 группы A_0, B_0, C и D по k точек в каждой. Соединим черными отрезками все точки множества A_0 со всеми точками B_0 и все точки C со всеми точками D. Аналогично соединим точки множеств A_0 и C, B_0 и D красными отрезками, A_0 и D, B_0 и C — синими (на рисунке 2 изображен случай $k=2$). Внутри каждой из четырех групп отрезки можно провести произвольно — любые две точки любого из множеств A_0, B_0, C и D уже соединены ломаными каждого из трех цветов.

Легко видеть, что при такой раскраске отрезков любые две из четырех групп образуют связку с максимальным числом точек, равным $2k=N/2$.

Л. Курляндчик

◆

М744* . *В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (вершины $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ углов, равных по величине $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, лежат соответственно на отрезках BC, CA и AB). Пусть A_0, B_0, C_0 — точки пересечения прямых BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и AA_1. Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$, пересекаются в одной точке.*

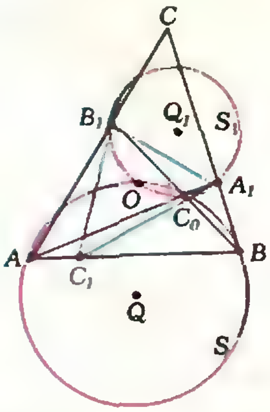


Рис. 1.

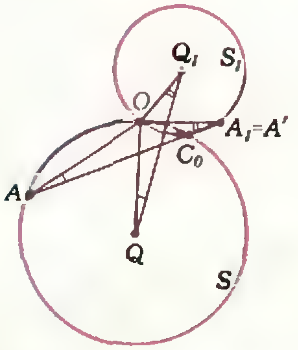


Рис. 2.

Наиболее естественное решение задачи основано на том, что все 6 рассматриваемых окружностей проходят через неподвижную точку преобразования подобия, переводящего $\triangle ABC$ в подобный ему $\triangle A_1B_1C_1$. Для нас важно, что существует лишь *единственное* такое преобразование. (В самом деле, предположим, что имеются два преобразования подобия, $П$ и $П_1$, которые переводят $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$. Тогда преобразование подобия $F=П_1^{-1}\circ П$ оставляют точки A, B и C на месте (например, $F(A)=П_1^{-1}(П(A))=П_1^{-1}(A_1)=A$). Отсюда вытекает, что F — перемещение и, более того, тождественное преобразование. Следовательно, преобразование $П_1^{-1}$ является обратным к $П$, то есть $П=П_1$.)

Разобьем теперь рассматриваемые окружности на три пары: ABC_0 и $A_1B_1C_0$, BCA_0 и $B_1C_1A_0$, CAB_0 и $C_1A_1B_0$. Возьмем любую из этих пар, например окружности S и S_1, описанные около треугольников ABC_0 и $A_1B_1C_0$. Они имеют общую точку C_0; пусть O — вторая их общая точка (см. рис. 1; если они касаются, положим $O=C_0$). Мы покажем, что существует преобразование подобия, оставляющее на месте точку O, и только ее, и переводящее $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$. Поскольку пару окружностей S и S_1 можно заменить на любую из двух других пар, и при этом должно получаться одно и то же преобразование подобия, все три пары окружностей должны иметь общую точку, что нам и требуется.

Итак, пусть пока $O\neq C_0$; обозначим центры окружностей S и S_1 через Q и Q_1. Выполняя последовательно поворот R_O^φ вокруг точки O на угол $\varphi=\widehat{QOQ_1}$ в соответствующем направлении (на рисунках — против часовой стрелки) и гомотетию H_O^k с центром O и коэффициентом $k=|OQ_1|:|OQ|$, мы получим преобразование подобия $П=H_O^k\circ R_O^\varphi$, переводящее точку Q в Q_1. При этом точка O (и только она) остается на месте, и окружность S переходит в окружность с центром Q_1, проходящую через точку $O: П(S)=S_1$. Докажем, что $П$ и есть нужное нам преобразование, то есть $П(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$.

Заметим, что точки A и A_1 находятся по разные стороны от прямой OC_0, и потому лежат на «внешних» дугах OC_0 окружностей S и S_1 (рис. 2). Следовательно, угол OAC_0 равен по величине половине центрального угла OQC_0, то есть $\widehat{OAA_1}=\widehat{OQQ_1}$, и, аналогично, $\widehat{OA_1A}=\widehat{OQ_1Q}$. Таким образом, $\triangle OAA_1 \sim \triangle OQQ_1$. С другой стороны, $\triangle OQQ_1 \sim \triangle OAA'$, где $A'=П(A)$, поскольку, по определению преобразования $П$, $\widehat{AOA'}=\varphi=\widehat{QOQ_1}$ и $|OA'|:|OA|=k=|OQ_1|:|OQ|$. Итак, треугольники OAA_1 и OAA' подобны и имеют общую сторону OA, поэтому точки A_1 и A' либо совпадают, либо симметричны относительно (OA), а так как обе они лежат на окружности S_1, $A_1=A'=П(A)$.

Аналогично доказывается, что $B_1 = \Pi(B)$. Наконец, пусть $C' = \Pi(C)$. Как и выше, из подобия треугольников $A_1B_1C' = \Pi(\triangle ABC)$, ABC и $A_1B_1C_1$ вытекает, что точки C_1 и C' либо совпадают, либо симметричны относительно (A_1B_1). Но точки C и O лежат по одну сторону от (AB), поэтому их образы C' и O должны лежать по одну сторону от (A_1B_1), и, следовательно, $\Pi(C) = C_1$*).

Если окружности S и S_1 касаются, то, как легко видеть, в качестве преобразования Π следует взять гомотетию с центром $O = C_0$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, что возможно лишь тогда, когда A_1, B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC, а $A_0 = B_0 = C_0$ — точка пересечения его медиан.

Д. Изаак, В. Дубровский

◆

М745. *а) Задана последовательность чисел (d_n) таких, что $|d_n| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что можно выбрать последовательность (s_n) из чисел $+1$ и -1 так, что для всех n*

$$|d_1s_1 + d_2s_2 + \ldots + d_ns_n| \leqslant 1.$$

б) Задана последовательность троек чисел (a_n, b_n, c_n) таких, что $|a_n| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$, $|c_n| \leqslant 1$ и $a_n + b_n + c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По ней строится новая последовательность троек (x_n, y_n, z_n), в которой $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а каждая тройка (x_n, y_n, z_n) при $n \geqslant 1$ получается из предыдущей $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ прибавлением к x_{n-1} одного из чисел a_n, b_n, c_n по нашему выбору, к y_{n-1} — другого, к z_{n-1} — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа x_n, y_n, z_n будут по абсолютной величине не больше 1 или, хотя бы, ограничены некоторой константой?

в) Выясните аналогичные вопросы для последовательностей четверок чисел.

а) Положим $u_n = s_1d_1 + \ldots + s_nd_n$. Числа s_1, s_2, ... можно выбирать по очереди следующим образом: s_1 — произвольно; пусть s_1, s_2, ..., s_n уже выбраны так, что $|u_k| \leqslant 1$ для всех $k = 1, \ldots, n$, тогда s_{n+1} берется равным -1, если числа u_n и d_{n+1} имеют одинаковые знаки, и $+1$, если разные. Совершенно очевидное соображение, которым мы здесь пользуемся, пригодится и в дальнейшем, поэтому сформулируем его в виде леммы:

Лемма. *Если два числа имеют разные знаки и каждое по модулю не превосходит M, то их сумма по модулю не больше M.*

Эта лемма применяется к числам u_n и $s_{n+1}d_{n+1}$ (в данном случае $M = 1$).

б) Будем называть тройку чисел *нормальной*, если их сумма равна 0 и каждое не превосходит по модулю 1. Докажем, что можно по очереди «складывать» тройки (a_n, b_n, c_n), переставляя в них числа так, что тройки (x_n, y_n, z_n) будет нормальной при любом n. Для этого достаточно заметить, что если тройки (x, y, z) и (a, b, c) нормальны, причем $x \geqslant y \geqslant z$ и $a \leqslant b \leqslant c$, то тройка $(x + a, y + b, z + c)$ также нормальна. В самом деле, поскольку $ax \leqslant 0$ и $cz \leqslant 0$, для сумм крайних чисел неравенства $|a + x| \leqslant 1$ и $|c + z| \leqslant 1$ выполнены по лемме (при $M = 1$), а средние числа по модулю не больше $1/2$ (если $x \leqslant y \leqslant z$, то $x + 2y \leqslant x + y + z = 0$, поэтому $y \leqslant -x/2 \leqslant 1/2$; аналогично доказывается, что $y \geqslant -1/2$ и что $|b| \leqslant 1/2$).

Задача б) имеет красивую геометрическую интерпретацию. Между тройками чисел с суммой 0 и точками плоскости можно установить соответствие с помощью «системы координат» на плоскости, состоящей из трех осей Ox, Oy и Oz, составляющих друг с другом углы величины 120°; при этом каждой точке P отвечают координаты x, y и z ее проекций на эти оси (см. рис. 1). Поскольку сумма единичных векторов $\overline{e_x}$, $\overline{e_y}$ и $\overline{e_z}$ равна 0, $x + y + z = \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_x} + \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_y} + \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_z} = \overrightarrow{OP}\,(\overline{e_x} + \overline{e_y} + \overline{e_z} = 0)$. Условия $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ и $|z| \leqslant 1$ задают три полосы ширины 2, перпендикулярные осям; их пересечение и есть шестиугольник, показанный на рисунке 1.

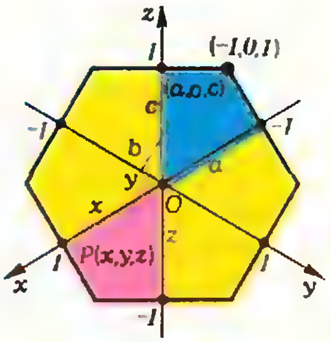


Рис. 1.

Теперь можно пояснить наше решение. Перестановке двух чисел в тройке, то есть двух координат, отвечает симметрия шестиугольника относительно одной из осей Ox, Oy, Oz, а двум «противоположно упорядоченным» тройкам (x, y, z), $x \geqslant y \geqslant z$, и (a, b, c), $a \leqslant b \leqslant c$ — два вектора, лежащие в противоположных — красном и голубом — четырехугольниках (см. рис. 1). Их сумма всегда лежит внутри шестиугольника, поэтому, если переводить симметриями

---

*) Установить совпадение точек A' и A_1, C' и C_1 можно было бы, опираясь на то наглядно очевидное соображение, что *направления обхода вершин* треугольников OAA' и OAA_1, а также треугольников $A_1B_1C_1$ и A_1B_1C', должны быть одинаковы. Однако провести такое рассуждение строго, без ссылки на чертеж, и даже всего лишь аккуратно определить «направление обхода» довольно сложно.

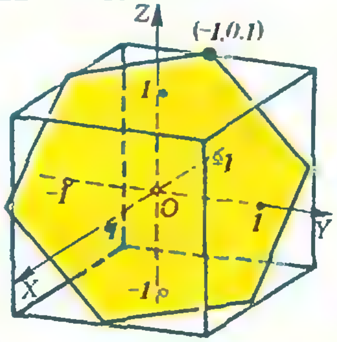


Рис. 2.

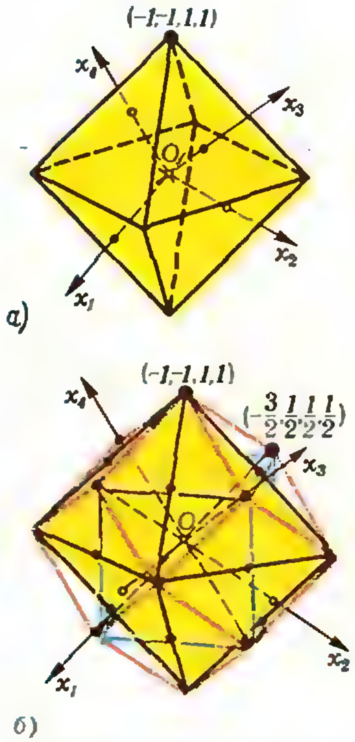


Рис. 3. Пересечение трехмерной «гиперплоскости» $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ с четырехмерным кубом $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \| x_i| < 1, i=1,2,3,4\}$ — октаэдр (рис. *а*), а с множеством точек $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \| x_i - x_j| < 2, 1 < i < j < 4\}$ — многогранник, ограниченный 12 ромбами (рис. *б*), описанный вокруг этого октаэдра, так что ребра октаэдра служат длинными диагоналями ромбов; при этом короткие диагонали ромбов образуют каркас куба. Другими словами, вершины этого 12-гранника — это вершины куба и еще 6 точек, симметричных центру куба относительно его граней, а плоскости граней 12-гранника делят пополам внешние двугранные углы при ребрах октаэдра (а также и при ребрах куба).

вектор (a_n, b_n, c_n) в четырехугольник, противоположный тому, где лежит вектор $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$, прежде чем их складывать, то мы всегда сумеем остаться внутри шестиугольника.

Заметим еще, что при надлежащем выборе системы координат $OXYZ$ в пространстве, этот же шестиугольник будет сечением куба $\{|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1, |Z| \leqslant 1\}$ плоскостью $X+Y+Z=0$ (см. рис. 2). При этом координаты любой точки плоскости шестиугольника в системах $Oxyz$ и $OXYZ$ будут совпадать.

в) Здесь уже нельзя утверждать, что все числа будут по модулю не больше 1, как показывает пример двух четверок (1; 1; —1; —1) и (1/3; 1/3; 1/3; —1): среди их попарных сумм непременно встретится число $4/3=1+1/3$. Однако при операции сложения «переставленных» четверок можно получить числа, не превосходящие некоторой постоянной; чтобы это доказать, удобно заменить условие, что числа не превосходят по модулю 1, другим, которое бы сохранялось при такой операции. Вот одно из таких условий:

(•) *все числа четверки попарно отличаются друг от друга не более чем на 2* (то есть разность наибольшего и наименьшего не больше 2). Докажем, что если две четверки чисел $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ и $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ удовлетворяют этому условию, то четверка $(x_1+a_1, x_2+a_2, x_3+a_3, x_4+a_4)$ ему также удовлетворяет. Пусть $1 < j < k < 4$. Тогда разность $(x_j+a_j)-(x_k+a_k)=(x_j-x_k)+(a_j-a_k)$ по модулю не превосходит 2, поскольку числа x_j-x_k и a_j-a_k имеют разные знаки и не превосходят по модулю 2 (лемма из пункта а) при $M=2$). Итак, мы доказали, что можно складывать четверки чисел (каждый раз, быть может, переставляя их) так, чтобы сохранялось условие (•). Осталось заметить, что в четверке чисел с суммой 0, удовлетворяющей этому условию, наибольшее по модулю число не превосходит 3/2; в самом деле, пусть, например, $x_1 > 3/2$, тогда $x_k > x_1-2 > -\frac{1}{2}$ при $k=2, 3, 4$ и $x_1+x_2+x_3+x_4 > \frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$; аналогично доказывается, что числа x_i не могут быть меньше $-3/2$.

Для m-ок чисел при $m > 5$ дело обстоит так же, как для четверок: m-ки, полученные из данной последовательности наборов из m чисел, по модулю не больших 1, подходящими перестановками чисел в наборах и сложением, будут удовлетворять условию (•); при этом, если сумма каждого набора равна 0, то все числа по модулю не будут превосходить $2-2/m$.

На рисунке 3 показана геометрическая интерпретация задачи в). Вместо трех осей на плоскости, идущих из центра правильного треугольника к его вершинам, надо взять 4 оси в пространстве, направленные к вершинам правильного тетраэдра из его центра. Поскольку сумма единичных векторов этих осей равна 0, каждой точке пространства отвечает четверка чисел с нулевой суммой, составленная из координат проекций этой точки на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3, Ox_4. Условие $|x_i| < 1$ выделяет в пространстве слой толщины 2, заключенный между плоскостями, перпендикулярными оси Ox_i; пересечение четырех таких слоев есть октаэдр (рис. 3, *а*). Условие (•) задает в пространстве «ромбододекаэдр» — 12-гранник, все грани которого — ромбы (рис. 3, *б*)*).

Попробуйте дать геометрическую интерпретацию решению задачи в).

Н. Васильев

---

*) Этот многогранник замечателен тем, что его одинаковыми экземплярами можно без просветов замостить все пространство (см., например, книгу Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (М., «Наука», 1981, с. 95). Любопытно, что центры ячеек такого замощения служат одновременно центрами шаров, образующих наиболее плотную решетчатую упаковку, о которой говорилось в сноске к решению задачи М740.

Ф748. *По винтообразному желобу с прямоугольным профилем, вырезанному на внутренней поверхности бесконечного длинного полого цилиндра, скользит маленький кубик (рис. 1). Радиус основания цилиндра равен R, шаг винта — h, коэффициент трения скольжения — μ. Найти установившуюся скорость движения кубика. (Размер кубика и глубина желоба много меньше R.)*

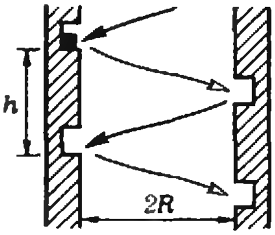


Рис. 1.

Для решения задачи удобно «развернуть» цилиндр. Траектория кубика на развертке — прямая, наклоненная под углом α к горизонту (рис. 2).

Кубик движется с установившейся скоростью, когда сумма проекций сил, действующих на кубик, на направление наклонной прямой равна нулю. Запишем это условие:

$$mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha-\mu\frac{mv_\perp^2}{R}=0. \qquad (*)$$

Здесь $mg\sin\alpha$ — проекция силы тяжести, $\mu mg\cos\alpha$ — проекция силы трения о «дно» желоба, $\mu\frac{mv_\perp^2}{R}$ — проекция силы трения о боковую стенку желоба (эта сила равна μN, где N — сила нормальной реакции со стороны боковой стенки, сообщающая кубику центростремительное ускорение $\frac{v_\perp^2}{R}=\frac{v^2\cos^2\alpha}{R}$, то есть $N=\frac{mv^2\cos^2\alpha}{R}$). Из выражения (*), учитывая, что $\sin\alpha=\frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2R^2+h^2}}$ и $\cos\alpha=\frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2R^2+h^2}}$, находим установившуюся скорость движения кубика:

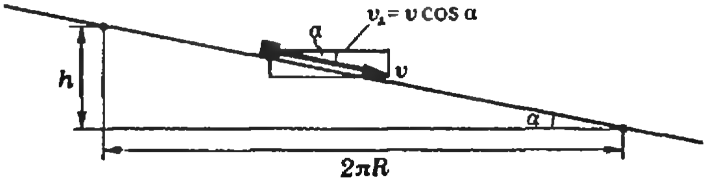


Рис. 2.

$$v=\sqrt{Rg\sqrt{1+\left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}\left(\frac{h}{2\pi R\mu}-1\right)}.$$

(Из полученного выражения видно, что кубик будет двигаться по желобу при условии $\mu<\frac{h}{2\pi R}$.)

Р. Энфиаджян

◆

Ф749. *Массивный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. На него сверху опускают диск радиуса r массы m, ось которого направлена строго вертикально (рис. 1). Расстояние между осями дисков равно d ($d>r$). Коэффициент трения между поверхностями дисков равен μ. Определить установившуюся угловую скорость малого диска. Какой момент сил необходимо приложить к оси большого диска, чтобы скорость его вращения оставалась неизменной? Трение в осях отсутствует.*

Посмотрим, как будет двигаться малый диск сразу после соприкосновения с большим.

Выберем два одинаковых небольших участка малого диска, расположенных на одном диаметре симметрично относительно центра диска. На рисунке 2 точки A_1 и A_2 — центры масс таких участков. В момент касания дисков (когда малый диск еще покоится) скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ тех точек большого диска, которые соприкасаются с точками A_1 и A_2 малого диска, направлены так, как показано на рисунке 2 ($|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=\Omega|OA_1|=\Omega|OA_2|$). Понятно, что вдоль векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ будут направлены в момент касания силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие со стороны большого диска на участки A_1 и A_2 малого диска ($|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$). Поскольку плечо силы $\vec{F}_1$ относительно оси малого диска (l_1 на рисунке 2) меньше плеча силы $\vec{F}_2$ (l_2 на рисунке 2), суммарный момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ будет закручивать малый диск в направлении вращения большого диска.

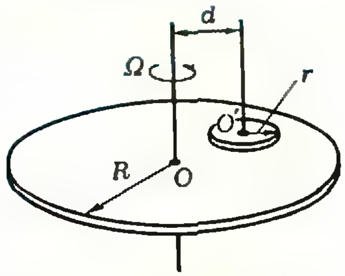


Рис. 1.

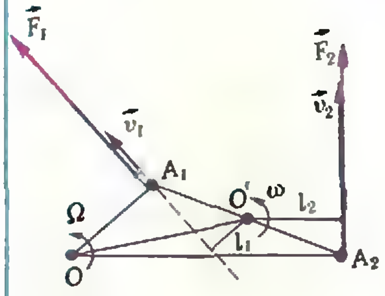


Рис. 2.

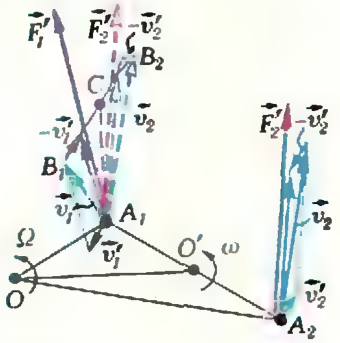


Рис. 3.

Рассмотрев аналогичные пары участков малого диска, мы придем к выводу, что сразу после касания малый диск начнет закручиваться в направлении вращения большого диска.

Пусть в некоторый момент времени угловая скорость малого диска стала равной ω. Скорости участков A_1 и A_2 будут равны соответственно $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ и $|\vec{v}_1'|=|\vec{v}_2'|=\omega r$, где $r=|O'A_1|=|O'A_2|$ (рис. 3). Силы трения $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$, действующие на эти участки, будут направлены вдоль векторов $(\vec{v}_1-\vec{v}_1')$ (относительная скорость точки большого диска, касающейся точки A_1) и $(\vec{v}_2-\vec{v}_2')$ (относительная скорость точки большого диска, касающейся точки A_2). Понятно, что момент пары сил $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ будет раскручивать малый диск (то есть угловая скорость диска будет меняться), если $|\vec{v}'|=|\vec{v}_2'|<\frac{B_1B_2}{2}=\Omega r$ (см. рисунок 3; для удобства сравнения векторы, «относящиеся» к точке A_2, перенесены в точку A_1).

Таким образом, пока $\omega<\Omega$, имеется отличный от нуля момент сил трения, раскручивающий малый диск. При $\omega=\Omega$ относительные скорости участков A_1 и A_2 направлены перпендикулярно отрезку OO' (вдоль отрезка A_1C на рисунке 3), и момент сил трения относительно оси малого диска равен нулю. Следовательно, и в дальнейшем малый диск будет вращаться с установившейся угловой скоростью Ω.

При $\omega=\Omega$ все силы трения, действующие на различные одинаковые участки малого диска, будут равны по абсолютной величине и направлены одинаково — перпендикулярно отрезку OO'. Согласно III закону Ньютона, результирующая всех сил трения, действующих на большой диск, будет приложена к точке большого диска, касающейся центра O' малого диска, и равна μmg. Чтобы компенсировать тормозящий момент этой силы, к оси большого диска надо приложить момент сил

$$M=\mu mga.$$

С. Кротов

◆

Ф750*. *При изменении напряжения на элементе Э ток через него меняется так, как показано на рисунке 1. Как будет меняться со временем напряжение на элементе Э, если его включить в схему, приведенную на рисунке 2 (параметры схемы указаны на рисунке)? Какого минимального сопротивления резистор можно подключить параллельно элементу Э, чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным?*

Рассмотрим поведение схемы с момента включения. В момент включения ток через катушку и элемент Э равен нулю; при этом напряжение на элементе также равно нулю, и все напряжение батареи приложено к катушке. Ток через катушку (и через элемент) начинает нарастать. Когда он достигает значения $I_1=5$ мА, происходит скачок напряжения на элементе — при фиксированном токе 5 мА (ток через катушку не может меняться скачком) напряжение на нем мгновенно увеличивается до $U_1=0{,}8$ В (см. рис. 1). При этом напряжение на катушке меняет знак $(U_1>\mathscr{E})$ и, следовательно, ток начинает убывать. Аналогично, когда ток уменьшится до значения $I_2=0{,}5$ мА, вновь произойдет скачок напряжения на элементе — оно уменьшится практически до $U_2\approx 0$, и все начинается сначала.

Рассчитаем приблизительно время τ_1 нарастания тока от $I_0=0$ до $I_1=5$ мА и время τ_2 убывания тока от $I_1=5$ мА до $I_2=0{,}5$ мА. Поскольку напряжение на элементе при увеличении тока от 0 до I_1 меняется мало, будем считать, что среднее напряжение на катушке за время τ_1 равно

$$U_{к1}\approx 0{,}2-0{,}1/2=0{,}15 \text{ В}.$$

Точно так же среднее напряжение на катушке за время τ_2 будем считать равным

$$U_{к2}\approx\frac{0{,}8+0{,}6}{2}-0{,}2=0{,}5 \text{ В}.$$

Редакция приносит извинения за неточный рисунок, приведенный в условии задачи в «Кванте» № 4 этого года (рис. 4 на с. 26).

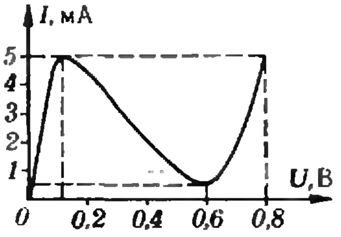


Рис. 1.

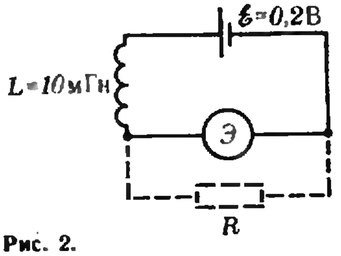


Рис. 2.

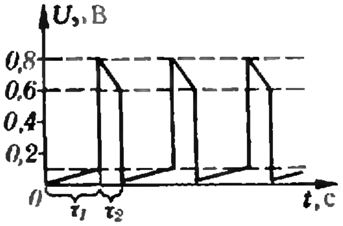


Рис. 3.

При нарастании тока

$$LI'=U_{\text{к}1},\quad I'=\frac{\Delta I}{\tau_1}=\frac{I_1-I_0}{\tau_1}=\frac{I_1}{\tau_1}.$$

Отсюда находим τ_1:

$$\tau_1=\frac{LI_1}{U_{\text{к}1}}=\frac{10\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{-3}}{15\cdot10^{-2}}\approx0{,}33\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

При убывании тока

$$LI'=U_{\text{к}2},\quad |I'|=\frac{|I_2-I_1|}{\tau_2},$$

откуда

$$\tau_2=\frac{L(I_1-I_2)}{U_{\text{к}2}}=\frac{10\cdot10^{-3}\cdot4{,}5\cdot10^{-3}}{5\cdot10^{-1}}=9\cdot10^{-5}\ \text{с}.$$

График изменения напряжения на элементе Э со временем приведен на рисунке 3.

Подключим параллельно элементу резистор. Для того чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным (то есть чтобы существовали колебания), необходимо, чтобы на «суммарной» вольтамперной характеристике (элемент + резистор) присутствовал хоть малый участок, на котором напряжение падает с ростом тока (строго говоря — в точке $U=\mathscr{E}$). Построив характеристику для резистора ($I=U/R$) и «суммарную» характеристику (проделайте это самостоятельно), найдем минимальное сопротивление, при котором напряжение на элементе не останется постоянным: $R_{\min}\approx100$ Ом.

(Отметим, что такую зависимость $I(U)$, как на рисунке 1, имеет широко распространенный прибор — туннельный диод. Схема на рисунке 2 — обычная схема генератора импульсов на туннельном диоде.)

З. Рафаилов

◆

Ф751. *На очень шероховатый цилиндр радиуса r, расположенный горизонтально, надет тонкий обруч радиуса R (рис. 1). Найти период колебаний обруча в вертикальной плоскости.*

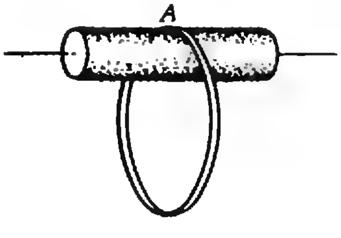


Рис. 1.

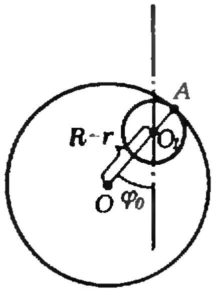


Рис. 2.

Пусть обруч отклонен от положения равновесия так, что радиус-вектор точки A — той точки, в которой в положении равновесия обруч касался цилиндра (рис. 2), — составляет с вертикалью малый угол φ_0. Энергия, которой обладает обруч в момент максимального отклонения, равна

$$E_0=Mg(R-r)(1-\cos\varphi_0),$$

где M — масса обруча. Если обруч отпустить, он начнет совершать колебания. При этом в любой момент времени полная энергия обруча будет равна E_0.

Если угол отклонения радиус-вектора OA от вертикали равен φ, то потенциальная энергия обруча равна $E_\text{п}=Mg(R-r)(1-\cos\varphi)$, а его кинетическая энергия равна $E_\text{к}=2\cdot\dfrac{M}{2}((R-r)\varphi')^2$ (мы учли, что кинетическая энергия обруча, скорость центра которого равна $(R-r)\varphi'$, где φ' — скорость изменения угла φ, складывается из энергии движения центра обруча и равной ей (поскольку отсутствует проскальзывание) энергии вращения вокруг центра). Таким образом, полная энергия обруча равна

$$E=E_\text{п}+E_\text{к}=Mg(R-r)(1-\cos\varphi)+M((R-r)\varphi')^2.$$

Согласно закону сохранения энергии $E=E_0$, то есть

$$Mg(R-r)(1-\cos\varphi)+M((R-r)\varphi')^2=$$
$$=Mg(R-r)(1-\cos\varphi_0).$$

Приравняем производные левой и правой частей этого равенства:

$$g(R-r)\sin\varphi\cdot\varphi'+2(R-r)^2\varphi'\varphi''=0,$$

или, поскольку угол φ мал и $\sin\varphi\approx\varphi$,

$$\varphi''=-\frac{g}{2(R-r)}\varphi$$

Это выражение описывает гармонические колебания, частота которых равна $\omega=\sqrt{g/2(R-r)}$.

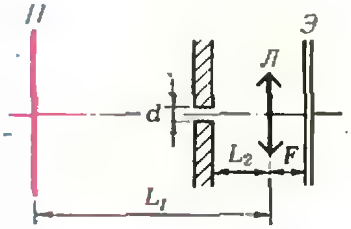
Таким образом, период колебаний обруча равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

К. Сергеев

◆

Ф752. *На расстоянии $L_1=5$ м от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см расположена равномерно освещенная вертикальная плоскость П. Между линзой и плоскостью на расстоянии $L_2=1$ м от линзы расположена вертикально непрозрачная пластинка толщины $l=5$ см, в которой проделано отверстие диаметра $d=1$ см (центр отверстия находится на главной оптической оси линзы). Как будет выглядеть пятно на экране Э, помещенном в фокальной плоскости линзы справа от нее? (Внутренние стенки отверстия не отражают свет.)*



Необычная «диафрагма», не прилегающая к линзе вплотную, существенно влияет на изображение — оно оказывается неравномерно освещенным пятном. Размер яркой области в центре пятна определяется двумя факторами: диаметром совершенно не закрытой зоны стены (плоскости П) — он равен диаметру d отверстия — и тем, что экран расположен не в плоскости резкого изображения — эта плоскость находится от линзы на расстоянии

$$f=\frac{L_1F}{L_1-F}=\frac{500\cdot10}{500-10}\approx10{,}2\ \text{см}.$$

Без учета второго фактора (изображение — в фокальной плоскости) размер пятна

$$d_1=d\frac{F}{L_1}=1\cdot\frac{10}{500}=0{,}02\ \text{см}=0{,}2\ \text{мм}.$$

За счет второго фактора изображение «размазывается», степень «размазывания» зависит от диаметра линзы D. Примем для оценки $D=2$ см. Тогда изображение точки стены на экране в фокальной плоскости вместо точки будет кругом с диаметром

$$d_2=D\frac{F'-F}{F'}=2\frac{10{,}2-10}{10}=0{,}04\ \text{см}=0{,}4\ \text{мм}.$$

Таким образом, диаметр яркого пятна в центре изображения будет примерно 0,6 мм.

Если бы линза была большого диаметра, то полный размер пятна определялся бы расстоянием от оси линзы до тех точек стены, которые еще видны через диафрагму. Ясно, что входное и выходное отверстия диафрагмы полностью перекрывают лучи от точек стены, удаленных от оси на расстояния, бо́льшие чем

$$r\approx(L_1-L_2)\frac{d}{l}=(500-100)\frac{1}{5}=80\ \text{см}.$$

Тогда пятно имело бы диаметр

$$d_3\approx2r\frac{F}{L_1}=2\cdot80\cdot\frac{10}{500}=3{,}2\ \text{см},$$

и его освещенность спадала бы от максимума в центральном круге до нуля к краям (чем дальше от оси, тем бо́льшая часть светового потока перекрывается диафрагмой, да и угол падения лучей увеличивается).

Для того чтобы сказанное было справедливо, нужно иметь линзу с диаметром $D'\approx2r\cdot\frac{L_2}{L_1-L_2}=40$ см. Так как реально линза имеет существенно меньший диаметр, размер большого пятна определяется диаметром линзы и размером входного отверстия диафрагмы. На линзу попадают лучи от тех точек стены, которые лежат внутри круга радиуса $r_1\approx\frac{L_1-L_2}{L_2}\left(\frac{D}{2}+\frac{d}{2}\right)$. Для $D=2$ см $r_1\approx6$ см, и максимальный диаметр пятна на экране —

$$d_4=2r_1\frac{F}{L_1}\approx2\cdot6\cdot\frac{10}{500}\approx0{,}24\ \text{см}=2{,}4\ \text{мм}.$$

А. Зильберман

◆

Ф753. *На рисунке 1 приведена зависимость напряжения источника питания от тока на-*

Наклон прямой вольтамперной характеристики определяется внутренним сопротивлением источника. Данный источник питания как бы состоит из двух источников с разными *грузки. Найти максимальную мощность, которую можно получить в нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки она достигается? Для чего может понадобиться такой источник питания, и как практически осуществить такую зависимость $U(I)$?*

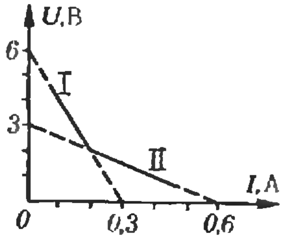


Рис. 1.

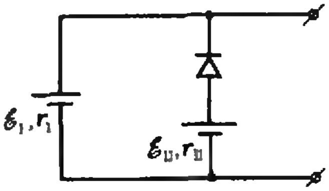


Рис. 2

ЭДС и внутренними сопротивлениями, которые «работают» только в определенных диапазонах значений U и I. Из графика определяем:

на участке I — $\mathscr{E}_{I}=U_{I}(0)=6$ В,

$$r_{I}=\frac{6\text{ В}}{0{,}3\text{ А}}=20\text{ Ом};$$

на участке II — $\mathscr{E}_{II}=U_{II}(0)=3$ В,

$$r_{II}=\frac{3\text{ В}}{0{,}6\text{ А}}=5\text{ Ом}.$$

Мощность, выделяющаяся на нагрузке с сопротивлением R, равна

$$W_R=I^2R=\frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2}.$$

Из условия $W'_R=0$ найдем, при каком R W_R максимально:

$$W'_R=\frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2}-\frac{2\mathscr{E}^2R}{(R+r)^3}=0,\text{ или }1-\frac{2R}{R+r}=0,$$

откуда получаем $R=r$.

Итак, на участках I и II максимальные мощности выделяются на нагрузках, сопротивления которых равны, соответственно,

$$R_{I}=r_{I}=20\text{ Ом},\quad R_{II}=r_{II}=5\text{ Ом}.$$

Соответственно токи в цепи должны быть равны

$$I_{I}=\frac{\mathscr{E}_{I}}{R_{I}+r_{I}}=0{,}15\text{ А},\quad I_{II}=\frac{\mathscr{E}_{II}}{R_{II}+r_{II}}=0{,}3\text{ А}.$$

Обе рабочие точки попадают на соответствующие участки, и, следовательно, на каждом из них действительно обеспечивается максимальная мощность в нагрузке.

Соответствующие максимальные значения мощности равны

$$W_{I}=I_{I}^2R_{I}=0{,}45\text{ Вт},\quad W_{II}=I_{II}^2R_{II}=0{,}45\text{ Вт}.$$

На рисунке 2 приведена простая схема, обеспечивающая зависимость $U(I)$ в цепи такую, как на рисунке 1 (диод считаем идеальным). Интересно отметить, что при значительных изменениях величины нагрузочного сопротивления мощность в нагрузке почти не изменяется. Это может оказаться очень удобным для калориметрических опытов. Подумайте сами, какова должна быть кривая зависимости U от I, чтобы мощность нагрузки вообще не зависела от величины $R_н$.

А. Зильберман

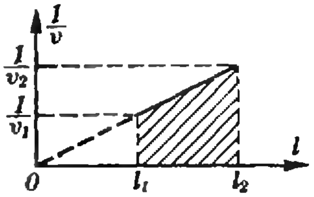
◆

Ф754. *Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость его обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1=1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1=2$ см/с. За какое время муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2=2$ м от центра муравейника?*

Скорость муравья меняется со временем не по линейному закону. Поэтому средняя скорость на разных участках пути различна, и пользоваться для решения известными формулами для средней скорости мы не можем.

Разобьем путь муравья от точки A до точки B на малые участки, проходимые за одинаковые промежутки времени Δt. Тогда $\Delta t=\frac{\Delta l}{v_{ср}(\Delta l)}$, где $v_{ср}(\Delta l)$ — средняя скорость на данном отрезке Δl. Эта формула подсказывает идею решения задачи: нарисуем график зависимости величины $\frac{1}{v_{ср}(\Delta l)}$ от l на пути от точки A до точки B. Этот график — отрезок прямой (см. рисунок). Заштрихованная на рисунке площадь под этим отрезком численно равна искомому времени. Вычислим ее:

$$S=\frac{1/v_1+1/v_2}{2}(l_2-l_1)=\left(\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2-l_1)=\frac{l_2^2-l_1^2}{2v_1l_1}$$



(так как $\frac{1}{v_2}=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}$).

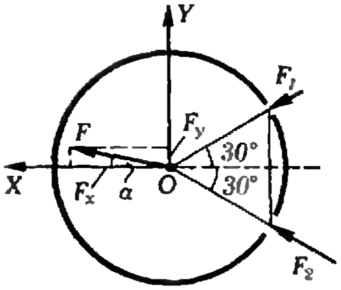
Таким образом, муравей добежит от точки A до точки B за время

$$T=\frac{4-1}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 1}=75\text{ с}.$$

С. Кротов

◆

Ф755. *Спутник представляет собой легкую жесткую сферу радиуса $R=1$ м и массы $M=1$ кг, наполненную воздухом при давлении $p=10^{-3}$ атм и температуре $T=300$ К. Одновременно в стенке сферы открываются два клапана, расположенные друг от друга на расстоянии, равном радиусу сферы. Площади клапанов $S_1=10^{-4}$ см^2 и $S_2=2\cdot 10^{-4}$ см^2. Найти величину отклонения спутника от прежней траектории за время $\tau=100$ с.*



До открытия клапанов давление внутри сферы равнялось p. Оно являлось результатом упругого отражения молекул от стенки, причем каждая молекула сообщала стенке импульс $2mv_\perp$, где $v_\perp$ — абсолютная величина перпендикулярной стенке проекции скорости молекулы. После открытия клапана каждая молекула переносит через «поверхность» отверстия только импульс $mv_\perp$. Следовательно, на сферу будут действовать силы $F_1=\frac{p}{2}S_1$ и $F_2=\frac{p}{2}S_2=pS_1$, направленные по радиусам. Спроектировав эти силы на оси OX и OY, найдем проекции F_x и F_y равнодействующей этих сил (см. рисунок):

$$F_x=F_1\cos 30°+F_2\cos 30°=\frac{3}{2}pS_1\cos 30°,$$

$$F_y=-F_1\sin 30°+F_2\sin 30°=\frac{1}{2}pS_1\sin 30°.$$

Таким образом, результирующая сила, действующая на сферу, равна по абсолютной величине

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{\frac{7}{4}}\,pS_1$$

и направлена под углом α к оси OX таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_y}{F_x}=\frac{\operatorname{tg}30°}{3}.$$

Действие этой силы приведет к равноускоренному движению сферы, которое легко рассчитать, если за рассматриваемое время τ масса воздуха внутри сферы и давление изменяются несущественно. Оценим изменение массы.

Число молекул, пролетающих за единицу времени через единичную площадку поверхности сферы, по порядку величины равно $\frac{1}{6}n\overline{v}$ (размерность — м$^{-2}$ с$^{-1}$), где n — число молекул в единице объема, $\overline{v}$ — средняя скорость теплового движения молекул. За время τ через два отверстия с общей площадью $3S_1$ вытечет масса

$$\Delta m\sim m\cdot\frac{1}{6}n\overline{v}\cdot 3S_1\tau=\frac{1}{2}\rho\overline{v}S_1\tau,$$

где $\rho\approx 10^{-3}$ кг/м^3, $\overline{v}\approx 500$ м/с. Подставляя числовые данные, находим $\Delta m\sim\frac{5}{2}\cdot 10^{-7}$ кг. Начальная же масса воздуха равна $m_0=\frac{4}{3}\pi R^3\rho\approx 4\cdot 10^{-3}$ кг. Таким образом, $\Delta m\ll m_0$.

Считая массу воздуха и давление постоянными, найдем проекции ускорения и перемещения сферы на оси OX и OY:

$$a_x=\frac{F_x}{M+m_0}\approx\frac{F_x}{M},\quad a_y=\frac{F_y}{M+m_0}\approx\frac{F_y}{M},$$

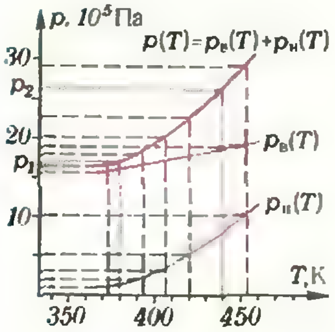
$$x=\frac{a_x\tau^2}{2}\approx\frac{F_x}{2M}\tau^2=\frac{3}{4M}pS_1\cos 30°\tau^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot 10^{-2}\text{ м},$$

$$y=\frac{a_y\tau^2}{2}\approx\frac{F_y}{2M}\tau^2=\frac{1}{4M}pS_1\sin 30°\tau^2=\frac{1}{8}\cdot 10^{-2}\text{ м}.$$

А. Стасенко

Ф756. *Баллон объема $V=2$ л содержит $m=2$ г водорода и немного воды. Давление в сосуде равно $p_1=17$ атм. Сосуд нагревают так, что давление в нем увеличивается до $p_2=26$ атм. Сколько воды при этом испарится? Чему равны начальная и конечная температуры?*

Указание. Воспользуйтесь таблицей зависимости давления насыщенных паров воды от температуры.



Задачу проще всего решать графически.

Полное давление $p(T)$ в сосуде складывается из давления насыщенных паров воды $p_н(T)$ и давления водорода $p_в(T)$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона,

$$p_в(T)=\frac{m_в}{\mu_в V}RT=\frac{2\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-3}}\cdot8{,}3\cdot T=4{,}15\cdot10^3\cdot T\ \text{Па}.$$

Вычислив $p_в(T)$ при двух значениях T — например:

$$T=373\ \text{К} — p_н\approx15{,}5\cdot10^5\ \text{Па},$$
$$T=453\ \text{К} — p_в\approx18{,}8\cdot10^5\ \text{Па},$$

— построим график $p_в(T)$ (см. рисунок). Пользуясь указанной в условии задачи таблицей, строим график $p_н(T)$. «Складывая» графики $p_в(T)$ и $p_н(T)$, строим график зависимости давления в сосуде от температуры. Из полученного графика $p(T)$ (см. рисунок) находим начальную и конечную температуры в сосуде:

$$p_1=17\cdot10^5\ \text{Па} — T_1\approx380\ \text{К},$$
$$p_2=26\cdot10^5\ \text{Па} — T_2\approx440\ \text{К}.$$

Найдем массу испарившейся воды. Считая пары воды идеальным газом, определим начальное $p_{н1}$ и конечное $p_{н2}$ давление паров воды в сосуде. Для этого воспользуемся полученными графиками. При $T_1=380$ К давление водорода равно $p_{в1}\approx15{,}5\cdot10^5$ Па и

$$p_{н1}=p_1-p_{в1}\approx1{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

При $T_2=440$ К $p_{в2}\approx18\cdot10^5$ Па и

$$p_{н2}=p_2-p_{в2}\approx8\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Запишем уравнения состояния для паров воды при $p_{н1}$, T_1 и $p_{н2}$, T_2:

$$p_{н1}V=\frac{m_{п1}}{\mu_п}RT_1,\quad p_{н2}V=\frac{m_{п2}}{\mu_п}RT_2,$$

где $m_{п1}$, $m_{п2}$ — начальная и конечная массы паров в сосуде. Отсюда находим массу испарившейся воды:

$$\Delta m_в=m_{п2}-m_{п1}=\frac{\mu_п V}{R}\left(\frac{p_{н2}}{T_2}-\frac{p_{н1}}{T_1}\right)=$$
$$=\frac{18\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-3}}{8{,}3}\left(\frac{8}{440}-\frac{1{,}5}{380}\right)\cdot10^5\approx6\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

А. Буздин

◆

Ф757. *Для получения одинаковых по размеру капель воды используется капиллярная трубка, соединенная с большим резервуаром, наполненным водой. Жидкость вытекает из капилляра при медленном перемещении поршня в резервуаре. Снаружи на свободном конце капилляра укреплен пьезоэлемент, присоединенный к звуковому генератору и передающий колебания струе воды. При достаточно большой амплитуде колебаний струя разбивается на совершенно одинаковые капли. Найти радиус капель, если диаметр трубки $d=0{,}2$ мм, скорость вытекающей жидкости $v=2$ м/с, частота звуковых колебаний $\nu=1000$ Гц.*

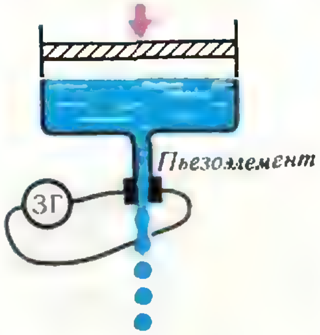
При воздействии механических (звуковых) колебаний форма вытекающей из капилляра струи будет слегка гофрированной, как это и показано на рисунке. Такой же она будет и при отсутствии пьезоэлемента — в этом случае поверхность струи «возмущает» край капилляра. Под действием ультразвука колебания конца капилляра «возмущают» струю, конечно, сильнее. Поэтому она будет «рваться» раньше, чем при отсутствии пьезоэлемента. Но в любом случае амплитуду гофрировки можно считать малой по сравнению с радиусом струи. Так что в приводимых ниже вычислениях мы будем приближенно считать форму струи цилиндрической. Радиус же струи примем равным радиусу капилляра.

Естественно считать, что объем капли определяется количеством жидкости, вытекающей из капилляра за один период звуковых колебаний:

$$\frac{\pi d^2}{4}vT=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Учитывая, что $T=1/\nu$, находим:

$$R^3=\frac{3}{16}\frac{vd^2}{\nu},\quad R=\sqrt[3]{\frac{3}{16}\frac{vd^2}{\nu}}.$$



Подставляя заданные в условии задачи числовые значения v, d и ν, получаем:

$$R = 2{,}47\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Ю. Чернышев

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, выпускаемые в 1983 году издательством «Наука». Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой», до конца 1982 года принимают без ограничений предварительные заказы (открытки) на эти книги. Мы просим всех заинтересованных читателей оформить такие заказы. Это поможет издательству точнее планировать тиражи издаваемых книг. В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет.

Математика

1. А. Дальма. *Эварист Галуа — революционер и математик* (перевод с французского). Издание 2-е (I кв.). Цена 35 к.

Эта книга о замечательном французском математике Эваристе Галуа, погибшем на дуэли в возрасте 20 лет. Свою первую работу Галуа опубликовал, еще будучи воспитанником лицея, последние свои работы приводил в порядок накануне роковой дуэли. Эти работы привели к подлинному перевороту в математике — редкий пример научной судьбы, выпавшей юноше, не достигшему 21 года.

Большое место в книге автор уделяет описанию революционной борьбы Галуа и его напряженной научной работы. «Эта книга,— пишет автор,— дань уважения, которую мы приносим Галуа за все то, что он успел сделать в математике и политике».

2. Л. С. Понтрягин. *Математический анализ для школьников.* Издание 2-е (I кв.). Цена 10 к.

Эта брошюра предназначена для первоначального ознакомления с математическим анализом и содержит материал, охватывающий все разделы математического анализа, изучаемые в средней школе.

Изложение материала построено не формально: автор не стремится к полной строгости изложения, но опирается на наглядность и здравый смысл, что очень важно при первоначальном знакомстве с предметом. Так, понятие производной вводится исходя из интуитивного представления о пределах, понятие интеграла определяется в книге как площадь криволинейной трапеции и т. д.

«Популярные лекции по математике»

1. П. П. Коровкин. *Неравенства.* Издание 5-е (II кв.). Цена 15 к.

В брошюре приведено большое количество разнообразных неравенств, в том числе знаменитое неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, неравенства Бернулли и Юнга и многие другие.

Большое внимание уделено решению задач на максимум и минимум с применением неравенств, изучаемых в книге.

2. Н. И. Воробьев. *Числа Фибоначчи.* Издание 5-е (I кв.). Цена 20 к.

Брошюра посвящена подробному изучению свойств последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих). Эти числа часто возникают в самых разных задачах анализа, алгебры, комбинаторики. В брошюре подробно изучены свойства делимости чисел Фибоначчи.

В последнем параграфе увлекательно рассказывается о том, как числа Фибоначчи «работают» в теории поиска оптимальных решений.

(Окончание см. на с. 57)

Квант для младших школьников

Задачи

1. В детском саду воспитательница кладет перед ребенком лист бумаги, на котором нарисовано несколько кружочков.

— Сколько здесь кружочков? — спрашивает она.

— Семь,— отвечает ребенок.

— Правильно! — говорит воспитательница. Затем она кладет этот лист перед другим ребенком и задает тот же вопрос.

— Пять,— отвечает ребенок.

— Правильно! — вновь говорит воспитательница.

Сколько же кружочков нарисовано на бумаге?

2. От чашки с чаем на стену отражается солнечный зайчик. Какой формы тень появится на зайчике, если мы станем сверху приближать к центру поверхности чая чайную ложку?

3. Два пятизначных числа составляют так, чтобы каждая цифра вошла по одному разу в какое-нибудь из этих чисел. Например, 46781 и 50239. Для какой пары таких чисел произведение их будет наименьшим, а для какой — наибольшим?

4. Арбуз разделили тремя разрезами ножа на 7 частей, а когда его съели, то на столе оказалось 8 корок. Второй арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 10 частей. Когда съели его, то на столе от него осталось 12 корок. Третий арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 15 частей. Как разреза́ли арбузы и сколько корок осталось от последнего?

Эти зада́чи нам предложили *А. Калинин, Г. Коткин, В. Произволов, А. Савин.*

А. Бендукидзе

Треугольник Паскаля

Возьмите лист бумаги и начертите на нем квадратную таблицу в 100 клеток (десять строк и столько же столбцов). При выборе размеров таблицы учтите, что в ее клетки вам придется вписывать числа, некоторые из которых будут трехзначными.

Ну как, готово?

Отлично! Начните заполнять таблицу.

В клетки первого столбца напишите число 1, а в клетки первой строки, кроме, конечно, самой левой, в которой уже стоит единица, — число 0. Остальные клетки таблицы заполняйте по очереди, двигаясь слева направо и сверху вниз, по *закону перехода*, показанному на рисунке 1. Так, во вторую клетку второй строки нужно написать 1 ($1+0=1$), а во вторую клетку третьей строки — 2 ($1+1=2$) и т. д. Для контроля приведем четвертую и девятую строки — если вы не ошиблись, такие же строки получились и у вас:

1 3 3 1 0 0 0 0 0 0
1 8 28 56 70 56 28 8 1 0

Посмотрите теперь внимательно на полученную таблицу. Ее нулевые элементы образуют треугольник, две стороны которого (вертикальная и косая) состоят из единиц, а третья (горизонтальная) имеет вид

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

(Разумеется, построение можно продолжить и дальше или оборвать, не доходя до десятой строчки.)

Полученный треугольник называется *треугольником Паскаля*, в честь великого французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662), который придумал и исследовал его. Чем этот треугольник замечателен? А это мы сейчас и увидим.

Посчитаем подмножества

Рассмотрим множество M_4, состоящее из четырех разных мячей — теннисного, волейбольного, футбольного и баскетбольного (рис. 2). Найдем все его подмножества (включая пустое $\varnothing$ и все множество M_4), группи-

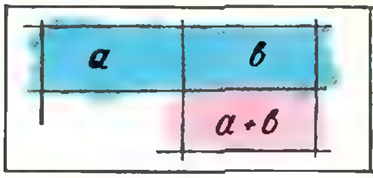


Рис. 1.

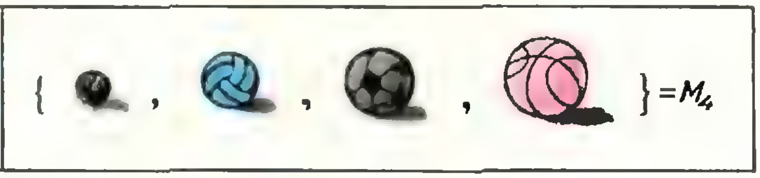


Рис. 2.

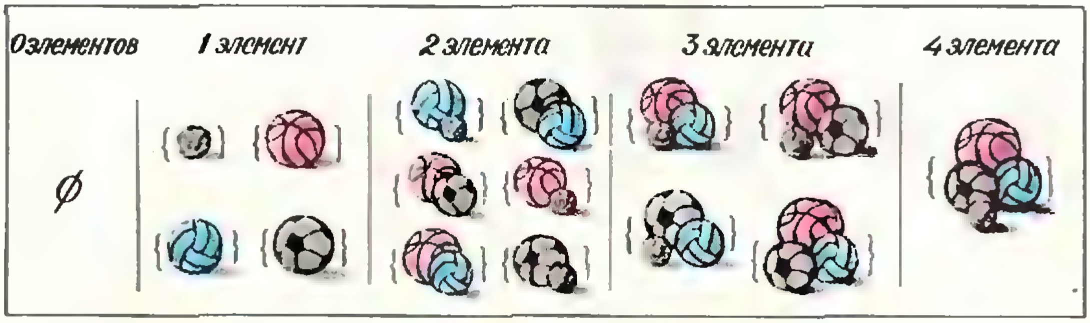


Рис. 3.

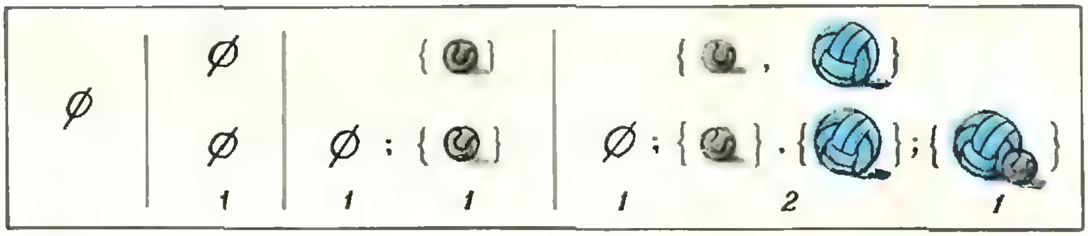


Рис. 4.

руя их по числу элементов (рис. 3), и выпишем в строчку, сколько подмножеств получилось в каждой группе:

1 4 6 4 1

Знакомая строчка? Да, получилась пятая строчка треугольника Паскаля. Это не случайно. Если бы мы взяли множество M_3 из трех элементов, мы получили бы таким образом 1 3 3 1 — четвертую строчку треугольника Паскаля. Вообще, *если взять множество M_n из n элементов и составить строчку из числа его 0-элементных подмножеств, числа 1-элементных, числа 2-элементных, ..., числа $(n-1)$-элементных и числа n-элементных подмножеств, получится $(n+1)$-я строчка треугольника Паскаля.*

Проверим это еще для $n=0, 1, 2$. Действительно, все в порядке (рис. 4).

Чтобы доказать это в общем случае, достаточно проверить, что каждая строчка получается из предыдущей по такому же закону перехода, как треугольник Паскаля. А это действительно так.

Например, посмотрим, как получается число 2-элементных подмножеств M_4. Для этого на время спрячем в карман теннисный мяч — получим множество M_3. В нем уже есть три 2-элементных подмножества:

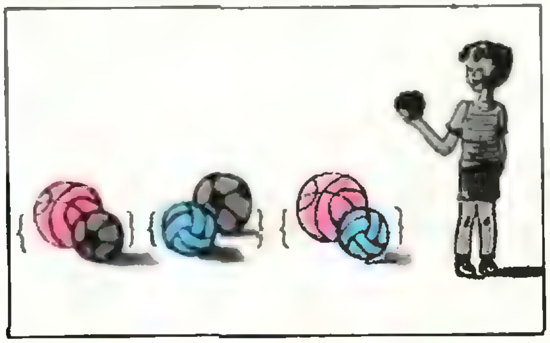


Рис. 5.

Чтобы получить остальные, нужно вынуть из кармана теннисный мяч и добавить его к трем 1-элементным подмножествам M_3:

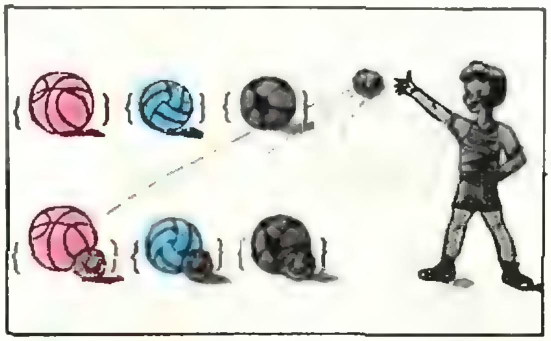


Рис. 6.

Получим $3+3=6$, как и полагается по закону перехода. Ясно, что это рассуждение общее, его можно провести для нахождения закона перехода к числу k-элементных подмножеств множества из n элементов для любых $k \leqslant n$.

Теперь, чтобы установить число подмножеств, скажем, из пяти элементов в множестве, скажем, из восьми элементов, нет необходимости производить сложные перечисления. Готовый ответ (70) написан на пятом месте девятой строки треугольника Паскаля.

Но треугольник Паскаля полезен не только для этого.

Раскроем скобки

Последовательно раскрывая скобки и приводя подобные члены, нетрудно найти, что

$$(1+x)^2=1+2x+1x$$
$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+1x^3$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+1x^4$$

Найти $(1+x)^5$ таким способом уже сложнее, а $(1+x)^8$ не захочет сосчитать самый трудолюбивый из вас. А впрочем, нужно ли считать? Не заготовлен ли ответ в соответствующей строчке треугольника Паскаля?

В начале строчки коэффициентов

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

совпадают с начальными строчками треугольника Паскаля. Чтобы доказать, что так будет и дальше, вновь достаточно найти действующий здесь закон перехода. Но, например,

$$(1+x)^5=(1+x)(1+x)^4=$$
$$=(1+x)(1+4x+6x^2+4x^3+1x^4);$$

коэффициент, скажем, при x^3 получается (при раскрытии последних скобок) как сумма коэффициентов при x^2 и x^3 из предыдущей строчки — получим $10=6+4$, как в треугольнике Паскаля. Ясно, что и это рассуждение — общее.

Мы установили, что *последовательность коэффициентов при возрастающих степенях x в раскрытии двучлена $(1+x)^n$ совпадает с $(n+1)$-й строчкой треугольника Паскаля.*

Вновь треугольник Паскаля экономит нам время: взглянув на него, мы без вычислений сразу можем написать

$$(a+b)^9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+$$
$$+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+$$
$$+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9.$$

Свойства треугольника Паскаля

Отбросив нули, нашу таблицу можно переписать в более симметричной, треугольной форме:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Отметим два свойства этой таблицы:

1) *Каждая строка симметрична относительно своей середины.*

2) *Сумма чисел n-й строчки в два раза больше суммы чисел предыдущей и равна 2^n.*

Эти свойства не трудно доказать, исходя из закона перехода. Но каждое из них можно доказать еще двумя другими способами — через число подмножеств и через коэффициенты двучлена. Проведите эти доказательства самостоятельно.

Подробнее о треугольнике Паскаля можно прочитать в брошюре В. А. Успенского «Треугольник Паскаля» («Популярные лекции по математике», выпуск 43, М., «Наука», 1978).

Задачи

1. Из пункта A по сети дорог идет группа из 2^7 человек. На каждом перекрестке, начиная с A, пришедшие туда люди делятся пополам — половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Сколько человек придет в пункты $B, C, D, \ldots, I$ соответственно?

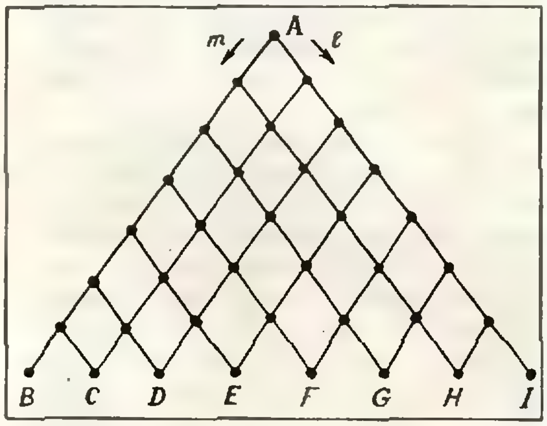


Рис. 7.

2. Сколько существует а) двузначных б) трехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

3. *Треугольным числом* называется число целых точек в треугольниках такого вида, как на рисунке 8. Как найти треугольные числа в треугольнике Паскаля?

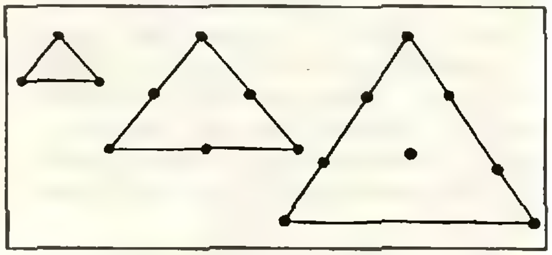


Рис. 8.

4. Представьте в виде суммы одночленов а) $(a-b)^6$; б) $(x-2y)^5$.

В. Данилин

Кинематика. Относительность движения

Раздел механики, в котором движения описываются без исследования причин, их вызывающих, называется кинематикой. Основная задача кинематики заключается в том, чтобы, зная три кинематические величины: перемещение, скорость и ускорение, найти положение тела в любой момент времени.

Всякое движение относительно, поэтому для его описания можно использовать различные системы отсчета. Все они кинематически равноправны, то есть принципиально позволяют решить ту или иную задачу. Трудно дать какие-либо общие рекомендации по выбору системы отсчета, поскольку он определяется, в основном, конкретными условиями данной задачи. В большинстве случаев следует выбирать ту систему, которая наиболее естественна и в которой решение задачи имеет наиболее простой вид. Например, при рассмотрении движения искусственного спутника Земли с точки зрения земного наблюдателя систему отсчета естественно связать с Землей. При анализе движений различных тел внутри спутника с точки зрения космонавта систему отсчета разумно связать с самим спутником, а с точки зрения земного наблюдателя — опять-таки с Землей.

Иногда приходится переходить от одной системы отсчета к другой. В разных системах описания движения могут выглядеть по-разному: могут различаться траектории движения, перемещения, скорости и ускорения тела. Однако при заданных связях между различными системами отсчета описания одного и того же движения всегда можно связать друг с другом.

А теперь поясним сказанное на конкретных задачах. Большинство из них предлагалось на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Два снаряда выпущены горизонтально вперед один вслед за другим с интервалом времени* τ *со скоростью* u *из орудия, находящегося на самолете, который летит горизонтально со скоростью* v. *Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: 1) уравнение траектории первого снаряда относительно земли; 2) уравнение траектории первого снаряда относительно самолета; 3) как изменяется положение первого снаряда относительно второго (после обоих выстрелов).*

В данном случае выбор системы отсчета фактически определен условием задачи.

Направим оси координат следующим образом: ось X — горизонтально, параллельно курсу самолета, ось Y — вертикально вниз. Начало же системы координат каждый раз будем указывать отдельно.

1) Поместим начало координат в точку, в которой находился самолет в момент вылета первого снаряда (разумеется, и самолет, и снаряд считаются материальными точками). Относительно этой неподвижной системы отсчета начальная (горизонтальная) скорость снаряда равна сумме скоростей снаряда относительно самолета и самого самолета, то есть $u+v$.

Тогда горизонтальная и вертикальная координаты снаряда в любой момент времени t таковы:

$$x=(u+v)\,t,\quad y=\frac{gt^2}{2}.$$

Выражая t из первого равенства и подставляя во второе, получим уравнение траектории снаряда относительно земли:

$$y=\frac{gx^2}{2(u+v)^2}.$$

Это безусловно знакомое всем уравнение параболы. Заметим, что уравнение траектории второго снаряда относительно земли будет точно таким же.

2) В этом случае начало системы отсчета надо связать с самолетом. Относительно него начальная скорость снаряда равна u, поэтому горизонтальная координата снаряда будет изменяться по закону $x=ut$. Вертикальная же координата по-прежнему будет иметь вид $y=gt^2/2$. Сделав аналогичные первому случаю преобразования, получим уравнение траектории снаряда относительно движущегося самолета:

$$y=\frac{gx^2}{2u^2}.$$

Очевидно, что и здесь траектория движения снаряда — парабола.

3) Для того чтобы описать движение первого снаряда относительно второго, воспользуемся той же системой отсчета, что и для первого случая, то есть поместим начало координат в ту точку, где находился самолет в момент первого выстрела.

Запишем уравнения для координат x_1 и y_1 первого снаряда и для соответствующих проекций v_{1x} и v_{1y} его скорости:

$$x_1=(u+v)\,t,\quad y_1=\frac{gt^2}{2},$$

$$v_{1x}=u+v,\quad v_{1y}=gt.$$

Здесь время t отсчитывается от момента первого выстрела, но по смыслу задачи оно не меньше интервала τ между выстрелами, то есть $t\geqslant\tau$.

Аналогичные уравнения для второго снаряда будут иметь вид

$$x_2=v\tau+(u+v)(t-\tau),\quad y_2=\frac{g\,(t-\tau)^2}{2},$$

$$v_{2x}=u+v,\quad v_{2y}=g\,(t-\tau).$$

Если наблюдатель связан со вторым снарядом, то относительно него координаты (или проекции скорости) первого снаряда равны разности соответствующих координат (или соответствующих проекций скоростей) первого и второго снарядов в неподвижной системе отсчета:

$$x_{1\,\text{отн}}=x_1-x_2=$$
$$=(u+v)\,t-v\tau-(u+v)(t-\tau)=u\tau,$$

$$y_{1\,\text{отн}}=y_1-y_2=\frac{gt^2}{2}-\frac{g\,(t-\tau)^2}{2}=$$
$$=g\tau t-\frac{g\tau^2}{2},$$

$$v_{1\,\text{отн}\,x}=v_{1x}-v_{2x}=$$
$$=(u+v)-(u+v)=0,$$

$$v_{1\,\text{отн}\,y}=v_{1y}-v_{2y}=gt-g\,(t-\tau)=g\tau.$$

Итак, после обоих выстрелов снаряды по горизонтали движутся с одинаковыми скоростями, так что расстояние между ними не изменяется и остается равным $x_{1\,\text{отн}}=u\tau$. По вертикали же первый снаряд движется относительно второго с постоянной скоростью $v_{1\,\text{отн}\,y}=g\tau$, поэтому расстояние между снарядами с течением времени изменяется по закону $y_{1\,\text{отн}}=g\tau t-g\tau^2/2$.

Задача 2. *В лобовой щит танка, движущегося со скоростью $v_т=54$ км/ч, ударяется пуля, летящая со скоростью $v_0=1800$ км/ч под углом $\varphi=60°$ к направлению движения танка, и упруго отскакивает от него (рис. 1, а). С какой скоростью $\vec{v}$ полетит отскочившая пуля?*

Задачу удобно сначала решить в системе отсчета, связанной с танком, а затем перейти в неподвижную систему отсчета.

Относительно танка скорость пули до удара равна $\vec{v}_0'=\vec{v}_0-\vec{v}_т$ (рис. 1, б). После упругого удара модуль скорости пули $\vec{v}'$ остается прежним ($v'=v_0'$), а угол «отражения» α' будет равен углу «падения» φ'.

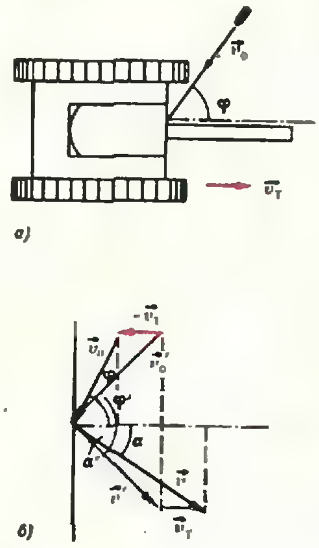


Рис. 1.

В неподвижной системе отсчета пуля после удара будет двигаться со скоростью

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_\tau.$$

Модуль и направление этой скорости найдем из рисунка 1, *б*:

$$v = ((v_0 \cos\varphi + 2v_\tau)^2 + (v_0 \sin\varphi)^2)^{1/2} \approx 1862 \text{ км/ч},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_0 \sin\varphi}{v_0 \cos\varphi + 2v_\tau} \approx 57°.$$

Задача 3. *Горизонтальный диск вращается вокруг своей оси, делая $n = 5$ об/мин. Человек идет вдоль радиуса диска с постоянной скоростью $u = 1{,}5$ м/с относительно диска. Как меняется модуль скорости человека относительно земли в зависимости от расстояния r от оси диска? Чему равен модуль этой скорости на расстоянии $R = 3$ м от оси диска?*

В любой точке диска скорость $\vec{v}$ человека относительно земли равна векторной сумме двух скоростей (рис. 2, *а*): скорости $\vec{u}$ движения человека по диску, направленной вдоль его радиуса, и линейной скорости $\vec{V}$ точки диска, в которой находится человек, направленной перпендикулярно радиусу, то есть

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}.$$

Поскольку модуль V линейной скорости связан с угловой скоростью ω, а значит, и с частотой n вращения диска: $V = \omega r = 2\pi n r$, то модуль скорости человека относительно земли равен

$$v = \sqrt{u^2 + V^2} = \sqrt{u^2 + 4\pi^2 n^2 r^2}.$$

Графически зависимость v от r представлена на рисунке 2, *б*.

На расстоянии R от оси диска модуль искомой скорости равен

$$v_R = \sqrt{u^2 + 4\pi^2 n^2 R^2} \approx 2{,}2 \text{ м/с}.$$

Задача 4. *Колесо радиуса R движется по земле поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и вращается с угловой скоростью ω (рис. 3). Найдите тангенциальную и нормальную проекции ускорения некоторой точки A на ободе колеса в неподвижной системе отсчета, связанной с землей.*

Напомним, что тангенциальная (касательная) проекция a_τ ускорения $\vec{a}$ — это проекция на направление касательной к траектории, то есть на направление скорости; a_τ отвечает за изменение модуля скорости. Нормальная проекция $a_н$ — это проекция ускорения $\vec{a}$ на направление, перпендикулярное (нормальное) к касательной, то есть перпендикулярное к скорости; $a_н$ отвечает за изменение направления скорости.

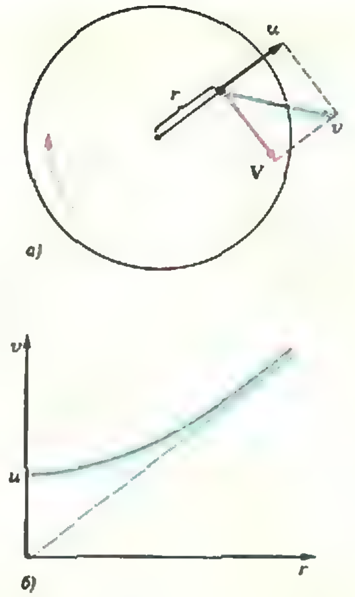


Рис. 2.

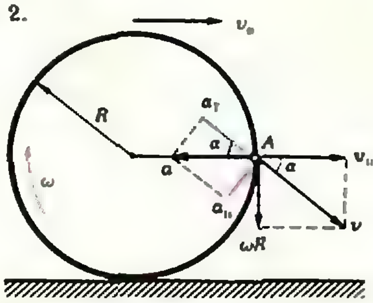


Рис. 3.

Сначала рассмотрим движение точки A в системе отсчета, связанной с колесом. Здесь эта точка равномерно вращается по окружности радиуса R, так что скорость изменяется только по направлению. Ускорение точки направлено по радиусу к центру колеса и равно по модулю $a = \omega^2 R$ (это ускорение называют также центростремительным).

Теперь перейдем в неподвижную систему, связанную с землей. Полное ускорение точки A останется прежним и по модулю, и по направлению, так как при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой ускорение не меняется. С точки зрения неподвижного наблюдателя траектория точки A — уже не окружность, а более сложная кривая (циклоида), вдоль которой точка движется неравномерно.

Рассмотрим точку A в некоторый момент времени (см. рис. 3). Ее скорость $\vec{v}$ равна по модулю $v = \sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}$ и направлена по касательной к траектории, а полное ускорение $\vec{a}$ равно по модулю $a=\omega^2R$ и направлено по радиусу к центру колеса. Найдем тангенциальную и нормальную проекции этого ускорения:

$$a_\tau = a\cos\alpha = a\frac{v_0}{v} = \frac{\omega^2Rv_0}{\sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}},$$

$$a_н = a\sin\alpha = a\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega^3R^2}{\sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}}.$$

Задача 5*. *Тяжелый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него (рис. 4). Концы нитей закреплены. Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?*

Выберем две системы отсчета: неподвижную, связанную, например, с землей, и подвижную, связанную с центром диска. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Пусть в данный момент нити касаются диска в точках A и B. В подвижной системе отсчета (связанной с центром диска) скорости $\vec{u}_A$ и $\vec{u}_B$ этих точек равны по модулю ωR и направлены вдоль нитей. В системе, связанной с землей, скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ могут быть направлены только перпендикулярно нитям, так как нити все время натянуты.

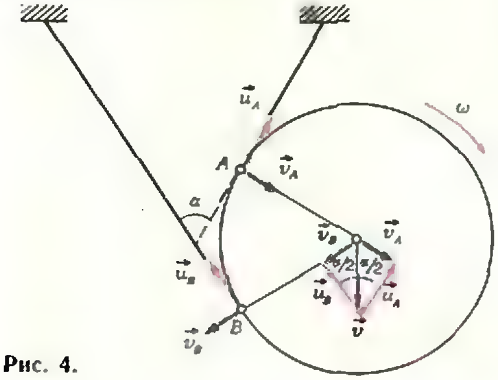


Рис. 4.

Обозначим скорость центра диска (скорость подвижной системы отсчета), направленную вертикально вниз, через $\vec{v}$. Тогда

$$\vec{v}_A = \vec{u}_A + \vec{v} \text{ и } \vec{v}_B = \vec{u}_B + \vec{v}.$$

Как видно из рисунка, при сложении соответствующих векторов получаются равные прямоугольные треугольники, из которых

$$v = \frac{u_A}{\cos\alpha/2} = \frac{\omega R}{\cos\alpha/2}.$$

Упражнения

1. Изогнутая трубка длины $L=1$ м вращается вокруг вертикальной оси OO' с угловой скоростью $\omega=0{,}1$ рад/с (рис. 5). Открытый конец трубки направлен вертикально вниз, и из него вытекает вода практически без начальной скорости относительно трубки. На расстоянии $H=10$ м ниже отверстия расположена горизонтальная плоскость. Найдите радиус окружности, которую опишет след струи воды на этой плоскости.

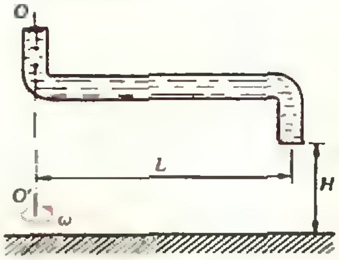


Рис. 5.

2. Гладкий диск радиуса R, плоскость которого горизонтальна, вращается вокруг своей оси. От поверхности диска отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. На каком расстоянии от оси оторвалось тело, если за время, пока оно соскользнуло с диска, диск сделал полный оборот?

3. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором спутник периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток.

4. Как показали радиолокационные измерения, Венера вращается вокруг своей оси в направлении, противоположном ее орбитальному движению. Период осевого вращения Венеры (относительно звезд) $T_1=243$ земных суток. Определите продолжительность солнечных суток на Венере, то есть время T между двумя последовательными прохождениями Солнца через один и тот же меридиан на этой планете (время от полудня до полудня). Венера обращается вокруг Солнца с периодом $T_2=225$ земных суток.

5. Тяжелый шар радиуса R лежит на горизонтальной плоскости, а в верхней точке шара покоится малое тело. По шару наносят удар, и он начинает двигаться со скоростью v. На какую высоту подпрыгнет тело после упругого отскока от плоскости? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Стандартные приемы программирования

(Фразеология программирования)

Сегодня мы публикуем первый урок одногодичного цикла «Стандартные приемы программирования». Этот цикл рассчитан на школьников, знакомых с основами программирования и желающих углубить свои знания. Вместе с выпускниками Заочной школы программирования, работавшей в «Кванте» с сентября 1979 по апрель 1982 года, контрольные задания могут выполнять и новые участники. Занятия ведет преподаватель Куйбышевского авиационного института Л. Штернберг.

К каждому уроку предлагаются подготовительные задачи, которые нужно решить самостоятельно. В уроке обсуждаются возможные варианты решений, а затем даются контрольные задания, решения которых должны быть присланы на проверку. Все примеры программ написаны на языке Паскаль; на нем же должны выполняться контрольные задания. Прочитать об этом языке можно в журнале «Квант» (№ 10—11 за 1981 г. и № 1—4 за 1982 г.).

Школьники, показавшие лучшие результаты по итогам одногодичного цикла, будут приглашены на VII Всесоюзную летнюю школу юных программистов в 1983 году.

При отсылке выполненных заданий первого урока укажите

— Фамилию, имя и отчество,
— Школу и класс,
— Изучали ли ранее программирование и где,
— Полный почтовый адрес.

В работу вложите конверт с наклеенной маркой и своим адресом для отправки проверенной работы.

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: 190000, Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ, Северо-западный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Кировской, Оренбургской, Пермской, Свердловской и Челябинской областях, в Башкирской и Удмуртской АССР, пишут по адресу: 620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.

Школьники из Астраханской, Волгоградской, Горьковской, Саратовской и Ульяновской областей, Марийской, Мордовской, Татарской и Чувашской АССР направляют свои работы по адресу: 420008, Казань, ул. Ленина, 18, Университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, Поволжский филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Белгородской, Брянской, Владимирской, Воронежской, Ивановской, Калининской, Костромской, Курской, Куйбышевской, Липецкой, Орловской, Пензенской, Рязанской, Смоленской, Тамбовской, Тульской и Ярославской областях, пишут по адресу: 443462 ГСП, Куйбышев, Молодогвардейская, 151, Куйбышевский авиационный институт, кафедра прикладной математики, Центральный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Казахской ССР и республиках Средней Азии, направляют свои работы по адресу: 642000, Северо-Казахстанская область, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86, Пединститут, кафедра алгебры и геометрии, Казахстанский филиал Заочной школы программирования.

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: 630090, Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 6, ВЦ СОАН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

Урок 1. Счет по рекуррентным формулам

Что нужно для того, чтобы говорить на каком-то языке? Нужно знать определенное количество *слов* и уметь правильно строить *фразы*, то есть знать *грамматику* языка — вот, вроде бы и все. Но нет: еще надо знать *фразеологию* — то есть *когда какие обороты речи надо применять.*

Как поздороваться с человеком? Англичане, например, считают, что лучше всего для этого подходит фраза «Хау ду ю ду?», но если вы на русском языке поздороваетесь дословным переводом этой фразы («Как Ваши дела?»), то вас, по-видимому, сочтут невежливым (в русском языке этот вопрос можно задать после приветствия, но не в качестве приветствия) или начнут подробно отвечать по существу вопроса, что на самом деле вам не требовалось. Как видим, незнание фразеологии может привести к неприятностям: вас могут не понять или понять неправильно.

Что же такое *фразеология программирования?* Программирование — это тоже своеобразный разговор, только не с человеком, а с ЭВМ, причем идет он на специальных языках — языках программирования. С грамматикой некоторых языков (Рапиры, Паскаля) вы уже, наверное, знакомы, ну а какие обороты в каких случаях надо применять? Вот на этот вопрос, а заодно и на вопрос, как понимает ЭВМ неправильные обороты, мы и попытаемся дать ответ.

Подготовительные задачи к уроку 1

1. Дано число x. Вычислить приближенное значение $\sqrt{x}$ с точностью ε с помощью метода последовательных приближений:

$$y_0=\frac{x}{2},\ y_i=\frac{1}{2}\left(y_{i-1}+\frac{x}{y_{i-1}}\right),\ i>1$$

Вычисления вести до тех пор, пока не станет $|y_i-y_{i-1}|<\varepsilon$.

2. Напечатать значения первых N чисел Фибоначчи*), определяемых по формулам: $f_0=1,\ f_1=1,\ f_i=f_{i-1}+f_{i-2},\ i>2$.

3. Дан массив коэффициентов $a_i,\ i=0,\ldots,n$, и значение x. Вычислить значение многочлена

$y=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ применяя формулу:

$$y=(\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_1)x+a_0$$

(Этот очень эффективный прием вычисления многочленов называется *схемой Горнера:* в нем n сложений, n умножений и ни одного (!) возведения в степень.)

4. Дано x. Вычислить приближенное значение $\sin x$ с точностью ε, пользуясь формулой

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\tag{1}$$

Считать известным, что точность ε будет достигнута, когда

$$\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|<\varepsilon.$$

В задачах 1, 2 не использовать массивы. В задаче 4 не использовать возведение в степень.

После решения задач внимательно сравните условия и решения всех задач, и попробуйте ответить на вопросы:

1) что общего в условиях этих задач?
2) что общего в их решениях?

Сравните ваши решения с приведенными на с. 54. Задача 3, наверное, трудностей не вызвала. Если в задачах 1, 2, 4 ваши решения построены на тех же идеях, что и решения а), то вы сделали все правильно, а если на идеях решений б), то вы ошиблись. Конечно, и программы б) будут работать и дадут в большинстве случаев нужный вам результат, и все же любой опытный программист скажет, что они не годятся. Почему?

Для ответа на этот вопрос давайте посмотрим, что общего в условиях и решениях задач. Вы заметили, наверное, и запреты пользоваться определенными операциями и переприсваивания значений (обведены рамочкой). Но самым главным является то, что **очередные значения вычислятся через предыдущие** (см. подчеркнутые части программ). В математике зависимость новых значений от старых называется *рекуррентной*, а число старых значений, от которых зависит очередное значение, называется *порядком* рекуррентной формулы.

Таким образом, в задачах 1 и 2 мы имели рекуррентные формулы соответственно 1-го и 2-го порядка, а в задачах 3 и 4 мы свели нерекуррентную запись многочлена и формулы (1) к рекуррентной:

$$y=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\ \Rightarrow\ y_0=a_n,\ y_i=y_{i-1}x+a_{n-i};$$

$$y=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\ \Rightarrow\ y_0=0,$$

$$z_0=x;\ y_i=y_{i-1}+z_{i-1};\ z_i=\frac{-z_{i-1}x^2}{2i\,(2i+1)}.$$

Теперь взглянем на решения б) и зададим себе вопрос: если бы вы вручную считали по формуле (1), то разве стали бы вы возводить каждый раз x в степень или считать факториал сначала? Вряд ли. А зачем использовать массивы в задачах 1, 2? Ведь вам не нужно хранить промежуточные значения. А в задаче 1 и вообще неясно, сколько этих промежуточных значений будет и какой объем памяти под них надо отвести. Кроме того, оказывается, что для ЭВМ операция индексирования — это очень трудоемкая операция: более трудоемкая, чем, например, умножение (вообще «точка зрения» ЭВМ на трудоемкость отдельных операций совсем не совпадает с человеческой). Теперь нам стали ясны запреты в условиях задач: мы запретили зря расходовать память и использовать трудоемкие операции. Современные ЭВМ имеют огромную память и колоссальную скорость, и все же есть очень много задач, для которых скорости и памяти не хватает. Поэтому программист должен уметь бережно расходовать ресурсы ЭВМ и, следовательно, решения б) нельзя признать пригодными.

Откуда же появляются такие ошибки? Дело в том, что программист часто переводит алгоритм с языка математики на язык программирования. Эти языки похожи, но правила «разговора» на них различны. Поэтому «подстрочный» перевод с языка математики на язык программирования может дать совсем неправильный результат, также как дословный перевод русского приветствия «Добрый день!» на английский — «Kind day!» — ошибочен: для англичанина это не приветствие, а бессмыслица.

Возвращаясь к нашим задачам, отметим разницу в «правилах разговора» на языке математики и языке программирования. *Математики используют индексацию для различения значений переменных как «в пространстве», так и «во времени», программисты — только для различения в пространстве.* В рекуррентных формулах индексы характеризуют время (номер шага) появления очередного значения, поэтому при программировании они не нужны: новые значения просто засылаются на старое место.

---

*) Об этих замечательных числах можно прочитать в «Кванте» 1979, № 5, с. 53 или в брошюре Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1978), но для решения задачи это не требуется).

Решения подготовительных задач к уроку 1

(Описания и ввод-вывод опущены, приведены только тела программ)

Задача 1 (Квадратный корень)

(а)

```
y1:=x/2;
repeat y0:=y1;
  y1:=0.5 * (y0+x/y0)
until abs(y0—y1)<eps;
```

(б)*)

```
y[0]:=x/2; i:=0;
repeat i:=i+1;
  y[i]:=0.5 * (y[i—1]+x/y[i—1])
until abs(y[i]—y[i—1])<eps;
```

Задача 2 (Числа Фибоначчи)

(а)

```
f2:=1; f1:=1;
for i:=3 to n do
begin f:=f2+f1; writeln(f);

  f2:=f1; f1:=f

end;
```

(б)*)

```
f[0]:=1; f[1]:=1;
for i:=3 to n do
begin f[i]:=f[i—1]+f[i—2];
  writeln(f[i])
end;
```

Задача 3 (Схема Горнера)

(а)

```
y:=a[n];
for i:=n—1 downto 0 do
  y:=y * x+a[i];
```

Задача 4 (Вычисление синуса)

(а)

```
s:=0; элем:=x; k:=1;
while abs(элем)>eps do
begin s:=s+элем; k:=k+2;
  элем:=—элем * x * x/(k * (k—1))
end;
```

(б)*)

```
s:=0; элем:=x; k:=0;
while abs(элем)>eps do
begin s:=s+элем; k:=k+1;
  факт:=1;
  for j:=2 to 2 * k+1 do факт=факт * j;
  элем:=cmen(—1,k) * cmen(x,2 * k+1)/факт
{функция cmen(a,n) дает значение aⁿ}
end;
```

Таким образом:

> **При счете по рекуррентной формуле k-го порядка достаточно иметь $k+1$ дополнительный элемент памяти для хранения последних k значений и очередного значения.**

В рекуррентных формулах 1-го порядка, если не надо сравнивать соседние значения, можно обойтись вообще одним элементом (см. задачу 3).

Программы, реализующие рекуррентные соотношения, включают в себя следующие фрагменты:

— начальные присваивания (в решениях — это первые строчки)

— основной цикл счета по формулам,

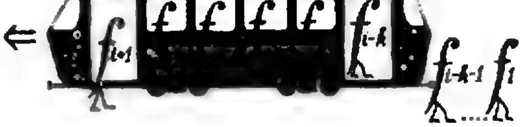
— в теле цикла: вычисление очередного значения, использование этого значения и переприсваивание.

Эти элементы имеются обязательно, хотя выглядеть могут по-разному. Начальные присваивания могут выполняться по сложному алгоритму. Основной цикл может быть с заранее известным (как в задачах 2, 3) или заранее неизвестным числом повторений (как в задачах 1, 4). В формулах 1-го порядка переприсваивание может быть совмещено с вычислением очередного значения. Очередное значение может использоваться в дальнейших расчетах (как значение *элем* в задаче 4), просто печататься (задача 2) или не использоваться вообще для чего-либо иного, кроме получения следующего значения.

В заключение рассмотрим задачу с рекуррентной формулой *k-го порядка: напечатать первые N значений, определяемых рекуррентными формулами:*

$$f_i=1,\quad i<k;\quad f_{i+1}=(f_{i-k+1}+f_{i-k+2}+\dots+f_{i-1})f_i,\quad i>k$$

Для решения нам понадобится массив из $k+1$ элемент для размещения последних k значений и нового значения. Обратите внимание: этот массив работает как трамвай: очередное значение «входит» в него через переднюю дверь (а не в заднюю, как мы привыкли), «проезжает» *остановок, продвигаясь назад,*



и *затем «выходит»*.

```
for j: =1 to k do f[j]:=1;                          } 1
for i: =k+1 to n do
begin s: =0;                                        }
   for j: =1 to k-1 do s: =s+f[j];      }3          }
   f[k+1]:=s * f[k];                    }           }  2
   writeln (f[k+1]);                    }4          }
   for j:=1 to k do f[j]:=f[j+1];       }5          }
end;
```

Здесь: 1 — начальное присваивание, 2 — основной цикл, 3 — вычисление очередного значения, 4 — использование значения, 5 — переприсваивание.

(Переменная s введена для повышения скорости программы: вместо s везде можно было использовать $f[k+1]$, но напомним, что индексация — это очень трудоемкая для ЭВМ операция.)

Контрольное задание

1.1. Дано x. Вычислить приближенное значение e^x по формуле

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Вычисления вести пока очередное слагаемое не станет меньше ε.

1.2. Вычислить значения k-ой строчки треугольника Паскаля (см. статью А. Бендукидзе в этом номере). Результат должен быть записан в массив длины k; двумерные массивы и вспомогательные массивы не использовать.

Программы должны быть оформлены полностью (не только тело программы) и высланы в течение двух недель после получения журнала. Длины и типы массивов выбирайте произвольно.

Подготовительные задачи к уроку 2*)

1. Найти в данном массиве первый элемент (считая слева направо), имеющий заданное значение.

2. Найти в данном массиве последний элемент, имеющий заданное значение (массив просматривается от начала к концу, а не наоборот).

3. Найти в данном массиве m-й элемент, имеющий заданное значение.

Во всех задачах нужно получить индекс нужного элемента, если он в массиве есть, и ноль, если его нет.

Вопросы: Что общего в условиях и в решениях задач? Почему задачу 2 имеет смысл решать как самостоятельную задачу, а не искать первый с конца элемент?

Л. Штернберг

---

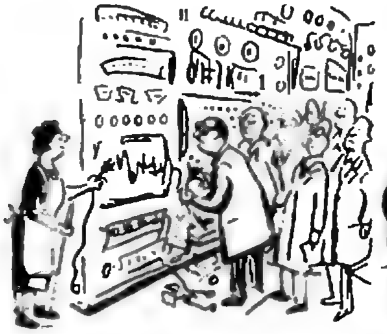
*) Решения этих задач присылать не нужно!

«Квант» улыбается

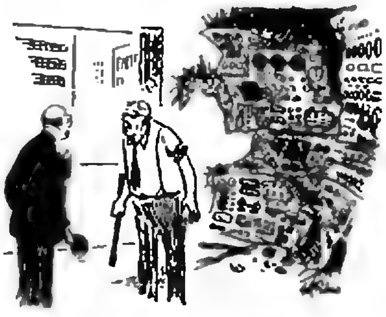
Вокруг ЭВМ

Сначала человек заставил машину работать за себя, а теперь хочет, чтобы она за него и думала.

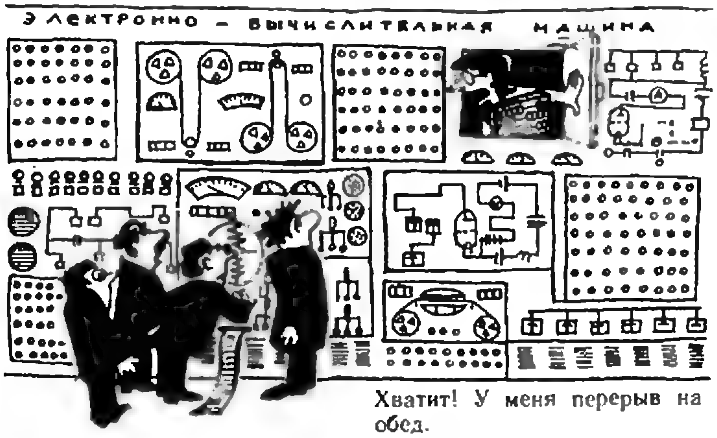
Э. Погосянц



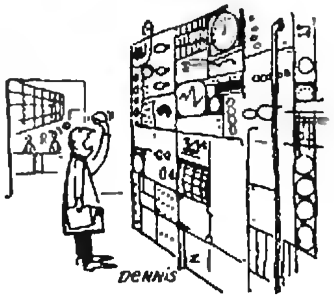
Может быть, в этом дело?



Она слишком много знала!



Хватит! У меня перерыв на обед.



Еще раз ошибешься — заменю человеком!

Путешествие в мир случайных событий

В окружающем нас мире постоянно приходится иметь дело с событиями, которые нельзя предсказать заранее. Такие события называются *случайными*. На первый взгляд кажется, что в мире случайных событий царит настоящий хаос и что эти события нельзя изучать точными математическими методами. Однако это мнение ошибочно. В математике имеется раздел — *теория вероятностей*, изучающий закономерности, присущие случайным явлениям. Теории вероятностей посвящена книга известного советского математика чл.-корр. АН УССР А. В. Скорохода «Вероятность вокруг нас» (Киев, «Наукова думка», 1980).

Редакция получила две рецензии на эту книгу. Мы решили опубликовать как первую рецензию, имеющую общий характер, так и вторую, где акцент ставится на обсуждении доступности книги школьникам.

* * *

Современная теория вероятностей использует сложный математический аппарат, но ее основные идеи и методы можно объяснить используя лишь школьную математику. Это сделано в рецензируемой книге.

Книга состоит из трех разделов: «Случайные события», «Случайные величины», «Случайные процессы». При переходе от одного раздела к другому понятие случайности все более усложняется.

В первом разделе рассказывается о случайных событиях, их вероятностях, о теоретико-множественной аксиоматике теории вероятностей, предложенной А. Н. Колмогоровым.

Во втором разделе рассматриваются случайные величины, их числовые характеристики, рассказывается о важнейших закономерностях теории вероятностей — законе больших чисел и центральной предельной теореме.

В третьем разделе рассказывается о важнейшем понятии теории вероятностей — понятии случайного процесса. Это понятие пришло в теорию вероятностей во второй четверти нашего столетия. Его формирование протекало под влиянием физики, биологии, техники. *Случайными процессами* называют случайные величины, изменяющиеся во времени. В настоящее время теория случайных процессов является одним из наиболее увлекательных разделов теории вероятностей.

Для иллюстрации основных понятий в книге рассматривается большое число примеров из биологии (законы наследственности, модели эпидемий), физики (ядерные реакции, энергетические переходы в атомах, броуновское движение), радиотехники (случайные электромагнитные колебания, фильтрация случайных сигналов и шумов), теории массового обслуживания и теории надежности.

Книга написана живо и интересно. По характеру изложения и содержанию она доступна настойчивому старшекласснику, интересующемуся математикой, физикой, возможностями применения математики в биологии и медицине. Основное требование автора к математической подготовке читателя книги — знакомство с понятиями производной и интеграла.

М. Ядренко

* * *

Рецензируемая книга написана автором ряда монографий и учебников, широко используемых специалистами и студентами университета. Хотя она отнесена к разделу научно-популярной литературы, следует иметь в виду, что по объему понятий она близка университетским курсам теории вероятностей и полное усвоение ее материала даст неплохое вероятностное образование. Для первоначального знакомства с предметом можно обратиться к рекомендованной автором книге Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчина «Элементарное введение в теорию вероятностей» (М., «Наука», 1976).

Мы остановимся лишь на первом разделе рецензируемой книги. Он начинается попыткой разъяснить аксиоматический подход к построению теории вероятностей. Без предварительного знакомства с достаточным числом комбинаторных вероятностных задач материал этот труден для усвоения. Поэтому можно посоветовать после беглого просмотра §§ 1—2 перейти к чтению §§ 3—6, возвращаясь по мере необходимости за справками к первым двум параграфам. Более широкий набор примеров и задач, а также более детальное изложение рассматриваемых в §§ 1—6 понятий можно найти в первых двух главах рассматриваемой автором книги В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1 (М., «Мир», 1952).

В §§ 7—9 вводится и изучается схема независимых испытаний, выводятся закон Пуассона для редких событий, закон больших чисел и нормальная аппроксимация Муавра — Лапласа, рассматриваются условные вероятности и формула Байеса.

Из сказанного видно, что рецензируемая книга будет полезной широкому кругу читателей, уже знакомых с элементами теории вероятностей и желающих получить представление о ее современном состоянии.

М. Козлов

Эйнштейн — изобретатель

Однажды Эйнштейн пожаловался Нернсту, что патентное ведомство сочло конструкцию придуманного им вместе со Сцилардом холодильника известной. «Когда мне это говорят о теории относительности,— произнес Эйнштейн несколько удрученно,— я еще могу понять, но холодильник...»

Этим эпизодом из книги В. Я. Френкеля и Б. Е. Явелова «Эйнштейн — изобретатель» (М., «Наука», 1981) можно начать рецензию на нее — эпизод вызывает то же чувство, что и вся книга в целом: удивление. И то же желание, которое испытываешь, начав знакомиться с книгой: узнать — что же дальше?

Имя Альберта Эйнштейна, одного из самых замечательных из когда-либо живших ученых, великого физика нашего века, знакомо всем без исключения. Даже очень далекие от науки люди знают, что Эйнштейн был творцом теории относительности, хотя о самой теории у них могут быть лишь смутные представления. Те, кто интересуются физикой и физиками, имеют возможность узнать о масштабе физического гения Эйнштейна и о его необыкновенно привлекательной личности из многочисленных книг и статей, посвященных жизни и деятельности ученого.

Но можно смело утверждать, что практически никто не слышал об Эйнштейне — изобретателе холодильника (и не одного, а нескольких типов); об Эйнштейне — изобретателе фотокамеры, использовавшейся на съемках в Голливуде; об Эйнштейне — изобретателе магнитострикционного громкоговорителя; магнитогидродинамических насосов для перекачки жидких металлов; индукционной гидродинамической подвески, которая в наши дни широко используется в металлургии; об Эйнштейне, разработавшем метод определения размеров пор в медицинских фильтрах. Об Эйнштейне — экспериментаторе, выдвигавшем оригинальные идеи экспериментов.

Узнать об этом было неоткуда. Книга В. Я. Френкеля и Б. Е. Явелова — первый рассказ об этой стороне жизни и творчества Альберта Эйнштейна.

Изобретения и эксперименты, о которых идет речь в книге, интересны сами по себе. Многие из них получили дальнейшее равитие, сыграли и по сей день играют важную роль и в научных исследованиях, и в технике. Но еще интереснее — узнать о том, как работал над этими изобретениями Эйнштейн, как в этой работе раскрывались замечательные человеческие качества ученого.

Эйнштейн никогда не изобретал в одиночку. Совместная работа была для него одной из форм общения с людьми, близкими ему по культурным и духовным интересам. Поэтому книга «Эйнштейн — изобретатель» — это и книга о друзьях ученого.

Прочесть эту книгу и интересно, и полезно.

М. Левинштейн

Новые книги

(Начало см. на с. 43)

3. А. Г. Курош. *Алгебраические уравнения произвольных степеней.* Издание 3-е (I кв.). Цена 10 к.

В основу брошюры положена лекция, прочитанная автором, известным математиком, для участников Московской математической олимпиады. В книжке идет речь об алгебраических уравнениях произвольных степеней, основной теореме алгебры, о методах решения некоторых алгебраических уравнений, о разрешимости уравнений в радикалах. Как правило, результаты приводятся без доказательства, но иллюстрируются интересными примерами.

Библиотечка «Квант»

1. Е. Я. Гик *Шахматы и математика* (I кв.). Цена 40 к.

Автор книги — математик и шахматист, ведущий шахматную страничку нашего журнала. В популярной форме он рассказывает о разнообразных связях между математикой и шахматами.

В книге обсуждаются увлекательные задачи и головоломки о разрезании доски, о маршрутах и силе фигур, о расстановках на шахматной доске и взаимной силе фигур.

Интересны разделы, посвященные шахматным успехам ЭВМ, коэффициентам Эло, математике шахматных турниров, необычной геометрии шахматной доски.

2. В. М. Тихомиров. *Рассказы о максимумах и минимумах* (IV кв.). Цена 40 к.

В книге рассказывается о задачах на максимум и минимум, привлекавших внимание ученых еще в глубокой древности. Сначала автор рассматривает классические задачи, которые решали Евклид, Архимед, Аполлоний, Ферма, Кеплер, Ньютон, Лейбниц.

Далее рассказывается о глубоких связях экстремальных задач с проблемами естествознания, экономики, космической техники и современных методах решения таких задач.

3. И. Ф. Шарыгин. *Задачи по геометрии: Стереометрия* (III кв.). Цена 40 к.

В книге содержится около 350 задач по стереометрии.

В первом разделе помещены задачи, имеющие вычислительный характер. Здесь же содержатся некоторые теоремы стереометрии, непосредственно примыкающие к школьному курсу.

Второй раздел содержит геометрические неравенства, задачи на геометрические места точек, элементы сферической геометрии и т. п.

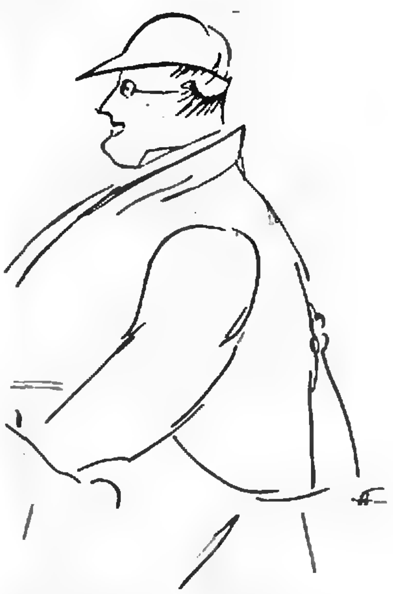
А. Егоров

150 лет тому назад

9 (21) октября 1832 года в Петербурге, в частном доме на Царицином лугу (Ленинград, Марсово поле, дом № 7) состоялась первая публичная демонстрация работы электромагнитного телеграфа. Замечательное изобретение, положившее начало современной телеграфной связи, представлял собравшимся его автор — Павел Львович Шиллинг (1786—1837). Это был необычайно ярко и многосторонне одаренный человек, один из пионеров электротехники и ученый-востоковед с международной репутацией, дипломат и талантливый изобретатель, храбрый офицер и путешественник.

Телеграфный аппарат Шиллинга состоял из передатчика и приемного устройства. Для передачи букв и цифр использовалась клавиатура из черных и белых клавишей. Приемник представлял собой несколько магнитных стрелок, подвешенных на шелковых нитях и находящихся внутри горизонтальных проволочных спиралей. При нажатии какой-либо клавиши передатчика в соответствующую спираль приемника поступал электрический ток того или иного направления, и магнитная стрелка соответственно поворачивалась в ту или иную сторону. Для удобства наблюдения за поворотами стрелки на каждой нити был укреплен небольшой вертикальный диск, выкрашенный с одной стороны в черный цвет, а с другой — в белый.

Во многом успех Шиллинга был связан еще и с тем, что для своего телеграфа он разработал специальный, и очень удачный для того времени, код — для передачи любой буквы или цифры было достаточно одновременно нажать не более трех одноцветных клавиш.



Дружеский шарж на П. Л. Шиллинга, сделанный А. С. Пушкиным накануне отъезда ученого с экспедицией в Восточную Сибирь.

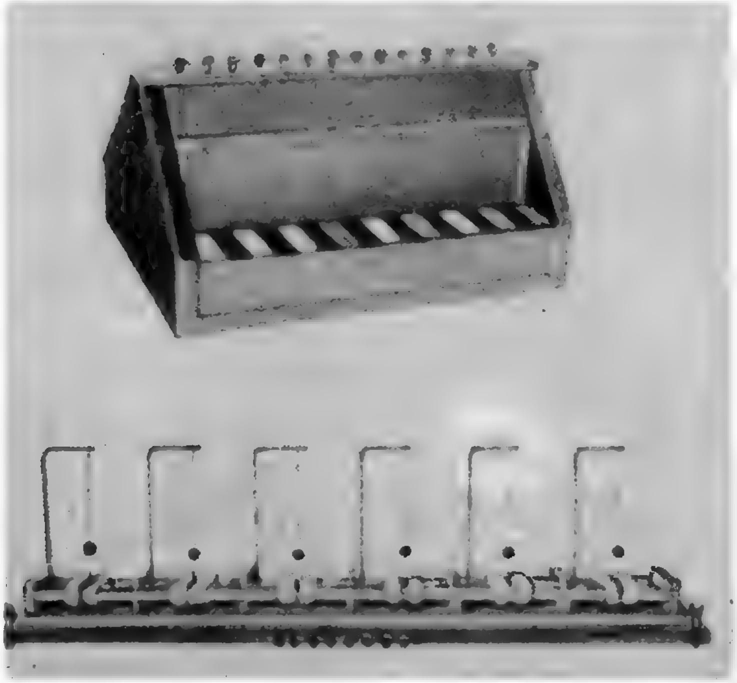
Приборы первых телеграфов Шиллинга собраны и хранятся в Политехническом музее в Москве.

Имя Шиллинга связано не только с изобретением электромагнитного телеграфа. Ему принадлежит также идея первого практического применения электричества: в 1812 году Шиллинг изобрел способ дистанционного подрыва подводных мин при помощи электрического тока. Шиллинг первым стал изготовлять и использовать подземные и подводные изолированные электрические кабели. Много занимался он и совершенствованием техники литографии.

Павел Львович Шиллинг был весьма колоритной личностью: небольшого роста, необыкновенной тучности, очень добродушный, остроумный и неутомимый рассказчик. У него была масса знакомых, и среди них — король математики Гаусс и великий поэт Пушкин.

О недолгой, но очень плодотворной жизни Шиллинга интересно и увлекательно написано в книге А. В. Яроцкого «Павел Львович Шиллинг», вышедшей в научно-биографической серии издательства АН СССР в 1963 году.

Б. Явелов



Передатчик и приемник телеграфа Шиллинга.

Всероссийская олимпиада школьников

По традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный этап VIII Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике.

Всероссийская олимпиада проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады, второй — районные (городские), третий — республиканские (АССР), краевые и областные, четвертый — зональные олимпиады.

В этом году заключительный, четвертый этап проходил одновременно в четырех городах РСФСР: в Костроме, Ставрополе, Ульяновске и Чите. В нем принимали участие команды автономных республик, краев и областей, составленные из победителей третьего этапа. Кроме того, в зональных олимпиадах участвовали победители предыдущей Всероссийской олимпиады, получившие дипломы I и II степени, и победители конкурса журнала «Квант». В этом этапе учвствовали также команды физико-математических школ-интернатов при Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Конкурсное задание четвертого этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Наибольшие затруднения у участников олимпиады вызвали задачи по геометрии, комбинаторике и математическому анализу.

Задание четвертого этапа по физике включало четыре задачи теоретического тура и две — экспериментального. На решение теоретических задач отводилось четыре часа, а экспериментальных — три. Наиболее трудной из теоретических задач оказалась четвертая задача для десятиклассников. С экспериментальными задачами успешно справились все участники.

По решению жюри победители Всероссийской олимпиады были награждены дипломами, памятными призами и ценными подарками. Министерство просвещения РСФСР наградило грамотами учителей, подготовивших победителей олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров VIII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[AK]$. Известно, что центры окружностей — вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC.

2. В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

3. В некотором королевстве имеется шесть городов. Министерство транспорта получило от короля приказ установить между каждыми двумя городами один из трех видов сообщения: железнодорожный, шоссейный или воздушный. При этом король потребовал, чтобы никакие три города не были связаны одним и тем же видом сообщения и чтобы для любого разбиения шести городов на три пары не все виды сообщения в парах были различны. Сможет ли министерство транспорта выполнить приказ короля?

4. Какое наибольшее число точек можно выбрать на отрезке $[0; 1]$ так, чтобы на любом отрезке $[a; b]$, содержащемся в отрезке $[0; 1]$, лежало не более $1+100(b-a)^2$ выбранных точек?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$ в точках M, N и P соответственно. Известно, что $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

9 класс

1. См. задачу 2 для 8-го класса.

2. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz \\ x^2=2(y+z) \end{cases}$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. Обозначим $|AB|=c, |BC|=a, |CA|=b, |AH|=x, |BH|=y, |CH|=z$. Докажите равенство $abc=ayz+xbz+xyc$.

4. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 1]$, такова, что $f(0)=f(1)=0$ и для любых $a, b \in [0; 1]$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(a)+f(b).$$

Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет бесконечно много решений. Выясните, существует ли функция, удовлетворяющая указанным условиям и не равная тождественно нулю.

5. В футбольном турнире участвовало n команд высшей лиги и $2n$ команд первой лиги. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами высшей лиги, к числу побед, одержанных командами первой лиги, равно 7/5. Найдите n, если известно, что ничьих в турнире не было.

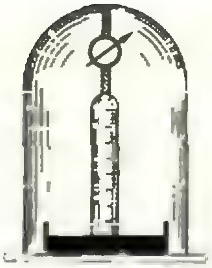


Рис. 1.

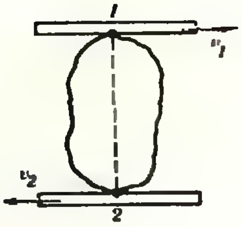


Рис. 2.

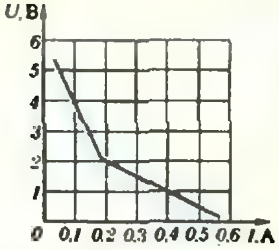


Рис. 3.

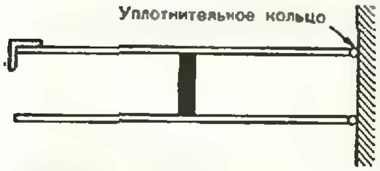


Рис. 4.

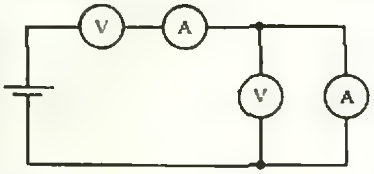


Рис. 5.

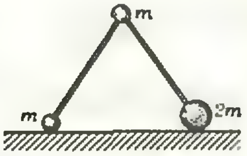


Рис. 6.

10 класс

1. Докажите, что для любых значений α, β, γ хотя бы одно из чисел $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не больше 1/2.

2. См. задачу 3 для 9-го класса.

3. См. задачу 4 для 9-го класса.

4. См. задачу 5 для 9-го класса.

5. При каких натуральных $n>3$ существуют различные натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что $1<a_k<n+1$ для любого $k=1, 2, ..., n$ и все n модулей $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Под колоколом воздушного насоса находится ртутный барометр — стеклянная трубка с делениями, погруженная открытым концом в широкий сосуд со ртутью (рис. 1). Закрытым концом трубка подвешена к динамометру. Показания F динамометра можно наблюдать через стекло колокола. Когда воздух из-под колокола был полностью откачан, разность h уровней ртути в трубке и в сосуде равнялась нулю, а динамометр показывал силу F_0. Из-за очень медленного просачивания воздуха под колокол разность уровней постепенно изменялась. Нарисуйте и объясните график зависимости F от h.

2. На столе стоит высокая стеклянная тонкостенная трубка радиусом $R=3$ см. В трубку вложен плоский пакет из тонкого полиэтилена длиной $l=30$ см и шириной $d=10$ см. Пакет доверху заполнили водой. Удержится ли пакет с водой в трубке, если трубку осторожно поднять? Коэффициент трения полиэтилена по стеклу $\mu=0{,}3$.

3. Две одинаковые высокие теплонепроницаемые трубки заполнены до высоты $h=25$ см. Первая — льдом, полученным при замораживании воды в той же трубке, вторая — водой при температуре $t_в=10°C$. Воду выливают на лед и сразу же отмечают уровень. После установления теплового равновесия оказалось, что он повысился на $\Delta h=0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда? Плотность льда $\rho_л=900$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda=340$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_л=2100$ Дж/(кг·К).

4. Жесткая болванка зажата между двумя направляющими (рис. 2). Направляющие движутся горизонтально: верхняя — вправо со скоростью v_1, нижняя — влево со скоростью v_2. Точки касания 1 и 2 в данный момент лежат на вертикальной прямой. Укажите множество точек болванки, имеющих в данный момент времени скорости v_1 и v_2 (по абсолютной величине).

9 класс

1. Из шланга почти вертикально бьет струя с расходом воды $Q=1{,}5\cdot10^{-3}$ м^3/с. Какова площадь S поперечного сечения струи на высоте $h=2$ м над концом шланга, если при выходе из шланга площадь $S_0=1{,}5$ см^2?

2. Висевшая на высоте H сосулька массой M подтаяла и начала падать. Когда она оказалась на высоте $H/2$, в нее попал снежок массой m, который мгновенно прилип к ней. В момент попадания в сосульку снежок двигался горизонтально со скоростью v_0. Найдите скорость, с которой сосулька упадет на землю.

3. В баллоне объемом $V=2$ л находится 1 моль водорода и немного воды. Вначале давление в баллоне составляет $p_н=17$ атм. Затем баллон нагревают, и давление в нем увеличивается до $p_к=26$ атм. Найдите начальную и конечную температуры, а также количество испарившейся воды. Значения давления насыщенных паров воды при нескольких температурах приведены в следующей таблице:

p, 10^5 Па	1	2	3	5	8	10
t, °C	100	120	133	152	170	180

Примечание. Для выполнения задания необходимо использовать данный лист миллиметровой бумаги.

4. Зависимость напряжения источника питания от тока нагрузки приведена на рисун-

ке 3. Найдите максимальную мощность, которую источник может отдать в нагрузку. Каким должно быть сопротивление нагрузки, чтобы мощность была максимальной?

10 класс

1. Математический маятник, в котором нить заменена жестким невесомым стержнем, совершает свободные колебания малой амплитуды. На сколько процентов, самое большее, можно изменить период колебаний, если превратить математический маятник в разновидность физического, закрепив в определенной точке стержня груз той же массы, что и на конце?

2. Трубка длиной $l=1$ м и радиусом $r=0{,}08$ м имеет массу $m_1=4$ кг. В трубке находится поршень массой $m_2=10$ кг. На одном конце трубки имеется уплотнительное кольцо, не пропускающее воздух, а на другом — фиксатор, способный удерживать поршень в крайнем положении. Когда поршень находился посередине трубки, ее плотно прижали уплотнительным кольцом к ровной вертикальной стене (рис. 4). После этого поршень передвинули к противоположному концу трубки и закрепили фиксатором, а трубку отпустили. Удержится ли трубка на стене? Коэффициент трения уплотнительного кольца о стену $\mu=0{,}5$, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

3. Из батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров собрана схема (рис. 5). Соединенные параллельно приборы показывают $U_1=0{,}26$ В и $I_1=0{,}75$ мА. Второй миллиамперметр показывает $I_2=1$ мА. Определите напряжение на клеммах батарейки и сопротивления приборов.

4. Два жестких невесомых стержня длиной l каждый скреплены концами в шарнире массой m. На концах стержней укреплены шарики, массы которых m и $2m$. Конструкция поставлена на стол вертикально шарниром вверх и начинает разъезжаться от малого толчка так, что стержни все время остаются в вертикальной плоскости (рис. 6). Трения нет. 1) Найдите скорость шарнира перед ударом о стол. 2) Найдите скорость шарика массой $2m$ в тот момент, когда угол между стержнями равен 90°.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите коэффициент трения подставки (тела) о поверхность стола.

Оборудование: штатив с лапкой, подставка от универсального штатива (или кусок металла произвольной формы массой около 2 кг), суровая нить, деревянная линейка, динамометр.

2. Определите плотность неизвестной жидкости.

Оборудование: мензурка, пробка или шарик для настольного тенниса, пластилин, сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью, нить.

9 класс

1. Определите неизвестное сопротивление.

Оборудование: источник тока ВС-4-12, штатив с двумя лапками, электромагнит школьный демонстрационный, реостат школьный (6 Ом, 2 А) — 2 шт., нить, гайка железная, соединительные провода — 6 шт., неизвестное сопротивление, деревянная линейка.

2. Определите работу, необходимую для надувания воздушного шарика.

Оборудование: воздушный шарик, манометр U-образный, тройник стеклянный, сантиметр, резиновая трубка, миллиметровая бумага.

Указание. Перед измерениями следует 2—3 раза надуть и сдуть шарик.

10 класс

1. Постройте и объясните график зависимости глубины резкости от диаметра диафрагмы при фиксированном расстоянии между лампой и линзой.

Оборудование: линза школьная, экран белый, подставка с лампочкой напряжением 2,5—6,3 В, источник тока (2,5—6,3 В), линейка ученическая, бумага черная, ножницы, бумага миллиметровая.

Указание. Под глубиной резкости подразумевается разность между максимальным и минимальным расстояниями между линзой и экраном, при которых изображение еще остается резким.

2. Определите, во сколько раз потери тепла в калориметре с кожухом меньше, чем в калориметре без кожуха.

Оборудование: калориметр школьный, термометр, реостат (6 Ом, 2 А) — 2 шт., источник тока ВС-4-12, провода соединительные — 8 шт., амперметр школьный (2 А), сосуд с водой (200 мл), нагревательная спираль на колодке.

О. Овчинников, С. Резниченко, Г. Яковлев

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:
Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Астерлин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Весник Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Губарев А. (Фатеж, с. ш. № 1),
Матвеев О. (Свердловск, с. ш. № 79);

по 9 классам —
Биллиг Ю. (Калинин, с. ш. № 6),
Итенберг И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Князев А. (Красноярск, с. ш. № 101),
Кудинов О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кузнецов Д. (Горький, с. ш. № 36),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Шкляренко Д. (Брянск, с. ш. № 46),
Юровский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —
Антонов В. (Обнинск, с. ш. № 6),
Доброрадных О. (Белорецк, с. ш. № 14),

Корсуков А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Николаев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слуцкий Б. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12),
Чалых О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Дулов Н. (Киров, с. ш. № 59),
Масляков И. (Иваново, с. ш. № 22),
Пронин О. (Владивосток, с. ш. № 23),
Трусов И. (Орел, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Бердюгин А. (Ангарск, с. ш. № 10),
Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Виноградов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Гаврилов С. (Шадринск, с. ш. № 4),
Карпенко Н. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Садэтов С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Шугин И. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ);

по 10 классам —

Галкин И. (Горький, с. ш. № 36),
Горбунов С. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Елисеев М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мамий Д. (Майкоп, с. ш. № 22),
Поутанек Ю. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Соколов А. (Ангарск, с. ш. № 19).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Кабанов А. (Ногинск, с. ш. № 6),
Кумыков М. (Нальчик, с. ш. № 5),
Просёлков Д. (Омск, с. ш. № 69),
Шимкунас Э. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Галынис И. (Чита, с. ш. № 5),
Домашов О. (Воронеж, с. ш. № 58),
Микарченко И. (Ломоносовский р-н Ленинградской обл., Гостилицкая с. ш.);

по 10 классам—

Жуков А. (Барнаул, с. ш. № 42),
Зиганшин И. (Димитровград, с. ш. № 5),
Логунов И. (Саратов, с. ш. № 13),
Соловьев С. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Вахрушев Я. (Архангельск, с. ш. № 49),
Писарев А. (Невинномысск, с. ш. № 11),
Плюснин К. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хомяков Н. (Улан-Удэ, с. ш. № 35),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ершов М. (Ярославль, с. ш. № 33),
Малышев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Рыбенков В. (Махачкала, с. ш. № 13),
Симаков С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Хлухенький К. (Чебоксары, с. ш. № 27);

по 10 классам —

Арбузов В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Бибиков П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бочко С. (Братск, с. ш. № 18),
Иващенко Л. (Тольятти, с. ш. № 26),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13),
Щепеткин А. (Калининград, с. ш. № 32).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Епифанов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Молчанов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6);

по 9 классам —

Буриченко А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Лазутин Ф. (Апатиты, с. ш. № 2),
Малиновский А. (Павлово, с. ш. № 1),
Марихин В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Чернышов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шмелев Е. (Мирный, с. ш. № 19);

по 10 классам —

Альтфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Амихмин С. (Казань, с. ш. № 131),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Еремеев С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Ксенофонтов Л. (Верхневилюйск, с. ш. № 2),
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Склокин А. (Апатиты, с. ш. № 1),
Сультанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шмаков И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Балагура В. (Волгоград, с. ш. № 92),
Ершов А. (Златоуст, с. ш. № 25),
Молодцов В. (Рыбинск, с. ш. № 21),
Огнев А. (Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Корчагин А. (Красноармейск с. ш. № 2),
Фатьянов О. (Курск, с. ш. № 6),
Щенков А. (Чита, с. ш. № 1);

по 10 классам —

Алискендаров З. (Махачкала, с. ш. № 16),
Дьячкин В. (Ярославль, с. ш. № 33),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Кирюшин И. (Горький, с. ш. № 36),

Эффект Ганна

1. $E=\left(\frac{2\alpha}{h}\varrho\Delta T\right)^{1/2}$; $j=\left(\frac{2\alpha}{h}\cdot\frac{\Delta T}{\varrho}\right)^{1/2}$;

$\left.\begin{array}{l}E\approx 30\ \text{В/м}\\ j=3\cdot 10^5\ \text{А/м}^2\end{array}\right\}$ при $\varrho=10^{-4}$ Ом·м,

$\left.\begin{array}{l}E=10^4\ \text{В/м}\\ j=10^3\ \text{А/м}^2\end{array}\right\}$ при $\varrho=10$ Ом·м.

2. $t=\frac{\varrho\cdot c\cdot\Delta T}{E^2}$;

$t\approx 2\cdot 10^{-10}$ с при $\varrho=10^{-4}$ Ом·м,
$t\approx 2\cdot 10^{-5}$ с при $\varrho=10$ Ом·м.

3. $f=\frac{\mu E_п}{2l}\approx 1{,}1\cdot 10^{11}$ Гц.

Треугольник Паскаля

1. Число людей, пришедших в пункты B, C, D, ..., I, равно соответствующему числу в восьмой строчке треугольника Паскаля.
2. а) 45. Искомых чисел столько, сколько 2-элементных подмножеств в множестве {0, 1, 2, ..., 9}; б) 120 (число 3-элементных подмножеств в множестве {0, 1, 2, ..., 9}).
3. Треугольные числа располагаются на той прямой, параллельной боковой стороне треугольника Паскаля, которая начинается с чисел 1, 3, 6, 10.
4. а) $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-$
$-6ab^5+b^6$;
б) $x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5$.

Кинематика. Относительность движения

1. $R=\sqrt{L^2(1+2\omega^2H/g)}\approx 1{,}01$ м.
2. $r=\frac{R}{\sqrt{4\pi^2+1}}\approx 0{,}16\,R$.
3. $\frac{R_c}{R_3}=\left(\frac{gT_3^2}{\pi^2R_3}\right)^{1/3}\approx 11$

или $\frac{R_c}{R_3}=\left(\frac{gT_3^2}{9\pi^2R_3}\right)^{1/3}\approx 5$.

4. $T=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}\approx 117$ суток.
5. $H=\frac{50}{27}R+\frac{5}{18}\frac{v^2}{g}-\frac{1}{9}\frac{v^4}{g^2R}-\frac{1}{54}\frac{v^6}{g^3R^2}$;

при $v>\sqrt{gR}$ тело свободно падает вниз и подпрыгивает на высоту $2R$.

Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

3. Сможет.
4. 11 точек.

9 класс

2. $x=2$, $y=1$, $z=1$.
3. Указание. $S_{ABC}=S_{ABH}+S_{BCH}+S_{CAH}$; площадь треугольника можно выразить через произведение его сторон и радиус описанной окружности.
5. $n=3$. Указание. Если x — число побед команд высшей лиги над командами первой лиги, то $8x=17n^2-3n$. С другой стороны, $x\leqslant 2n^2$.

10 класс

1. Если утверждение неверно, то произведение рассматриваемых величин меньше 1/8. Отсюда легко получить противоречие, пользуясь формулой для синуса удвоенного аргумента.

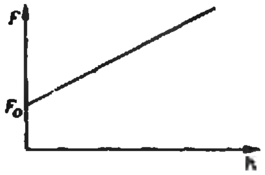
Решения остальных задач будут напечатаны в Задачнике «Кванта».

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. См. рисунок.



2. Пакет с водой в трубке удержится.
3. $t_л=-\frac{\lambda}{c_л}\frac{\Delta h}{h}\frac{\varrho_в}{\varrho_в-\varrho_л}-\frac{c_в}{c_л}\frac{\varrho_в}{\varrho_л}t_в\approx$

$\approx -54°C$ (здесь $\varrho_п=10^3$ кг/м^3 — плотность, $c_в=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды).

4. См. решение задачи Ф758 из Задачника «Кванта».

9 класс

1. $S=Q\,(Q^2/S_0^2-2gh)^{-1/2}\approx 1{,}9$ см^2.
2. $v=\sqrt{gH\,(2M^2+2Mm+m^2)+m^2v_0^2}/(M+m)$.
3. См. решение задачи Ф756 из Задачника «Кванта».
4. См. решение задачи Ф753 из Задачника «Кванта».

10 класс

1. Период колебаний маятника можно уменьшить не более чем на 9%.
2. Трубка на стене не удержится.
3. См. решение задачи Ф761 из Задачника «Кванта».
4. 1) $v=\sqrt{2gl}$; 2) $v_2=\sqrt{3/10gl\,(1-1/\sqrt{2})}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Так как делимое в 6 раз больше делителя, частное равно 6. Так как делитель в 6 раз больше частного, делитель равен 36. Значит,

делимое равно $6\cdot 36=216$.

2. а) Можно; б) тоже можно!

3. Таким треугольником является прямоугольный треугольник с углами 30° и 60°.

4. Пусть стрелка сдвинута на x кг. Тогда $(2+x)+(3+x)=6+x$, откуда $x=1$; значит, один портфель весит 4 кг, а другой — 3 кг.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Нейман — Хаазе, 1968 г.). **1. Лe7!!** У белых уже нет коня и двух пешек, в завершение они отдают и ладью. Идея перекрытия. Ладью нельзя взять ни ладьей — 2. Ф:f8×, ни слоном — 2. Ф:h7×. После **1...Фb7+ 2. Сe4 Ф:e4+ 3. Лg:e4 С:e7 4. Л:e7** черные сдались.

Задание 14 (Кобленц — Моисеев, Рига, 1955 г.). **Черные выигрывают.** Сразу они не могут превратить пешку в ферзя из-за вскрытого шаха — Лf6+ и Л:f2. Последовало **1...f5+!!**, и на любой ход следует **2...f1Ф. Белые сдались.** Идея комбинации в том, что после 2. Кр:f5 или 2. gf линия f перекрыта.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-31-73

Сдано в набор 18.8.82 Подписано в печать 29.9.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,05 Т-18929
Цена 40 коп. Заказ 2080 Тираж 175 049 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ЕЩЕ РАЗ О ЖЕРТВЕ ФЕРЗЯ

Комбинации, в которых жертвуется ферзь, привлекательны и вызывают повышенный интерес у любителей шахмат. Поэтому на наших «страничках» мы постоянно пополняем коллекцию пожертвованных гроссмейстерами ферзей. Случаются и курьезные случаи. Следующая партия была сыграна в чемпионате страны 1981 г. во Фрунзе (высшая лига) между двумя львовскими гроссмейстерами.

А. Михальчишин — О. Романишин

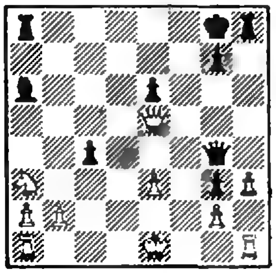
Защита Грюнфельда

1. d4 Kf6 2. c4 g6 3. Kf3 Cg7 4. Kc3 d5 5. cd K:d5 6. e4 K:c3 7. bc c5 8. Ce3. Теории известны и другие продолжения — 8. h3, 8. Ce2, 8. Лb1, но сделанный ход тоже сразу не проигрывает. **8...Фa5 9. Фd2 Kc6 10. Лb1 cd 11. cd 0—0 12. d5??? Cc3. Белые сдались.**

Если бы Грюнфельд мог увидеть эту позицию, он был бы счастлив от такой безукоризненной реализации его дебютной идеи — от фианкеттированного слона g7 больше потребовать просто невозможно!

Михальчишин быстро ушел со сцены. А у Романишина был растерянный вид. Он сам еще до конца не осознал, что нанес очень обидное поражение своему другу и тренеру. «А что я мог сделать? — оправдывался он. — Бить на d2 и «сгореть»?» Как видите, гроссмейстеры тоже люди...

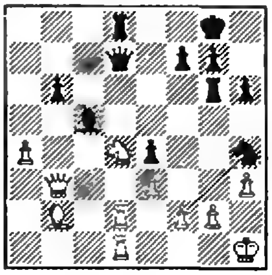
Чемпионат страны во Фрунзе прошел на редкость увлекательно, и не только благодаря описанному случаю. Средний возраст участников был меньше, чем во всех прошедших чемпионатах, что сказалось и на шахматном содержании турнира — почти во всех партиях жертвовались пешки и фигуры, и на его окончательных итогах — чемпионами стали юные Г. Каспаров и Л. Псахис, опередившие своих преследователей на два с половиной очка!



Е. Свешников — В. Цешковский (Фрунзе, 1981 г.)

После отступления ферзя — 22...Фg6 белые сыграли бы 23. 0—0! (король и ладья еще не двигались с места) с решающим перевесом. Неожиданно последовало **22...c3!** Теперь взятие ферзя приводит к редчайшей матовой конструкции с двумя черными пешками-эполетами, симметрично охраняющими неприятельского короля — 23. hg Л:h1×. Белые не взяли ферзя, но через три хода — **23. Kb5 cb 24. Ф:b2 Фg5 25. a4 C:b5** — все равно сдались, а зрители были лишены удовольствия наблюдать «оригинальный номер».

Гарри Каспаров много жертвовал в этом турнире, но с ферзем не расставался ни разу. Приведем один эпизод из партии юного чемпиона страны, сыгранной им на студенческом первенстве мира.

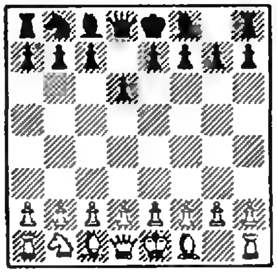


Ж. Сунье — Г. Каспаров (Граце, 1981 г.)

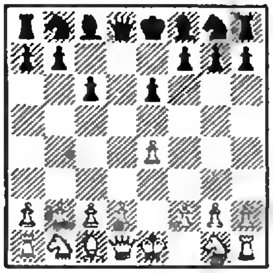
Черный конь только что прыгнул с f5 на h4, и король белых почувствовал себя неуютно. Не проходит 38. Kf3 из-за 38...ef 39. Л:d7 fg+ 40. Kpg1 Kf3×, плохо и 38. Kf5 Ф:f5 39. Л:d8+ Kph7, и белые беспомощны. Сунье попробовал **38. Ke6**, на что последовало **38...Ф:d2 39. Л:d2 Л:d2.** Ферзь отдан за две ладьи, и жертвой это, конечно, не назовешь, хотя в ряде вариантов, в том числе встретившемся в партии, черные «подбрасывали» партнеру еще кое-какие фигуры... **40. Kf4 Лg5 41. Kpg1 Kf3+ 42. Kpf1.** При анализе отложенной позиции Каспаров обнаружил такой фантастический финал — 42. Kph1 C:e3! 43. fe Лd:g2! 44. K:g2 Лg3!! У читателя уже не должно быть претензий к соотношению сил на доске — обилие фигур не спасает белых от мата ладьей на h3 или g1. Впрочем, и в самой партии черные подлили масла в огонь...

42... C:e3 43. fe (43. Ke2 Kh2+ 44. Kpe1 Л:g2 45. Ф:e3 Kf3+ с выигрышем) **43... Лd:g2!** Грозит вилка на d2. **44. Фc3 Лh2 45. Ke2 Kph7** (избегая вечного шаха после 45... Лgg2 46. Фc8+ Kph7 47. Фf5+) **46. Фc8 Лh1+ 47. Kpf2 Kd2! Белые сдались.**

Конкурсные задания



19. Как получить эту позицию после четырех ходов белых и черных?



20. Может ли получиться на доске эта позиция после четырех ходов белых и черных?

Срок отправки решений — 25 декабря 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

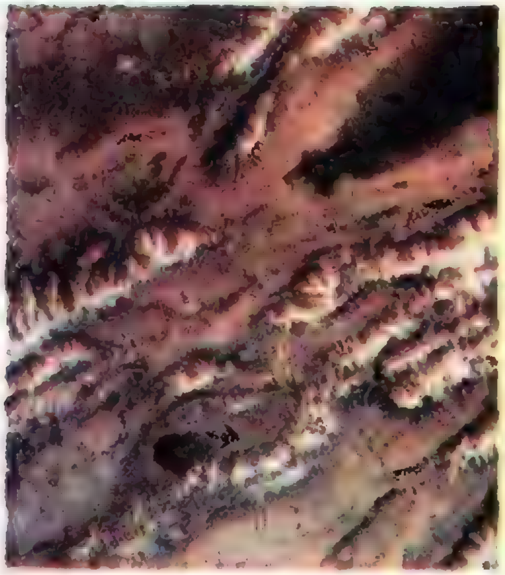


Рис. 1.

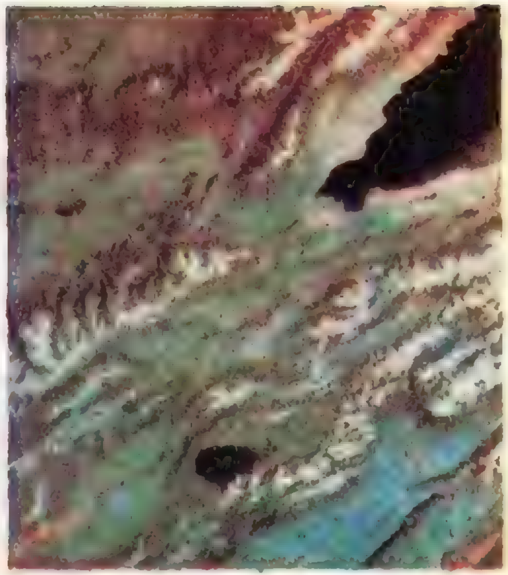


Рис. 2.

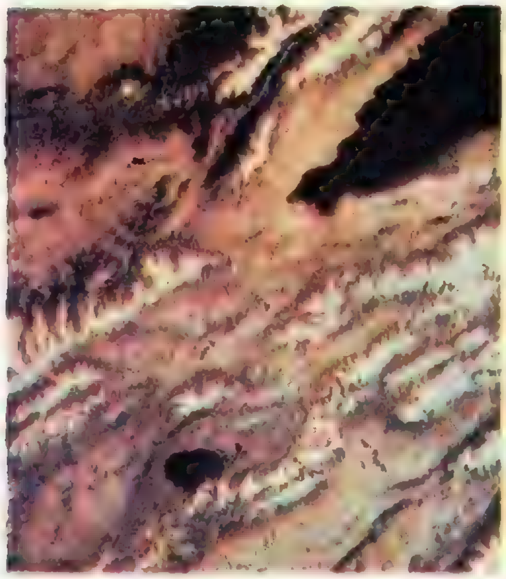


Рис. 3.

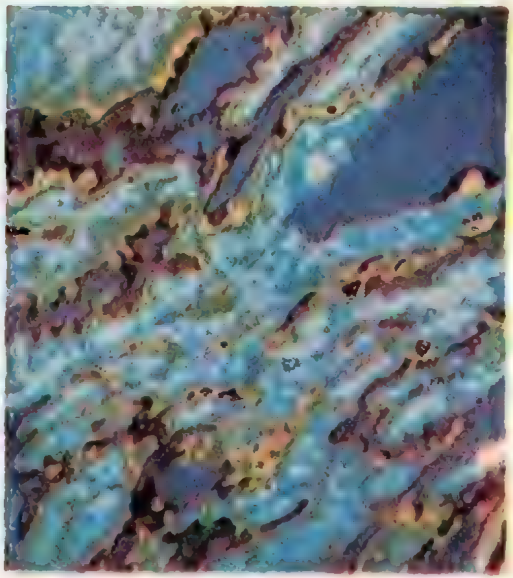


Рис. 4.

Советский Союз последовательно проводит в жизнь обширную программу мирного использования космических исследований. Наши космонавты активно участвуют в решении важных проблем народного хозяйства. Они следят за состоянием посевов, предупреждают о лесных пожарах, помогают геологам искать полезные ископаемые, способствуют созданию точных карт труднодоступных районов.

На приведенных здесь рисунках воспроизведены результаты фотографирования одного и того же горного района земной поверхности, одновременно снятого блоком из четырех синхронно действующих фотоаппаратов. Первый из них получал обычные цветные фотографии (рис. 1). Остальные регистрировали изображение в разных участках длин волн видимого и инфракрасного излучения (500—600 нм, 600—700 нм и 700—840 нм). Полученные при этом черно-белые изображения служили основой для синтеза цветных изображений, приведенных на рисунках 2 и 3. Каждый из них позволяет отчетливо выделить какие-то детали изучаемого рельефа. Например, второй рисунок более четко характеризует растительность, а третий — почвы в горных долинах. Четвертый рисунок также не является фотографией — он получен на основе предыдущих фотографий при помощи специальной обрабатывающей техники. Такие синтезированные изображения позволят более четко определять границы различных природных образований.

Первоначальные фотографии были получены 27 июня 1975 года летчиками-космонавтами П. Климуком и В. Севастьяновым на долговременной орбитальной станции «Салют-4» с высоты 340 км. Эти материалы предназначаются для комплексного изучения природных условий и ресурсов нашей страны и создания точных карт отдаленных труднодоступных районов.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Юбилей знаменательного события

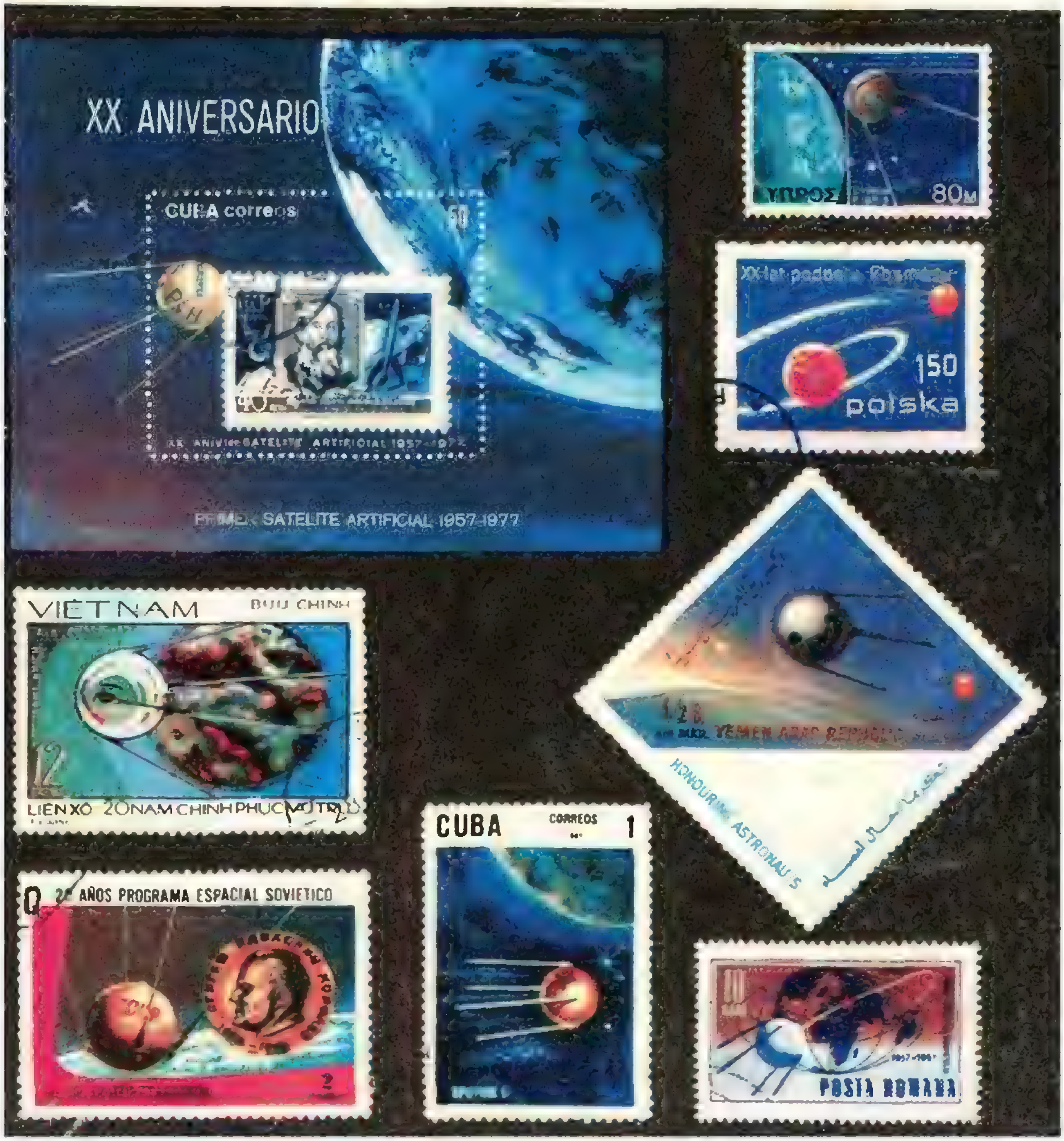
Исполнилось 25 лет с момента запуска первого искусственного спутника Земли, открывшего человечеству дорогу в космос. Сконструированный и запущенный под руководством выдающегося советского ученого академика С. П. Королева спутник убедительно продемонстрировал всему миру высокий уровень развития советской науки.

За прошедшую четверть века проделана огромная работа в области изучения космического пространства, Луны, планет Солнечной системы. Результаты космических исследований широко используются при решении многих важных задач народного хозяйства.

Наша страна вносит огромный вклад в развитие международного сотрудничества в космосе. На советской космической станции «Салют-6» успешно работали космонавты социалистических стран, входящих в Совет экономической взаимопомощи. В исследованиях, проводимых на станции «Салют-7», участвовал первый французский космонавт. СССР активно сотрудничает в осуществлении космических программ с Индией, Швецией и рядом других государств.

Запуск первого искусственного спутника Земли ознаменовал рождение космической филателии. Сейчас она насчитывает тысячи марок, посвященных героям космоса и разнообразным космическим сюжетам. Продолжают выходить и марки с изображением первого спутника. Некоторые из них мы воспроизводим в нашей подборке.

В. Рудов


XX ANIVERSARIO
CUBA correos
50
XX ANIV. del SATELITE ARTIFICIAL 1957-1977
PRIMER SATELITE ARTIFICIAL 1957-1977
ΚΥΠΡΟΣ
80M
XX lat podboju Kosmosu
150
polska
VIETNAM
BUU CHINH
12
LIEN XO 20 NAM CHINH PHUC VU TRU
YEMEN ARAB REPUBLIC
HONOURING ASTRONAUTS
CUBA
CORREOS
1
20 AÑOS PROGRAMA ESPACIAL SOVIETICO
2
1957-1967
POSTA ROMANA

НОМЕР
11

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

КВАНТ **11** **1982**

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Б. Гнеденко. Математика в СССР	2	*B. Gnedenko.* Mathematics in the USSR
Б. Бокштейн. Атомы блуждают по кристаллу	5	*B. Bokstein.* Atoms roaming in a cristal
А. Александров. Тупость и гений	12	*A. Alexandrov.* Obtuseness and genius
В. Френкель. Рыцарь научно-популярной книги (к столетию со дня рождения Я. И. Перельмана)	18	*V. Frenkel.* The knight of popular science books (100 years since Ya. I. Perelman's birth)
Лаборатория «Кванта»		**Kvant's lab**
А. Боровой, Ю. Климов. Что происходит на границе	22	*A. Borovoi, Yu. Klimov.* What happens on the boundary
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М771 — М775; Ф783—Ф787	26	Problems M771 — M775; P783 — P787
Решения задач М746 — М749; Ф758 — Ф767	29	Solutions M746 — M749; P758 — P767
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school children**
Задачи	41	Problems
И. Кириллова. Из книг Я. И. Перельмана	42	*I. Kirillova.* From Ya. I. Perelman's books
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
П. Сатьянов. Формулы и графики	46	*P. Satianov.* Formulas and graphs
XVI Всесоюзная олимпиада школьников		**The XVIth All-union school olympiad**
А. Земляков. Олимпиада по математике	51	*A. Zemliakov.* The mathematics olympiad
Т. Петрова, Л. Чернова. Олимпиада по физике	54	*T. Petrova, L. Chernova.* The physics olympiad
В. Орлов. Экспериментальный тур олимпиады по физике	57	*V. Orlov.* The experimental round of the physics olympiad
Призеры XVI Всесоюзной олимпиады школьников	60	Prizewinners of the XVIth All-union school olympiad
Искусство программирования		**The art of programming**
Стандартные приемы программирования. Урок 2.	62	Standart programming methods. Lesson 2.
Ответы, указания, решения	63	**Answers, hints, solutions**
Смесь *(11, 25, 50)*		**Miscellaneous** *(11, 25, 50)*
Шахматная страничка		**The chess page**
Путешествие в прошлое *(3-я с. обложки)*		A trip to the past *(3rd cover page)*

Разноцветные шарики, которые вы видите на первой странице обложки,— это капли воды, подкрашенные акварельными красками. Чем обусловлена четкая сферическая форма капель? Почему они «висят» неподвижно? Об этом вы можете прочитать в статье А. Борового и Ю. Климова «Что происходит на границе».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982

СССР
60
ЛЕТ

Б. Гнеденко

Математика в СССР

30 декабря исполняется шестьдесят лет со дня торжественного провозглашения Первым Всесоюзным съездом Советов декрета о создании первого в мире многонационального социалистического государства — Союза Советских Социалистических Республик. В этом государстве как равноправные объединились народы и народности, населяющие нашу страну.

Первоначально, в 1922 г., в состав Советского Союза входили лишь четыре союзные республики — РСФСР, УССР, БССР, и ЗСФСР. Через два года в состав СССР вошли Узбекская и Туркменская союзные республики. В 1929 г. к ним присоединилась Таджикская республика. После того как Казахская и Киргизская автономные республики РСФСР достигли определенных успехов в хозяйственном и культурном развитии, в 1936 г. они были преобразованы в союзные. В том же году Закавказская федерация размежевалась по национальному признаку на три союзные республики — Азербайджанскую, Армянскую и Грузинскую. Латвийская, Литовская, Эстонская и Молдавская республики вошли в состав Союза в 1940 году. Пятнадцать равноправных республик прошли большой и трудный путь экономического и культурного развития, вместе выдержали все испытания и победили в Великой Отечественной войне.

Советский Союз начал свое существование в очень сложных условиях. Долгие три года разрушительной империалистической войны, приведшей к революционному взрыву 1917 года, разорили страну. Последующие пять лет Гражданской войны, интервенции, голода и разрухи лишили ее огромного числа производителей — крестьян, рабочих, инженеров, учителей, врачей. Необходимо было немедленно приняться за восстановление разрушенного войной хозяйства, ликвидировать массовую беспризорность детей.

Но царизм оставил и другое тяжкое наследие — почти 75% населения дореволюционной России было неграмотным. На национальных же окраинах положение было во много раз хуже. Так, среди киргизов грамотность достигала лишь 0,6%, среди туркмен — 0,7%, среди таджиков — 0,5%, среди узбеков — 1,5%. Лиц же, имевших высшее образование и принадлежавших коренным национальностям царских окраин, в лучшем случае насчитывались единицы. На огромных пространствах Белоруссии, Закавказья, Средней Азии, Забайкалья не было ни одного высшего учебного заведения. Народы, населявшие эти территории, фактически были лишены возможности роста и расцвета.

Представители моего поколения прекрасно помнят, как сразу же после Великой Октябрьской революции люди потянулись к знаниям. Тогда в самых глухих уголках нашей родины были открыты школы.

Но Советская власть не ограничилась развитием только начальной ступени образования. Еще гремела Гражданская война и голод собирал свою страшную жатву, а Советское правительство стало создавать университеты на бывших окраинах России, столетиями отрезанных от просвещения (Иркутск, Баку, Ереван, Тбилиси, Ташкент). За годы своего существования эти университеты воспитали десятки тысяч специалистов.

Академик АН УССР Борис Владимирович Гнеденко — лауреат Государственной премии, заведующий кафедрой теории вероятностей Московского государственного университета.

В тяжелые годы разрухи, Гражданской войны и голода революция вызвала подлинную страсть к познанию и научному творчеству. Примечательно, что эту страсть не могли погасить ни голод, ни холод, ни материальные трудности.

Об этом времени прекрасно сказано академиком П. С. Александровым — одним из ведущих советских математиков, создателем советской школы теоретико-множественной топологии: «Период начала 20-х годов... был довольно своеобразным явлением. Важным положительным фактором этой эпохи в истории математики Московского университета являлся безграничный научный энтузиазм молодежи. Своей идейной почвой этот энтузиазм имел великие патриотические идеи советской научной культуры, возбудившие в учащихся и ученых то подлинное научное горение, которое с такой силой никогда не проявлялось в стенах дореволюционного математического факультета Московского университета».

Такая же картина наблюдалась как в немногочисленных старых университетах, так и во вновь созданных. Первые, революционные приемы студентов в университеты подготовили и выпустили в жизнь старшее поколение советских математиков, воспитавшее последующие поколения советских ученых и заложившее основу научных математических школ.

Такие школы возникли в Москве, Тбилиси, Ташкенте, Киеве, Харькове. В Ленинграде продолжала свое развитие математическая школа, основы которой были созданы еще трудами П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова и других замечательных ученых и педагогов. В Москве зародилась школа теории функций действительного переменного, вскоре распространившая свои интересы на теорию функций комплексного переменного, теорию вероятностей, топологию, дифференциальные уравнения, геометрию; основоположниками этой школы были Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин.

Новые университетские центры получили серьезную помощь от старых университетов, в первую очередь от Московского и Ленинградского. В частности, в Тбилиси переехали воспитанники Петербургского (позднее Ленинградского) университета Н. И. Мусхелишвили и Г. Н. Николадзе, а также воспитанник Московского университета А. М. Размадзе, положившие начало известной грузинской школе математического анализа и математической физики. Основы ташкентской школы математической статистики и математического анализа были заложены В. И. Романовским — воспитанником А. А. Маркова.

Огромное значение для развития математической науки в союзных республиках оказал курс партии на индустриализацию страны. Для массы строившихся заводов и фабрик были нужны инженеры — для их подготовки требовались математики. Появилась крайняя нужда в ученых, способных математическими методами оказывать помощь практике. В конце двадцатых — начале тридцатых годов на всей территории страны развернулось строительство новых вузов, был расширен прием в аспирантуру, в старейших вузах и в институтах Академии наук СССР были выделены места для подготовки специалистов всех уровней из среды молодежи коренных национальностей союзных и автономных республик. Эта мера оказалась исключительно продуктивной, поскольку в короткие сроки для активной научной работы было подготовлено большое количество талантливых молодых людей. Вернувшись к себе на родину, они стали центрами притяжения научной мысли молодых республик и организаторами национальных научных школ. В результате в Ереване возникла сильная школа теории функций комплексного переменного, в Баку — школа функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, в Алма-Ате и Фрунзе начали развиваться исследования по качественной теории дифференциальных уравнений.

Великая Отечественная война выявила не только силу советского строя, но и правильность концепции, согласно которой наука должна развиваться на территории всей страны. Наука, в том числе и математика, смогла решить ряд актуальных проблем обороны страны: были созданы теории, которые позволили разработать действенные меры борьбы с явлениями «шимми» и «штопора» в авиации, предложены статистические методы контроля качества промышленной продукции и статистические методы управления качеством, методы получения большей точности стрельбы по быстро движущимся объектам и многое другое. К концу войны необходимо было срочно разрабатывать теорию кумулятивных зарядов, баллистических ракет, ядерного оружия, современных вычислительных средств. Математики приняли активное участие в решении всех этих проблем.

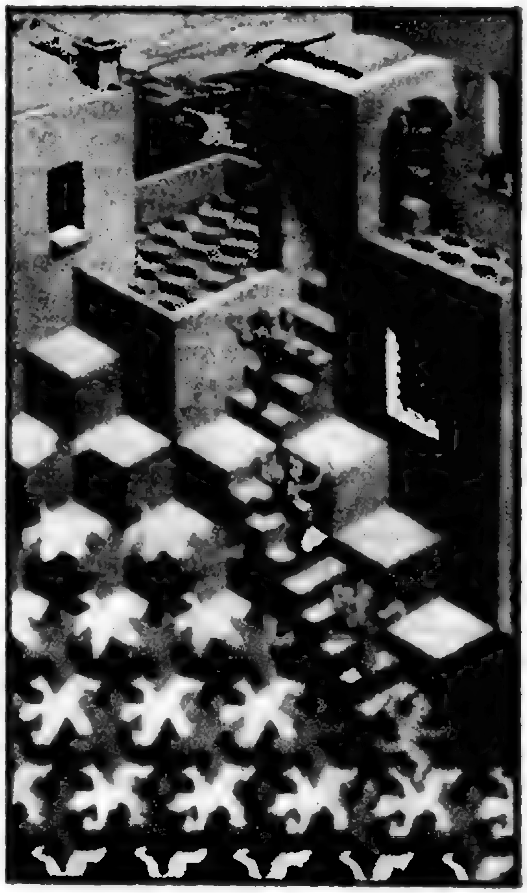
Окончание войны выдвинуло срочные проблемы восстановления народного хозяйства и дальнейшего его развития на новой производственной базе. Требования практики к математике росли буквально с каждым днем, особенно в связи с тем, что вычислительная техника потребовала создания и развития новых ветвей математической науки — программирования, логики, теории автоматов.

Советская математика дала большое число примеров создания общих теорий, вошедших в активный обиход науки и преобразивших лицо больших научных направлений. Достаточно напомнить теорию случайных процессов, родившуюся из запросов статистической физики, телефонии, метеорологии и биологии. Сейчас эта теория является основным направлением развития теории вероятностей и мощным орудием при решении проблем естествознания, техники, теории связи, радиотехники и многих других областей знания. Укажем еще на теорию оптимального управления, превратившуюся в большой раздел современной математики и одновременно являющуюся мощным орудием прикладных исследований. Уместно вспомнить, что в нашей стране родилось новое направление исследований, получившее наименование линейного программирования.

Кто из нас предполагал в предвоенный период, что через какие-нибудь пятнадцать лет человечество изобретет электронные вычислительные машины? Советская наука добилась того, что за короткий срок были предложены новые методы программирования для ЭВМ, и многие тысячи специалистов убедились в их силе для вычислений и для производства логического анализа сложных ситуаций. В настоящее время все союзные республики обладают не только мощными ЭВМ, но и кадрами хорошо подготовленных специалистов, способных творчески их эксплуатировать.

Мы можем гордиться, что за 65 лет, прошедших со времени Великой Октябрьской социалистической революции, и за 60 лет существования Советского Союза во всех республиках созданы математические научные школы.

Сейчас перед Советским Союзом стоит очередная задача — повысить темпы научного прогресса и воспитать молодое поколение в духе творческого искания, в духе веры в свои способности и неограниченную силу человеческого разума. Но для этого необходимо учащимся школы научиться не заучивать, а вникать в смысл изучаемого и использовать узнанное для активного применения. Далее следует приучиться к самостоятельному поиску путей решения сложных задач, чтобы сознание привыкло к самостоятельному мышлению и критическому подходу к задаче и предлагаемым решениям. Только творческий поиск в учебе и при первых самостоятельных шагах в науке позволит молодому поколению математиков внести свой вклад в повышение темпов научного прогресса в нашей стране.



Б. Бокштейн

Атомы блуждают по кристаллу

Около ста лет назад, в 1896 году, английский металлург Вильям Робертс-Аустен проделал такой опыт. Он крепко прижал тонкий золотой диск к отшлифованному торцу цилиндра из чистого свинца, убедился, что контакт достаточно плотный, и поместил эту пару на десять дней в печь при температуре 200°С. Когда отжиг кончился, оказалось, что металлы разъединить уже невозможно. Тогда экспериментатор разрезал составной цилиндр вдоль оси и, посмотрев его под микроскопом, убедился, что золото и свинец проникли друг в друга, произошло перемешивание металлов. Проникновение одного вещества в другое называется диффузией. Именно диффузия приводит к созданию науглероженной зоны в стали, обеспечивает соединение металлов при сварке, пайке, хромировании, никелировании, при спекании порошков и многих других процессах.

Почему атомы (или молекулы) одного вещества проникают внутрь другого? Как рассчитать глубину этого проникновения? От чего она зависит? В этой статье мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Почему это происходит?

Диффузия в газах и в жидкостях известна давно. Все хорошо знают, что если в сосуд впустить последовательно порции различных газов, то через некоторое время все газы однородно перемешаются: число частиц каждого сорта в единице объема сосуда станет постоянным, концентрации выравняются. Если в узкую пробирку осторожно налить две смешивающиеся жидкости одну на другую (например, воду и раствор медного купороса), то мы увидим, что поверхность раздела (между светлой водой и темно-голубым купоросом), очень четкая в первый момент, начнет постепенно расплываться. Появится переходная зона, которая будет увеличиваться в размере до тех пор, пока вся жидкость не станет однородной по составу (мы увидим это по однородной окраске). Процесс протекает очень медленно, и если взять столбики жидкостей высотой в несколько сантиметров, то разница окраски (а следовательно, концентраций) в верхнем и нижнем концах пробирки будет заметна еще через сутки после начала опыта. Но в конце концов жидкость станет однородной.

Таким образом, мы приходим к новому определению диффузии: диффузия — это самопроизвольное выравнивание концентраций. Атомы (или молекулы) сорта *A* перемещаются туда, где их меньше или нет совсем и где больше атомов сорта *B*, и наоборот. В результате происходит перемешивание.

Однако диффузию в твердых телах до Робертса-Аустена не наблюдал никто. Удивительно это или нет? Ведь мы имеем дело с твердыми телами никак не реже, чем с жидкостями или газами. Почему же так долго не замечали их перемешивания?

Попробуем в этом разобраться.

Почему происходит перемешивание? Что заставляет частицы разных сортов перемешиваться? Ответ на эти вопросы представляется очевидным: перемешивание — результат теплового движения частиц. Но за этим «очевидным» ответом встает законный вопрос: а почему в результате теплового движения частицы не разделяются по сортам? Возьмем пустой сосуд и впустим в него порцию азота и порцию кислорода. Газы перемешаются. Подождем: может быть, через некоторое время они разделятся — в одной половине сосуда будет азот, в другой — кислород? Не тут-то было. Точно так же легко перемешать соль и сахар (тепловое движение тут ни при чем, их надо потрясти), но безнадежно ждать, пока они разделятся снова

Причины, по которым частицы перемешиваются, связаны со стремлением любой системы, состоящей из большого числа частиц, к беспорядку, к хаотическому расположению частиц. Эти причины одинаково действуют и в газах, и в жидкостях, и в твердых телах, приводя к случайным передвижениям, случайным блужданиям частиц, которые создают беспорядок. В этом смысле ничего удивительного в том, что твердые золото и свинец взаимно проникают друг в друга, казалось бы, нет. И тем не менее этот экспериментальный факт чрезвычайно удивителен. Почему?

Вспомним, какие движения совершают частицы в различных агрегатных состояниях вещества. В газах частица до столкновения с другой частицей движется прямолинейно, совершая свободный пробег. После столкновения частица пролетает по новому направлению и с новой скоростью отрезок новой прямой до следующего столкновения. Ясно, что такое движение приводит к перемешиванию, к диффузии.

В жидкости смещения частиц при тепловом движении сопоставимы с их размерами. Однако положения частиц, как и в газе, не фиксированы; частица все время смещается и в результате за достаточно продолжительное время уходит далеко от начального положения. Такое движение также приводит к перемешиванию.

Совсем не так обстоит дело в кристаллических твердых телах. Для кристалла характерно упорядоченное расположение атомов в строго определенных местах — в узлах кристаллической решетки. Кристаллическая решетка — это совокупность повторяющихся совершенно одинаковых геометрических тел, так называемых элементарных ячеек. Сколько бы мы ни «гуляли» по кристаллу, в любом месте все устроено совершенно одинаково.

Основной вид тепловых движений, которые совершают атомы в твердых телах, это малые колебания около положения равновесия — узла решетки. Подчеркнем — **малые.** Амплитуда этих колебаний много меньше расстояния между узлами. У атома, совершающего такие колебания, нет никаких шансов попасть в соседний узел.

В свете всего сказанного взаимное проникновение атомов золота и свинца — вещь удивительная. Как они это делают? Каков механизм перемешивания атомов?

Как это происходит?

Как бы ни были различны механизмы блужданий частиц в газах, жидкостях и твердых телах, важно, что эти блуждания — случайные. Нельзя предсказать заранее, куда полетит молекула газа после очередного столкновения. Она может полететь с равной вероятностью в любом направлении.

Возникает любопытная задача. Пусть в произвольной точке пространства, которую мы примем за начало координат, находится группа частиц, способных совершать только случайные блуждания. Пусть в некоторый момент времени, который мы примем за начало отсчета, все они начинают двигаться. Зададимся вопросом: где будут находиться частицы через время t, как далеко они уйдут от начальной точки?

Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем ряд предположений, которые упростят нашу задачу: будем считать, что все частицы движутся только вдоль оси X; каждый очередной шаг частица делает через равные промежутки времени τ (τ — время «оседлой» жизни), и длина каждого шага одна и та же и равна δ; вероятность шага влево и вероятность шага вправо одинаковы и равны $1/2$.

На рисунке 1 приведена как бы моментальная фотография десяти частиц, начавших двигаться одновременно, через время t от начала движения. (Мы поместили частицы в начальный момент на прямую $x=0$.) Ясно, что предсказать местонахождение отдельной частицы через время t нельзя: одни частицы за это время почти не сдвинулись с места, другие ушли довольно далеко. Речь может идти только о смещении, усредненном по всем частицам.

Поскольку для каждой частицы вероятность шагнуть вправо или влево одна и та же, очевидно, что среднее смещение частицы от прямой $x=0$ (то есть сумма смещений всех частиц, деленная на их число) равно нулю, так как число частиц слева и справа от этой прямой будет одинаково и с равной вероятностью смещения могут иметь и положительное, и отрицательное значения. Но ведь в целом положение в группе меняется: сначала все частицы были вместе, а потом все-таки расходятся. Как же охарактеризовать это положение?

Смещения частицы после n шагов и $n+1$ шагов связаны очевидным соотношением

$$x_{n+1}=x_n\pm\delta.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$x_{n+1}^2=x_n^2+\delta^2\pm 2x_n\delta.$$

Это равенство справедливо для любой частицы, поэтому оно справедливо и для средних значений входящих в него величин (напомним, что, говоря о среднем значении, мы имеем в виду усреднение по всему числу частиц):

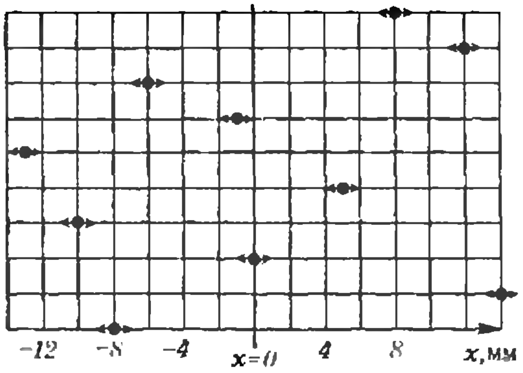


Рис. 1.

$$\overline{x_{n+1}^2}=\overline{x_n^2}+\overline{\delta^2}\pm\overline{2x_n\delta},$$

где $\overline{x_n^2}$, $\overline{x_{n+1}^2}$ — средние значения квадрата смещений частицы. (Среднее значение смещения частицы равно нулю — $\overline{x_n}=0$, $\overline{x_{n+1}}=0$, но среднее значение квадрата смещения не равно нулю, так как x^2 положительно независимо от знака x.) Поскольку мы считаем, что длина шага постоянна, значение $\overline{\delta^2}$ равно просто δ^2, а $\overline{x_n\delta}=\overline{x_n}\delta=0$. Следовательно,

$$\overline{x_{n+1}^2}=\overline{x_n^2}+\delta^2.$$

Это соотношение справедливо для любого n; значит, $\overline{x_1^2}=\delta^2$, $\overline{x_2^2}=2\delta^2$, $\overline{x_3^2}=3\delta^2$ и т. д. Таким образом,

$$\overline{x_n^2}=n\delta^2.$$

А теперь вспомним, что каждый очередной шаг частица делает через равные промежутки времени τ. Следовательно, за время t она сделает $n=t/\tau$ шагов, а средний квадрат смещения частицы за время t равен

$$\overline{x_n^2}=\frac{\delta^2}{\tau}t.$$

Можно ввести частоту шагов $\Gamma=\tau^{-1}$. Тогда

$$\overline{x_n^2}=\delta^2\Gamma t.$$

Величина, равная $\sqrt{\overline{x_n^2}}$, характеризует смещение частицы, совершающей случайные блуждания, от начального положения за время t. Назовем эту величину диффузионным путем. Из полученных нами соотношений следует, что диффузионный путь пропорционален корню квадратному из времени:

$$x_{\text{диф}}=\sqrt{\overline{x_n^2}}=\sqrt{\frac{\delta^2}{\tau}}\sqrt{t}=\sqrt{\delta^2\Gamma}\sqrt{t}. \quad (1)$$

Итак, задачу мы решили. Теперь посмотрим, как связаны характеристики случайных блужданий (δ, τ, Γ) с процессом диффузии.

Мы уже говорили, что диффузия — это процесс выравнивания концентраций. Частицы вещества переходят из той части пространства, где их концентрация больше, в ту часть, где она меньше. Следовательно, существует направленное движение этих частиц. Количественной характеристикой этого движения служит величина, называемая диффузионным потоком. Поясним, что это такое.

Представим себе, что в некотором объеме, занимаемом частицами, в какой-то момент времени существуют две области с различными концентрациями частиц. На рисунке 2 вертикальная прямая $x = x_1$ — граница, разделяющая эти области. Слева от границы (в области I) концентрация больше, чем справа (в области II). Процесс выравнивания концентраций будет происходить за счет перехода частиц из области I в область II. Число частиц, проходящих за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси X, и называют диффузионным потоком.

Выражение для диффузионного потока было впервые получено в 1855 году немецким физиком А. Фиком. Фику пришло в голову, что движение вещества вследствие диффузии аналогично распространению теплоты вследствие теплопроводности. Поэтому для описания диффузии можно использовать уравнения, которые еще в 1822 году были написаны французским математиком и физиком Фурье для теплопроводности. «Достаточно, — писал Фик, — заменить в законе Фурье слова «количество тепла» словами «количество вещества» и слово «температура» — словом «концентрация».»

Согласно Фурье тепловой поток, то есть количество тепла, переносимого из одной области тела в другую через единичную площадку в единицу времени, пропорционален разности температур между этими областями (если температуры равны, тепло не переносится) и коэффициенту теплопроводности $\varkappa$. Естественно, что тепло переносится из более нагретой области в менее нагретую.

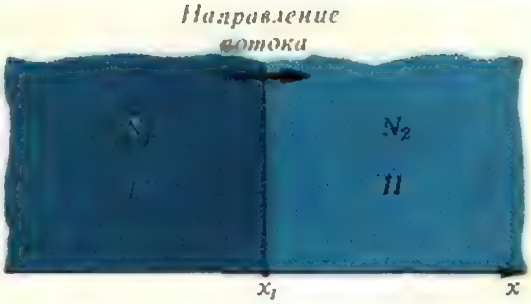


Рис. 2.

Согласно Фику диффузионный поток направлен из области с большей в область с меньшей концентрацией и зависит от двух факторов: от разности концентраций (много ли надо выравнивать, велик ли стимул для перемешивания) и коэффициента диффузии D. После того как концентрации выравнялись, направленного перемещения частиц вещества уже не происходит, поток равен нулю, но частицы движутся, блуждают.

Коэффициент диффузии — важнейшая характеристика процесса перемешивания. Его значение связано со скоростью случайных блужданий в данном материале. Можно показать, что диффузионный путь и коэффициент диффузии связаны соотношением

$$x_{\text{диф}} = \sqrt{2D}\,\sqrt{t}. \qquad (2)$$

Посмотрим теперь на формулу (1) и сравним ее с формулой (2). Мы видим, что

$$D = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau} = \frac{1}{2}\delta^2\Gamma.$$

Множитель 1/2 есть следствие того, что мы разрешили частицам шагать только вдоль линии. Для трехмерной кубической решетки, где можно шагать вдоль любой из трех декартовых осей,

$$D = \frac{1}{6}\frac{\delta^2}{\tau} = \frac{1}{6}\delta^2\Gamma. \qquad (3)$$

Мы получили очень важный результат — связь между коэффициентом диффузии D и характеристиками случайных блужданий (δ, τ, Γ): коэффициент диффузии пропорционален квадрату длины шага и частоте шагов диффундирующих атомов и обратно пропорционален среднему времени их оседлой жизни.

Теперь интересно сделать некоторые численные оценки. Как вы думаете: часто ли шагают атомы в кристалле? Довольно ясно, что в общем виде на такой вопрос не ответишь — ответ зависит от природы кристалла, от температуры, может быть, и еще от чего-то. Но, оказывается, некоторые общие закономерности существуют. Так, почти для всех кристаллов коэффициенты диффузии вблизи температуры плавления (но еще в твердом состоянии) приблизительно одинаковы и равны 10^{-8} см^2/с (для разных кристаллов температуры эти, конечно, разные: для свинца — чуть ниже 327°С, для золота — 1063°С, для железа — 1539°С, для вольфрама — 3387°С). Пренебрегая в соотношении (3) численным коэффициентом (нам важны порядки величин) и принимая $\delta = 3\text{Å} = 0{,}3$ нм $= 3 \cdot 10^{-8}$ см, находим, что $\Gamma \approx 10^7$ с$^{-1}$. Следовательно, вблизи температуры плавления атом шагает в кристалле в среднем 10 миллионов раз в секунду.

Много это или мало? Казалось бы, много. Но на самом деле так даже и вопрос ставить нельзя. Пять рублей — это много или мало? Смотря для чего! А один килограмм? С чем сравнивать! Естественно сравнить наши 10^7 с$^{-1}$ со средней частотой колебаний атомов в кристалле ν (ведь колебания — основной вид теплового движения атомов в кристалле). Так вот $\nu \approx 10^{13}$ с$^{-1}$. Таким образом, атом шагает в соседний узел сравнительно редко. Даже не семь раз отмеряет, как в пословице, а миллион раз «поколеблется», а уж потом шагнет. Еще более «осмотрительным» атом становится при охлаждении кристалла. У меди температура плавления 1083°С, и при температуре 1075°С атом меди шагает положенные 10 миллионов раз в секунду, а вот при комнатной температуре время его оседлой жизни составляет, ни много, ни мало, $3 \cdot 10^{12}$ лет, то есть он просто сидит на месте. Вот, кстати, и ответ на вопрос, почему так долго не изучали диффузию в твердых телах. Она очень медленная, и заметить ее (а тем более измерить) можно только при достаточно высоких температурах, да еще с помощью специальных (и довольно сложных) методов.

Еще одна полезная оценка. Сравним смещение атома из исходного положения при диффузии (диффузионный путь $x_{\text{диф}}$) с общим расстоянием, которое он проходит за то же время (x_{Σ}). В соответствии с уравнением (1) первая величина равна $\delta\sqrt{\Gamma t}$; вторая, очевидно, равна $\delta n = \delta\Gamma t$.

Принимая, как и раньше, $\delta \approx 0{,}3$ нм и $\Gamma \approx 10^7$ с$^{-1}$ (вблизи температуры плавления), найдем, что после 100 часов блужданий $x_{\text{диф}} \approx 0{,}6$ мм, а $x_{\Sigma} \approx 1$ км, то есть, отшагав в целом километр, атом смещается меньше чем на миллиметр. Вот сколь мала эффективность случайных блужданий по сравнению с направленным движением.

Исследования показали, что коэффициент диффузии быстро растет с увеличением температуры. Сильная зависимость основных характеристик процесса от температуры наблюдается во всех процессах, в которых для перехода из исходного состояния в конечное необходимо преодолеть потенциальный барьер. При случайных блужданиях в кристалле барьер очень высокий, его высота в десятки раз превосходит энергию теплового движения. Вот почему коэффициент диффузии сильно зависит от температуры: чем выше температура, тем легче атомам преодолеть барьер.

Но что это за барьер? И куда шагает атом, если все соседние узлы решетки заняты? Мы возвращаемся к вопросу, сформулированному нами раньше: каков механизм диффузии в кристаллах?

Как же все-таки это происходит?

Ответ на этот вопрос дал один из основоположников физики твердого тела советский физик-теоретик Яков Ильич Френкель.

В своих воспоминаниях, посвященных Френкелю, английский физик Невилл Мотт, возглавлявший много лет знаменитую Кавендишскую лабораторию, писал, что в Англии каждый студент-физик знает о «дефектах по Френкелю». Что же это такое?

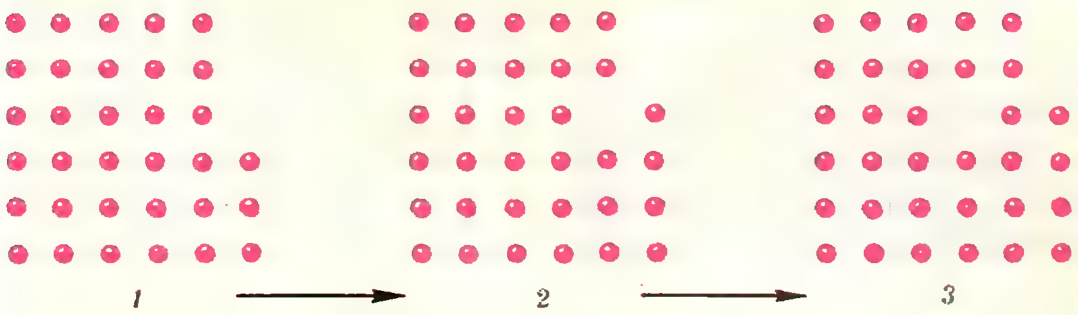


Рис. 3.

Вот как описывает это сам Френкель в статье «О тепловом движении в твердых и жидких телах», опубликованной в 1926 году в немецком журнале «Zeitschrift für Physik» (я приведу длинную цитату с короткими комментариями (в квадратных скобках)). «Предположим, что какой-нибудь атом, набравший случайно избыточную энергию, вырывается из клетки, образованной его соседями, как бы раздвигая «прутья» этой клетки, и вылетает в какую-то внутреннюю полость. [Атомы в кристаллической решетке не занимают всего объема тела, между ними остаются еще свободные промежутки (междоузлия); благодаря этому атомы могут колебаться.] Мы видим, таким образом, что один из узлов окажется вакантным, зато одно из междоузлий окажется занятым. Переходя из одного междоузлия в соседнее, атом может странствовать по всему внутреннему пространству кристалла.

Так как эти нарушения правильности обусловлены тепловым движением, количество вакансий должно быть тем больше, чем выше температура. Около температуры плавления число вакансий может достигнуть примерно одного процента по отношению к числу атомов. [Тут Я. И. Френкель ошибся примерно в 100 раз: около температуры плавления доля вакансий достигает 0,01%, то есть примерно одна вакансия на десять тысяч атомов.]

Не обязательно, чтобы число свободных вакансий в точности равнялось числу междоузельных атомов. Вакансия может возникнуть и проникнуть внутрь кристалла путем перехода одного из атомов на поверхность [последовательные этапы такого процесса изображены на рисунке 3]. Этот механизм можно рассматривать как растворение в кристалле окружающей пустоты. Наличие в кристалле вакансий обеспечивает его атомам подвижность, возможность перемещаться по всему его объему.»

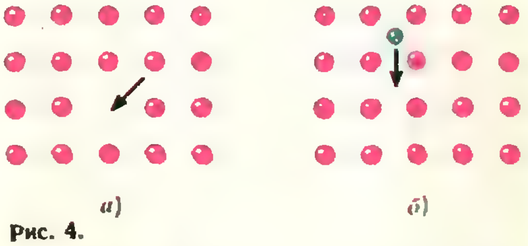


Рис. 4.

Заметьте, что в 1926 году никто этих вакансий и в глаза не видел. Вот вам ярчайший образец абстрактного научного мышления и предвидения. Вакансии «увидели» (тоже, кстати, по идее, высказанной Я. И. Френкелем) много позже — это сделал харьковский физик Б. Г. Лазарев (он опубликовал свою работу в 1956 году). Идея такая: концентрация вакансий сильно растет с температурой. Нагреем металл почти до плавления и резко охладим до комнатной температуры («закалим»). Вакансии не успеют уйти на поверхность и останутся в металле. Разница — большая: в меди при 1075°С (медь плавится при 1083°С) доля вакансий $1{,}3\cdot10^{-4}$, а при 27°С — 10^{-19}. Как всякое нарушение правильности решетки, это приведет к увеличению электрического сопротивления. Его можно измерить и определить концентрацию вакансий.

Таким образом, Френкель придумал два основных механизма диффузии в твердых телах: вакансионный (рис. 4, *а*: атом перемещается, обмениваясь местами с вакансией) и междоузельный (рис. 4, *б*: атом перемещается по междоузлиям). Вторым способом перемещаются маленькие (по размеру) атомы примесей, а вакансионным — все остальные; это — самый распространенный механизм.

Вот мы и ответили на вопрос, как это происходит. Чтобы атом в кристалле шагнул в соседний узел, нужно, чтобы одновременно произошли два события: в этом соседнем узле оказалась вакансия, и атом поменялся с ней местами.

Чего мы еще не знаем?

Теперь мы, вроде бы, можем решать практические задачи. Например, такую: какова глубина науглероженного слоя в стали, если при 900°C коэффициент диффузии углерода $D=10^{-7}$ см^2/с, а время науглероживания — около одного часа? Находим: $x_{\text{диф}}=\sqrt{2Dt}\approx0{,}3$ мм. Ответ — правильный, во всяком случае по порядку величины.

Но вот еще задача. Обмотку электромоторов делают из медной проволоки. В работе проволока разогревается градусов до 200, окисляется, и характеристики электромотора резко ухудшаются, а часто обмотка просто «перегорает». Ясно, что надо ее покрыть чем-нибудь, что не окисляется при 200°C, проще всего — серебром. И процесс такого покрытия — серебрения проволоки — известен. Но толстым слоем покрывать не хочется — серебро дорогое. А тонким опасно: медь продиффундирует сквозь серебро, выйдет наружу, и все начнется сначала. «Как выбрать толщину слоя?» — с таким вопросом приходит технолог к специалисту по диффузии.

Посчитаем вместе. При $T=200°\text{C}\approx500$ К $D\approx10^{-19}$ см^2/с. Легко видеть, что слоя в 1 мкм $=10^{-4}$ см хватит больше чем на 1000 лет, то есть

$$t\approx x_{\text{диф}}^2/2D>10^3 \text{ лет.}$$

Так мы и отвечаем. Технолог поступает в соответствии с нашим советом и на горьком опыте убеждается, что с наукой что-то не в порядке, потому что через месяц электромоторы начинают «благополучно» выходить из строя.

И вот тут мы вступаем в обширную область исключений из свода диффузионных законов или, если хотите, в область диффузионных «беззаконий».

О многих из них вы сможете узнать, прочитав увлекательную книгу известного советского специалиста по физике кристаллов Я. Е. Гегузина «Очерки о диффузии в кристаллах» (Москва, «Наука», 1970), или в книге автора этой статьи «Атомы блуждают по кристаллу», которую Библиотечка «Квант» предполагает выпустить в 1983 году.

Рассказывают, что...

По воспоминаниям современников, Эйнштейн неоднократно говорил, что свои достижения он объясняет исключительно непреклонным упорством в решении поставленных им перед собой задач. Один из сотрудников Эйнштейна приводит шутливую историю, которая может служить иллюстрацией к этому высказыванию Эйнштейна. (Сам Эйнштейн сказал про эту историю, что она будет неплохим анекдотом о нем.)

Эйнштейн со своим помощником подготовили статью и им понадобилась скрепка, чтобы скрепить бумажные листы. Порывшись во всех ящиках письменного стола, они, наконец, нашли скрепку, но она была совершенно искорежена. Пришлось искать, чем бы ее выпрямить. После новой серии поисков удалось обнаружить целую коробку прекрасных скрепок. Эйнштейн сразу же взял одну из них и принялся изготовлять приспособление для починки скрепки-уродца. На возглас своего ассистента «Что же Вы делаете?» Эйнштейн, несколько замешкавшись, ответил: «Вы видите ...когда я ставлю перед собой какую-то цель, отвлечь меня от нее почти невозможно».

А. Александров

Тупость и гений

Всякий, кто занимался математикой — решая задачи, доказывая теоремы или формируя новые концепции, наверно, имел случай не раз поражаться своей тупости. Думал, думал над задачей — не решил, а узнал решение — подумал: какой дурак! как я не сообразил? А то думал, думал — решил и рад, а все же, бывает, подумаешь: тупица! как я раньше не сообразил?

У ученых-математиков бывает: думаешь, думаешь над теоремой, иногда долго, иной раз и не год, и не два, ищешь доказательство и так, и сяк, и с этого конца, и с другого, ан не выходит, а вышло — удивляешься: дурак! как я раньше не сообразил? ведь по сути это совсем просто. А уж о новых концепциях и говорить не приходится: занимаешься какими-нибудь вопросами, а не приходит в голову посмотреть на них с более общей точки зрения или с другой, так сказать, стороны; не формулируются поэтому общие понятия, проясняющие круг вопросов. А потом, если — такое счастье! — сообразил, то удивляешься: как это раньше тебе в голову не пришло? Ну, а если сообразил кто-то другой, то, как ни радуешься успеху науки, а зло берет: как это я, тупица, сам не додумался!

Поиски решения нестандартной задачи, как и доказательства теоремы, состоят обычно в том, что приходит в голову одно решение или доказательство — неверное! потом — другое: «гениальная идея!»— неверно! третья попытка — неверно! еще бросок на задачу — промах.. и если задача или теорема трудная, то так может длиться долго.

Помню, предложил я*) Иосифу Либерману одну теорему доказать была у меня хорошая гипотеза. Тогда он был студентом — талантливый был парень!— и стал бы крупным геометром, если бы не война: он погиб в августе 1941 г., а в июле в форме морского офицера защитил диссертацию — уже на втором году аспирантуры — такой был талант. Так вот, предложил я ему доказать теорему. Встречаемся через некоторое время, он говорит: доказал, и рассказывает. А я его зацепил: в этом месте почему вы так утверждаете? Ошибка — ушел Иосиф. Опять встречаемся — исправил он ошибку, но дальше опять ошибки. Так я его почти целый год гонял. Но потом он еще подучил топологию и доказал не только мою теорему, но и более сильную, которую уже сам сформулировал.

Таких историй долгих поисков можно рассказать множество. Вот, например, придумал я в 1937 году одну теорему, очень хорошую теорему, и доказал ее при некоторых дополнительных предположениях. Естественно, встал вопрос доказать ее без этих предположений. Вопрос стоит до сих пор — 45 лет. Очень я старался ее доказать и другие очень старались, да не вышло.

И так во всех науках. Бьется филолог над расшифровкой и толкованием текста — и так и сяк... А потом, когда сообразил, тоже, наверно, удивляется, вроде нас, математиков: какой дурак! как это я раньше не сообразил? оно ведь очевидно!

Словом, тот, кто думал, вдумывался, искал, тот знает, насколько туп и несообразителен бывает человек. Сообразительностью своей

---

*) Автор — видный советский геометр А Д Александров, академик АН СССР (*Прим ред*)

любуются обычно люди, которым не приходилось упорно вдумываться и искать,— легко дается удача тому, кто не ставит перед собою трудных задач, серьезных целей.

И вот я хочу рассказать историю о человеческой тупости и о гении, историю, несравненно более значительную, чем те, о которых я только что говорил. Дело идет об одном из величайших завоеваний человеческого духа, в котором участвовали первоклассные таланты и подлинные гении, без преувеличений. Речь — о неевклидовой геометрии, о ее более чем 2000-летней истории.

История эта очень интересна и поучительна. С ней связано много такого, что касается не математики самой по себе, а свойств, путей и страстей человеческих. Но прежде чем говорить об истории, надо бы объяснить

Что такое геометрия Лобачевского

Ответ, конечно, всем известен: это — геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением одной только аксиомы параллельных («Геометрия 6—8», п. 33). Именно, у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, параллельные данной (то есть лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие). Утверждения, или, другими словами, теоремы, которые выводятся из так измененных оснований геометрии Евклида, и образуют *геометрию Лобачевского*. Все это, как мы видим, «очень просто» и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее — многие теоремы геометрии Лобачевского — оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии из данного выше ее простого формального определения совершенно не ясен.

Сам Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой*. Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложимой к реальному пространству. Но только «могла бы»— реальных же приложений не было. Поэтому и логическая непротиворечивость этой геометрии оставалась не установленной. Ведь как ни развивал ее Лобачевский, а могло бы оказаться, что дальше все-таки обнаружится противоречие.

Реальный смысл и логическая непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекают из ее простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. Вот эта модель.

За «плоскость» принимается внутренность какого-либо круга (рис. 1), за «точки»— точки этой внутренности, за «прямые»— хорды — конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За «перемещения» принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды — в хорды. Соответственно, «конгруэнтными» называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. То,

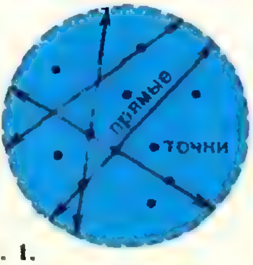


Рис. 1.

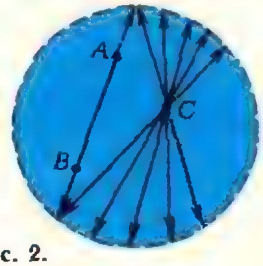


Рис. 2.

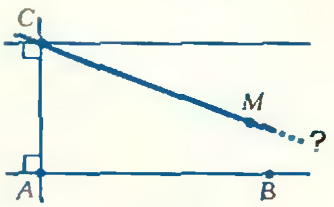


Рис. 3.

что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рисунке 2 через точку C, не лежащую на «прямой» (то есть на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих (AB).

Поэтому, если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие (вернее, его перевод на «язык в круге») имеется и в геометрии Евклида.

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и понимаем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

Стало быть, геометрия Лобачевского настолько непротиворечива, насколько непротиворечива геометрия Евклида, и имеет в такой же степени реальный, экспериментально устанавливаемый смысл.

От Евклида до Лобачевского

Сам Евклид (IV в. до н. э.) принимал в качестве аксиомы параллельных следующее предложение (у Евклида оно было «пятым постулатом»): *Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.* Мы привели эту формулировку Евклида только затем, чтобы можно было убедиться в ее сложности. Другие постулаты гораздо проще и формулируются гораздо короче, начиная с первого: *Через всякие две точки можно провести прямую.*

Естественно возникали попытки освободиться от сложного пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Я думаю, что сам Евклид предпринимал такие попытки и, во всяком случае, в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда (III в. до н. э.) «О параллельных линиях», где, надо полагать, пятый постулат выводился из каких-то более простых посылок.

Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение 2000 лет. Их предпринимало множество ученых. Вот неполный перечень: греки Птолемей (2 в. н. э., тот самый Птолемей, «которого система») и Прокл (5 в.), араб ал-Хайсам (10 в.), перс (или таджик) Омар Хайям (11 в.— начало 12 в., тот самый Хайям, который известен как великий поэт), азербайджанец ат-Туси (13 в.), немец Клавий-Шлюссель (1514; здесь и дальше дата работы) итальянцы Катальди (1603), Борелли (1658) и Витале (1680), англичанин Валлис (1663), итальянец Саккери (1733), немец Ламберт (1766), французы Бертран (1778) и Лежандр (1794, 1823), русский Гурьев (1798). Все их попытки сводились к тому, что пятый постулат выводился из какого-нибудь другого положения. При этом многие не замечали этого, считая, что доказательство им удалось. Другие, более проникновенные и критичные, явно формулировали то положение, из которого выводили пятый постулат, как это сделал, например, Омар Хайям.

Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в 17—18 вв. возрастало.

Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 году — в год его смерти. Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Отправляясь от работ своих предшественников, Саккери пытается доказать пятый постулат от противного — приняв предположение, равносильное отрицанию пятого постулата, он выводил из него следствия, стремясь прийти к противоречию. Но так как отрицание пятого постулата есть аксиома Лобачевского, то выводы, которые получал Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского. Иначе говоря, Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. К противоречию он не пришел, но все же заключил, что ему удалось доказать пятый постулат, хотя, по-видимому, он не был в этом вполне уверен. Он как бы убеждал сам себя, когда писал о гипотезе, равносильной отрицанию пятого постулата, что он «вырвал эту зловредную гипотезу с корнем».

Из довольно многочисленных (55) появившихся в 18 в. сочинений по теории параллельных особенно выделяется написанная в 1766 г. «Теория параллельных» И. Г. Ламберта, немецкого математика, физика и астронома. Ведя доказательство пятого постулата от противного, Ламберт вывел из его отрицания много следствий. Он, можно сказать, в значительной мере построил основы геометрии Лобачевского. В его выводах не было противоречия, и он не подумал, что нашел его, как это делали почти все его предшественники. Ламберт даже высказал мысль, что он «почти должен сделать вывод», что опровергаемая им гипотеза «имеет место на какой-то мнимой сфере». Но все же он остался уверен, что геометрия, основанная на отрицании пятого постулата, невозможна. Его работа не давала, однако, доказательства этому убеждению. Поэтому, надо думать, он остался ею недоволен и не опубликовал ее. Она была издана только в 1786 г.— через 9 лет после его смерти и через 20 лет после того, как она была написана. В общем Ламберт очень близко подошел к открытию новой геометрии, но не сделал его.

Вплотную подошли к пониманию возможности неевклидовой геометрии немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825), но ясно выраженной мысли, что намечаемая ими теория будет столь логически законной, как и геометрия Евклида, они все же не высказали.

Гаусс, по его собственному свидетельству, занимался теорией параллельных с 1792 г. и, как видно из его переписки, постепенно приходил к убеждению, что доказательство пятого постулата невозможно. Так, в 1817 г. в письме к Ольберсу он писал: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка». Раз он пишет «прихожу все более», то значит еще не пришел окончательно. Далее он продолжает: «Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой...» В то время он далеко развил неевклидову геометрию, но только в 1824 г. в письме к Тауринусу он написал определенно, что неевклидова геометрия, «в которой сумма углов треугольника меньше 180°, совершенно последовательна» и что он «развил ее для себя совершенно удовлетворительно». Однако только в 1831 г. он взялся за то, чтобы изложить, хотя бы кратко, свои выводы, но за всю свою жизнь так ничего и не опубликовал по поводу неевклидовой геометрии. В 1829 г. в письме к Бесселю он писал: «Я опасаюсь крика беотийцев, если выскажу мои воззрения...»*). Он боялся подорвать свой научный авторитет.

Но когда Гаусс писал все это, уже нашелся человек, который не только совершенно удовлетворительно развил геометрию, отрицающую пятый постулат, и не только пришел к убеждению, что эта геометрия совершенно последовательна, но, не убоявшись ничьего крика, доложил все это научному собранию. Это был Николай Иванович Лобачевский, который пришел к убеждению о возможности неевклидовой геометрии еще в 1824 г. и представил доклад с изложением ее начал физико-математическому факультету Казанского университета 23 (11) февраля 1826 года; опубликовал он его в расширенном виде в работе «О началах геометрии» в ряде выпусков «Казанского вестника», научного издания Казанского университета, с февраля 1829 по август 1830 г.

В 1835—38 гг. Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет:

«Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения». Для Лобачевского вопрос об истинности той или иной геометрии был, стало быть, вопросом опыта; свою геометрию он рассматривал как возможную теорию свойств реального пространства, то есть свойств структуры соответствующих отношений материальных тел и явлений.

Почти одновременно с Лобачевским — в 1825 г.— к той же геометрии пришел молодой венгерский математик Янош Больяи*). Свои выводы Янош Больяи изложил в 1832 г. в качестве приложения (Аппендикса) к учебнику геометрии своего отца Фаркаша Больяи. Фаркаш Больяи послал учебник Гауссу. Тот, одобрительно отозвавшись о результатах Яноша, написал вместе с тем, что все это ему давно известно. Янош, понимавший значение своих открытий, решил, что Гаусс просто приписал их себе. Он надолго прекратил свои занятия неевклидовой геометрией. Но Лобачевский продолжал разрабатывать свою геометрию и публиковать работы с ее изложением вплоть до самой смерти.

Нельзя удивляться, что новая геометрия могла казаться невозможной. Посмотрите на рисунок 3: ясно, что прямая *CM*, если ее достаточно далеко продолжить, обязательно пересечет прямую *AB*. Допущение, будто через одну точку проходят две прямые, параллельные данной, совершенно противоречит наглядному представлению. Такое допущение кажется просто нелепым. Никакой неевклидовой геометрии быть не может! Тем более нужно отдать должное смелости мысли Лобачевского и Больяи, которые решились допустить «нелепость». Нелепость с точки зрения наглядного представления — да, но с точки зрения логики — другое дело. Как ни кажется наглядно нелепым допущение многих параллелей, логически оно допустимо. Нужна была большая смелость мысли, чтобы твердо убедиться в этом, хотя теперь, когда найден простой смысл неевклидовой геометрии, никакой смелости мысли не нужно — достаточно самой небольшой способности к отвлеченному мышлению.

---

*) Беотийцы, жители области Древней Греции Беотии, считались особо глупыми, так что название «беотиец» было нарицательным.

*) Ближе венгерскому произношению — Бойаи, у нас можно встретить также написания: Больяй, Бойай, Бояи.

От убеждения к доказательству

Итак, Лобачевский и Больяи публично, а Гаусс в письмах выразили убеждение в правомерности неевклидовой геометрии и далеко развили ее. Однако это убеждение основывалось только на том, что в полученных выводах не было противоречий. Но ведь можно было бы думать, что в дальнейших выводах противоречия все же появятся. Реальный смысл новой геометрии оставался совершенно неясным. И пока он не был найден, великое открытие все же висело в воздухе — геометрия Лобачевского оставалась не более чем воображаемой.

В 1839—40 гг. появились две работы профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Ф. Миндинга, в которых он исследовал некоторые специальные поверхности — поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этих работах по существу заключался вывод, что геометрия на таких поверхностях есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Но этот вывод там не был явно высказан. Интересно, что двумя годами раньше в том же журнале, где были напечатаны работы Миндинга, была опубликована одна из работ Лобачевского!

В 1854 г., при вступлении на должность профессора Геттингенского университета, Б. Риман, как это полагалось, прочел пробную лекцию. Лекция называлась «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Она содержала необычайное богатство плодотворных идей — от общей концепции математического пространства до предвидения того, что стало потом общей теорией относительности. Кроме того, в лекции была намечена общая теория некоторого типа пространств (называемых теперь *римановыми*), которые включают, как простейшие частные случаи, пространства Евклида, Лобачевского и так называемые *сферические* пространства. Риман дал чисто аналитическое определение этих пространств; это по существу означало, что геометрия Лобачевского в такой же степени непротиворечива, как и анализ.

Но этого никто не понял, не заметил. Лекция Римана осталась не понятой И только слушавший ее старый, 77-летний Гаусс ушел, как свидетельствуют, после лекции в глубокой задумчивости. Лекция Римана не была сразу опубликована, ее издали только в 1868 г., через 2 года после его смерти. И тогда она сразу произвела величайшее впечатление, вызвала бурное развитие намеченной в ней теории.

Тогда же, в 1868 г., итальянский математик Бельтрами сделал то, до чего дошел, но чего не сказал Миндинг,— он показал, что геометрия Лобачевского выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Однако выводы Бельтрами были аналитическими, далекими от элементарной геометрии, от Евклида. Лишь в 1871 г. Клейн заметил ту модель на круге, о которой шла речь в начале статьи. Позднее Пуанкаре нашел другую интересную модель, связанную с комплексными числами (см. «Квант», 1976, № 3, с. 7).

Так через 40 лет после опубликования первых работ Лобачевского и Больяи их убеждение было доказано и их геометрия получила всеобщее признание.

(Окончание в следующем номере)

В. Френкель

Рыцарь научно-популярной книги

(к столетию со дня рождения Я. И. Перельмана)

Яков Исидорович Перельман любил повторять слова Лапласа: «Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его занимательным». К словам знаменитого французского ученого можно добавить, что не менее серьезен и предмет физики. Всю свою жизнь Я. И. Перельман посвятил тому, чтобы заинтересовать других, и в первую очередь школьников, этими науками. Но не только школьников. Он искренне сетовал на то, что образованные люди — медики и ботаники, физиологи и лингвисты — почти ничего не знают о физике, астрономии, математике. Истинная культура, по его мнению, должна включать в себя знание основ любимых им точных наук.

Расцвет творческой энергии Перельмана совпал с величайшими открытиями в физике и технике. Но для того чтобы в полной мере понять значение и смысл этих открытий, необходима основательная подготовка, знание азов. Вот этому-то он и посвящал свои книги «Занимательная физика» и «Живая математика», «Ракетой на Луну» и «Межпланетные путешествия» и многие-многие другие, которые, безусловно, знакомы читающим эти строки.

Перельман учил обращать внимание на, казалось бы, примелькавшиеся явления или предметы и простыми словами, образами, средствами показывал, какая физика за ними стоит. Составляющие единое целое маленькие этюды, на которые разбиты книги Перельмана, в чем-то схожи со стихотворениями в прозе. Сходство отнюдь не определяется «высоким штилем» — язык его этюдов прост и лаконичен. Привлекают в них изящество, с которым раскрывается физическая подоплека того или иного явления, умение минимальными математическими (арифметическими) средствами подтвердить или опровергнуть физические рассуждения. Часто уже в названиях этюдов заключена некоторая парадоксальность. Вспомните: «Горячий лед», «Вода в решете», «Зрение тремя глазами», «Холод из угля», «Лед, не тающий в кипятке» или «Как мы пьем?», «Умеете ли вы считать?», «Мог ли быть потоп?», «Сколько стоит молния?», «Мог ли Архимед поднять Землю?» и т. д.

Однако еще более парадоксально, что на простые вопросы: «Кто такой Перельман?», «Когда он родился?», «Где жил и работал?», «Как и когда начал писать?»,

---

Несколько отрывков из книг Я. И. Перельмана публикуются в этом же номере журнала.

«С кем общался?», «Когда и где умер?»— на вопросы, ответы на которые составляют биографию человека, вряд ли смогут ответить многие читатели его книг, люди, умеющие давать ответы на замысловатые вопросы природы. Ни в первых, ни в десятых, ни в двадцатых изданиях книг Перельмана не нашлось места даже для краткой биографической справки об их авторе.

К счастью, сведения о Якове Исидоровиче Перельмане имеются в фондах Ленинградского отделения Архива Академии наук СССР. Архив расположен на Университетской набережной в Ленинграде, рядом со знаменитой Кунсткамерой. В нем хранятся бумаги выдающихся отечественных и иностранных ученых, в частности и тех, имена которых встречаются в книгах Перельмана. Если таких документов — писем, рукописей и т. д.— много, они составляют специальный фонд. Фонд Якова Исидоровича имеет номер 796; он достаточно обширен, и его описание занимает четыре объемистые тетради. Приведенные ниже сведения почерпнуты из этого фонда.

Я. И. Перельман родился 22 ноября 1882 года в Белостоке в семье служащего. В 1901 году он переезжает в Петербург и поступает в Лесной институт (ныне Лесотехническая академия им. С. М. Кирова), где уже учится его старший брат Осип — впоследствии известный писатель Осип Дымов. (Именно из писем О. И. Дымова к младшему брату можно узнать о некоторых подробностях биографии Якова Исидоровича.) Однако не 1901 год, год переезда из провинции в столицу, выделяется Я. И. Перельманом как поворотный в его жизни, а 1899 — от него ведет он отсчет своей жизни писателя, выбравшего точные науки героями своих произведений. В этот год в России, да и в других странах тоже, много писали о комете, которая должна была пролететь неподалеку от Земли, и о порожденном ею потоке метеорных тел. Ходили слухи, как это часто бывает, чуть ли не о конце света, но вот 23 сентября 1899 года в газете «Гродненские губернские ведомости» появилась статья, эти слухи опровергавшая. Называлась она «По поводу ожидаемого метеорного дождя», автором ее был гимназист Яков Перельмен, но фамилию свою он скрыл под псевдонимом. (Впоследствии он часто выступал, публикуя мелкие статьи и заметки, под разными псевдонимами, один из которых звучал характерно: Цыфиркин.) Дело в том, что по уставу гимназий их ученики не имели права публиковать свои произведения в печати вплоть до окончания учебного заведения.

Когда в 1924 году в Ленинграде был напечатан приуроченный к 25-летию научно-популяризаторской деятельности Я. И. Перельмана каталог его сочинений, он открывался отзывом о нем, написанным патриархом русской физики — Орестом Даниловичем Хвольсоном, автором самого известного в 20-е годы курса общей физики. Хвольсон писал: «Автор приобрел вполне заслуженную известность своими популярными сочинениями, между которыми первое место занимает «Занимательная физика». Это, действительно, занимательная книга, интересная даже для специалиста по физике. В ней собран обширный и разнообразный материал; изложение легкое и правильное». Затем в каталоге приводился перечень написанных Перельманом за 25 лет работы 17 книг, причем общий тираж их издания составлял более миллиона экземпляров — по тому времени цифра гигантская. (Для сравнения укажем более поздние цифры: семь изданий первой части «Занимательной физики» составляли в общем 90 000 экз., а имеющееся у автора этих строк 17-е издание (1965 г.) вышло тиражом 100 000 экз.; после этого книга издавалась еще три раза. В 1981 году увидел свет очередной ежегодник, издаваемый ЮНЕСКО — "Index Translationum". В нем собраны сведения обо всех книгах в мире, переведенных в течение 1977 года с одного языка на любой другой. Книги Перельмана в этом году издавались в переводах 17 раз. Они вышли в издательстве «Мир» в СССР, а также в ГДР, Чехословакии, Испании и Японии.)

Для ленинградских школьников 30-х годов Перельман был не только автором полюбившихся книг. С его именем однозначно связывался «Дом занимательной науки» (ДЗН), одним из вдохновителей и организаторов которого был Яков Исидорович. Культурно-просветительный отдел Ленинградского совета депутатов трудящихся передал для организации этого Дома красивое здание дворца Шереметьева на набережной реки Фонтанки. ДЗН был открыт 4 ноября 1935 года. В его залах разместились экспонаты, «реализовавшие» и наглядно демонстрировавшие многие из опытов и примеров, о которых рассказывал Перельман на страницах своих книг. В ДЗН проводились математические и физические олимпиады, организовывались встречи с учеными, туда ходили на экскурсии. В дни школьных каникул он был местом паломничества не только ленинградцев, но и ребят, приезжавших в Ленинград со всей страны. Только в 1938 году его посетило более 100 тысяч человек.

В объемистой папке фонда 796, имеющей номер 33, хранятся письма. Письма деловые и семейные (у Якова Исидоровича был сын Михаил, погибший на фронте в первый год Великой Отечественной войны). Больше всего сохранилось черновиков писем Перельмана разным лицам. Особое внимание привлекает его письмо 1902 года, адресованное известному французскому астроному Камилю Фламмариону. Имя Фламмариона было хорошо знакомо русским читателям на рубеже XIX и XX веков. Только в течение 1900—1902 годов (мы специально выбрали годы, примыкавшие к дате письма) в России вышло девять книг Фламмариона, популяризирующих астрономию; в мире он имел заслуженную репутацию «популяризатора № 1». Наряду с «Астрономией», «Живописной астрономией», «Начатками астрономии», «Маленькой астрономией» и даже... «Астрономией для дам», Фламмарион написал несколько фантастических романов, в том числе «Люмен». Героем этого романа был некий дух Люмен, способный двигаться в мировом пространстве с любыми скоростями, в частности—превышающими скорость света.

В письме студента второго курса Лесного института (где тогда учился Я. И. Перельман) разбираются приписываемые Фламмарионом Люмену ощущения, когда тот приближается к Земле или покидает ее со скоростью, меньшей, равной или большей скорости света. Так, по Фламмариону, Люмен, двигаясь со скоростью, равной скорости света, будет наблюдать «застывшую» картину того, что происходило на Земле во время его отлета. По Перельману — вообще ничего не будет видеть. Действительно, рассуждает Перельман, разве может Люмен испытывать действие несущихся рядом с ним лучей, если он находится по отношению к ним в относительном покое? «Если бы солдат бежал от неприятеля со скоростью пушечного снаряда, то ни одно ядро не в состоянии было бы удариться в него, хотя бы они окружали его черной тучей». Наблюдатель, заключает Перельман, ничего не увидит.

Приведем теперь другую цитату: «Если бы я стал двигаться вслед за лучом света со скоростью *c* (скорость света в пустоте), то я должен был бы воспринимать такой луч света, как покоящееся, переменное в пространстве электромагнитное поле. Но ничего подобного не существует; это видно как на основании опыта, так и из уравнений Максвелла. Интуитивно мне казалось ясным с самого начала, что с точки зрения такого наблюдателя все должно совершаться по тем же законам, как и для наблюдателя, неподвижного относительно Земли. В самом деле, как же первый наблюдатель может знать или установить, что он находится в состоянии быстрого равномерного движения?».

Возможно, читатели догадались, что это рассуждение принадлежит знаменитому Альберту Эйнштейну. Цитата взята из его «Автобиографических заметок», написанных в 1949 году. В них Эйнштейн вспоминает, что над парадоксом движения со скоростью света он размышлял начиная с 16-летнего возраста, когда впервые на него натолкнулся (в 1895 г.), в течение 10 лет — до 1905 года, когда была создана специальная теория относительности. «В этом парадоксе уже содержится зародыш специальной теории относительности, — продолжает Эйнштейн.— Сейчас, конечно, всякий знает, что все попытки удовлетворительно разъяснить этот парадокс были обречены на неудачу до тех пор, пока аксиома об абсолютном характере времени и одновременности оставалась укоренившейся, хотя и неосознанной в нашем мышлении».

Итак, в 1902 году мысли Перельмана находились в разительном соответствии с предметом долгих размышлений Эйнштейна. Был ли общим источник этих размышлений? Эйнштейн, конечно, мог к тому времени прочесть роман Фламмариона (вышедший первым изданием во Франции в 1878 г.), однако позднее, в апреле 1920 года, беседуя в Берлине со своим первым биографом А. Мошковским и обсуждая этот роман, он с некоторым раздражением говорил о нем. («Фламмарион взял его <парадокс — *В. Ф.*> у других и только популяризировал», — заметил Мошковскому Эйнштейн.)

Мы подробно остановились на этом эпизоде — одном из многих сюжетов, которые могут быть почерпнуты из изучения архива Перельмана, потому что он, этот сюжет, имел своеобразное продолжение.

Во-первых, многие, вероятно, помнят главу «Можно ли поймать пулю?» из «Занимательной физики» Перельмана. Это — замечательная иллюстрация к рассуждению 20-летнего юноши в письме к Фламмариону. (Надо сказать, что в книгах Перельмана рассыпано много автобиографических моментов — помимо тех, в которых он прямо это подчеркивает. Так, в «Живой математике» в этюде «Умеете ли вы считать?» рассказывается о способах подсчета в лесу деревьев разных пород. А «Занимательная геометрия» и вовсе начинается главой «Геометрия в лесу». Теперь, зная, что Яков Исидорович закончил Лесной институт, мы можем догадаться, что соответствующие примеры почерпнуты им из его студенческой практики.)

Во-вторых, и это не менее интересно, и в дальнейшем «мировые линии» (если воспользоваться термином специальной теории относительности) Эйнштейна и Перельмана в какой-то мере пересекались. Не удивительно, что Перельман знал работы гениального физика (о них написано, например, в приложении к одной из его книг) и интересовался его личностью. Существенно, что и Эйнштейн, со своей стороны, не только знал, но и высокого ценил научно-популярные книги Перельмана. Якову Исидоровичу было известно об этом от разных лиц. Так, Осип Дымов в 1943 году писал брату: «Эйнштейн знает о тебе, слышал твое имя. Я говорил с ним о тебе в Берлине еще три года тому назад». В одном из писем А. М. Горькому, говоря о своей книге «Занимательная физика», Перельман писал, что недавно получил «лестный отзыв о ней Альберта Эйнштейна». Эйнштейн мог знать об этой книге, например, от Эренфестов, с которыми дружил и часто виделся. Татьяна Алексеевна Афанасьева-Эренфест, жена знаменитого голландского физика-теоретика Пауля Эренфеста, в письмах Перельману говорила, что вся ее семья «давно уже состоит в числе поклонников Ваших книг,— впрочем, Вы это уже знаете от моего мужа».

В блокированном Ленинграде, в возрасте 59 лет, 16 марта 1942 года Перельман умер, не дождавшись прорыва и снятия блокады. Но его книги — основное дело его жизни — продолжают жить, завоевывая себе все более широкий круг читателей у нас в стране и за ее пределами, приобщая к математике и физике сотни тысяч молодых людей и, как и в прежние годы, определяя для многих и многих выбор их жизненного пути. Завидная для писателя судьба!

А. Боровой, Ю. Климов

Что происходит на границе

В школьном курсе физики не так уж много места отводится явлениям, происходящим на границе жидкости с другой средой, — поверхностному натяжению, смачиванию, капиллярности. Вместе с тем, с этими явлениями связано много интересных наблюдений и опытов, известных с давних времен и придуманных буквально сегодня, очень сложных и совсем простых. О некоторых из них мы и хотим рассказать.

Начнем с очень известного и простого опыта.

Движущаяся «ракета» и расходящиеся кольца

Вырежьте из бумаги «ракету» такой формы, как показано на рисунке 1,*а*. В точку *A* поместите капельку концентрированного мыльного раствора или маленький кусочек мыла. Если теперь опустить ракету на спокойную поверхность воды, то она начнет двигаться.

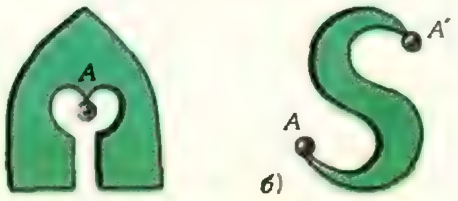


Рис. 1.

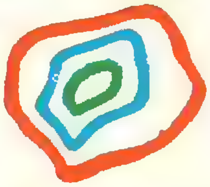


Рис. 2.

Вместо «ракеты» можно сделать вертушку в форме буквы S и поместить кусочки мыла в точки *A* и *A′* (рис. 1,*б*). Понаблюдайте, в какую сторону будет вращаться вертушка.

Следующий опыт требует некоторой предварительной тренировки, но зато дает очень красивый результат.

Пером с тушью касаются поверхности чистой воды — по воде расползается окрашенное пятно. Теперь центра этого пятна касаются намыленной палочкой или просто кусочком мыла — пятно разрывается и превращается в тонкое кольцо. Снова его центра касаются пером (можно при этом использовать тушь другого цвета), затем в ход идет намыленная палочка и т. д. На поверхности воды возникает орнамент из разноцветных концентрированных колец (рис. 2). Достаточно осторожно положить сверху промокательную бумагу, и красивые узоры перейдут на нее.

Этот опыт нашел практическое применение. С его помощью в Японии изготовляют бумагу с самыми разнообразными узорами.

Описанные эксперименты легко понять, если поверхность жидкости считать натянутой пленкой. Впервые такую модель предложил известный английский физик Томас Юнг. В декабре 1804 года Юнг написал работу, в которой с помощью аналогии «поверхность жидкости — упругая пленка» объяснялось поведение жидкости в капиллярах. Вскоре модель, подтвержденная новыми наблюдениями и опытами, получила всеобщее признание.

Итак, поверхность чистой воды — натянутая пленка, а мыльная или подкрашенная вода — такая же пленка, но менее упругая. В результате водяная пленка перетягивает мыльную или подкрашенную, увлекая за собой «ракету» или окрашенное тушью кольцо.

Существует много способов экспериментального определения степени «упругости» поверхностной пленки — так называемого коэффициента поверхностного натяжения σ. Один из наиболее простых — с помощью отрывающихся капель. Если взять пипетку с оттянутым носиком и, наполнив ее водой, осторожно и медленно начать выдавливать каплю, то можно наблюдать, как она постепенно увеличивается, изменяет свою форму и, наконец, отрывается от пипетки (рис. 3).

Заметьте, что капля отрывается только тогда, когда достигает определенных размеров. Пока капля недостаточно велика, поверхностное натяжение удерживает ее на кончике пипетки. Очевидно, что в момент отрыва сила тяжести $m\vec{g}$ капли становится равной по модулю силе поверхностного натяжения $\vec{F}$: $mg=F$. Или (см., например, § 28 учебника «Физика 9», М., «Просвещение», 1982)

$$mg=2\pi r\sigma,$$

где r — радиус шейки, образующейся у капли перед отрывом.

Отсчитав, скажем, 100 капель и найдя с помощью весов их суммарную массу $M=100\,m$, можно определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости:

$$\sigma=\frac{mg}{2\pi r}=\frac{Mg}{200\pi r}.$$

Но, к сожалению, очень неточно.

Во-первых, нелегко измерить радиус шейки (часто для этого отрывающуюся каплю в увеличенном виде проектируют на экран и там уже производят измерения). Во-вторых, отрыв капли оказывается более сложным процессом, чем просто разрыв шейки (в частности, одновременно с основной каплей образуется еще одна, маленькая капелька). Есть и еще несколько источников ошибок в этом эксперименте. Однако, если мы хотим определить лишь порядок величины σ или качественно сравнить поверхностное натяжение, скажем, чистой воды и мыльного раствора, вполне допустимо воспользоваться пипеткой, а радиус шейки при этом считать равным внутреннему радиусу носика пипетки (измерить последний можно, например, с помощью проволочки известной толщины, плотно входящей в пипетку).

Для справок приведем значения σ в единицах СИ для некоторых жидкостей: вода (при 20°C) — 0,073, раствор мыла в воде — 0,04, оливковое масло — 0,033, керосин — 0,026, ртуть (в воздухе со временем уменьшается) — 0,5—0,4 Н/м.

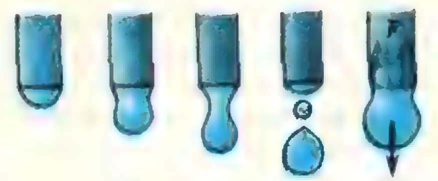


Рис. 3.

Рябь на поверхности воды и как ее погасить

Оказывается, благодаря силам поверхностного натяжения возникают так называемые капиллярные волны (то есть рябь на воде). Наблюдать их можно при помощи той же пипетки. Наполните тарелку водой и, держа пипетку на небольшом расстоянии от ее поверхности, капайте воду — быстро разбегающиеся концентрические волны и будут волнами поверхностного натяжения. (Вообще механизм образования и распространения волн на воде — вещь не простая. Здесь участвуют и сила тяжести, и поверхностные явления. Но для объяснения происхождения мелкой ряби вполне можно использовать модель упругой пленки.)

О волнах на поверхности воды в «Кванте», в том числе и в Лаборатории «Кванта», рассказывалось не раз. Советуем вам прочитать, например, такие статьи: С. Соскин, «Капиллярные волны в струе» («Квант», 1976, № 10); Е. Кузнецов, А. Рубенчик, «О волнах на море и ряби на лужах» («Квант», 1980, № 9).

Существует легенда о том, что в древности ловцы жемчуга, добывавшие его со дна Эгейского моря, перед тем как нырнуть, набирали в рот немного оливкового масла. Потом, уже находясь на дне, они выпускали масло, которое поднималось на поверхность и образовывало спокойное «окно», уничтожая рябь на поверхности. Проникающий через «окно» свет позволял ловцам лучше ориентироваться на дне моря.

Вот еще одно интересное наблюдение. «В штилевую погоду на спокойной поверхности моря ясно видны своеобразные узоры, напоминающие муар... Приглядевшись, легко заметить, что в пределах более яркого цветного фона возникает рябь и что светлые пятна и полосы на этом фоне соответствуют участкам поверхности моря, на которых эта рябь погашена»,— писал известный советский геофизик академик В. В. Шулейкин. Под его руководством были проведены опыты по измерению коэффициента поверхностного натяжения морской воды методом отрыва конуса (см., например, лабораторную работу № 2 в «Физике 9»). Они показали, что там, где существует рябь, коэффициент такой же, как у чистой воды, а в области светлых пятен — существенно меньше. Отсюда был сделан вывод, что рябь на поверхности моря гасится пленками жира или каких-то других веществ. Правда, объяснить это оказалось делом не простым.

Как показали исследования, поверхностные пленки гасят, в основном, небольшие волны, но они могут также препятствовать появлению пены на гребнях волн во время шторма. И эта сравнительно скромная «помощь» может сыграть свою роль: «для практики важно погасить лишь пенистые гребни, представляющие иногда серьезную опасность для корабля или тем более для спускаемой шлюпки» (В. В. Шулейкин).

Какую форму имеет капля?

Ответ на этот вопрос зависит от целого ряда обстоятельств. Если бы все определялось только силами поверхностного натяжения, капля всегда принимала бы такую форму, при которой ее поверхность минимальна, то есть форму шара. В условиях земного тяготения под действием силы тяжести капли чаще всего получаются сплюснутыми, лишь очень маленькие капельки остаются сферическими. А нельзя ли исключить силу тяжести, скомпенсировать ее какой-нибудь еще силой?

В 1843 году бельгийский физик Плато поставил опыт, который вскоре получил его имя и вошел во все учебники физики. Плато подобрал концентрацию раствора спирта в воде таким образом, что плотность раствора оказалась равной плотности оливкового масла, и ввел в раствор каплю масла. В этом случае архимедова сила выталкивания уравновешивает силу тяжести капли, а поверхностное натяжение обусловливает ее сферическую форму.

Интересно, что в состоянии невесомости можно получить большие капли-шары различных жидкостей. Такие капли наблюдались, например, во время опытов по электросварке в космосе. Состояли они из расплавленного металла.

В домашних условиях можно повторить опыт Плато, используя касторовое масло и воду. Плотность масла чуть-чуть меньше плотности воды, поэтому если капать в него чистую воду, то медленно опускающиеся водяные капли будут иметь практически шаровую форму. Капли легко окрасить в разные цвета акварельными красками, и тогда в стакане с маслом возникает картина, напоминающая висящие разноцветные шары (см. 1 с. обложки).

Более трудный, но и более эффектный опыт получается с жидкой эпоксидной смолой и раствором соли. Насыпав на дно банки соль, можно получить раствор с убывающей по высоте концентрацией, а следовательно, и плотностью. В таком растворе капля смолы будет висеть на определенной высоте. Рецепт окраски капли предоставляем выбрать самим читателям.

След от высохшей капли

Одно из загадочных на первый взгляд явлений, связанных со смачиванием, возникает при высыхании капли какого-либо раствора. Сделаем такой несложный опыт — поместим на стеклянную пластинку капли раствора соли (не очень концентрированного) и дадим им высохнуть. Естественно, на месте капель образуются светлые пятнышки соли. Так вот, загадочно то, что соль

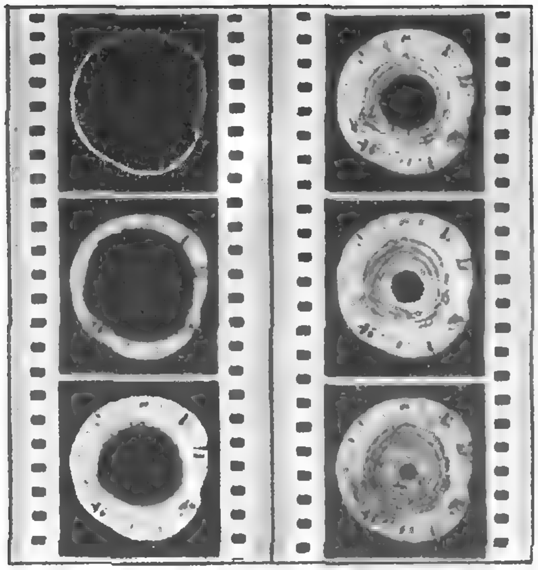


Рис. 4.

осаждается не равномерным слоем, а в виде чередующихся колец (рис. 4). Оказывается, причиной тому — скачкообразный характер высыхания капли. Для объяснения этого явления мы приведем отрывок из книги Я. Е. Гегузина «Капля» (М., «Наука», 1973), которую, кстати сказать, очень советуем прочитать:

«С каплей происходит следующее. Вода со всей ее поверхности испаряется равномерно. Легко понять, что по мере испарения влаги концентрация растворенной соли будет возрастать и раньше всего кристаллики начнут выпадать там, где избыточная концентрация соли будет наибольшей. Это будет в самой тонкой части капли, то есть вдоль ее периметра. Именно вдоль периметра кристаллики и выпадут. Жидкость капли, смачивая выпадающие кристаллики, как бы приклеивается к ним. Поэтому капля, теряя жидкость, должна менять свою форму, становиться более плоской — ведь ее объем уменьшается, а периметр остается неизменным.

В начале процесса высыхания форма капли, лежащей на стекле, была равновесной. Это означает, что из всех возможных форм осуществилась та, при которой энергия поверхности, граничащей с воздухом и стеклом,— наименьшая при данном объеме капли...

Чем больше испаряется влаги, тем больше искажается форма капли, и на каком-то этапе капля оторвется от кристалликов на периметре и примет равновесную форму. А затем все сначала..., пока капля не испарится, оставив после себя пятно, состоящее из концентрических колец кристалликов соли».

Курьезы

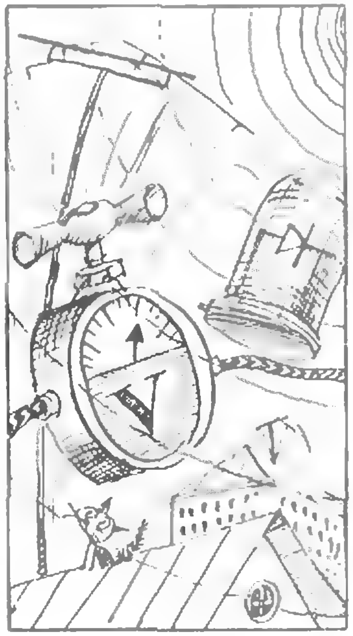
Приведенные ниже изречения были услышаны от учеников 9—10 классов.

1. Вакуумный диод — это диод, помещенный в вакууме.

2. Вольтметр служит прибором для регулирования силы тока в цепи.

3. Равноускоренным движением называется движение, при котором тело в равные промежутки времени увеличивается в равные величины.

4. При фотоэффекте если электроны заряжены отрицательно, то они вырываются из металла, если положительно, то поле их удерживает.



5. Солнце — раскаленная планета, расположено от Земли на расстоянии 100 световых лет.

6. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ при переезде из Москвы на Северный полюс изменится потому, что изменится число π.

7. Инфракрасные лучи — невидимые лучи красного цвета.

8. Приемная антенна начинает колебаться при действии на нее электромагнитного поля.

9. Переменное электрическое поле порождает в антенне электроны.

10. Холодный воздух превращается в капельки воды.

Н. Патрикеева

задачник кванта

Задачи

M771 — M775; Ф783 — Ф787

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения ,не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M771, M772» или «Ф783». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M771. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Известно, что центры окружностей: вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC.

M772. В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

M773. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и P соответственно. Известно, что

$$\vec{AN}+\vec{BP}+\vec{CM}=\vec{0}.$$

Докажите, что треугольник ABC правильный.

П. Гусятников, С. Резниченко

M774. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0;\ 1]$, такова, что

$$f(0)=f(1)=0 \tag{1}$$

и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y) \tag{2}$$

для всех x, $y\in[0;\ 1]$. Докажите, что:

а) $f(x)\geqslant0$ при всех $x\in[0, 1]$;

б) $f(x)$ имеет бесконечно много нулей на отрезке $[0;\ 1]$;

в) если существует такое число $A\geqslant0$, что для всех x; $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ выполнено неравенство $f(x)\leqslant A$, то $f(x)\leqslant A$ для каждого $x\in[0;\ 1]\in$

г)* если функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[0;\ 1]$, то $f(x)=0$ для всех $x\in[0;\ 1]$;

д)* существуют функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям (1), (2), не равные тождественно нулю.

П. Гусятников

М775. При каких натуральных $n \geqslant 3$ существуют различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $1 \leqslant a_k \leqslant n+1$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$ и все n чисел $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, $\ldots$, $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?

А. Анджан

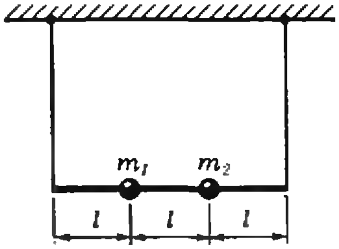


Рис. 1.

Ф783. Горизонтально расположенный невесомый стержень длины $3l$ с закрепленными на нем грузами с массами m_1 и m_2 удерживается в положении равновесия при помощи двух вертикальных нитей (рис. 1). Определить силу натяжения левой нити в первый момент времени, если правую нить перерезают.

С. Кротов

Ф784. На движущееся с постоянной скоростью v тело начинает действовать постоянная сила F. Спустя время τ скорость тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени скорость уменьшилась еще в два раза. Определить, чему будет равна скорость тела спустя интервал времени 3τ с начала действия силы F.

К. Сергеев

Ф785. В стакане с водой плавает кусок льда. На поверхность воды налит слой масла. Как изменится уровень жидкости в стакане, когда лед растает? Куда сместится при этом граница раздела воды и масла?

С. Казаков

Ф786*. В неидеальном одноатомном газе между молекулами действуют силы притяжения. Считая, что потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия пропорциональна плотности газа, то есть $U=\alpha\frac{N}{V}$, где N — число молекул газа, V — объем, занимаемый газом, α — коэффициент пропорциональности ($\alpha<0$), определить разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении (c_p) и при постоянном объеме (c_V).

В. Тугушев

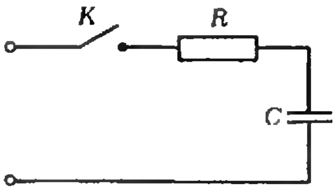


Рис. 2.

Ф787. Напряжение источника меняется со временем по линейному закону. В начальный момент напряжение было равно нулю. С помощью ключа K источник можно подключить к схеме, приведенной на рисунке 2. В какой момент нужно замкнуть ключ, чтобы ток в цепи был постоянным по величине? Сопротивление резистора R, емкость конденсатора C.

А. Зильберман

Problems

M771—M775; P783—P787

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006 МОСКВА, УЛ. ГОРЬКОГО, 32/1, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope worite NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M771. AK is the bissector of triangle ABC. The centre of the incircle of ABK coincides with the centre of the circumcircle of ABC. Find the angles of triangle ABC.

M772. There are five different lathes in a shop. It costs 1000 roubles to teach a worker to operate one of the lathes. For what minimal cost can 8 workers be instructed to work lathes so that all the lathes can operate simultaneously even if any three of the workers are absent? Each worker can operate only one lathe at a time.

M773. The incircle of triangle ABC touches its sides AB, BC and AC at the points M, N and P respectively. It is known that $\vec{AN}+\vec{BP}+\vec{CM}=\vec{0}$. Prove that ABC is equilateral.

P. Gusiatnikov, S. Reznichenko

M774. The function $f(x)$ defined on the closed interval $[0;1]$ satisfies the relations

$$f(0)=f(1)=0 \qquad (1)$$

and

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x)+f(y) \qquad (2)$$

for all $x, y \in [0;1]$. Prove that

a) $f(x)\geqslant 0$ for all $x \in [0;1]$

b) $f(x)$ has an infinite number of zeros on $[0;1]$

c) if there exists a number $A\geqslant 0$ such that $f(x)\leqslant A$ for all $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$, then $f(x)\leqslant A$ for all $x\in[0;1]$

d)* if $f(x)$ is continuous at least at one point $x_0\in[0;1]$, then $f(x)\equiv 0$ (for all $x\in[0;1]$)

e)* there exist functions $f(x)$ satisfying conditions (1) and (2) which do not vanish identically.

P. Gusiatnikov

M775. For what natural $n\geqslant 3$ do natural numbers a_1, a_2, ..., a_n such that $1\leqslant a_k\leqslant n+1$ for all $k=1, 2, ..., n$ exist, the n numbers $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ being all distinct?

A. Andjan

P783. A horizontal weightless rod of length $3l$ with weights of masses m_1 and m_2 fixed on it is held in equilibrium by two vertical strings (see figure Рис. 1, p. 27). Determine the tension in the left string at the moment the right one is cut.

S. Krotov

P784. A constant force F begins to act on a body moving with constant velocity v. After time τ the velocity becomes equal to $v/2$. After the next time interval τ, the velocity again decreases by half. Find the velocity of the body after the time interval 3τ (from the moment the force F began to act) elapses.

K. Sergeev

P785. A piece of ice floats in a glass of water, on the surface of which there is a layer of oil. How will the level of liquid in the glass change when the ice melts? In what direction will the boundary between oil and water be shifted?

S. Kazakov

P786. Forces of attraction between molecules act in a nonideal single atom gas. Assuming that the potential energy of molecular interaction is proportional to the gas density, i. e. $\Pi = \alpha \frac{N}{V}$, where N is the number of gas molecules, V the volume of gas, α a coefficient ($\alpha < 0$). Find the difference between the molar heat capacities at constant pressure (c_p) and at constant volume (c_V).

V. Tugushev

P787. The voltage of a source varies linearly. At the initial moment it was zero. The switch K can be used to connect the source to the circuit shown on figure Рис. 2, p. 27). At what moment should the switch be turned on to make the current in the circuit constant? The resistance is R, the capicity is C.

A. Zilberman

Решения задач

М746—М749; Ф758—Ф767

М746. *Бумажный квадрат складывается пополам по некоторой прямой l, проходящей через его центр, в (невыпуклый) девятиугольник. Как нужно провести прямую l, чтобы:*

а) полученный девятиугольник имел наибольшую площадь?

б) в нем помещалась окружность наибольшего возможного радиуса?*

Пусть прямая l, по которой складывается квадрат, образует с его горизонтальной стороной угол $\alpha (0 < \alpha < 45°)$, длина стороны квадрата — $2q$.

а) Если фигуру, полученную складыванием квадрата по прямой l, дополнить симметричной (относительно центра квадрата O или относительно прямой l — все равно!), то получится изображенный на рисунке 1 многоугольник — объединение квадрата с повернутым на угол 2α. Он имеет четыре оси симметрии. Чтобы выяснить, когда его площадь максимальна, заметим, что его можно получить, дополнив исходный квадрат $2q \times 2q$ четырьмя одинаковыми розовыми прямоугольными треугольниками. Гипотенузу c и катеты a, b каждого из них легко найти, заметив, что $a+b+c=2q$, $a=c \sin 2\alpha$, $b=c \cos 2\alpha$, откуда $c=2q/(1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=2q/(1+\sqrt{2} \cos (45°-2\alpha))$; площадь треугольника равна $q(q-c)$ и максимальна при $\alpha=22,5°$, когда гипотенуза c минимальна. Таким образом, 16-угольник на рисунке 1 имеет максимальную площадь $8q^2(2-\sqrt{2})$, когда он имеет форму «звездочки» с 8 осями симметрии (рис. 2); при том же угле $\alpha=22,5°$ наибольшую площадь имеет и его половинка.

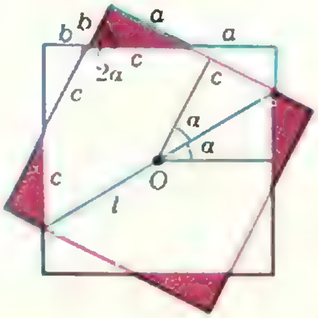


Рис. 1.

б) Ответ: наибольшая окружность в сложенном квадрате помещается при $\alpha_0=2 \operatorname{arctg} 2-90° \approx 36,87°$; ее радиус r_0 равен $5q/8$, а соответствующая прямая l делит сторону квадрата в отношении 1:7. Подтвердить этот ответ помогает геометрический эксперимент: если через каждые 2° или 3° (от $\alpha=0°$ до $\alpha=45°$) поточнее построить соответствующий чертеж (удобно вырезать из картона большой квадрат, проткнуть его в центре кнопкой и использовать для построения основного и повернутого квадрата, а наибольшую окружность — для каждого α — строить «циркулем и линейкой»), можно достаточно точно построить график зависимости радиуса наибольшей окружности r от α (рис. 3). На графике этой функции выделяется несколько особых точек α_i — отрезок $0° < \alpha < 45°$ делится на 5 кусочков, на каждом из которых наибольшая окружность определяется разными геометрическими условиями, так что ее радиус выражается разными (иногда — весьма громоздкими) формулами. Одной из этих особых точек является и α_0, поэтому в точке α_0 функция $r=r(\alpha)$ не имеет производной, и приходится оценивать ее отдельно на разных кусочках.

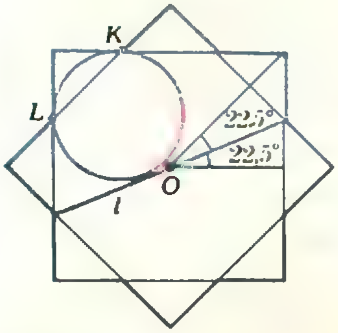


Рис. 2.

На рисунках 2, 4—7 показаны некоторые этапы «эволюции» наибольшей окружности при изменении α от 0° до 45°. Глядя на них, нетрудно представить и остальные: при $\alpha=0°$ годится любая окружность, касающаяся длинных сторон прямоугольной половины квадрата; при

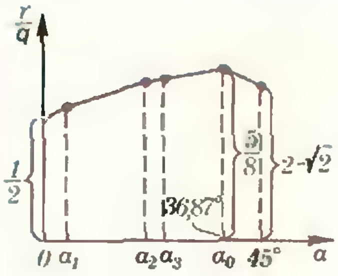


Рис. 3.

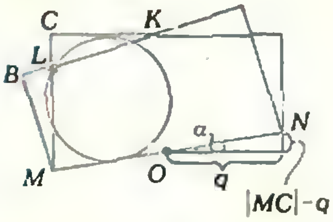


Рис. 4. $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$

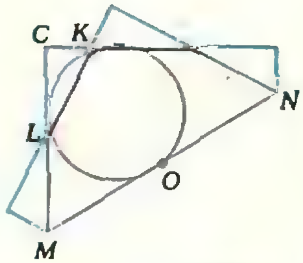


Рис. 5. $\alpha_3<\alpha<\alpha_0$

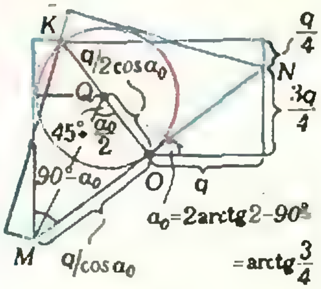


Рис. 6. $\alpha=\alpha_0$

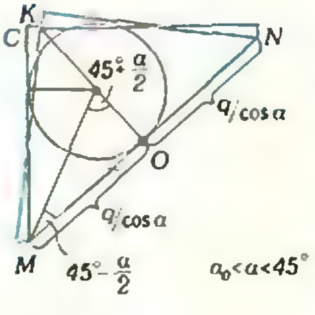


Рис. 7.

$0°<\alpha<\alpha_1$ окружность касается прямых $l=(MN)$, MB и CK, точка L лежит вне ее; при $\alpha=\alpha_1$ точка L попадает на окружность; случай $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ показан на рисунке 4; при $\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_3$ окружность касается l и проходит через точки L и K, причем при $\alpha=\alpha_2$ она касается (CK) в точке K, а при $\alpha=\alpha_3$ — касается (MC) в точке L; сюда относится и «звездочка» (рис. 2); остальные случаи показаны на рисунках 5, 6 и 7.

Докажем, что радиус окружности всегда не больше $5q/8$, причем равенство имеет место только при $\alpha=\alpha_0$. Некоторые подробности рассуждений мы опустим, но их нетрудно восстановить по надписям на рисунках.

При $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant45°$ все просто: наибольшая окружность касается прямой l в точке O и касается двух сторон девятиугольника, симметричных относительной прямой OK; ее радиус r равен (рис. 7)

$$r=q\operatorname{tg}(45°-\alpha/2)/\cos\alpha=q/2\cos^2(45°-\alpha/2)=$$
$$=q/(\cos(90°-\alpha)+1)$$

и, очевидно, при уменьшении α от 45° до α_0 увеличивается (от $(2-\sqrt{2})q$ до $5q/8$); значения α_0 и r_0 можно определить из треугольников ONQ и ONK на рисунке 6.

Случай малых α также не вызывает трудностей: ясно, что, пока наибольшая окружность касается (CK), ее диаметр не превосходит $|MC|$ (рис. 4). Если $|MC|<5q/4$, то есть $\alpha<\operatorname{arctg}1/4\approx14{,}43°$, то тем более $r<\frac{1}{2}|MC|<5q/8$.

Для значений α, при которых наибольшая окружность проходит через точку L, то есть для $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_3$, в качестве оценки для ее радиуса можно взять радиус окружности, проходящей через точки K, L и O (см. рис. 4), равный $|KL|/2\sin\widehat{KOL}=c/2\sin45°=q/\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(45°-2\alpha)\right)$ (см. решение пункта а)). Этот радиус не превосходит $5q/8$ при $\cos(45°-2\alpha)\geqslant\frac{8}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0{,}8929$, то есть $9{,}12°<\alpha<35{,}88°$. Поскольку этот интервал перекрывается с предыдущим, тем самым проверены все значения α от 0° до, по крайней мере, α_3.

Осталось доказать, что $r<r_0=5q/8$ на участке $[\alpha_3;\ \alpha_0]$, где наибольшая окружность расположена так, как показано на рисунке 5. Зафиксируем окружность радиуса r_0 и докажем, что если пристроить к ней наш сложенный квадрат так, чтобы она оказалась вписанной в угол CMO, то точка K окажется внутри окружности (или на ней при $\alpha=\alpha_0$). Это и значит, что поместить в нашу фигуру окружность большего радиуса невозможно.

Сторону MO мы будем рисовать горизонтальной и касающейся окружности радиуса r_0 в ее нижней точке T (рис. 8). Для того, чтобы построить точку $K=K(\alpha)$, нужно от точки T отложить влево отрезок TM длины $r_0\operatorname{tg}(45°+\alpha/2)$ (напомним, что $\widehat{OMC}=90°-\alpha$) и затем вправо-вверх — отрезок MK длины $q\sqrt{2}/\cos\alpha$ под углом 45° к MO ($\triangle OMK$ — прямоугольный равнобедренный, и $|OM|=q/\cos\alpha$). При $\alpha=\alpha_0$ точка K попадает в верхнюю точку круга; при уменьшении α она совершает движение со скоростью, равной векторной сумме двух скоростей: одна — вдоль прямой MO — направлена вправо и имеет величину $u=r_0|\operatorname{tg}(45°+\frac{\alpha}{2})'|=r_0/2\cos^2(45°+\alpha/2)=r_0/(1-\sin\alpha)$, другая — вдоль прямой $K(\alpha)M(\alpha)$ — направлена влево-вниз и равна по величине $v=q\sqrt{2}\,|(1/\cos\alpha)'|=q\sqrt{2}\sin\alpha/(1-\sin^2\alpha)$ (роль времени играет величина $\alpha_0-\alpha\geqslant0$). Нас интересует лишь небольшой участок значений α вблизи α_0; но даже если продолжить это движение точки K до $\alpha=0°$, она не выйдет за пределы круга, поскольку (при $\alpha=0°$) $\sqrt{2}\,q=|MK|<r_0(\sqrt{2}+1)$. Если еще заметить, что отношение u/v возрастает при умень-

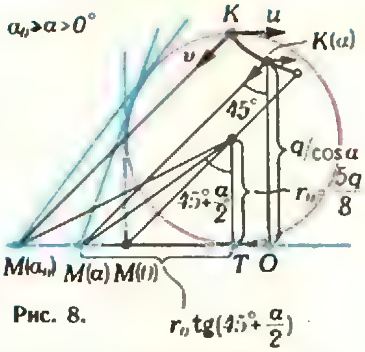


Рис. 8.

шении α от α_0 до 0°, то становится ясным, что вектор скорости точки K поворачивается против часовой стрелки, то есть траектория обращена выпуклостью вниз и, значит, никак не может попасть на границу круга. С подобным «кинематическим» подходом к решению геометрических задач (заменяющим в данном случае довольно громоздкие аналитические оценки) можно познакомиться подробнее в книжке Ю. И. Любича и Л. А. Шора «Кинематический метод в геометрических задачах» (М., «Наука», 1966) из серии «Популярные лекции по математике».

Н. Васильев

М747. *а) Сумма n чисел равна 0, сумма их модулей равна a. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше $2a/n$.*

б) Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2\dots A_n$ выбрана точка O так, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\dots+\overrightarrow{OA_n}$ равна нулевому вектору, а сумма их длин равна d. Докажите, что периметр этого n-угольника не меньше $4d/n$.*

в) Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых n)?*

◆

а) Пусть среди данных чисел имеется k положительных и x — наибольшее из них. (Можно считать, что $k>0$, так как иначе все числа равны 0 и утверждение задачи очевидно.) Если s — сумма всех положительных чисел, то $s\leqslant kx$. Аналогично, если s_1 — сумма всех неположительных чисел, а y — наименьшее из них, то $s_1\geqslant(n-k)y$. По условию $s+s_1=0$ и $s-s_1=a$, поэтому $s=-s_1=\frac{a}{2}$. Следовательно,

$$x-y\geqslant\frac{s}{k}-\frac{s_1}{n-k}=\frac{n}{k(n-k)}\cdot\frac{a}{2}.$$

Число $k(n-k)$ максимально при $k=n/2$, если n четно, и при $k=(n\pm1)/2$, если n нечетно. Поэтому $x-y\geqslant 2a/n$ при четном n и $x-y\geqslant 2an/(n^2-1)>2a/n$ при нечетном n.

б) Первое решение. Пункт а) по сути дела является «вырожденным» случаем пункта б). Мы увидим, что общий случай можно свести к этому вырожденному с помощью проекции. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого основано на приеме «усреднения», полезном при решении многих задач.

Лемма. *Пусть сумма длин проекций векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ на любую прямую больше суммы длин проекций векторов $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ на ту же прямую. Тогда $|\vec{a}_1|+\dots+|\vec{a}_n|>|\vec{b}_1|+\dots+|\vec{b}_m|$.*

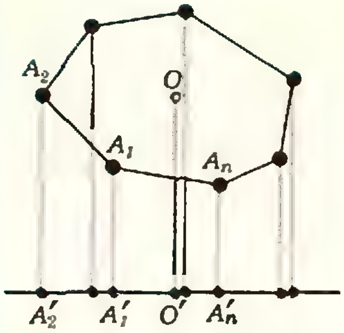
Доказательство. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть $a(\varphi)$ — длина проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, образующую угол φ с осью l_0. Если вектор $\vec{a}$ образует угол α с этой осью (углы φ и α отсчитываются в одном и том же направлении), то $a(\varphi)=|\vec{a}|\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|$. Заметим, что интеграл от 0 до π функции $a(\varphi)$ зависит только от длины вектора $\vec{a}$. Действительно, поскольку эта функция периодична с периодом π, отрезок интегрирования $[0;\pi]$ можно заменить на любой другой отрезок длины π; следовательно *),

$$\int_0^\pi a(\varphi)\,d\varphi=\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}|\vec{a}|\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi=$$

$$=|\vec{a}|\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi-\alpha)\,d\varphi=|\vec{a}|\sin(\varphi-\alpha)\Big|_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}=$$

---

*) По существу, мы доказываем сейчас, что среднее значение функции $a(\varphi)$ — длины проекции вектора на всевозможные оси — равно $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a(\varphi)\,d\varphi=2|\vec{a}|/\pi$. Подробнее об этом см. статью Ю. Ионина и А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7).



$$-|\vec{a}|\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2|\vec{a}|.$$

Поэтому

$$|\vec{a}_1|+\ldots+|\vec{a}_n|=\frac{1}{2}\int_0^\pi(a_1(\varphi)+\ldots+a_n(\varphi))\,d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\pi(b_1(\varphi)+\ldots+b_m(\varphi))\,d\varphi=|\vec{b}_1|+\ldots+|\vec{b}_m|.$$

Пусть теперь $A_1', \ldots, A_n'$ и O' — проекции точек $A_1, \ldots, A_n$ и O на произвольную прямую (см. рисунок). Согласно лемме нам достаточно доказать, что

$$p'=|A_1'A_2'|+|A_2'A_3'|+\ldots$$
$$\ldots+|A_n'A_1'|\geqslant\frac{4}{n}\,(|O'A_1'|+\ldots+|O'A_n'|). \quad (*)$$

Заметим, что $\overrightarrow{O'A_1'}+\ldots+\overrightarrow{O'A_n'}=\vec{0}$, так как сумма проекций нескольких векторов равна проекции их суммы. Поэтому координаты точек $A_1', \ldots, A_n'$ на числовой оси l с началом координат O' образуют набор чисел, удовлетворяющий условию пункта а). Сумма п абсолютных величин этих чисел равна сумме в правой части неравенства (*), а разность между наибольшим и наименьшим из них — длине проекции многоугольника, то есть половине суммы p' длин проекций всех его сторон. В силу утверждения а) $p'/2\geqslant 2a/n$ и неравенство (*) доказано.

Второе решение. (Это решение предложил ученик 10-го класса ФМШ № 18 г. Москвы *С. Матюшов.*) Для любой точки A

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{n}((\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A})+\ldots+(\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{A_nA}))=$$

$$=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})+\frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1A}+\ldots+\overrightarrow{A_nA})=$$

$$=\frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1A}+\ldots+\overrightarrow{A_nA}).$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$|OA|\leqslant\frac{1}{n}\,(|AA_1|+\ldots+|AA_n|).$$

Полагая в нем последовательно $A=A_1$, $A=A_2$, ..., $A=A_n$ и складывая все полученные неравенства, мы найдем, что

$$d=|OA_1|+\ldots+|OA_n|\leqslant\frac{2}{n}\sum|A_iA_j| \qquad (**)$$

(каждое слагаемое $|A_iA_j|$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, входит в сумму один раз, так что она представляет собой сумму длин всех сторон и диагоналей многоугольника).

При нечетном n имеется n сторон, n диагоналей, отсекающих 1 вершину, n диагоналей, отсекающих 2 вершины, ..., n диагоналей, отсекающих $\frac{n-3}{2}$ вершин. Длина диагонали, отсекающей k вершин, не превосходит длины $(k+1)$-звенной ломаной из сторон многоугольника, соединяющей концы диагонали. Поэтому сумма длин всех таких диагоналей не больше $(k+1)p$, где p — периметр многоугольника и (**) переписывается так:

$$d\leqslant\frac{2}{n}\left(p+2p+\ldots+\frac{n-1}{2}\,p\right)=\frac{n^2-1}{4n}\,p,$$

то есть $p\geqslant\dfrac{4n}{n^2-1}\,d.$

Для четного n отличие в том, что число диагоналей, отсекающих $n/2$ вершин, равно $n/2$. Поскольку длина каждой из них не больше $p/2$, из (**) получаем

$$d < \frac{2}{n}\left(p+2p+\ldots+\frac{n-2}{2}p+\frac{n}{4}p\right)=\frac{n-2}{4}p+\frac{1}{2}p=\frac{n}{4}p,$$

то есть $p > 4d/n$.

в) Из решения пункта б) следует, что при нечетных n оценка точнее: $p > \frac{4n}{n^2-1}d > \frac{4d}{n}$. Дальнейшее уточнение невозможно. Действительно, пусть $n=2k$ или $n=2k+1$. Рассмотрим вырожденный «n-угольник», k вершин которого находятся в одной точке, а остальные $n-k$ — в другой. Легко видеть, что отношение p/d для такого «n-угольника» в точности равно $4/n$ при $n=2k$ и $4n/(n^2-1)$ при $n=2k+1$. Ясно, что можно чуть-чуть раздвинуть его вершины так, чтобы образовался «настоящий» выпуклый n-угольник, при этом величина p/d будет сколь угодно мало отличаться от указанных нами границ.

В. Прасолов

◆

М748. *а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (Внутренней областью параболы мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола.)*

б) В пространстве расположено несколько непересекающихся конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли все пространство. (Конусом мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)*

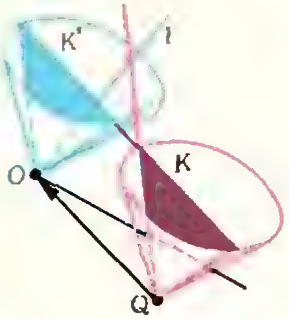


Рис. 1.

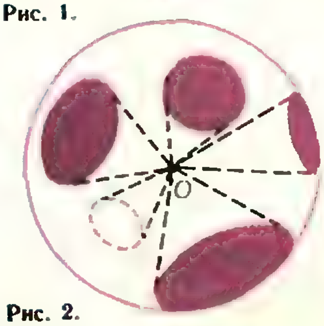


Рис. 2.

а) Проведем произвольную прямую, не параллельную ни одной из осей парабол. Такая прямая может пересекаться с внутренней областью любой из парабол только по интервалу. В самом деле, уравнение параболы в некоторой системе координат имеет вид $y=ax^2$ $(a>0)$, а уравнение прямой — $y=kx+l$; абсциссы точек прямой, принадлежащих внутренности параболы, удовлетворяют неравенству $kx+l>ax^2$, множество решений которого либо пустое, либо — интервал $x_1<x<x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2-kx-l=0$.

Отсюда следует, что на проведенной прямой найдутся точки, не принадлежащие ни одной из внутренних областей парабол.

б) Пусть O — произвольная точка пространства и K' — конус, полученный из конуса K с вершиной Q параллельным переносом, переводящим точку Q в точку O. Проведем произвольный луч l с началом в точке O. Рассмотрим сечения конусов K и K' плоскостью, проходящей через луч l и точку Q (рис. 1). Она пересекает конусы по двум углам с параллельными сторонами; пользуясь этим, легко убедиться, что луч l пересекается с конусом K по лучу тогда и только тогда, когда он целиком содержится в конусе K'. В противном случае луч l пересекается с конусом K по отрезку или по одной точке Q или вовсе не пересекается.

Перенесем теперь вершины всех конусов в точку O и докажем, что никакие два конуса полученного «букета» не имеют общих точек, кроме точки O.

Предположим, что это не так, и какие-то два конуса K_1' и K_2' имеют общую точку $A \neq O$. Тогда луч $l=[OA)$ содержится в каждом из них. Как было показано, в этом случае луч l пересекается с конусом K_1 по некоторому лучу l_1, а с конусом K_2 — по лучу l_2. Но тогда точки луча $l_1 \cap l_2$ принадлежат обоим конусам K_1 и K_2. Противоречие.

Рассмотрим теперь сферу с центром в точке O. С каждым из конусов «букета» она пересекается по некоторой «сферической шапочке» (рис. 2). Так как все такие «шапочки» попарно не пересекаются, их суммарная площадь меньше площади сферы. Поэтому, как бы мы их ни перемещали по сфере, покрыть ими всю сферу невозможно. Это значит, что при любом расположении конусов в пространстве на сфере найдутся точки, не покрытые «шапочками». Если A — такая точка, то луч $[OA)$ может пересекаться с конусами только по конечному числу отрезков. Поэтому на этом луче заведомо найдутся точки, не принадлежащие ни одному из конусов.

А. Кузьминых

M749*. *а) Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2};$$

при каком условии это неравенство превращается в равенство?

б) Докажите, что если x_1, x_2, ..., x_n ($n\geqslant4$) — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant2,$$

причем равенство возможно только при $n=4$.

в) Докажите, что при $n>4$ неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком n число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

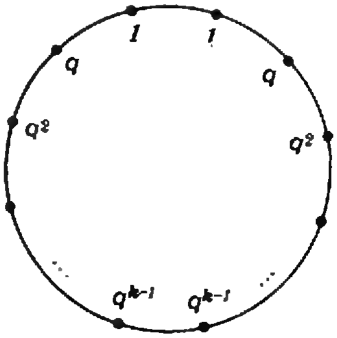


Рис. 1.

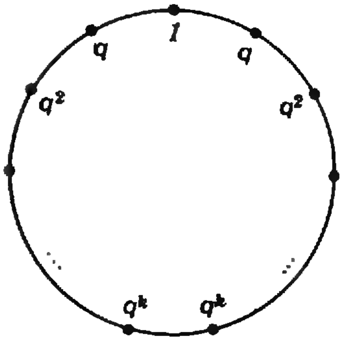


Рис. 2.

а) Пусть $a=x_2+x_3$, $b=x_3+x_1$, $c=x_1+x_2$. Тогда $x_1=\frac{b+c-a}{2}$, $x_2=\frac{a+c-b}{2}$, $x_3=\frac{a+b-c}{2}$, и левая часть неравенства перепишется так:

$$\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{3}{2}.$$

Каждая из скобок в этом выражении не меньше 2 в силу известного неравенства $x+\frac{1}{x}\geqslant2$ при $x>0$. Поэтому вся левая часть не меньше $3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. А так как $x+\frac{1}{x}=2$ только при $x=1$, доказанное неравенство обращается в равенство только при $a=b=c$.

б) Докажем неравенство индукцией по n. При $n=4$ оно очевидно:

$$\frac{x_1}{x_2+x_4}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_4+x_2}+\frac{x_4}{x_1+x_3}=$$

$$=\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}\geqslant2;$$

равенство возможно в том и только в том случае, когда $x_1+x_3=x_2+x_4$.

Докажем теперь неравенство для произвольных положительных чисел x_1, ..., x_{n+1}, предполагая, что оно справедливо для любых n ($n\geqslant4$) положительных чисел. Выберем наименьшее из чисел x_1, ..., x_{n+1}. Поскольку они входят в неравенство симметрично, можно, не ограничивая общности, считать, что это x_{n+1}. Тогда $x_{n+1}>0$, $x_{n+1}\leqslant x_n$ и $x_{n+1}\leqslant x_1$, и поэтому

$$\frac{x_1}{x_2+x_{n+1}}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}}+$$

$$+\frac{x_{n+1}}{x_1+x_n}>\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant2$$

(последнее неравенство выполняется по предположению индукции). Попутно получаем, что при $n>4$ равенство невозможно.

в) Числа x_1, ..., x_n удобно расставлять по окружности; тогда каждое слагаемое в левой части рассматриваемого неравенства есть одно из этих чисел, деленное на сумму двух соседних с ним. При $n=2k$ определим x_i так, как показано на рисунке 1, а при $n=2k+1$ — как на рисунке 2.

В первом случае получим сумму

$$2\left(\frac{1}{q+1}+\frac{q}{q^2+1}+\frac{q^2}{q^3+q}+\ldots+\frac{q^{k-1}}{q^{k-1}+q^{k-2}}\right)=$$

$$=2\left(1+\frac{(k-2)q}{q^2+1}\right),$$

и во втором —

$$\frac{1}{2q}+2\left(\frac{q}{q^2+1}+\frac{q^2}{q^3+q}+\ldots+\frac{q^k}{q^k+q^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2q}+\frac{2(k-1)q}{q^2+1}-\frac{2q}{q+1}=$$

$$=2+\left(\frac{1}{2q}+\frac{2(k-1)q}{q^2+1}-\frac{2}{q+1}\right).$$

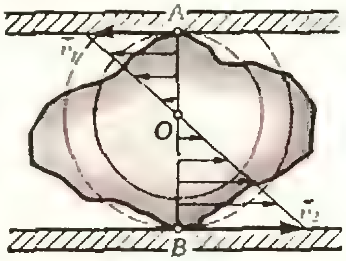
В обоих случаях при достаточно большом q значение левой части будет сколь угодно близко к 2, поэтому число 2 в неравенстве на большее заменить нельзя.

А. Егоров

◆

Ф758. *Жесткая заготовка зажата между двумя параллельными направляющими, движущимися в горизонтальном направлении со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В некоторый момент времени точки касания заготовки с направляющими лежат на прямой, перпендикулярной векторам $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Какие точки заготовки имеют в этот момент скорости, равные по абсолютной величине v_1 и v_2?*

Скорости точек заготовки, лежащих в данный момент на отрезке AB, равномерно меняются от $\vec{v}_1$ в точке A до $\vec{v}_2$ в точке B. Следовательно, скорость точки O (см. рисунок) в данный момент равна нулю. Точка O — мгновенный центр вращения. (Поскольку заготовка объемная, точка O лежит на мгновенной оси вращения, которая перпендикулярна плоскости рисунка.) Понятно, что скорость $|\vec{v}_1|$ в данный момент имеют точки заготовки, лежащие на окружности радиуса OA, а скорость $|\vec{v}_2|$ — точки, лежащие на окружности радиуса OB. (В объемной заготовке точки с такими скоростями лежат на цилиндрических поверхностях, радиусы которых равны соответственно $|OA|$ и $|OB|$.)



С. Кротов

◆

Ф759. *Невесомый стержень длины l с небольшим грузом массы m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 1) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массы M. От небольшого толчка система приходит в движение. При каком соотношении между m и M стержень в момент «отрыва» от тела M будет составлять с горизонтом угол $\alpha=\pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость тела M? Трением пренебречь.*

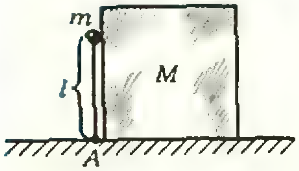


Рис. 1.

До тех пор, пока груз касается тела, скорость тела равна горизонтальной проекции скорости груза, а ускорение тела равно горизонтальной проекции ускорения груза.

Пусть $\vec{a}$ — полное ускорение груза. Тогда можно записать: $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_ц$, где $\vec{a}_ц$ — центростремительное ускорение груза при его движении по окружности радиуса l, то есть $|\vec{a}_ц|=v^2/l$, где v — модуль скорости груза. Горизонтальная проекция ускорения груза равна (см. рис. 2)

$$a_г=a_\tau \sin\alpha-\frac{v^2}{l}\cos\alpha.$$

С таким ускорением движется тело. Уравнение движения тела

$$N=Ma_г=Ma_\tau\sin\alpha-M\frac{v^2}{l}\cos\alpha,$$

где N — сила нормального давления со стороны груза. В момент отрыва груза $N=0$, и

$$a_\tau\sin\alpha=\frac{v^2}{l}\cos\alpha.$$

Ускорение a_τ в момент отрыва сообщается грузу только силой тяжести и (см. рис. 2)

$$a_\tau=g\cos\alpha.$$

Таким образом, скорость груза в момент отрыва равна

$$v=\sqrt{gl\sin\alpha},$$

и скорость тела —

$$u = v\sin\alpha = \sin\alpha\sqrt{gl\sin\alpha}.$$

Согласно закону сохранения энергии, в момент времени, когда стержень составляет угол α с горизонтом,

$$mgl = mgl\sin\alpha + m\frac{v^2}{2} + M\frac{v^2\sin^2\alpha}{2}.$$

Подставив в это равенство найденное выражение для v в момент отрыва и значение $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, найдем отношение M/m:

$$\frac{M}{m} = \frac{2-3\sin\alpha}{\sin^3\alpha} = 4.$$

Скорость тела при отрыве груза равна

$$u = v\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

К. Сергеев

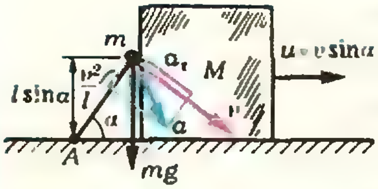


Рис. 2.

◆

Ф760. *В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1 = 20$ г гелия, влетает со скоростью $v = 100$ м/с стальной шарик массы $m_2 = 1$ г. Найти изменение температуры в сосуде. Удары шарика о стенки сосуда и атомов о шарик считать абсолютно упругими.*

Через большое время шарик потеряет практически всю скорость (его масса во много раз больше массы атома гелия), и можно считать, что изменение внутренней энергии газа в сосуде равно начальной кинетической энергии шарика:

$$\frac{m_2v^2}{2} = \Delta U = \frac{3}{2}Nk\cdot\Delta T = \frac{3}{2}kN_A\frac{m_1}{\mu}\cdot\Delta T, \qquad (*)$$

где $N = N_A\frac{m_1}{\mu}$ — число атомов гелия в сосуде, ΔT — изменение температуры гелия. Учитывая, что $kN_A = R$, из (*) находим:

$$\Delta T = \frac{m_2v^2\mu}{3m_1R} \approx 0{,}08\ \text{К}.$$

Более точное решение должно учесть повышение температуры шарика. Тогда

$$\frac{m_2v^2}{2} = cm_2\cdot\Delta T' + \frac{3}{2}\frac{m_1}{\mu}R\cdot\Delta T',$$

где $c = 0{,}5\cdot10^3$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость стали. Отсюда находим $\Delta T'$:

$$\Delta T' = \frac{m_2v^2}{2\left(cm_2 + \frac{3}{2}\frac{m_1}{\mu}R\right)} \approx 0{,}08\ \text{К}.$$

Ответ получается практически тот же.

Р. Александров

◆

Ф761. *Схему собирают из батарейки, двух одинаковых амперметров и двух одинаковых вольтметров. Амперметры A_1 и A_2 показывают соответственно $I_1 = 1{,}1$ мА, $I_2 = 0{,}9$ мА; вольтметр B_2 показывает $U_2 = 0{,}25$ В. Что показывает вольтметр B_1? Чему равно напряжение батареи?*

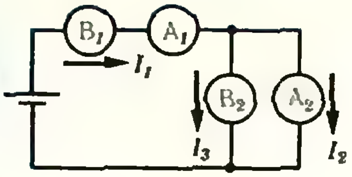
Ток I_3 через вольтметр B_2 равен разности токов, протекающих через амперметры A_1 и A_2:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}2\ \text{мА}.$$

При этом показания вольтметра B_2 — $U_2 = 0{,}25$ В. Следовательно, сопротивления вольтметров B_2 и B_1

$$R_{B1} = R_{B2} = U_2/I_3 = 12{,}5\cdot10^2\ \text{Ом}.$$

Ток, текущий через вольтметр B_1 — $I_1 = 1{,}1$ мА; при этом вольтметр B_1 показывает



$$U_1=I_1R_{B1}\approx 1{,}375\ \text{В}.$$

Сопротивления амперметров одинаковы и равны

$$R_{A1}=R_{A2}=U_2/I_2\approx 2{,}77\cdot 10^2\ \text{Ом}.$$

Напряжение U_3 на амперметре A_1 равно

$$U_3=I_1R_{A1}\approx 0{,}305\ \text{В}.$$

Напряжение на батарее равно сумме напряжений U_1, U_2, U_3:

$$U_б=U_1+U_2+U_3\approx 1{,}93\ \text{В}.$$

З. Рафаилов

◆

Ф762. *На рисунке 1 приведена вольтамперная характеристика лампы накаливания, номинальное напряжение которой $U_н=220$ В, номинальная мощность $P_н=100$ Вт. Лампу подключают к сети переменного тока (220 В, 50 Гц) последовательно с конденсатором емкости $C=10$ мкФ. Определить ток в лампе и напряжение на ней. Считать, что в течение периода сетевого напряжения температура нити практически не меняется.*

Поскольку температура нити в течение периода остается неизменной, в рабочей точке лампу можно считать обычным резистором.

На рисунке 2 приведена векторная диаграмма для цепи с последовательно включенными резистором и конденсатором. Из диаграммы находим:

$$U_{мC}^2+U_{мR}^2=U_м^2.$$

Подставляя $U_{мC}^2=I_м^2/\omega^2C^2$, найдем связь между напряжением $U_{мR}$ на лампе и током $I_м$ через нее:

$$I_м=\omega C\sqrt{U_м^2-U_{мR}^2}=314\cdot 10^{-6}\sqrt{48\,400-U_{мR}^2}\ \text{(A)}.$$

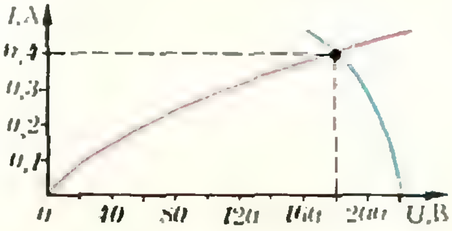


Рис. 1.

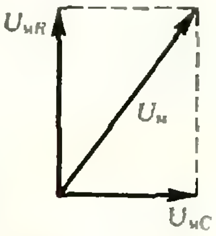


Рис. 2.

Построим график этой зависимости на том же рисунке 1, на котором задана вольтамперная характеристика лампы. Точка пересечения графиков и определяет рабочую точку: $U_л=180$ В, $I_л\approx 0{,}4$ А.

А. Зильберман

◆

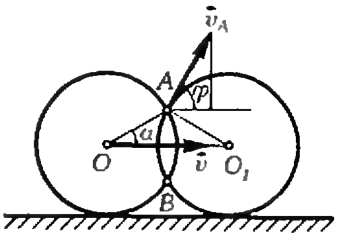
Ф763. *На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R. Мимо него движется со скоростью v такой же обруч. Найти зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие; второй обруч «проезжает» вплотную к первому.*

Поскольку обруч с центром в точке O_1 покоится, скорость v_a точки A в любой момент времени должна быть направлена по касательной к окружности с центром O_1. Отрезок AB (см. рисунок) в любой момент времени делит расстояние $d=OO_1$ между центрами обручей пополам, поэтому горизонтальная проекция скорости $\vec{v}_A$ все время равна $v/2$.

Следовательно, скорость v_A точки A составляет с горизонтом угол $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ (см. рисунок) и

$$v_A=\frac{v}{2\cos\varphi}=\frac{v}{2\sin\alpha}.$$

Поскольку $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}$,



$$v_A = \frac{v}{2\sqrt{1-\left(\frac{d}{2R}\right)^2}}.$$

С. Кротов

◆

Ф764. *Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью v в направлении оси X (рис. 1); в момент прихода волны давление резко повышается от значения p_0 до $2p_0$. На пути распространения волны стоит клин, размеры клина указаны на рисунке 2, масса клина равна m. Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости распространения волны; трение пренебрежимо мало.*

Выберем начало отсчета по оси X так, как показано на рисунке 2. Тогда сила, действующая на клин, зависит лишь от координаты x фронта ударной волны. Горизонтальная проекция этой силы равна

$$F_x = p_0cx\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p_0cxa}{b} = \frac{p_0cvta}{b}.$$

где $x = vt$ — координата фронта волны к моменту времени t от начала прохождения волны через клин. Ускорение, сообщаемое клину в данный момент времени, равно

$$a_t = \frac{F_x}{m} = \frac{p_0ca}{bm}vt.$$

В тот момент времени t_0, когда фронт волны дойдет до дальней грани клина, то есть координата фронта будет равна $b = vt_0$, ускорение клина будет

$$a_{t_0} = \frac{p_0ca}{m}.$$

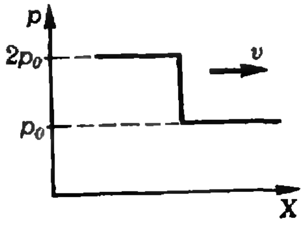


Рис. 1.

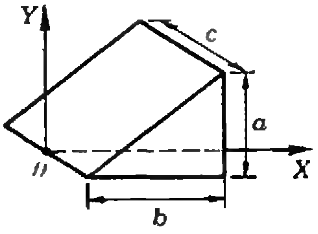


Рис. 2.

Поскольку ускорение клина линейно зависит от времени, для вычисления скорости u клина к моменту времени t_0 воспользуемся средним значением ускорения $a_{\text{ср}} = \frac{p_0ca}{2m}$:

$$u = a_{\text{ср}}t_0 = \frac{p_0abc}{2mv}.$$

Когда весь клин окажется в области повышенного давления, результирующая сила, действующая на клин, будет равна нулю.

Видно, что условие $u \ll v$ означает, что

$$p_0 \ll 2mv^2/abc.$$

А. Буздин

◆

Ф765. *В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P = 10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0 = 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT по-*

Предположим, что мощность P, излучаемая нагретым телом, связана с абсолютной температурой T степенной зависимостью $P = \sigma T^n$, где n — некоторый коэффициент пропорциональности. Тогда для двух значений температур излучающего тела T_1 и T_2 получим:

$$P_1 = \sigma T_1^n,\ P_2 = \sigma T_2^n,\ \text{и}\ \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n.$$

верхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допустимая величина $\Delta P_{\max}$, если предельный перегрев из экологических соображений не должен превышать величины $\Delta T_{\max}=0{,}1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при увеличении абсолютной температуры тела в 2 раза.

Отсюда легко получить, используя данные задачи, что $n=4$.

Итак, $P=\sigma T^4$. Теперь можно записать:

$$P_0+\Delta P=\sigma(T_0+\Delta T)^4\approx\sigma T_0^4\left(1+4\frac{\Delta T}{T_0}+\ldots\right).$$

Поскольку $\Delta T/T_0\ll 1$, в последнем выражении можно отбросить члены второго и более высоких порядков. Тогда получим:

$$\Delta P=4P_0\frac{\Delta T}{T_0}$$

Отсюда находим:

$$\Delta P=\frac{\Delta P}{4P_0}T_0\approx 10^{-2}\text{ К},$$

$$\Delta P_{\max}=4P_0\frac{\Delta T_{\max}}{T_0}\approx 10^{14}\text{ Вт}.$$

Таким образом, мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, может быть увеличена не более чем в 10 раз. (Это, разумеется, не относится к источникам, использующим солнечную энергию.)

С. Козел

◆

Ф766. *Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда Q конденсатора приведен на рисунке 1. Конденсатор заряжают от батареи с $U_0=300$ В через резистор с сопротивлением $R=10$ кОм. Найти максимальную энергию вспышки. Оценить максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1=250$ В.*

Максимальная энергия вспышки численно равна площади под графиком кривой $U(Q)$, ограниченной значением $U=U_0=300$ В (при этом $Q\approx 0{,}3$ Кл; см. рис. 1). Чтобы посчитать эту площадь, разделим кривую $U(Q)$ на участки, на которых зависимость $U(Q)$ можно приближенно считать линейной. Под каждым таким участком площадь численно равна $U_{i\,\text{ср}}\cdot\Delta Q_i$. Таким образом, максимальная энергия вспышки равна (см. рис. 1)

$$W\approx\left(\frac{140}{2}\cdot 0{,}05+\frac{140+200}{2}\cdot 0{,}075+\right.$$
$$\left.+\frac{200+300}{2}\cdot 0{,}175\right)\text{ Дж}\approx 60\text{ Дж}.$$

Удобный способ нахождения времени заряда конденсатора от 0 до 250 В подсказывает формула $I\cdot\Delta t=\Delta Q$, откуда $\Delta t=\Delta Q/I$ и

$$t_{\text{общ}}=\sum\frac{1}{I}\cdot\Delta Q.$$

Нарисуем график зависимости $1/I$ от Q (рис. 2). Ток при заданном значении Q находим по графику на рисунке 1:

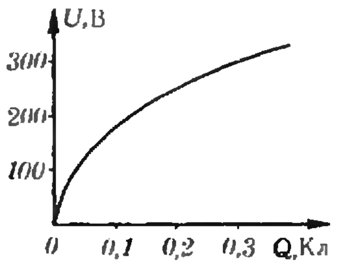


Рис. 1.

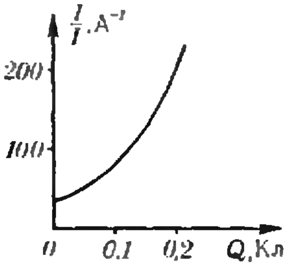


Рис. 2.

$I=\dfrac{U_0-U}{R}$. Площадь под графиком кривой, ограниченной значениями $I=200$ А, $Q=0{,}2$ Кл, численно равна времени заряда конденсатора

$$t_{\text{общ}}\approx\left(\frac{33+100}{2}\cdot 0{,}125+\frac{100+200}{2}\cdot 0{,}075\right)\text{ с}\approx 20\text{ с}.$$

Таким образом, вспышки можно производить 3 раза в минуту.

А. Зильберман

◆

Ф767. *В одном из проектов получения электроэнергии предлагалось использовать морские течения и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем.*

В море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии $l=100$ м; площадь каждой пластины $S=1$ км^2. Морская вода, удельное сопротивление которой равно $\varrho=0{,}25$ Ом · м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью $v=1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север; индукция поля равна $B=10^{-4}$ Тл. Определить максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоединенной к пластинам.

Морская вода обладает заметной ионной проводимостью, так что при движении заряженных ионов в магнитном поле Земли они отклоняются силой Лоренца к одной из горизонтальных пластин. В результате на этой пластине возникает нескомпенсированный заряд, и между пластинами появляется электрическое поле. Это поле действует на ионы с силой, направленной противоположно силе Лоренца. Такое накопление заряда на одной из пластин будет происходить до тех пор, пока электрическое поле этих зарядов не уравновесит действие силы Лоренца. Отметим, что для возникновения такого равновесия достаточно отклонения к одной из пластин весьма малой доли ионов из их общего числа, протекающих между пластинами.

Определим напряжение $\mathcal{E}$, возникающее между горизонтальными пластинами в отсутствии между ними тока, то есть ЭДС образовавшегося «электрического генератора». Если q — заряд ионов, то в условиях равновесия

$$qvB=q\,\mathcal{E}/L \Rightarrow \mathcal{E}=vBL.$$

Если соединить пластины с внешней нагрузкой R, то через нее потечет ток I; при этом сопротивление морской воды между пластинами, равное $\varrho L/S$, будет играть роль внутреннего сопротивления образовавшегося электрического генератора.

Определим мощность, выделяющуюся в нагрузке:

$$P=I^2R=\frac{\mathcal{E}^2R}{(\varrho L/S+R)^2}.$$

Для определения максимума мощности воспользуемся следующим математическим фактом: для любого $x>0$ выполняются неравенства

$$x+1/x\geqslant 2,\quad (x+1/x)^2\geqslant 4.$$

В формуле для мощности вынесем в знаменателе множитель $\varrho LR/S$ за скобки:

$$P=\frac{\mathcal{E}^2R}{\varrho LR/S(\varrho L/SR+RS/L\varrho)^2}.$$

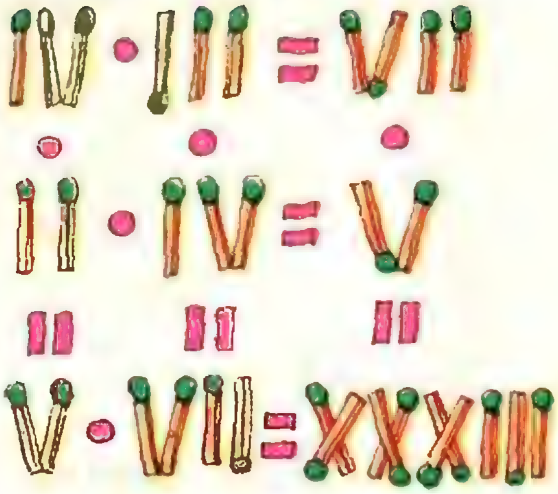
В последней формуле выражение в скобках в знаменателе больше или равно 4. Поэтому для максимальной мощности имеем:

$$P_{\max}=\mathcal{E}^2S/4\varrho L=\frac{v^2B^2LS}{4\varrho}=1\ \text{Вт}.$$

(Заметим, что эта формула соответствует случаю равенства внешней нагрузки внутреннему сопротивлению генератора.)

А. Шеронов

КВАНТ для младших школьников



Задачи

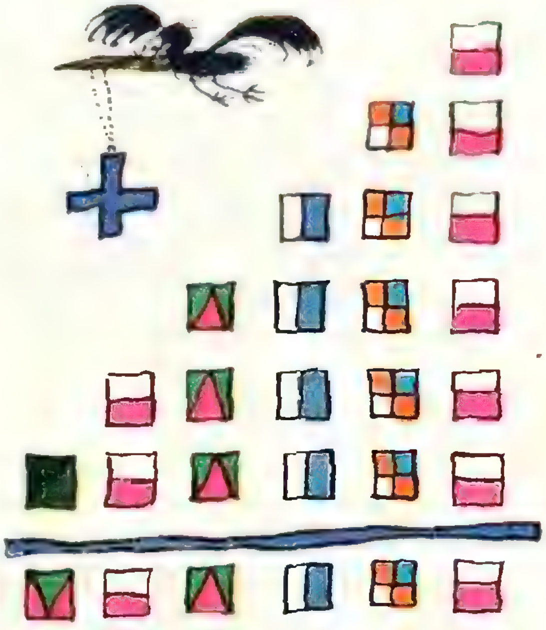
1. В каждом горизонтальном ряду переложите по одной спичке так, чтобы все шесть равенств оказались верными.

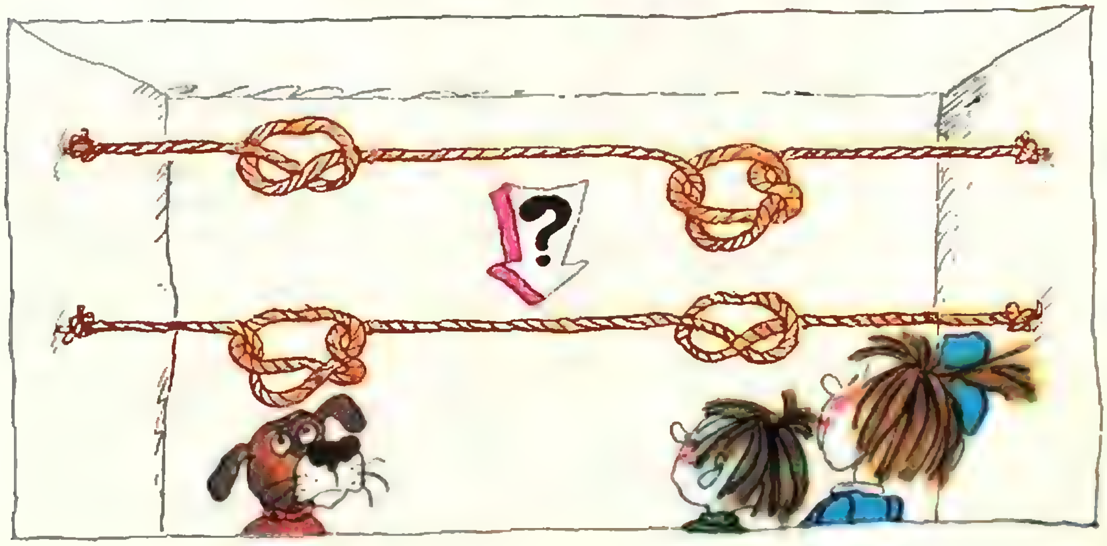
2. На растяжимой веревке, привязанной к двум противоположным стенкам комнаты, завязаны два узла. Можно ли, не отвязывая и не разрывая веревки, поменять узлы местами?

3. Восстановите пример на сложение (разным квадратным фигуркам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые).

4. Витя сказал своему другу Коле: «Я придумал пример на деление, в котором делимое, делитель, частное и остаток оканчиваются соответственно на 1, 3, 5 и 7». Подумав, Коля ответил: «Что-то ты путаешь». Прав ли Коля?

Эти задачи нам предложили
Н. Антонович, А. Лексис, Д. Плахта,
С. Савастюк





Из книг Я. И. Перельмана

В этом году исполнилось сто лет со дня рождения известного популяризатора физики и математики, механики и астрономии Якова Исидоровича Перельмана. Имя этого талантливого человека широко известно и в нашей стране, и за рубежом, оно знакомо и маститым ученым, и юным любителям науки.

Я. И. Перельман — автор более пятидесяти книг и тысячи газетных и журнальных статей. Его книги открывают и будут открывать новым поколениям читателей необычайный и замечательный мир науки.

Вот несколько отрывков из них.

Как велик миллион

(из книги «Вечера занимательной науки», написанной в соавторстве с В. И. Прянишниковым)

Каждый день читаем мы в газетах и книгах про миллионы рублей, миллионы тонн или километров. Мы знаем, что миллион — это тысяча тысяч, и все же подлинной численности миллиона мы себе не представляем. Звезд на небе видно простым глазом тоже очень много; какое же множество больше: число «миллион» или число звезд на куполе ночного неба?

Ученые пересчитали все звезды, видимые на небе простым глазом, и оказалось, что их гораздо меньше миллиона: $3^{1}/_{2}$ тысячи; между тем, в миллионе 1000 тысяч. Значит, звезд на небе мы видим (без трубы) примерно в 300 раз меньше миллиона.

Миллион гораздо больше, чем мы склонны себе представлять. Сейчас вы в этом снова убедитесь. Вообразите себе пшеничное зерно, длина которого в миллион раз больше обыкновенного. Какой величины оно вам рисуется? С большой пароход? С длинный товарный поезд? Нет, оно было бы во много раз больше самого длинного поезда, потому что имело бы в длину... десять километров.

Еще вопрос: какой путь прошли бы вы, сделав миллион шагов? Оказывается — длиннее, чем от Москвы до Ленинграда... У кого есть досуг и охота, тот может проверить эти расчеты. Здесь рассказано о них для того, чтобы, читая и говоря о миллионах нашей социалистической стройки, о миллионах гектаров посева, о миллионах километров, отделяющих нас от небесных светил, вы лучше понимали, какой смысл скрывается в слове «миллион».

По страницам Джонатана Свифта

(из «Занимательной геометрии»)

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм*), а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все вещи, все произведения природы в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы вроде следующих:

1) Во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лилипут?

2) Во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?

О жизни и творческой деятельности Я. И. Перельмана рассказывается в статье В. Френкеля «Рыцарь научно-популярной книги».

*) 1 дюйм = 0.0254 м, 1 фут = 12 дюймам = 0,3048 м. (*Прим. ред.*)

3) Сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объем его тела меньше в 12×12×12, то есть в 1728 раз; следовательно, для насыщения Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута. И мы читаем в «Путешествии» такое описание обеда Гулливера:

«Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходила стряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, подинимали все это на стол при помощи веревок и блоков...».

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливера. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в 12×12=144 раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лилипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Если у Пушкина в «Евгении Онегине», как утверждает поэт, «время расчислено по календарю», то в «Путешествии» Свифта все размеры согласованы с правилами геометрии. Лишь изредка надлежащий масштаб не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются ошибки.

«Один раз,— рассказывает Гулливер,— с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...»

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающим: ведь яблоко в 1728 раз тяжелее нашего, то есть весом*) в 80 кг, обрушилось с 12-кратной высоты. Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве

---

*) Здесь и дальше под «весом» тела надо понимать его массу (*Прим. ред.*)

лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в первой главе*), что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз**). И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще примерно такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.

Несколько занимательных опытов

(из книги «Физика на каждом шагу»)

Водолазный колокол. Для этого опыта годится обыкновенный таз, но если вы сможете получить глубокую и широкую банку, то опыт проделать удобнее. Вам понадобится еще высокий стакан. Это и будет ваш «водолазный колокол», а таз с водой представит уменьшенное подобие моря или озера.

Едва ли есть опыт проще этого. Вы держите стакан вверх дном, погружаете его на дно таза, продолжая придерживать рукой (чтобы вода его не вытолкнула). При этом легко заметить, что вода внутрь стакана почти не проникает: воздух не допускает ее. Это становится гораздо нагляднее, когда под нашим «колоколом» находится какой-либо легко намокающий предмет, например кусочек сахару. Положите на воду пробковый кружок, на него — сахар и прикройте сверху стаканом. Смело опускайте теперь стакан в воду. Сахар очутится ниже уровня воды, но останется сухим, потому что вода под стакан не проникнет.

Такой же опыт можно проделать и со стеклянной воронкой, если, повернув ее широким концом вниз, плотно заткнуть пальцем ее отверстие и тогда погрузить в воду. Вода под воронку не проникает, но стоит от-

---

*) Имеется в виду книга «Занимательная геометрия». (*Прим. ред.*)

**) Так как сила мускулов зависит от их толщины, то есть поперечного сечения, то при увеличении размеров животного сила растет пропорционально квадрату, а вес — кубу увеличения. (*Прим. ред.*) «Законом неодинакового нарастания объема и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему насекомое, как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д., может тащить тяжести, в 30, и 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально — мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей — лишь около 9/10, а лошадь, на которую мы взираем как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно, лишь около 7/10 своего веса». (Из статьи «Шестиногие богатыри».)

нять палец от отверстия и тем дать воздуху выход, чтобы вода быстро поднялась в воронке до уровня окружающей воды.

Этот опыт должен наглядно объяснить вам, как люди могут находиться и работать под водой в водолазном колоколе или внутри тех широких труб, которые называются кессонами. Вода не проникает внутрь водолазного колокола или кессона по той же причине, по какой не втекает она под стакан в нашем опыте.

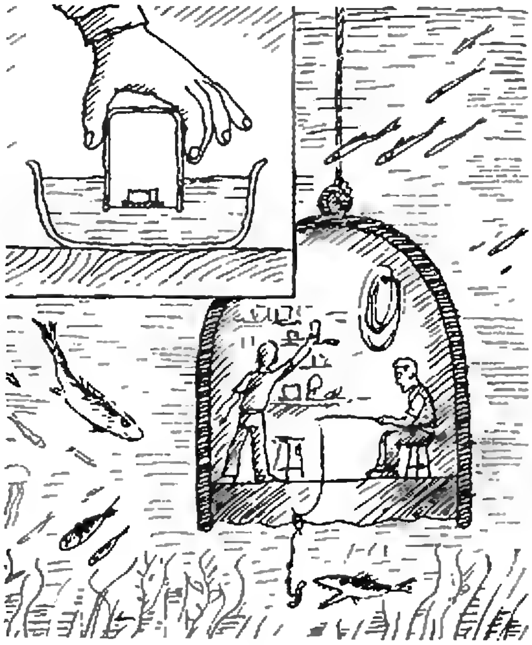
Тяжелая газета. — Возьми-ка газету в руки,— сказал мне как-то старший брат в те годы моей юности, когда физика была мне еще совершенно незнакома.— Газета очень легка, не правда ли? И ты думаешь, конечно, что сможешь всегда поднять ее хоть одним пальцем. Но вот сейчас ты увидишь, что та же самая газета может сделаться очень и очень тяжелой. Подай мне вон ту чертежную линейку.

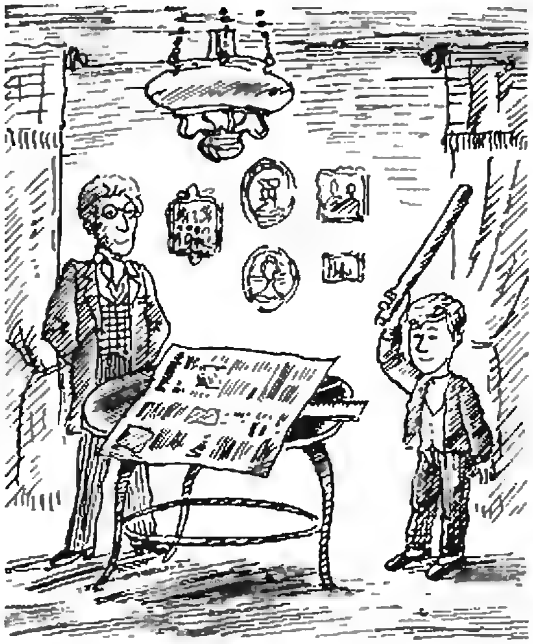
— Она изрублена, никуда не годится.

— Тем лучше: не жалко, если сломается.

Брат положил линейку на стол так, что часть ее высовывалась за край.

— Тронь за выступающий конец. Легко наклонить, правда? Ну, а попробуй наклонить ее, когда я накрою другую половину газетой.





Он разостлал газету на столе, аккуратно расправив ее складки и покрыв ею линейку.

— Бери палку и сильно ударь по выступающей части линейки. Бей со всего размаху.

— Так ударю, что линейка в потолок полетит! — воскликнул я, размахиваясь.

— Главное — не жалей силы...

* * *

На этом месте мы прервем рассказ. Проделайте сами этот опыт и постарайтесь объяснить результат, обосновав его численными расчетами.

Публикацию подготовила
И. Кириллова

Н. Сатьянов

Формулы и графики

> *Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы.*
>
> (Д. Гильберт)

Как та или иная особенность формулы, задающей функцию, отражается на графике этой функции? Умение правильно ответить на этот вопрос — в разных ситуациях — бывает полезным при построении графиков, в частности таких, которые попадаются на вступительных экзаменах. Мы не останавливаемся здесь на особенностях графиков функций, связанных с их экстремумами (об этом подробно сказано в учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 27), а обсуждаем в основном смену знаков, вертикальные и горизонтальные асимптоты. В конце статьи мы поместили небольшой тест (задание с выбором ответов), позволяющий проконтролировать усвоение указанного материала.

Нули и изменение знака

Если функция $y=f(x)$ обращается в нуль в некоторой точке x_0, это еще не означает, что график функции f обязательно пересекает ось Ox под ненулевым углом. Есть и другие возможности — например, касание (со сменой знака или без). Как отличить касание от простой смены знака?

График функции*)

$$y=(x-1)^3(x-2)^2 \qquad (1)$$

изображен на рисунке 1. В формулу (1) множитель $x-1$ входит в нечетной степени — поэтому при переходе через $x=1$ он меняет знак. Множитель $x-2$ при переходе через $x=1$ знака, конечно, не меняет. Следовательно, при переходе через $x=1$ их произведение меняет знак — график пересекает ось абсцисс. Множитель $x-2$ входит в формулу (1) в четной

---

*) На этом и следующих рисунках масштаб по оси Oy отличается от масштаба по Ox.

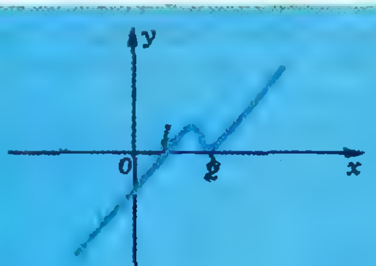


Рис. 1.

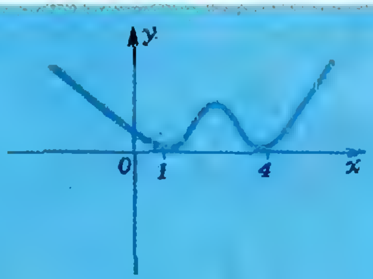


Рис. 2.

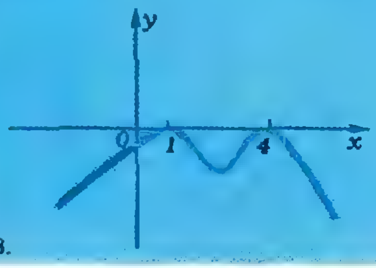


Рис. 3.

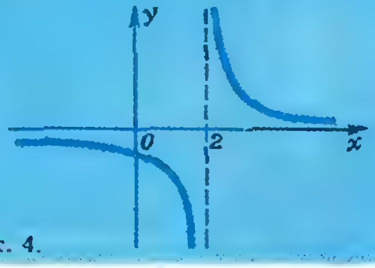


Рис. 4.

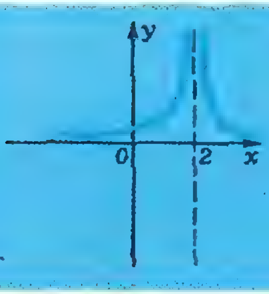


Рис. 5.

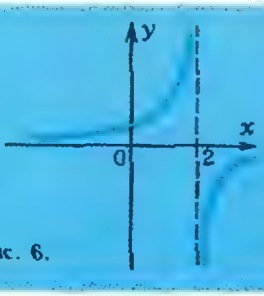


Рис. 6.

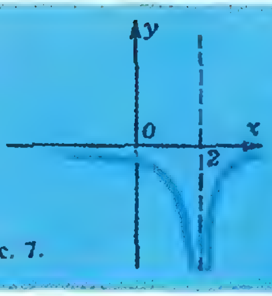


Рис. 7.

степени — поэтому при переходе через $x=2$ он знака не меняет. Множитель $x-1$ при переходе через $x=2$ тоже, конечно, не меняет знака. Следовательно, их произведение при переходе через $x=2$ знака не меняет, и график касается оси x, не пересекая ее, в точке $x=2$.

Графики функций $y=(x-1)^2\times$ $\times(x-4)^4$ и $y=-(x-1)^2(x-4)^4$ изображены соответственно на рисунках 2 и 3.

Таким образом, в выражениях вида $f(x)=\varphi(x)(x-a)^k$ $(k\in N)$, где $\varphi(a)\neq 0$ и φ непрерывна в точке $x=a$, все дело в четности k: смена знака в точке $x=a$ происходит тогда и только тогда, когда k нечетно. В случае, когда φ дифференцируема в точке $x=a$, график f касается оси Ox в точке a, если $k\geqslant 2$ (подумайте, почему), и остается при этом по одну сторону от оси Ox тогда и только тогда, когда k четно.

Вертикальные асимптоты

График функции $y=\frac{1}{x-2}$ показан на рисунке 4. Когда x стремится к 2, модуль $\left|\frac{1}{x-2}\right|$ неограниченно увеличивается; в этом случае прямая $x=2$ называется *вертикальной асимптотой*. Мы запишем это так:

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{1}{x-2}\right|=+\infty.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этой удобной записью, хотя ее нет в школьном учебнике. На экзамене, конечно, немного опасно пользоваться внепрограммным материалом; поэтому лучше сказать словами, что при $x\to 2$ функция $1/|x-2|$ неограниченно возрастает. Для любознательных сообщаем соответствующее определение в общем случае: функция $f(x)$ *стремится к* $+\infty$ *при* $x\to a$ (запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$), если для любого числа A_0 существует такое x_0, что $f(x)>A_0$, как только x ближе к a, чем x_0, точнее, как только $0<|x-a|<|x_0-a|$.

Поведение функции $y=\frac{1}{x-2}$ в окрестности точки $x=2$ можно описать и детальнее — при x, стремящемся к 2 справа («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 11), $\frac{1}{x-2}$ стремится к $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty;$$

при x, стремящемся к 2 слева, $\frac{1}{x-2}$ стремится к $-\infty$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Прямая $x=2$ является также (вертикальной) асимптотой графика функции $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ (рис. 5):

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$$

В этом случае при x, стремящемся к 2 справа, и при x, стремящемся к 2 слева, $\frac{1}{(x-2)^2}$ стремится к $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$$

Прямая $x=2$ является также асимптотой графиков функций $y=-\frac{1}{x-2}$ (рис. 6) и $y=-\frac{1}{(x-2)^2}$ (рис. 7).

Любая прямая вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ является асимптотой графика функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 8).

Прямая $x=0$ является асимптотой графика функции $y=\log_a x$ при x,

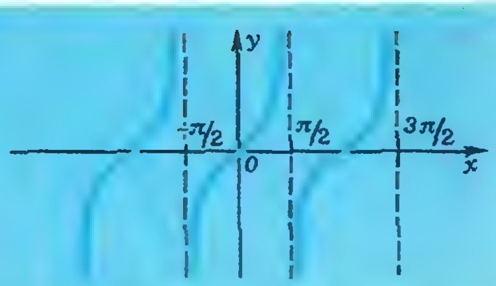


Рис. 8.

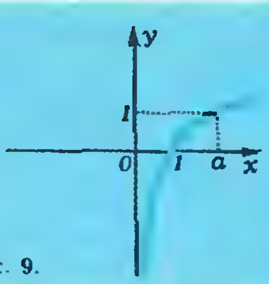


Рис. 9.

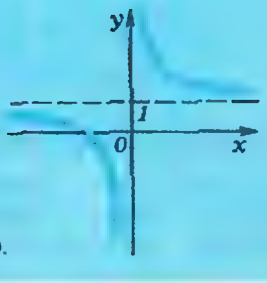


Рис. 10.

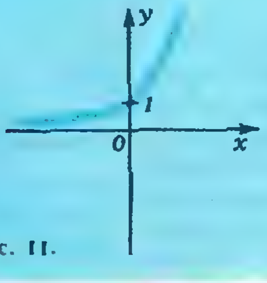


Рис. 11.

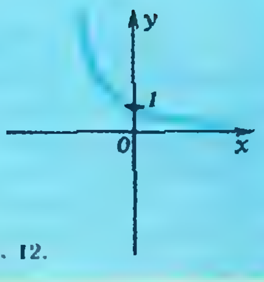


Рис. 12.

стремящемся к 0 справа (на рисунке 9 $a>1$).

Горизонтальные асимптоты

Когда x неограниченно увеличивается (математики говорят «стремится к $+\infty$»), график функции $y=\frac{1+x}{x}$ неограниченно приближается к прямой $y=1$ (рис. 10); в этом случае прямая $y=1$ называется *горизонтальной асимптотой*. Когда x неограниченно убывает, то есть неограниченно увеличивается по модулю, будучи отрицательным (математики говорят «стремится к $-\infty$»), график функции $y=\frac{1+x}{x}$ тоже неограниченно приближается к прямой $y=1$ (см. рис. 10); прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой также при неограниченно убывающем x. Все это можно коротко записать в виде

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{x}=1.$$

Мы также будем пользоваться этой удобной записью, хотя ее нет в учебнике. Сообщаем определение в общем случае: функция $f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к $+\infty$ (в формульной записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое X, что $x>X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

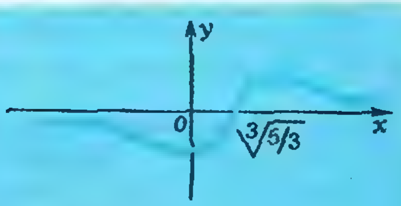


Рис. 13.

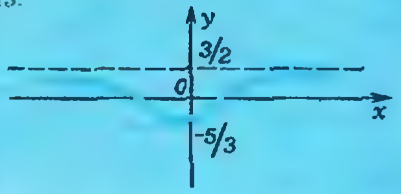


Рис. 14.

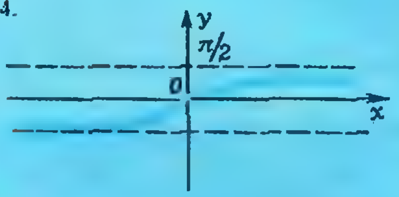


Рис. 15.

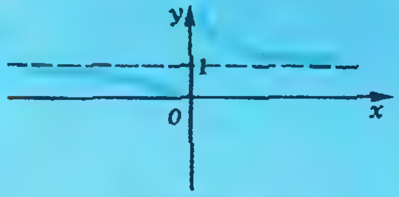


Рис. 16.

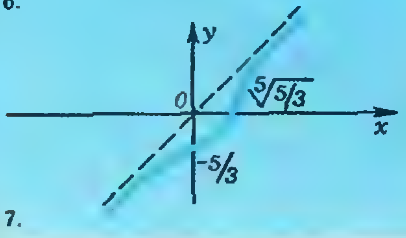


Рис. 17.

При $a>1$ ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=a^x$, когда $x\to-\infty$ (рис. 11), но не является его асимптотой, когда $x\to+\infty$ (если $x\to+\infty$, этот график не имеет асимптоты — он не «прижимается» ни к какой прямой).

При $0<a<1$ — наоборот: ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=a^x$ при $x\to+\infty$ (рис. 12) и не является его асимптотой при $x\to-\infty$.

Ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=\frac{3x^3-5}{2x^4+3}$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ (рис. 13):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-5}{2x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x^3}}{2x+\frac{3}{x^3}}=0$$

(аналогично для $x\to-\infty$).

Для графика функции $y=\frac{3x^4-5}{2x^4+3}$ — как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ — асимптотой является прямая $y=\frac{3}{2}$ (рис. 14):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5}{2x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x^4}}{2+\frac{3}{x^4}}=\frac{3}{2}$$

(аналогично для $x\to-\infty$)

График функции $y=\frac{3x^5-5}{2x^4+3}$ не имеет горизонтальной асимптоты ни при $x\to+\infty$, ни при $x\to-\infty$ (впрочем, к нему мы еще вернемся).

График функции $y=\operatorname{arctg} x$ при $x\to+\infty$ имеет асимптотой прямую $y=\frac{\pi}{2}$, при $x\to-\infty$ — прямую $y=-\frac{\pi}{2}$ (рис. 15).

График функции $y=2^{\frac{1}{x}}$ нарисован на рисунке 16. Прямая $x=0$ является асимптотой (вертикальной) этого графика при x, стремящемся к 0 справа ($x\to0+0$), и не является его асимптотой при $x\to0-0$. Прямая $y=1$ является асимптотой (горизонтальной) этого графика как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

Бывают еще и *наклонные асимптоты:* при $x\to+\infty$ график функции $y=\frac{3x^5-5}{2x^4+3}$ «прижимается» к прямой $y=\frac{3}{2}x$ (рис. 17), при $x\to-\infty$ он «прижимается» к той же прямой (попробуйте дать определение!). График функции $y=\frac{3x^6-5}{3x^4+3}$ не имеет и наклонных асимптот.

В заключение обещанное задание для самоконтроля.

1. Для каждого из графиков, изображенных на рисунке 18, сконструируйте формулу, задающую график, обладающий теми же основными особенностями.

2. Для каждого из графиков А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И подберите в списке формул 1—25 ту, которая задает этот график (рис. 19, с. 50).

1) $y=(x-2)(x+1)^2$; 2) $y=x(x^2-1)(x-1)$;
3) $y=(x-2)^2(x+1)$; 4) $y=(x+1)^2(2-x)$;
5) $y=x(x^2-1)(x+1)$; 6) $y=(x-2)^2(x+1)^2$;
7) $y=x^3(x^2-1)(x+1)$; 8) $y=(x^2-1)^3$;
9) $y=(x+1)^2(2-x)^3$; 10) $y=(x^2-1)^2$;
11) $y=-x2^x$; 12) $y=-x^32^{-x}$;
13) $y=-x2^{-x}$; 14) $y=\frac{x^2-x}{x^2-4}$;
15) $y=\frac{1+x+x^2}{1+x^2}$; 16) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x^2}$;
17) $y=\frac{1+x+2x^2}{1+x^2}$; 18) $y=\frac{2+x^2}{1+x^2}$;
19) $y=\frac{2+x^4}{1+x^2}$; 20) $y=\frac{2+x^8}{1+x^4}$;
21) $y=\frac{1-x^2}{x^2-4}$; 22) $y=\frac{x^4-1}{x^2-4}$;

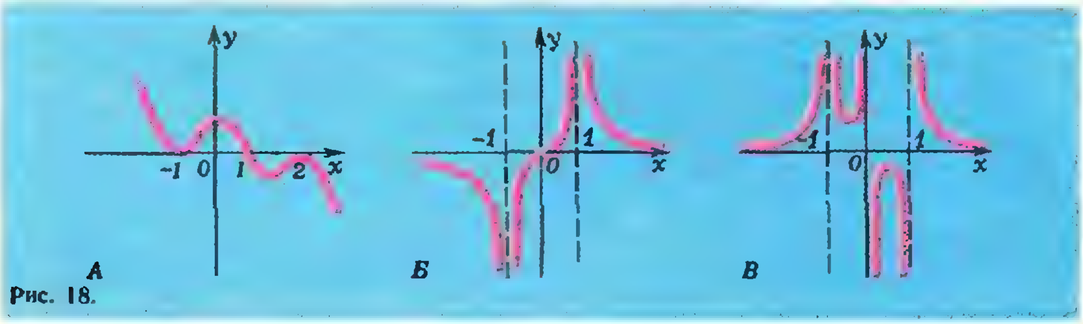


Рис. 18.

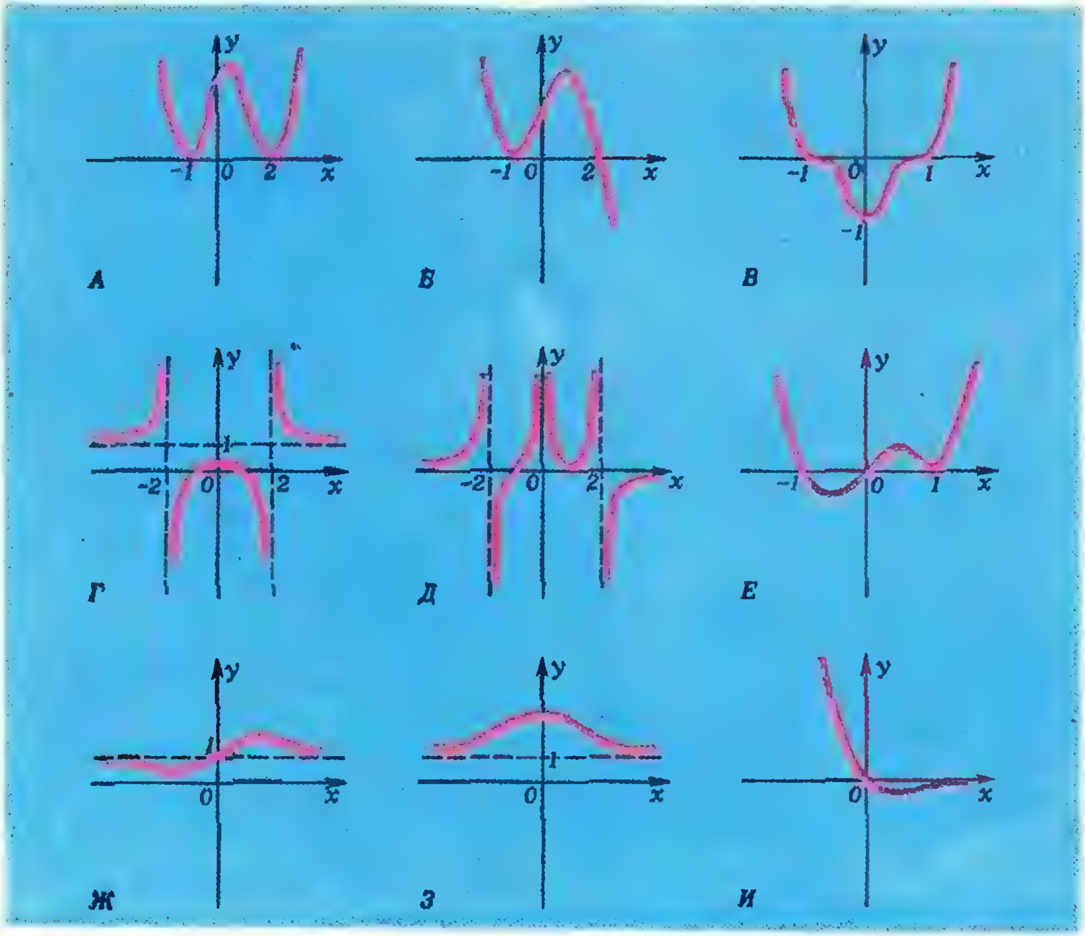


Рис. 19.

23) $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; 24) $y=\frac{x^2-1}{x(4-x^2)}$; 25) $y=\frac{(x^2-1)(x-1)}{x(4-x^2)}$.

Новое совершенное число

В редакцию «Кванта» пришло письмо нашего читателя Л. Ковгана (г. Фролово Волгоградской обл.). Он обращает внимание на появившееся в журнале «Знание — сила» сообщение о получении нового простого числа и отмечает, что одновременно фактически указано и новое совершенное число. «Я хотел бы, — заканчивает свое письмо Л. Ковган, — чтобы журнал «Квант» опубликовал короткую информацию об этом».

Выполняем просьбу читателя.

В «Кванте» (1971, № 8, с. 1; 1972, № 4, с. 39; 1973, № 10, с. 71) уже рассказывалось о любопытной истории изучения совершенных чисел. *Совершенным* называют натуральное число, равное сумме всех его собственных делителей (то есть делителей, отличных от самого числа). Как доказал еще Евклид, если число 2^k-1 — простое, то число $2^{k-1}(2^k-1)$ является совершенным. Вот несколько первых совершенных чисел:

6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, ...

До недавнего времени было найдено (главным образом, благодаря ЭВМ) только 24 совершенных числа.

А теперь воспроизведем информацию, опубликованную в журнале «Знание — сила» (1980, № 6, с. 10):

«Компьютер по имени «Крэй-1» сумел найти самое большое из известных доселе математикам простое число [...] Самое большое простое число

$$2^{44\,497}-1$$

содержит 13 395 разрядов. Оно во много раз больше, чем число всех атомов во Вселенной...»

Открытие нового простого числа позволяет, на основании сформулированной выше теоремы Евклида, сразу же указать новое, 25-е совершенное число:

$$2^{44\,496}(2^{44\,497}-1).$$

Это — огромное число: для его полной десятичной записи требуется 26 790 цифр.

По-видимому, отыскание следующих совершенных чисел по формуле Евклида будет либо представлять чисто спортивный интерес, либо преследовать цель показать возможности того или иного вычислительного комплекса.

Н. Х.

А. Земляков

Олимпиада по математике

Заключительный тур XVI Всесоюзной олимпиады школьников по математике, посвященной 60-летию образования СССР, состоялся с 14 по 22 апреля в Одессе. В нем приняло участие 156 школьников (43 восьмиклассника, 60 девятиклассников и 53 десятиклассника), представлявших все республики Советского Союза. В жюри олимпиады (около 50 человек) входили научные и педагогические работники Москвы, Ленинграда, Киева, Кишинева, Риги, Новосибирска и других городов, включая, конечно, и Одессу. Почетным председателем жюри был академик А. Н. Колмогоров, председателем — академик АН УССР Б. В. Гнеденко, его заместители — доцент механико-математического факультета МГУ Ю. В. Нестеренко, профессор Киевского университета М. И. Ядренко и профессор Одесского политехнического института Н. Б. Диварн.

Торжественное открытие олимпиады происходило 15 апреля в огромном зале Дома моряков, совсем рядом с Одесским портом и знаменитой Потемкинской лестницей. Открыл олимпиаду заместитель председателя Одесского горисполкома В. А. Черкасский. С большим интересом были выслушаны академики А. Н. Колмогоров и Б. В. Гнеденко; они говорили о прикладном значении математики, о ее возрастающей роли в современных науке и производстве. Участников приветствовали школьники Одессы и представители пионерских дружин пионерлагеря «Молодая гвардия», на территории которого были размещены участники олимпиады и проведены оба тура олимпиады.

Сама олимпиада, как обычно, проходила в два тура — 16 и 18 апреля. В каждом классе однодневное задание состояло из 4 задач, на решение которых отводилось 5 часов. Ниже мы приводим условия всех задач, указывая их авторов.

Задачи

8 класс

Первый день

1. На окружности с центром O_1 радиуса r_1 взяты точки M и K. В центральный угол MO_1K вписана окружность с центром O_2 радиуса r_2. Найдите площадь четырехугольника MO_1KO_2.

(*Б. Чиник,* Кишинев)

2. В числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1=1$, $a_2=2$ и $b_1=2$, $b_2=1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

(*А. Анджан,* Рига)

3. Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что если для некоторых неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ число $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}$ делится на 2^m-1, то $n \geqslant m$.

(*А. Григорян,* Москва)

4. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило 1/6.

(*А. Берзиньш,* Рига)

Второй день

5. Натуральные числа от 1 до 1982 расположены одно за другим в некотором порядке. ЭВМ просматривает слева направо пары стоящих рядом чисел (первое и второе, второе и третье и т. д.) вплоть до последней и меняет местами числа в просматриваемой паре, если большее из них стоит левее. Затем она просматривает все пары, двигаясь справа налево от последней пары до первой, меняя местами числа в парах по тому же закону. По окончании этого просмотра работающий с ЭВМ оператор получил информацию, что число, стоящее на сотом месте, оба раза не сдвинулось со своего места. Найдите это число.

(*Ю. Нестеренко,* Москва)

6. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 метру. Прав ли Знайка?

(*Н. Карташов,* Киев)

7. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y=x^2$. Потом оси координат стерли — осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

(*А. Анджан,* Рига)

8. Квадратная таблица $n\times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть числа a);

б) не менее чем n раз.

(*А. Берзиньш,* Рига)

9 класс

Первый день

1. Однажды трое мальчиков встретились в библиотеке. Один из них сказал: «Теперь я буду ходить в библиотеку через день». Второй заявил, что он будет ходить в библиотеку через два дня, а третий — что будет ходить в библиотеку через три дня. Слышавший их разговор библиотекарь заметил, что по средам в библиотеке выходной день. Мальчики ответили, что если у кого-нибудь из них дата прихода попадет на выходной день библиотеки, то он придет на следующий день и дальнейший отсчет посещений будет вести уже с этого дня. Так мальчики и поступили. Однажды в понедельник они вновь все вместе встретились в библиотеке. В какой день недели происходил описанный выше разговор?

(*А. Савин,* Москва)

2. В параллелограмме $ABCD$, в котором $|AB|\neq|BC|$, дано отношение длин диагоналей: $|AC|/|BD|=k$. Пусть луч AM симметричен лучу AD относительно прямой AC, луч BM симметричен лучу BC относительно прямой BD, M — общая точка лучей AM и BM. Найдите отношение $|AM|/|BM|$.

(*В. Дубровский,* Москва)

3. На окружности отмечено $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

(*В. Произволов,* Москва)

4. Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.

(*С. Гашков,* Москва)

Второй день

5. Докажите, что для всех положительных значений x выполнено неравенство

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}>2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

(*В. Колотов,* Новосибирск)

6. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из совокупности чисел 1, 2, 3 ..., 1982 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел? Каким образом это можно сделать?

(*Л. Курляндчик,* Ленинград)

7. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих эту клетку клеток.

(*А. Григорян,* Москва)

8. Докажите, что из любой последовательности и действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно выбрать часть чисел так, чтобы выполнялись следующие три условия:

а) никакие идущие подряд три числа не выбраны,

б) из каждых трех идущих подряд чисел хотя бы одно выбрано,

в) абсолютная величина суммы выбранных чисел не меньше чем

$$\frac{1}{6}\left(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|\right).$$

(*А. Анджан,* Рига)

10 класс

Первый день

1. Числа a, b, c лежат на интервале $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ и удовлетворяют равенствам:

$$\cos a=a,$$
$$\sin\cos b=b,$$
$$\cos\sin c=c.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания.

(*А. Гессен,* Москва)

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Существует ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{11\ldots1}_{m\ \text{раз}}$ и имеющее сумму цифр меньшую, чем m?

(*А. Григорян. Ю. Нестеренко,* Москва)

4. Замкнутая ломаная M имеет нечетное число вершин — последовательно $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Обозначим через $S(M)$ новую замкнутую ломаную, последовательные вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$ которой являются серединами звеньев ломаной M: B_1 — середина $[A_1A_2]$, B_2 — середина $[A_3A_4]$, ..., B_{n+1} — середина $[A_{2n+1}A_1]$, B_{n+2} — середина $[A_2A_3]$, ..., B_{2n+1} — середина $[A_{2n}A_{2n+1}]$. Докажите, что в последовательности таким образом построенных ломаных

$$M_1=S(M),\ M_2=S(M_1),\ M_3=S(M_2),\ldots$$

найдется замкнутая ломаная, гомотетичная исходной ломаной M.

(*А. Келарев,* Свердловск)

Второй день

5. В квадратной таблице $n\times n$ клеток отмечено $n-1$ клеток. Докажите, что перестановками строк между собой и столбцов между собой можно добиться того, чтобы все отмеченные клетки лежали ниже диагонали таблицы.

(*Ю. Нестеренко,* Москва)

6. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа a справедливо неравенство

$$|a|\cdot|a-1|\cdot\ldots\cdot|a-n|\geq\langle a\rangle\cdot\frac{n!}{2^n},$$

где $\langle a\rangle$ — расстояние от числа a до ближайшего к нему целого числа, $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.

(*Ю. Нестеренко, А. Гельфонд,* Москва)

7. а) Существуют ли многочлены

$P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+ \\ +(z-2x+1)^3\cdot R=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+ \\ +(z-x+1)^3\cdot R=1.$$

(*П. Гусятников, Ю. Нестеренко,* Москва)

8. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем 4/3 суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

(*П. Гусятников,* Москва)

Полный список призеров приводится на с. 60.

Хочется отметить тех десятиклассников, которые уже в третий раз становятся победителями. Это Г. Перельман (получал соответственно в 8, 9 и 10 классах дипломы II, I и I степеней), А. Спивак (дипломы III, II и I), С. Матюшов (I, III, II), К. Матвеев (II, II, II), С. Самборский (III, II, II), В. Титенко (I, II, II), А. Савкин (II, II, III), В. Шевчишин (II, I, III). Эти ребята входили в число кандидатов в команду СССР на XXIII Международную олимпиаду школьников (об этой олимпиаде, проходившей в Венгрии в июле 1982 г., см. «Квант» № 12).

Наряду с главными призами многие участники получили и специальные призы — за оригинальные решения задач, за лучшие результаты первого дня, за волю к победе. Специальный приз был вручен лучшей среди девочек — восьмикласснице А. Богомольной из школы № 534 г. Ленинграда, получившей диплом II степени. Приз «Кванта» — подшивка номеров за 1981 год — был вручен восьмикласснику Булату Оразбекову из школы им. Луначарского Кировского района Талды-Курганской области Казахской ССР. Подписку на «Квант» на 1983 год получат Сардон Гуломнабиев из школы пос. Шугнана Горно-Бадахшанской автономной области Таджикской ССР (8 класс) и Тарас Кицмет из школы села Горохолино Ивано-Франковской области УССР (9 кл.).

Город-герой Одесса тепло принимал своих гостей — участников олимпиады. В дни туров по вечерам ребята ходили в знаменитые одесские театры — оперы и балета, музыкальной комедии. Состоялись традиционные вечера дружбы народов СССР в различных школах Одессы, экскурсии по городу «Одесса — город-герой», «Одесса — подвиг», «Литературная Одесса», экскурсия по морю в порт Ильичевск. Как и все в нашей стране, 17 апреля участники олимпиады работали на Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике — на посадке деревьев в красивейшем парке пионерлагеря «Молодая гвардия».

19 апреля состоялся «математический бой» между командой школьников и командой жюри. Бой был упорным и почти равным — достаточно сказать, что перед заключительным конкурсом капитанов счет оказался равным. Все решил последний поединок: капитан школьников Гриша Перельман все-таки уступил капитану команды членов жюри С. В. Конягину (двукратному победителю международных математических олимпиад, ныне преподавателю механико-математического факультета МГУ, автору многих задач из Задачника «Кванта»). Как главный судья, я уверяю вас, что нисколько не подсуживал членам жюри — скорее, наоборот!

20 апреля во Дворце пионеров пионерлагеря «Молодая гвардия» состоялось торжественное закрытие олимпиады. С приветственным словом к участникам олимпиады обратился профессор М. И. Ядренко. Академик А. Н. Колмогоров выступил с напутствиями как победителям олимпиады, так и тем, кто не получил премий. Руководители жюри вручили призы, дипломы и грамоты участникам. Символ олимпиады был передан представителю города Кишинева, где будет происходить заключительный тур следующей, XVII олимпиады.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный этап XVI Всесоюзной олимпиады школьников по физике, посвященной 60-летию образования СССР, проходил с 14 по 21 апреля в столице Советского Азербайджана — орденоносном Баку.

143 представителя всех союзных республик приняли участие в очень серьезном соревновании. Среди них — победители республиканских олимпиад этого года и призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады, получившие дипломы I и II степени.

Утром 15 апреля участники олимпиады возложили венки к памятнику В. И. Ленину и к мемориалу 26 Бакинских комиссаров, после чего в актовом зале Азербайджанского института нефти и химии им. М. Азизбекова состоялось торжественное открытие олимпиады. С теплыми приветственными словами к собравшимся обратились министр просвещения Аз.ССР Э. М. Кафарова, председатель жюри Всесоюзной олимпиады член-корреспондент АН Аз.ССР А. И. Мухтаров и заместитель председателя жюри профессор С. М. Козел. Ректор Института нефти и химии академик АН Аз. ССР И. А. Ибрагимов рассказал о славной истории института, первого высшего учебного заведения в Европе и Азии, в котором была начата подготовка инженеров для всех отраслей нефтяной промышленности. С гордостью говорилось о том, что в стенах этого института работали выдающийся физик, лауреат Ленинской премии академик И. В. Курчатов, академик Л. С. Лейбензон и член-корреспондент АН СССР К. А. Красусский; среди выпускников института — лауреат Ленинской премии, председатель Госплана СССР Н. К. Байбаков, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии, министр газовой промышленности С. А. Оруджев и Герой Советского Союза летчик-космонавт СССР В. М. Жолобов.

Вечером того же дня гости побывали на спектакле в Театре оперы и балета им. М. Ф. Ахундова.

16 апреля проводился теоретический тур олимпиады. Восьмиклассникам было предложено решить четыре задачи (на работу отводилось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по пять задач (времени давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (большинство из них включено в Задачник «Кванта» в 7 и 8 номерах журнала за этот год).

Теоретический тур

8 класс

1. В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1=30°C$). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau=5$ мин. Для того чтобы не дать чайнику остыть, в него капают из крана горячую воду ($t_2=45°C$). Масса одной капли $m_к=0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной $t=30°C$? На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще? Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит $V=0{,}3$ л воды. Температура окружающего воздуха $t_0=+20°C$.

2. В схеме, указанной на рисунке 1, напряжение между контактами a и b постоянно. Когда параллельно резистору сопротивлением R_2 подключили резистор сопротивлением R, сила тока через этот резистор оказалась равной $I_1=10$ мА, а сила тока, протекающего через резистор сопротивлением R_1, увеличилась на $I_2=2$ мА. Найдите отношение сопротивлений резисторов R_1/R_2.

3. По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (рис. 2). При какой скорости v поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной.

4. Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью v в положительном направлении оси X; в момент прихода волны давление p резко повышается (рис. 3). На пути распространения волны стоит клин, масса которого m, а размеры указаны на рисунке 4. Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости волны; трение пренебрежимо мало.

9 класс

1. На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R. Мимо него движется со скоростью v второй такой же обруч (рис. 5).

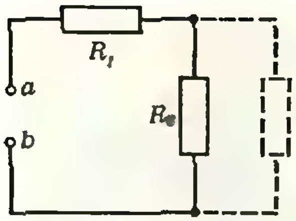


Рис. 1.

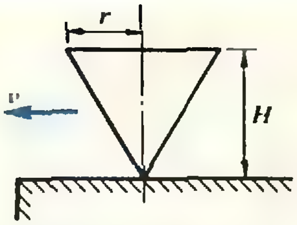


Рис. 2.

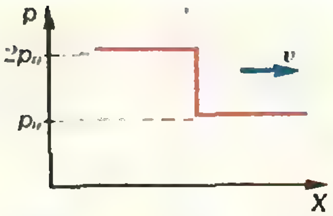


Рис. 3.

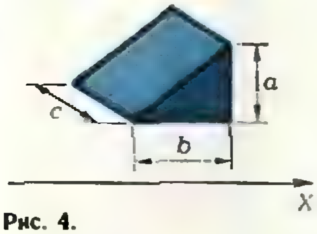


Рис. 4.

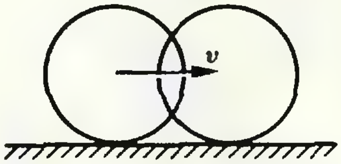


Рис. 5.

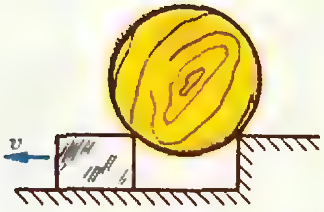


Рис. 6.

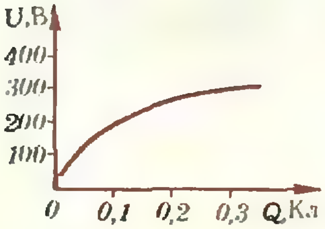


Рис. 7.

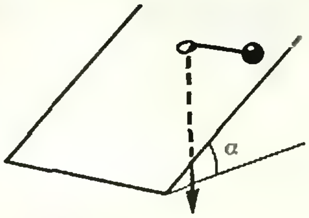


Рис. 8.

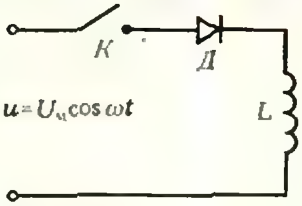


Рис. 9.

Найдите зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие, второй обруч «проезжает» вплотную к первому.

2. Массивный цилиндр радиуса R опирается на две подставки одинаковой высоты (рис. 6). Одна из подставок неподвижна, другая отъезжает по горизонтали со скоростью v. С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $R\sqrt{2}$? Трения нет. В первый момент подставки располагались очень близко друг к другу.

3. В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда: $m_в=m_л=1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0=10^5$ Па до $p_1=2{,}5\cdot10^6$ Па. Определите, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до $14\cdot10^6$ Па. Сначала решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми, а затем оцените поправку, которую дает учет сжимаемости. Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до $20\cdot10^6$ Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды. Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3\cdot10^5$ Дж/кг, плотность льда $\varrho_л=0{,}9\varrho_в$, где $\varrho_в$ — плотность воды.

4. Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда обкладок Q этого конденсатора приведен на рисунке 7. Конденсатор заряжают от батареи с напряжением $U_0=300$ В через резистор сопротивлением $R=10$ кОм. Найдите максимальную энергию вспышки. Оцените максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1=250$ В.

5. Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1=2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2=2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?

10 класс

1. На шероховатой наклонной плоскости (угол наклона α) лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить (рис. 8). Конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент нить горизонтальна. Нить очень медленно вытягивают, при этом к моменту достижения отверстия она описывает половину окружности. Найдите величину коэффициента трения μ.

2. В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P=10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0=10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допусти-

Председатель жюри олимпиады по физике А. И. Мухтаров с участниками олимпиады, получившими дипломы I степени. Слева направо: В. Банков, Е. Бруенков, С. Сюньков, А. Алексеев, А. Дешковский, Б. Макеев, Л. Закревский, А. Абанов, В. Молчанов.

Фото Г. Мирзаханова

мая величина ΔP_{max}, если предельный перегрев (из экологических соображений) не должен превышать величины $\Delta T_{max} = 0{,}1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при повышении абсолютной температуры в 2 раза.

3. В одном из фантастических романов предлагался проект электростанции, использующей энергию морских течений и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем. В океан погружены две горизонтальные металлические пластины площади $S = 1$ км², расположенные на расстоянии $L = 100$ м одна над другой. Морская вода, обладающая удельным сопротивлением $\rho = 0{,}25$ Ом·м, течет с востока на запад со скоростью $v = 1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север, и индукция этого поля равна по модулю $B = 10^{-4}$ Тл. В результате между пластинами появляется напряжение, а если их соединить с внешней нагрузкой, то в ней выделяется мощность. Определите максимальную величину этой мощности.

4. В схеме, приведенной на рисунке 9, диод $Д$ и катушка с индуктивностью L при помощи ключа K подключаются к источнику переменного напряжения $u = U_м \cos \omega t$. В момент времени $t = 0$ ключ K замыкается. Определите силу тока в катушке как функцию времени и постройте график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

5. Межпланетный корабль в форме диска радиуса $r = 4$ и совершил мягкую посадку на Луну. Поверхность корабля покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с диаметром объектива $D = 6$ м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения? Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) составляет $k = 0{,}05$. Оцените, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА. Расстояние от Земли до Луны $L = 4 \cdot 10^5$ км; фотографирование ведется в свете с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

17 апреля участники олимпиады работали на Всесоюзном субботнике, а вечером были на представлении в цирке. Приятным сюрпризом для участников — любителей шахмат явился сеанс одновременной игры, который провел чемпион мира среди юношей Гарик Каспаров. А жюри в этот день предстояла очень напряженная работа — проверка заданий теоретического тура. Результаты этой проверки отражены в следующей таблице:

		Номер задачи				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	20	14	29	13	-
	9 кл.	20	9	4	4	11
	10 кл.	21	41	33	19	5
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	—	6	2	4	—
	9 кл.	6	6	11	6	14
	10 кл.	16	3	3	3	18

Экспериментальный тур проводился 18 апреля. Каждому участнику предлагались две задачи. Подробный разбор задач экспериментального тура проведен в статье В. Орлова, помещенной в этом же номере журнала.

После эксперимента состоялась экскурсия в город нефтяников Сумгаит, а вечером — посещение Театра русской драмы им. С. Вургуна.

Следующий день был особенно напряженным для членов жюри, поскольку им предстояло не только проверить работы экспериментального тура, но и подвести окончательные итоги олимпиады.

20 апреля состоялось торжественное закрытие XVI Всесоюзной олимпиады школьников по физике. На нем были объявлены результаты олимпиады и вручены награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 61.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен *Алие Булатовой* (Кокчетав). Подпиской на «Квант» на 1983 год награждены *Анатолий Ершов* (Златоуст), *Тимур Исхаков* (Душанбе), *Андрей Огнев* (Ленинск-Кузнецкий) и *Николай Хомяков* (Улан-Удэ).

Олимпиада закончилась. Одни участвовали в ней в последний раз (в этом году они простились со школой), другие смогут встретиться и помериться силами еще и еще раз. Желаем всем больших успехов!

В. Орлов

Экспериментальный тур олимпиады по физике

Решение экспериментальных заданий заключительного этапа XVI Всесоюзной олимпиады по физике проходило в трех вузах Баку: восьмиклассники работали в Азербайджанском педагогическом институте им. В. И. Ленина, девятиклассники — в Азербайджанском институте нефти и химии им. М. Азизбекова и десятиклассники — в Азербайджанском государственном университете им. С. М. Кирова.

Приведем условия всех экспериментальных заданий и решения некоторых из них.

8 класс

Задание 1. *Определите плотность твердого тела.*

Оборудование: сосуд с водой, пробирка, линейка, кусочки твердого тела.

Рассмотрим два способа решения этого задания: один был предложен составителями, второй — участниками олимпиады.

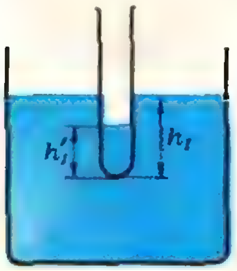


Рис. 1.

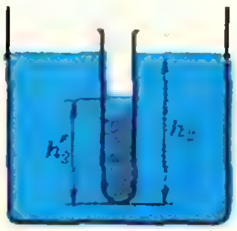


Рис. 2

Предполагалась следующая методика выполнения работы.

Сначала в пробирку наливается такое количество воды, чтобы пробирка в вертикальном положении плавала в сосуде с водой (рис. 1). Условие плавания пробирки можно записать в виде

$$F_{A1}=(M+m_0)g,$$

или

$$\varrho_0 S_1 h_1 g=(M+m_0)g, \qquad (1)$$

где $F_{A1}=\varrho_0 S_1 h_1 g$ — архимедова сила, ϱ_0 — плотность воды, S_1 — площадь внешнего сечения пробирки, M и m_0 — масса пробирки и налитой в нее воды соответственно.

Затем в пробирку насыпаются кусочки проволоки (рис. 2). При этом для увеличения точности опыта желательно максимально возможное погружение пробирки в воду. Запишем условие плавания пробирки для этого случая:

$$F_{A2}=(M+m_0+m)g,$$

или

$$\varrho_0 S_1 h_2 g=(M+m_0+m)g, \qquad (2)$$

где m — масса твердого тела (кусочков алюминиевой проволоки).

Из выражений (1) и (2) получаем

$$m=\varrho_0 S_1 (h_2-h_1).$$

Объем твердого тела легко определить по изменению объема воды в пробирке при погружении в нее проволоки:

$$V=S_2(h'_2-h'_1),$$

где S_2 — площадь внутреннего сечения пробирки.

Следовательно, искомая плотность твердого тела равна

$$\varrho=\frac{m}{V}=\varrho_0\frac{S_1(h_2-h_1)}{S_2(h'_2-h'_1)}\approx\varrho_0\frac{h_2-h_1}{h'_2-h'_1}.$$

Эта методика давала хорошие результаты при работе со стандартной цилиндрической и тонкостенной пробиркой, когда можно было пренебречь различием в сечениях S_1 и S_2 и изменением площади сечения пробирки по ее длине. Однако учащимся были предложены самодельные конические толстостенные пробирки, с которыми описанная выше методика приводила к большой погрешности измерений (до 30%).

Приятно отметить, что некоторые участники олимпиады сумели найти выход из этого положения. Так, интересную методику выполнения работы с предложенным оборудованием разработали *Н. Паршин* (Пенза) и *А. Дешковский* (Барановичи). Суть этой методики сводится к одинаковому погружению в сосуд с водой пробирки, заполненной один раз только кусочками проволоки, в другой раз — только водой. В таком случае масса твердого тела равна $m=m_0=\varrho_0 S_2 l$, где l — высота налитой в пробирку воды. Для определения объема твердого тела пробирка с водой вынимается из сосуда, и в нее погружается твердое тело. По высоте Δl поднятия воды в пробирке определяется объем тела: $V=S_2\Delta l$ и его плотность:

$$\varrho=\frac{m}{V}=\varrho_0\frac{S_2 l}{S_2\Delta l}=\varrho_0\frac{l}{\Delta l}.$$

Как видно, в это выражение для плотности площадь сечения пробирки вообще не входит, что существенно уменьшает погрешность измерений.

Задание 2. *Исследуйте поведение шарика, попавшего на наклонную плоскость после его движения по желобу.*

1) Найдите зависимость дальности скатывания шарика по горизонтали от высоты наклонной плоскости. Постройте график этой зависимости.

2) Рассчитайте по полученным экспериментальным данным скорость шарика в момент, когда он после скатывания с желоба попадает на наклонную плоскость.

3) Рассчитайте эту же скорость, рассматривая движение шарика по желобу.

Сравните полученные результаты.

Оборудование: наклонная плоскость, желоб, штатив, шарик, линейка, миллиметровая бумага.

Это задание участники олимпиады выполнили, в основном, неплохо. Однако многие не учитывали вращение шарика, поэтому результаты, полученные в пунктах 2) и 3), различались на величину, бо́льшую погрешности измерений.

9 класс

Задание 1. *Определите избыточное, по отношению к атмосферному, давление воздуха в воздушном шарике.*

Оборудование: весы, разновес, воздушный шарик, нить, линейка, термометр.

Последовательное взвешивание надутого шарика ($m_1 g$), а затем его оболочки ($m_2 g$) позволяет найти разность (Δmg) между силой тяжести воздуха в шарике и архимедовой силой (F_A), действующей на надутый шарик:

$$m_1 g=(m_в+m_{об})g-F_A,\quad m_2 g=m_{об}g,$$

$$\Delta mg=m_1 g-m_2 g=m_в g-F_A=\varrho Vg-\varrho_0 Vg,$$

или

$$\Delta m=(\varrho-\varrho_0)V,$$

где ϱ и ϱ_0 — плотность воздуха в шарике и в атмосфере, V — объем надутого шарика, $m_{об}$ и $m_в$ — массы оболочки шарика и воздуха в нем. (Отметим типичную ошибку: многие считали полученное из опыта значение Δm массой воздуха в шарике. Это приводило к большой ошибке: из опыта $\Delta m\approx 0{,}3$ г, а масса воздуха в шаре объемом $V\approx 10$ л равна $m_в=\varrho_в V\approx 13$ г.)

Выражая с помощью закона Менделеева — Клапейрона плотности ϱ и ϱ_0 ($\varrho=\frac{pM}{RT}$, $\varrho_0=\frac{p_0 M}{RT}$), получаем

$$\Delta m=\frac{(p-p_0)MV}{RT},$$

откуда искомое избыточное давление воздуха в шарике равно

$$\Delta p=p-p_0=\frac{\Delta mRT}{MV}.$$

Для получения численного ответа необходимо снять показание термометра и измерить объем надутого шарика. Если бы шарик имел сферическую форму, его объем V можно было бы рассчитать по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R_0^3=\frac{4}{3}\pi\frac{l^3}{8\pi^3}=\frac{l^3}{6\pi^2},$$

где $l=2\pi R_0$ — длина окружности максимального сечения шарика, измеренная с помощью нити и линейки. Так как в действительности форма шарика не идеальная, то l можно определить как среднее арифметическое между длинами окружностей двух взаимно перпендикулярных сечений. Некоторые участники считали шарик эллипсоидом и рассчитывали объем по формуле $V=4/3\pi abc$, где a, b, c — длины полуосей эллипсоида. При заданном максимальном диаметре шарика $\approx 0{,}3$ м избыточное давление Δp было порядка $(2-3)\cdot 10^3$ Па. После окончания эксперимента этот результат подтверждался прямым экспериментом с помощью манометра (рис. 3).

Представляет интерес прямая, хотя и грубая оценка избыточного давления, предложенная участником олимпиады *М. Шмаковым* (Москва). Непосредственно ставя шарик на лист белой бумаги и нагружая его сверху грузами известной массы m, он определял площадь сечения S следа шарика на бумаге (рис. 4). Поскольку небольшой груз не вызывал сколь-нибудь существенного изменения объема шара и давления воздуха в нем, $\Delta p=mg/S$.

Дополнительные баллы давались тем, кто учитывал поправку, вносимую стопроцентной

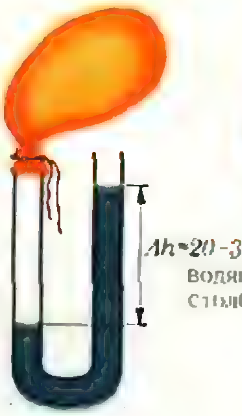


Рис. 3.

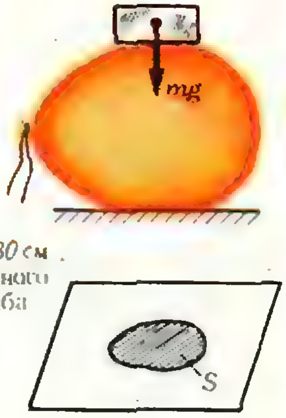


Рис. 4.

влажностью воздуха в шарике. Учет этого фактора приводит, во-первых, к правильной методике выполнения работы: взвешивание ненадутого шарика надо проводить после взвешивания надутого (в этом случае масса капелек воды, образующихся на стенках шара, вычитается) и, во-вторых, к дополнительной поправке, связанной с тем, что давление водяных паров в шарике выше, чем в окружающем воздухе (погрешность, вносимая этим фактором, могла быть сравнимой с погрешностями измерений Δm и V).

Некоторые участники пытались учесть изменение химического состава воздуха в шаре: увеличение содержания углекислого газа, азота и водяных паров.

Дополнительные баллы давались также участникам, которые по результатам опыта сделали оценку удельной поверхностной энергии σ упругой деформации резиновой пленки:

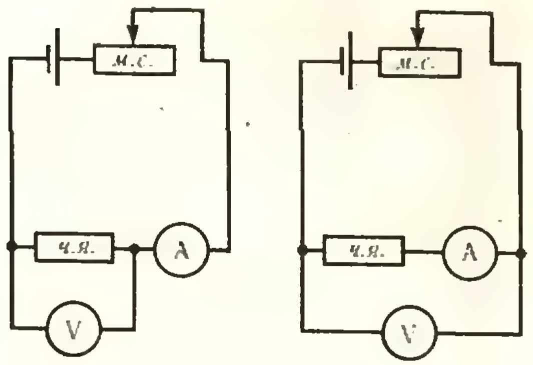
$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R_0},\quad \sigma=\frac{\Delta p R_0}{2}.$$

Задание 2. *Известно, что в коробке («черном ящике») находится нелинейный элемент, параллельно которому подключен резистор. Определите, в каких пределах может находиться сопротивление резистора.*

Оборудование: «черный ящик» (ч. я.), источник постоянного тока (батарея 3336-Л), магазин сопротивлений (м. с.), два авометра, проводники, линейка, миллиметровая бумага.

Для определения пределов сопротивления резистора необходимо снять вольтамперную характеристику «черного ящика», собрав одну из схем, изображенных на рисунках 5, *а* и *б*.

Вследствие неидеальности электроизмерительных приборов обе схемы дают определенные погрешности измерений, поэтому в полученную вольтамперную характеристику надо внести соответствующие поправки. Это можно сделать, например, графическим способом, как это предложил на олимпиаде М. Дьячков (п. Черноголовка Московской обл.). Выбрав схему по рисунку 5, *б*, он строил графики зависимости $I_1(U)$ для «черного ящика» вместе с амперметром, $I_2(U)$ для амперметра и $I(U)$ для «черного ящика» (поскольку через амперметр и «черный ящик» течет один и тот же ток, напряжение на «черном ящике» при каждом значении силы тока равно разности показания вольтметра и напряжения на амперметре). Все три характеристики представлены на рисунке 6.



а) *б)*

Рис. 5.

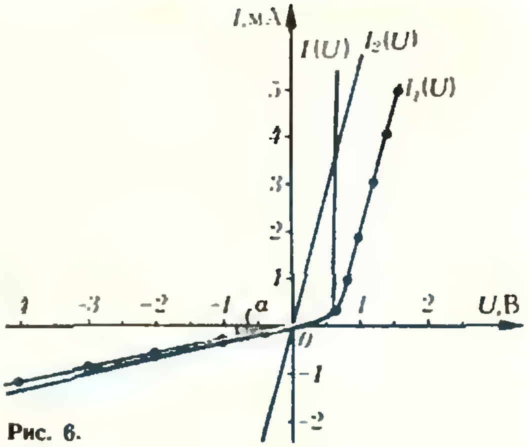


Рис. 6.

Из вольтамперной характеристики «черного ящика» следует, что, если на участке от −4 до +0,4 В нелинейный элемент вообще не проводит ток (либо этот ток очень мал), то сопротивление резистора, подключенного параллельно «черному ящику», равно

$$R=\operatorname{ctg}\alpha\approx(3{,}2\pm0{,}16)\cdot10^3\ \text{Ом}.$$

Это — нижний предел искомого сопротивления. Верхний предел определить нельзя, так как полученная вольтамперная характеристика может в принципе принадлежать и самому нелинейному элементу.

Таким образом, результат надо записать в виде

$$\infty>R\geqslant(3{,}2\pm0{,}16)\cdot10^3\ \text{Ом}.$$

10 класс

Задание 1. *Определите число витков и индуктивность катушки.*

Оборудование: источник переменного тока, катушка с сердечником, реостат (потенциометр), вольтметр переменного тока, проводники, миллиметровая бумага, циркуль, резистор с известным сопротивлением, проволока.

Определение числа витков катушки особой трудности не представляет. Намотав на замкнутый сердечник катушки максимально возможное число витков n из куска проволоки (то есть создав вторичную обмотку), нужно подключить катушку к источнику переменного напряжения и измерить напряжения на первичной (U_1) и вторичной (U_2) обмотках получившегося трансформатора. Тогда искомое число витков n_x катушки равно

$$n_x=n\frac{U_1}{U_2}.$$

Для определения индуктивности катушки надо собрать электрическую цепь, изображенную на рисунке 7, и определить напряжения U_R и U_L:

$$U_R=IR,\quad U_L=IX_L=I2\pi\nu L,$$

$$L=\frac{R}{2\pi\nu}\,\frac{U_L}{U_R}.$$

Напряжение U_R можно измерить непосредственно, а напряжение U_L можно найти из векторной диаграммы (рис. 8), предвари-

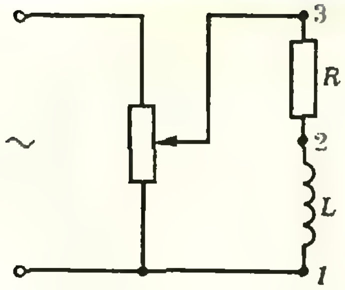


Рис. 7

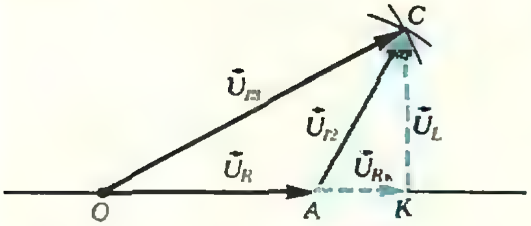


Рис. 8

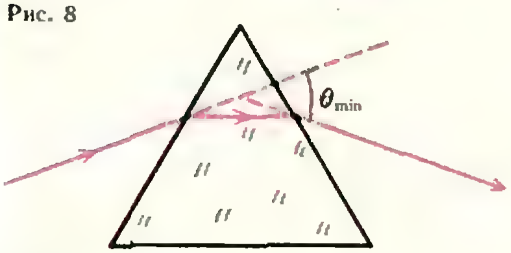


Рис. 9.

тельно измерив U_{12}, U_{23} и U_{13}. По горизонтали откладываем, в некотором масштабе, значение $U_{23}=U_R$, затем из точки O с помощью циркуля откладываем значение U_{13}, из точки A — значение U_{12} и получаем точку C. Теперь проводим векторы $\vec{U}_R$, $\vec{U}_{12}=\vec{U}_{R_K}+\vec{U}_L$, $\vec{U}_{13}=\vec{U}_R+\vec{U}_{12}$, и векторная диаграмма построена. Из этой диаграммы сразу можно определить индуктивное напряжение U_L, а следовательно, и искомую индуктивность L. Попутно легко определить и активное сопротивление катушки R_K, которым в условиях данной задачи никак нельзя было пренебрегать (как это сделали многие участники).

Задание 2. *Исследуйте оптические свойства треугольной призмы.*

1) Постройте ход лучей в призме и определите показатель преломления вещества, из которого изготовлена призма.

2) Найдите из опыта угол наименьшего отклонения θ_{min} светового луча призмой.

3) Проведите расчет показателя преломления по найденному значению угла наименьшего отклонения и преломляющему углу призмы φ, используя формулу

$$n=\frac{\sin(\varphi+\theta_{min})/2}{\sin\varphi/2}.$$

Оборудование: призма, булавки, линейка, миллиметровая бумага, циркуль, листы белой бумаги.

Это задание больших затруднений не вызвало. Однако лишь немногие участники олимпиады доказали, что наименьшее отклонение светового луча соответствует случаю, когда преломленный на первой грани луч идет параллельно основанию призмы (рис. 9). И еще одно: при определении показателя преломления для повышения точности измерения было необходимо угловые измерения заменить линейными.

Призеры XVI Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Виксна Ю. (Алуксне, с. ш. № 1),
Игнатьев К. (Москва, с. ш. № 2),
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),

по 9 классам —

Кохась К. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 10 классам —

Левин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шестаков С. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 534),
Грудманс Д. (Рига, ФМШ № 1),
Дуйсекулов М. (Аркалык, с. ш. № 6);

по 9 классам —

Бриталс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Буриченко В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Сидетов С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Семенов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черенс К. (Рига, ФМШ № 1);

по 10 классам —

Беспалов Ю. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дранко О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дубицкас А. (Таурагс, с. ш. № 1),
Зиганшин И. (Димитровград, с. ш. № 5),
Кисиль В. (Одесса, с. ш. № 33),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Николаев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Титенко В. (д. Блужа Минской обл.).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Володько А. (Минск, с. ш. № 50),
Гараев М. (Физули, с. ш. № 2),

Глуховский Л. (Москва, с. ш. № 342),
Губарев А. (Фатеж, с. ш. № 1),
Дулов Н. (Киров, с. ш. № 59),
Либлик А. (п. Нью Эстонской ССР),
Маргвелашвили Г. (Кутаиси, ФМШ),
Масляков И. (Иваново, с. ш. № 22),
Михайлюк В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Мусаелян К. (Ереван, с. ш. № 55),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Примак С. (Луцк, с. ш. № 9),
Рагуцкас Г. (Вильнюс, с. ш. № 41),
Саймер М. (Таллин, с. ш. № 21),
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24);

по 9 классам —

Байбородин О. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Биллинг Ю. (Калинин, с. ш. № 6),
Виноградов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ерошкин О. (Днепропетровск, с. ш. № 15),
Итенберг И. (Ленинград, ФМШ № 18 при ЛГУ),
Карпенко Н. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Марголин Г. (Калинковичи, с. ш. № 1),
Николаев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),
Самборский Р. (Тернополь, с. ш. № 9),
Харитонов Ф. (Николаев, с. ш. № 38),
Юровский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Васильев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Закиров А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Руденко В. (Белая Церковь, с. ш. № 16),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слуцкий Б. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Чалых О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Дешковский А. (Барановичи, с. ш. № 15),
Закревский Л. (Минск, с. ш. № 50);

по 9 классам —

Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Бруенков Е. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Молчанов В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 10 классам —

Макеев Б. (Москва, с. ш. № 361),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Булатова А. (Кокчетав, с. ш. № 1),
Воротнев П. (Ленинград, с. ш. № 443),
Кононенко Т. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6),
Писарев А. (Невинномысск, с. ш. № 11),
Чеботарь О. (Хабаровск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Бирзвалкс В. (Рига, с. ш. № 1),
Гниловский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Малышев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Стефанов М. (Москва, с. ш. № 1),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Шмаков М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Базалий Я. (Донецк, с. ш. № 17),
Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Пентегов В. (Киев, с. ш. № 145),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Цветков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Вахрушев Я. (Архангельск, с. ш. № 49),
Епифанов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ершов А. (Златоуст, с. ш. № 25),
Огнев А. (Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2),
Сайко Г. (Киев, с. ш. № 145),
Усиевич Б. (Москва, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Альтман И. (Одесса, с. ш. № 63),
Баранов Г. (Донецк, с. ш. № 17),
Буриченко А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Ефимов С. (Баку, с. ш. № 91),
Житомирский М. (Харьков, с. ш. № 27),
Ивойлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Кононов Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чернышов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Альтфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Бочко С. (Братск, с. ш. № 18),
Иващенко А. (Тольятти, с. ш. № 26),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Накас А. (Вильнюс, с. ш. № 15),
Прядко Л. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Свирида Д. (Москва, с. ш. № 179),
Шарифов Т. (Белоканский р-н АзССР, Кабагельская с. ш.).

Стандартные приемы программирования

Урок 2. Линейный поиск

Задачи поиска являются одними из наиболее распространенных: они возникают при построении трансляторов и во многих программах, больших и малых, с которыми вам придется встретиться. Если поиск ведется в файле, или если массив, в котором ищут, неупорядочен (то есть по значению элемента нельзя узнать, где он расположен), то единственный возможный вид поиска — это *линейный поиск*, при котором информация просматривается от начала к концу, элемент за элементом. Даже если массив упорядочен, но имеет малую длину, нет смысла применять что-либо сложнее,чем линейный поиск. Таким образом, все три подготовительные задачи*) к этому уроку — это задачи линейного поиска.

Почему же задачу 2 нельзя свести к задаче 1, просматривая массив с конца? Дело в том, что имеются случаи, когда расположение конца заранее не известно или к нему нет доступа. Например, когда поиск ведется в массиве неизвестной нам длины, конец которого определяется по специальному значению (скажем, по пробелу); или ищем в файле, который может просматриваться только от начала к концу; или значения интересующих нас элементов поступают по одному (как в Задании 2.1) и обрабатываются без запоминания.

Все приведенные решения правильны, однако решения *а*) выполнены в строгом соответствии с современной теорией структурного программирования (именно так вас учили в Заочной школе), в то время как решения *б*) используют оператор goto*), который современной теорией к широкому употреблению не рекомендуется (поэтому на первых этапах о нем даже не упоминалось).

Характерной особенностью задач поиска является то, что имеется две причины для завершения поиска: нужный элемент нашелся или кончился массив. Соответственно, в программах имеется два условия окончания цикла: $i>n$ (не нашли) или нашли нужный элемент. При этом в вариантах *а*) оба условия располагаются в заголовке цикла, а в вари-

---

*) См. Урок 1, «Квант» № 10.

*) В решении *б*) используется оператор goto *m*, где *m* — натуральное число, и конструкция *m*: оператор. *m* в таком контексте называется *меткой* оператора. Оператор goto заставляет ЭВМ продолжить выполнение программы с оператора, перед которым стоит метка *m*.

Решения

Во всех решениях: *x* — заданное значение, *k* — искомый индекс

а) **Задача 1** (первый подходящий)

```
i:=1; k:=0;
while (i<=n) AND (k=0) do
begin
  if a[i]=x then k:=i;
  i:=i+1
end;
```

б)

```
for k:=1 to n do
  if a[k]=x then goto 7;
k:=0;
7:...
```

а) **Задача 2** (последний подходящий)

б)

```
k:=0;
for i:=1 to n do
  if a[i]=x then k:=i;
```

а) **Задача 3** (*m*-й подходящий)

```
k:=0; i:=1; j:=0;
while (i<=n) AND (k=0) do
begin if a[i]=x then
      begin j:=j+1;
         if j=m then k:=i
       end;

    i:=i+1
 end;
```

б)

```
j:=0;
for k:=1 to n do
if a[k]=x then
   begin j:=j+1;
     if j=m then goto 7;
   end;
k:=0;
7:...
```

анте *б*) в заготовке цикла располагается только первое условие, а для выхода из цикла при обнаружении нужного элемента используется goto.

Для программ в задачах поиска характерно «аварийное» присваивание $k := 0$, которое необходимо в случае, когда нужного элемента в массиве нет.

Какой же вариант лучше — *а*) или *б*)? Программы *а*) состоят только из циклов и ветвлений (условных операторов), каждый цикл и каждое ветвление имеет один вход и один выход, поэтому построенные таким способом программы более удобны для исследования их свойств. Но варианты *б*) имеют более короткий текст, меньше операторов и переменных и меньше операций на каждом шаге (быстрее выполняются).

Задачи поиска, где необходим досрочный выход из цикла, представляют собой один из очень немногих случаев, когда применение оператора goto оправдано (для выхода из цикла).

Контрольное задание

2.1. Решить рассмотренные выше задачи 1—3 для случая поиска в файле.

2.2. За один просмотр массива найти номера первого и последнего элемента, равного заданному. (При их отсутствии получить нули.)

2.3. Даны основной массив и массив из n целых чисел, такой что $n[i] < n[i+1]$. За один просмотр основного массива выписать в третий массив индексы $n[1]$-го, $n[2]$-го и т. д. элементов со значением x.

Подготовительные задачи к уроку 3*)

1. Дано 2 массива длины n с элементами a_i и b_i. Пересчитать их по формулам: $a_i' := \frac{a_i + b_i}{2}$, $b_i' := \sqrt{a_i b_i}$, то есть в массив a поместить среднее арифметическое соответствующих элементов, а в массив b — среднее геометрическое.

2. Дана таблица чисел a_{ij} размером $n \times n$. Поделить все элементы каждой строки таблицы на диагональный элемент этой строки: $a_{ij}' := \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$. Результат записать в ту же таблицу.

3. Дана квадратная таблица размером $n \times n$. Пересчитать ее значения по формуле $a_{ij}' := a_{ji}$, то есть симметрично перевернуть ее относительно диагонали, записав результат в ту же таблицу.

(Такие таблицы математики называют *матрицами*, а симметричный переворот относительно диагонали называется *транспортированием*.)

После решения задач внимательно сравните условия и решения всех задач и (так же, как в прошлом уроке) попробуйте ответить на вопросы:

а) что общего в условиях этих задач?

б) что общего в решениях этих задач?

Л. Штернберг

---

*) Решения этих задач присылать не нужно!

Ответы, указания, решения

Формулы и графики

1. Возможные варианты ответов:

А — $y = (x+1)^2(1-x)(x-2)^2$.

Б — $y = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.

В — $y = \dfrac{1}{(x+1)^2 x(x-1)}$.

2. А — 6, Б — 4, В — 8, Г — 23, Д — 25, Е — 2, Ж — 15, З — 20, И — 13.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (Е. Геллер — А. Карпов. Москва, 1976., первенство СССР, высшая лига). Положение интересно тем, что эффектная комбинация белых вынуждена. В противном случае разменяваются ферзи, и черные остаются с большим материальным перевесом. **25.Ф:е6!! fe 26. Кfg6+ Ф:g6 27. К:g6+ Кре8 28. К:h8.** Комбинация закончилась успешно для белых. Отчаянные попытки чемпиона мира спастись не удаются. **28...Ла4 29. Лd1 Ке7 30. С:е7 Кр:е7 31. Кg6+ Крf7 32. Кf4 С:е5 33. de Л:f4 34. Лс1! Кре8 35. с6 Крd8 36. с7+ Крс8 37. g3 Ла4. 38. Лс6 Ла2 39. Л:е6 g5 40. Лd6 Лd2 41. е6 Кр:с7 42. е7. Черные сдались.**

Задание 16 (т. Петросян — А. Карпов. Московский международный турнир «звезд», 1981 г.) Оказывается, в случае 34...**g4** 35. Л:d5 **gf** у белых есть сильный промежуточный ход 36. **g4!**, и после 36...ed 37. **gf** черным нужно побеспокоиться, чтобы сделать ничью. Впрочем, тем же результатом закончилось дело и в партии: **34...Л:d4 35. Ф:d4 Фс2 36. hg Сd3. Ничья.**

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. 12. На одной стороне листа было 7, а на другой — 5 кружочков, и воспитательница листок перевернула.

2. Ход лучей света показан на рисунке 1. Ложка закрывает часть лучей, падающих к одному краю чашки, и часть лучей, отражающихся от противоположного ее края. Поэтому на зайчике возникнут две тени — сверху и снизу, как на рисунке 2. По мере приближения ложки к поверхности чая эти тени будут расти и, наконец, сольются.

3. Наибольшее произведение дают числа 96420 и 87531, а наименьшее — числа 10468 и 23579.

4. Способы разрезания арбузов изображены на рисунке 3. У первого арбуза центральный кусок имеет две корки, а у второго уже две части будут иметь по две корки. Третий арбуз

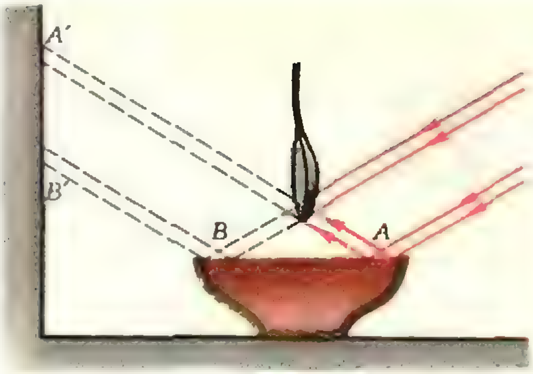


Рис. 1.

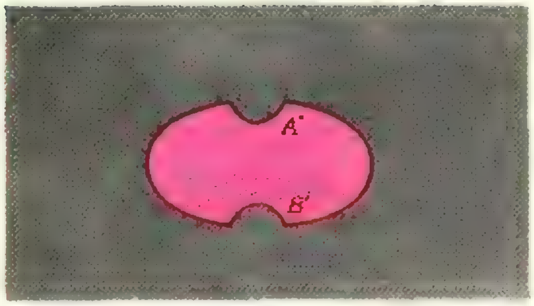


Рис. 2.

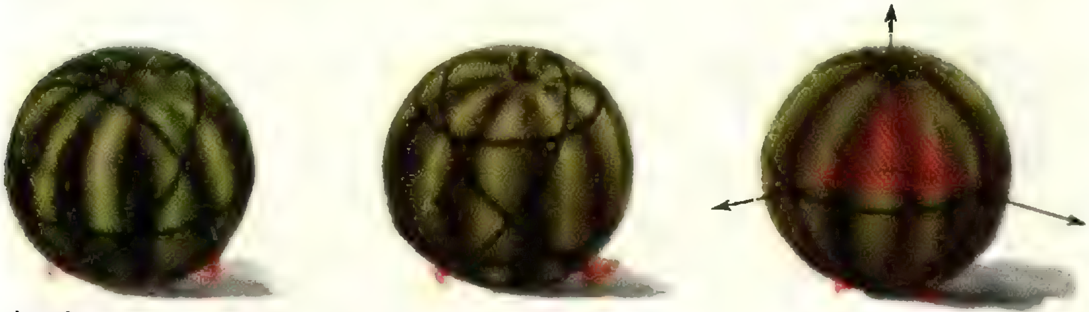


Рис. 3.

сначала разрезали по трем взаимно-перпендикулярным плоскостям, проходящим через его центр — получилось 8 кусков; затем сделали четвертый, косой разрез, который все эти куски, кроме «заднего», разделил на два — получилось 15 кусков, однако один из них (а именно центральный — самая сладкая часть мякоти передней «восьмушки») не имеет корки. От этого арбуза осталось 14 корок. Возможны и другие варианты разрезания.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев.

Номер оформили:
Б. Галкин, Л. Денисенко, М. Дубах,
Н. Кузьмина, Э. Назаров, А. Пермин, Е. Темчурина

Заведующая редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова
Корректор М. Медведская

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 251-82-42

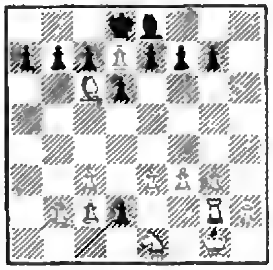
Сдано в набор 17.9.82. Подписано в печать 3.11.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,15 Т-20908
Цена 40 коп. Заказ 2378 Тираж 175 067 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку кандидат технических наук, мастер спорта СССР по шахматам Е. Гик.

ПУТЕШЕСТВИЕ В ПРОШЛОЕ

В «Кванте», 1982, № 5 мы уже познакомились с интересным жанром шахматной композиции — ретроанализом. Для решения ретрозадач требуется восстановить предысторию позиции, рассуждения часто носят не столько шахматный, сколько логический характер, и поэтому, думаем, читателям «Кванта» будет интересно время от времени возвращаться к жанру ретрозадач.



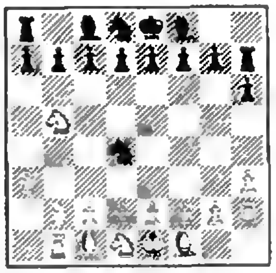
Н. Плаксин, 1981 г.
Мат в 1 ход

Решение очевидно — deФ×. Осталось только выяснить, кто именно матует — белые (d7:e8Ф×) или черные (d2:e1Ф×). Предположим, что белые. Тогда последний ход черных был или Крс8—d8, или d3—d2. В случае Крс8—d8 белые предыдущим ходом давали шах — e6:d7+. Как же пешка a2 попала на поле e6? Проверим баланс черных фигур. Десять из них находятся на доске. Одну черную фигуру взяла пешка c2—d2:c3, а пять взяла пешка a2, пройдя по диагонали. Наконец, черный чернопольный слон погиб на поле f8, так как черные пешки g7 и e7 занимают исходные места. Итого 10+1+5+1=17... Дебаланс! В начале партии у каждой стороны имеется только по 16 боевых единиц. Итак, ретроанализ отвергает возможность последнего хода черных Крс8—d8.

Но почему черные не могли пойти пешкой d3—d2? Ведь баланс белых фигур сходится — двенадцать белых фигур на доске и четыре взяла черная пешка по дороге с h7 на d3. Какие же фигуры взяла черная пешка? Разумеется, те, которые отсутствуют: ферзя, ладью, коня и слона. Однако слоны в шахматах разноцветные, и чернопольный слон не мог быть взят на белопольной диагонали. Итак, эффект цветности отвергает и ход черных d3—d2.

Значит, последними ходили белые, а мат объявляют черные — **d2:e1Ф×**.

Одна из интереснейших ретротем носит название «чет-нечет». О ней гроссмейстер по шахматной композиции В. Корольков сказал: «В условном мире ретроанализа имеется немало широких дорог, по которым можно совершать волнующие путешествия в прошлое. Но если вы захотите прогуляться вдали от шумных путей, то идите по неширокой лесной тропинке, в начале которой прочтете таинственную надпись: «чет — нечет»



В. Корольков, 1960 г.
Играющий взяяся за коня d4, какой ход он сделает?

Как будто сомнений нет — черные объявляют мат — Кd4:c2×. Однако не будем спешить с ответом. Выясним сначала, чей ход в этой позиции.

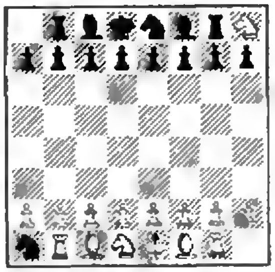
Обратим внимание на одну особенность шахматной партии. Пусть, скажем, сыграно 1. e2—e4 e7—e5. Каждая из сторон сделала нечетное число ходов — по одному (нечет), и ход белых. После 2. Кg1—f3 у белых четное число ходов (чет), а у черных нечетное (нечет), ход черных. Закон прост: при совпадении четностей ходят белые, при несовпадении — черные.

С этой математической точки зрения и подойдем к анализу нашей позиции. Посмотрим на белые фигуры. В распоряжении каждой из ладей было лишь три поля, они могли сделать только по нечетному числу ходов. Итак, ладья b1 нечет, ладья h2 тоже нечет. Слоны и ферзь не двигались с места (ферзь был взят черным конем) — чет. Король e1 чет (0, 2, 4 и т. д.). Крайние пешки продвинулись на одно поле вперед, каждая из них нечет.

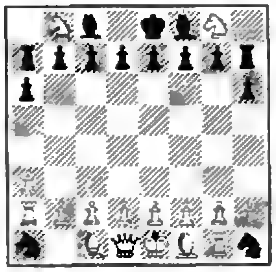
Осталось разобраться с белыми конями. В начале игры они стоят на полях одного цвета, причем каждым ходом конь меняет цвет «стоянки». Значит, при расположении коней на полях разного цвета (как в исходном положении) в общей сложности ими сделано четное число ходов, а на полях одинакового цвета — нечетное. В данном случае оба коня занимают белые поля, и мы имеем нечет. В сумме для белых получаем нечет.

Проделав аналогичный расчет для черных фигур, также получаем нечет. Поскольку белые взялись за коня d4, то они должны сделать ход **Кb5:d4.**

Конкурсные задания



21. Мат в 1 ход.



22. Играющий держится за белую фигуру. Какой ход делается?

Срок отправки решений — 25 января 1983 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

XVI ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ
(Баку, апрель 1982 г.). Идет эксперимент...

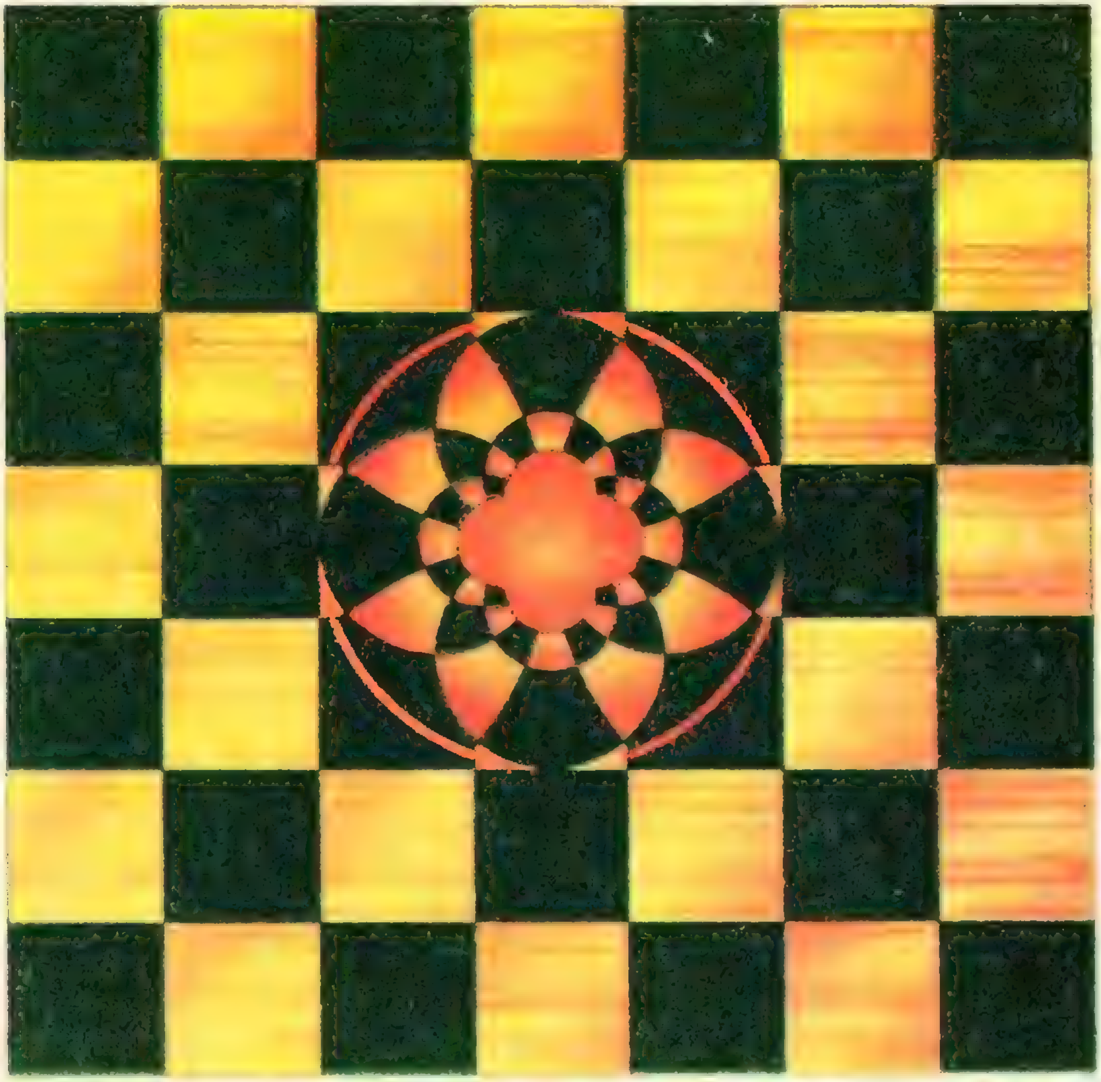
Фото Г. Мирзаханова

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этом рисунке наш художник сумел вывернуть шахматную доску наизнанку. Для этого он воспользовался преобразованием инверсии относительно красной окружности. (*Инверсия* относительно окружности $(O; R)$ — это преобразование плоскости, переводящее точку $M \neq O$ в точку M' на луче OM, удовлетворяющую соотношению $|OM| \cdot |OM'| = R^2$. Подробнее об этом замечательном преобразовании можно прочитать в «Кванте», 1977, № 6, с. 38.)

Внимательный читатель заметит, что изображенная здесь шахматная доска состоит из 49 полей (вместо 64) — при этом получается конфигурация, имеющая больше осей симметрии.



НОМЕР
12

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Основан в 1970 году

КВАНТ

12

1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

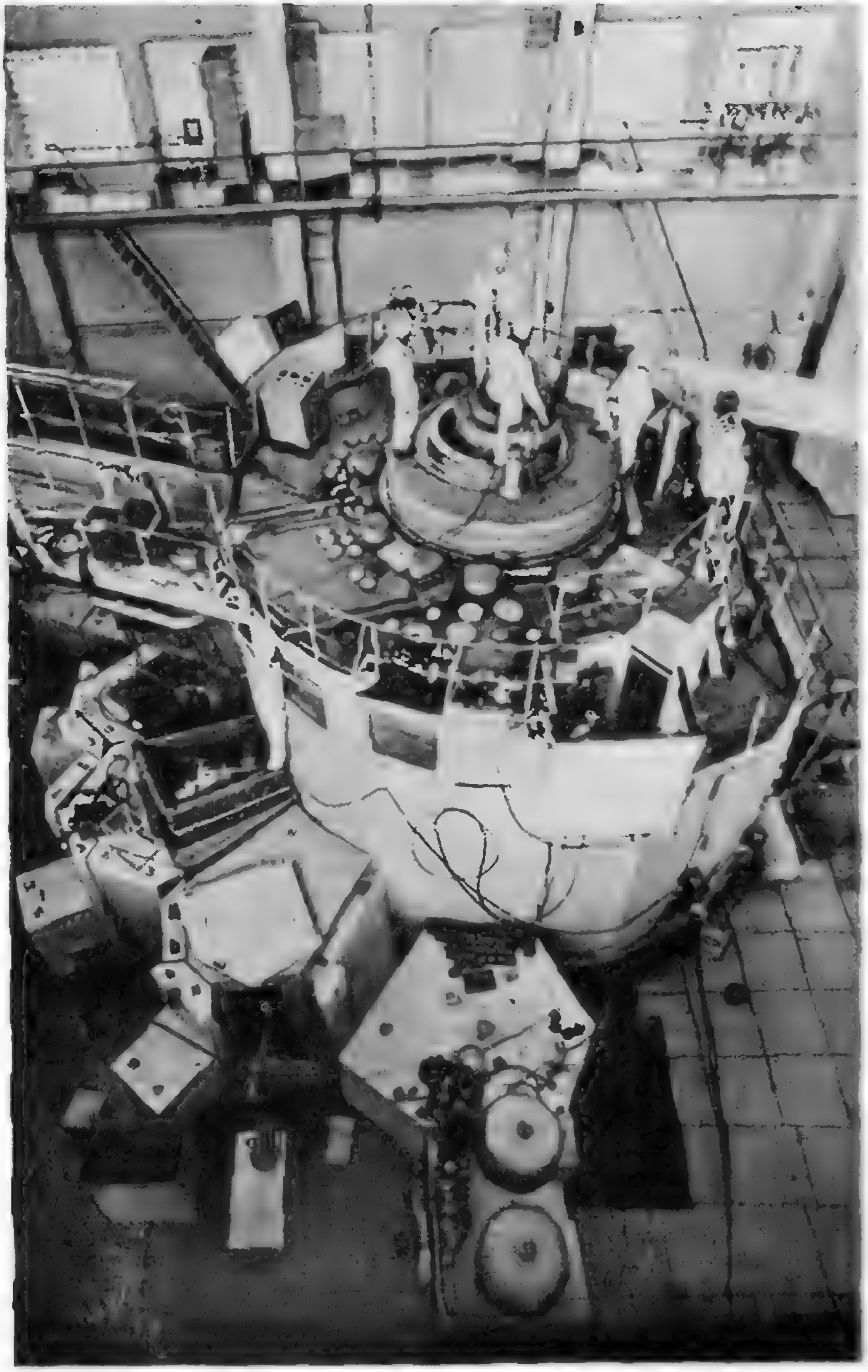
В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

И. Кикоин. Физика в Союзе Советских Социалистических Республик	3	*I. Kikoin.* Physics in the Union of Soviet Socialist Republics
А. Александров. Тупость и гений	7	*A. Alexandrov.* Dimwitedness and genius
Е. Забабахин. Маленькие заметки	13	*E. Zababakhin.* Brief remarks
А. Баков. Разбиение фигур	16	*A. Bakov.* Partitioning figures
Задачник «Кванта»		**Kvant's problems**
Задачи М776 — М780; Ф788 — Ф792	18	Problems M776 — M780; P788 — P792
Решения задач М750 — М758; Ф768 — Ф777	21	Solutions M750 — M758; P768 — P777
Список читателей, приславших правильные решения	32	List of readers who have sent correct solutions
«Квант» для младших школьников		**Kvant for younger school-children**
Задачи	33	Problems
А. Панов Загадка фигуры № 51	34	*A. Panov.* The mystery of figure № 51
Практикум абитуриента		**College applicant's section**
Л Баканина. Законы Ньютона	38	*L. Bakanina.* Newton's laws
Искусство программирования		**The art of programming**
Стандартные приемы программирования. Урок 3	42	Standart programming methods Lesson 3
Рецензии, библиография		**Book reviews**
Л. Владимирова. Новые книги	44	*L. Vladimirova.* New books
Ю. Брук. Задачи Новосибирской ФМШ	45	*Yu. Bruk.* Novosibirsk PMS problems
Информация		**Information**
А. Абрамов, А. Савин. XXIII Международная математическая олимпиада	46	*A. Abramov, A. Savin.* XXIII International mathematics olympiad
Л. Асламазов. XIII Международная физическая олимпиада	49	*L. Aslamazov.* XIII International physics olympiad
Заочная физико-техническая школа	53	Physico-technological correspondence school
Напечатано в 1982 году	56	Published in 1982
Ответы, указания, решения	59	**Answers, hints, solutions**
Шахматная страничка		**The chess page**
Новогодние сюрпризы *(3-я с. обложки)*		New year surprise *(3rd cover page)*

На первой странице обложки помещена фотография потока плазмы, распространяющегося вдоль линий магнитного поля в термоядерной установке «Огра 4» (Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова). Плазма видна благодаря свечению специально добавленного газа, возбужденного потоком.

Фото Ф. Кузьмина. Фотохроника ТАСС

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1982



Атомный реактор Института физики высоких энергий Академии наук Казахской ССР.

СССР
60
ЛЕТ

И. Кикоин

Физика в Союзе Советских Социалистических Республик

До Великой Октябрьской социалистической революции в России были отдельные выдающиеся физики и астрономы, такие как А. Г. Столетов, П. Н. Яблочков, А. С. Попов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский, А. А. Белопольский, А. Ф. Иоффе. Но это были физики-одиночки, и работали они, в основном, в обеих столицах — Москве и Петербурге.

В первые же годы Советской власти по инициативе и указаниям В. И. Ленина в нашей стране стала бурно развиваться наука, в том числе и физика. Был создан ряд научных институтов: Государственный оптический институт (ГОИ) под руководством Д. С. Рождественского и Физико-технический институт (ЛФТИ) под руководством А. Ф. Иоффе — в Ленинграде, Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) под руководством Н. Е. Жуковского — в Москве и некоторые другие. Но эти институты по-прежнему были сосредоточены в столицах.

Вскоре после образования Союза Советских Социалистических Республик во исполнение указаний В. И. Ленина Коммунистическая партия и Советское правительство стали принимать меры по развитию науки в союзных республиках.

Уже на моей памяти во второй половине двадцатых годов из научного состава ЛФТИ директор института академик А. Ф. Иоффе выделил группу молодых талантливых физиков для организации Украинского физико-технического института (УФТИ) в Харькове (тогдашней столице УССР). Это был один из первых крупных физических институтов на Украине. Институт этот вскоре стал знаменит тем, что в нем была единственная в то время в стране лаборатория низких температур с установкой для получения жидкого гелия. (По-видимому, это была вторая в мире, после Лейденской лаборатории в Голландии, криогенная лаборатория.) Ныне УФТИ — известный во всем мире физический институт. Вслед за ним был организован физико-технический институт в Днепропетровске.

Вскоре из того же ЛФТИ была выделена группа физиков, составившая ядро Уральского физико-технического института в Свердловске (ныне — Институт физики металлов). Почти одновременно таким же путем был создан физико-технический институт в Томске.

В наши дни физические науки, как, впрочем, и другие, получили широкое развитие во всех союзных республиках. Важным шагом на пути этого развития было создание республиканских Академий наук. Трудно в небольшой статье рассказать о научных достижениях в области физики во всех пятнадцати республиках. Поэтому я познакомлю читателя с успехами и достижениями лишь тех физических центров страны, в которых мне самому приходилось работать или с которыми я имею непосредственные научные контакты.

В 1938 году мне довелось работать в криогенной лаборатории Украинского физико-технического института (в Харькове), которая была известна своими экспериментальными исследованиями в области сверхпроводимости. В других лабораториях института широким фронтом были развернуты работы по физике атомного ядра. Особое внимание уделялось исследованиям взаимодействия тогда еще недавно открытых нейтронов с веществом. Результаты этих исследований в дальнейшем имели большое значение при создании промышленных ядерных реакторов для атомных электростанций. В настоящее время в УФТИ ведутся важные исследования как в области физики низких температур и создания новых конструкционных материалов, так и в области управляемого термоядерного синтеза.

В столице Латвийской ССР Риге создан превосходный физический институт, в котором имеется исследовательский ядерный реактор, используемый как мощный источник нейтронов.

Любой ядерный реактор служит не только источником энергии, но и сравнительно мощным источником нейтронов. Исследовательские реакторы используются для изучения широкого круга физико-химических процессов. Сооружение таких реакторов требует значительных средств, и эксплуатировать их может только высококвалифицированный персонал.

Известно, что многие вещества при облучении их нейтронами заметно изменяют свои физические и химические свойства. На реакторе Института физики в Риге ученые исследуют изменения строения ряда диэлектрических кристаллов, приводящие к изменению их оптических свойств. Эти исследования имеют не только научное значение, но и практическое применение при решении ряда технических задач. Так, в последнее время на реакторе изучалось влияние нейтронного облучения на вещества, которые предполагают использовать в строительстве промышленных атомных реакторов.

Под действием нейтронного облучения молекулы некоторых химических соединений диссоциируют (распадаются) с большей или меньшей скоростью. Поиск соединений, достаточно устойчивых к нейтронному облучению,— важная задача. Изучение ряда химических соединений в этом направлении проводится на исследовательском реакторе Института ядерной физики в столице Узбекской ССР Ташкенте. Опыты, проведенные узбекскими учеными совместно с учеными Института атомной энергии им. И. В. Курчатова на Ташкентском исследовательском реакторе, позволили выбрать пригодные для применения в технике химические соединения, молекулы которых достаточно устойчивы к нейтронному облучению.

Самое важное свойство нейтронов заключается в том, что они способны проникать в ядро атома и изменять его состав; при этом образуется либо ядро другого химического элемента, либо ядро радиоактивного изотопа облучаемого элемента. Классическим примером подобного ядерного превращения служит лежащий в основе всей ядерной техники процесс образования новых химических элементов при облучении нейтронами урана. Радиоактивные изотопы находят широкое применение в медицине, технике, сельском хозяйстве. На Ташкентском реакторе физики Узбекистана получают радиоактивные изотопы ряда элементов.

Важная научная и практическая работа ведется на исследовательском реакторе Института ядерной физики в столице Казахской ССР Алма-Ате.

Нейтроны могут нести и еще одну важную «службу». Они бывают незаменимы для анализа химического состава вещества, при определении содержания в веществе того или иного элемента; особенно, когда количество этого элемента в веществе настолько мало, что методами химического анализа обнаружить его присутствие невозможно. Примером может служить анализ горных пород на содержание в них редких, а потому и дорогих, элементов. Здесь приходят на помощь нейтроны. Как мы уже говорили, проникновение нейтронов в ядра атомов элемента приводит к образованию либо нового, обычно радиоактивного, элемента, либо радиоактивного изотопа исходного элемента. Радиоактивные элементы испускают, в основном, γ-кванты или быстрые электроны (β-частицы). Современные приборы позволяют регистрировать каждый отдельный γ-квант и каждый электрон и измерять их энергию. Энергия испускаемого кванта или электрона — величина, характерная для ядра данного элемента. Поэтому, облучив анализируемый образец горной породы нейтронами и сосчитав за определенное время число γ-квантов

Большой зеркальный телескоп Ленинградского оптико-механического объединения, установленный в Бюраканской астрофизической обсерватории Академии наук Армянской ССР.

или β-частиц с энергией, соответствующей ядру какого-либо элемента, можно определить количество данного элемента в образце, даже если оно очень мало. Этот метод анализа химического состава вещества называется активационным анализом.

Такой анализ можно провести на любом исследовательском реакторе, но в Институте ядерной физики в Алма-Ате этот метод развит особенно хорошо. Результаты, полученные учеными института, имеют очень важное значение при поисках месторождений редких металлов.

В этом же институте имеется циклотрон — установка не менее дорогостоящая, чем исследовательский реактор.

Циклотрон, как известно, применяется для ускорения заряженных частиц, в частности — α-частиц. Облучая α-частицами какой-либо легкий металл, например бериллий, можно получать пучки нейтронов. Правда, количество нейтронов в этом случае заметно меньше, чем получаемое от ядерного реактора, но зато, используя циклотрон, можно с большой точностью регулировать энергию ускоряемых α-частиц и соответственно энергию «выбиваемых» ими нейтронов. Для ряда исследований это преимущество неоценимо.

Советское государство уделяет большое внимание оснащению научных учреждений союзных республик мощными современными исследовательскими средствами. Так, в столице Армянской ССР Ереване сооружен один из самых мощных в мире циклический ускоритель электронов. Это — грандиозное сооружение, в котором кинетическая энергия электронов достигает $6 \cdot 10^9$ электронвольт (такую энергию получил бы электрон в электрическом поле при напряжении $6 \cdot 10^9$ В). В Армянской же ССР, в Бюракане, находится известная во всем мире астрофизическая обсерватория, оснащенная самым современным научным оборудованием.

За последние десятилетия большое развитие физические науки получили в Белорусской ССР. В состав Академии наук БССР входит ряд крупных физических институтов, ведущих важные работы в области оптики. В Институте физики АН БССР проводятся широкие исследования по физике и технике лазеров. Важное научное и техническое значение имеют исследования белорусских

Лазер на красителях «Радуга-6», разработанный в Институте физики Академии наук Белорусской ССР.

физиков в области спектроскопии. Недалеко от столицы республики Минска сооружен исследовательский ядерный реактор. Одно из важных направлений работ на этом реакторе — исследование возможности при помощи облучения нейтронами улучшать физические и химические свойства ряда материалов, применяемых в промышленности.

Мне довелось побывать в столице Грузинской ССР Тбилиси и ознакомиться с работой некоторых из имеющихся там научных физических учреждений. На физическом факультете Тбилисского государственного университета и в других научных учреждениях города проводятся широкие исследования по физике и технике полупроводников, по радиоэлектронике. В Институте физики, где имеются исследовательский реактор и крупная криогенная установка, изучаются весьма интересные явления, связанные с воздействием нейтронов на физические свойства веществ при низких температурах. Эти исследования позволили в значительной степени прояснить физическую природу изменения свойств материалов, подвергающихся облучению нейтронами. В том же институте изучаются уникальные свойства так называемого сверхтекучего He-II. Дело в том, что жидкий гелий, будучи охлажден до температуры 2,17 К, скачком переходит в новое состояние, в котором его вязкость становится равной нулю (жидкость течет без трения). Вследствие отсутствия вязкости движение жидкого гелия имеет весьма интересные особенности. Они-то и стали предметом изучения грузинских физиков.

Я не имею возможности сколь-нибудь подробно остановиться на состоянии физических наук в самой большой из союзных республик — РСФСР. Достаточно сказать, что крупные научные физические центры расположены по всей огромной территории республики от Калининграда до Владивостока. Со многими из них мне приходилось и приходится сотрудничать. Даже простое перечисление названий важнейших физических учреждений РСФСР заняло бы слишком много места. В столице РСФСР находится и главный штаб советской науки — Академия наук СССР, которую возглавляет выдающийся советский физик академик А. П. Александров.

Необходимо отметить большие заслуги советских физиков в решении важнейших задач, стоявших перед страной. Так, во время Великой Отечественной войны они внесли огромный вклад в усовершенствование существовавшей боевой техники и создание новых ее видов.

Автору этих строк вместе с другими физиками, учеными и инженерами многих специальностей посчастливилось стоять у колыбели атомной техники, создававшейся в нашей стране. На моих глазах физические идеи, лежащие в основе этой техники, получили промышленное воплощение. Сейчас Советский Союз — одна из ведущих держав в этой области. В ряде отраслей атомной техники наша страна опережает наиболее промышленно развитые капиталистические страны. Хорошо известно, что первая атомная электростанция была сооружена в Советском Союзе. Советские атомные ледоколы не имеют себе равных в мире.

Шестидесятилетие образования Союза Советских Социалистических Республик советская физика встречает новыми успехами как в области фундаментальных исследований, так и в их приложении в различных отраслях народного хозяйства. Тем самым физики всех союзных республик выполняют исторические предначертания Коммунистической партии Советского Союза.

А. Александров

Тупость и гений

Оглянемся теперь на историю пятого постулата Евклида. Лобачевский сказал о ней: «Напрасные старанья... в продолжение двух тысяч лет». Но какие старанья! Множество математиков расточает их, и каких математиков! Среди них знаменитейшие имена: попытки открываются, возможно, Архимедом, проходят через Омара Хайяма и подходят к завершению с Гауссом.

Попытки доказать пятый постулат были, как мы выяснили раньше, совершенно естественными. Но 2000 лет никто не догадывался, что доказательство невозможно. Никто не мог подумать, что возможна какая-то геометрия, отличная от привычной евклидовой. Ее неразрывная связь с нашим пространственным опытом и наглядным представлением, ее логическое совершенство и прозрачность, вековые традиции ее изучения и, можно сказать, исповедания — все это делало геометрию Евклида непререкаемой, как бы абсолютно необходимой, присущей и миру, и разуму. Ее происхождение из практики затмевалось совершенством и ясностью ее логики. И дошло, наконец, до того, что в 1781 г. великий философ Кант в своей «Критике чистого разума» счел геометрию априорной — независимой от опыта — и основал на этом вывод об априорности самого пространства, которое для него — не форма, присущая миру, а только форма нашего восприятия, форма «наглядного созерцания».

Гений

Но как раз в это же время из попыток доказать пятый постулат стали пробиваться первые проблески сомнений. Уже в 1766 году у Ламберта брезжит мысль, что отрицание пятого постулата «имеет место на какой-то мнимой сфере», что, может быть, странные выводы, к которым приводит это отрицание,— не бессмыслица. Напряжение нарастает. Кантовское «априори» распространяется в умах, особенно после второго издания его «Критики» в 1787 г.

Но труд Ламберта выходит в 1786 г. Затем, из столь же упорных, как и безуспешных попыток доказать пятый постулат, в первой четверти XIX века прорастает наконец общая мысль о том, что, возможно, мыслима геометрия, отличная от евклидовой. Почти одновременно, хотя и с разной степенью определенности и ясности, эта идея появляется у нескольких человек — у Швейкарта, Тауринуса, Гаусса, Лобачевского и Больяи.

Дойти до мысли, опровергающей привычное, может быть само по себе гениальным. Но это еще не наука, а только идея. Наука же требует претворения идеи в теории, как инженерия — претворения идеи в предмете, в осуществленном изобретении.

Гений — не только полет мысли, но также ее упорство — труд, приподнятый вдохновением, и вдохновение, подкрепленное трудом. Так, Коперник не только выразил мысль, что не Земля, а Солнце — в центре (мысль, кстати сказать, не новую: ее выразил еще в III в. до н. э. Аристарх Самосский), но и построил «систему Коперника» — дал точное описание движения планет вокруг Солнца, согласное с наблюдениями. Точно так же Лобачевский не только выразил убеждение в возможности неевклидовой геометрии, но и построил эту геометрию. И как от Коперника пошло новое развитие аст-

---

Окончание. Начало — в предыдущем номере.

рономии, дошедшее до современного взгляда на Вселенную с множеством «миров» — планетных систем, галактик и пр., так от Лобачевского пошло новое развитие геометрии, приведшее к созданию множества разнообразных «геометрий», самых разных геометрических теорий «воображаемых» пространств — топологических, римановых, финслеровых, расслоенных... — «им же несть числа». Недаром, когда в 60—70 гг. прошлого века начал во всю силу разворачиваться этот пошедший с Лобачевского процесс преобразования геометрии, Лобачевский был назван «Коперником геометрии». Нельзя, конечно, забывать, что новую геометрию развил и обнародовал также Больяи, но преимущество отдается Лобачевскому, потому что он сделал это раньше и потом еще существенно продолжил свои исследования и публикации.

Лобачевский утверждался в мысли о недоказуемости пятого постулата и о возможности неевклидовой геометрии, исходя из философских, теоретико-познавательных убеждений. Это выражено уже в приведенных ранее (в первой части статьи) его словах из предисловия к «Новым началам геометрии...». «Истина, которую хотели доказывать», то есть пятый постулат, не заключается «в самих понятиях», а в применении к реальному пространству и подлежит проверке опытом, как физический закон. Этим отрицается кантовское «априори»: геометрия не независима от опыта, а подлежит проверке опытом*). В других сочинениях Лобачевский явно возражал против кантианства в общей форме, когда писал, например, что «понятия приобретаются опытом... врожденным не должно верить».

Кстати, это стоит заметить научным снобам, полагающим будто ни им, ни науке вообще не нужно философское мышление. Все великие ученые от Ньютона и Галилея, если говорить лишь о новом времени, были философскими мыслителями. Без философии наука не развивается: проложение новых ее путей, когда они не оформились, и есть философское движение мысли. Вопрос только в том — какая это философия, связывается ли она с точной логикой и фактами опыта или с пребывающими в безвоздушном пространстве общими фразами априорности и чистого спекулятивного мышления. Галилей, Ньютон, Лобачевский не только высказывали философские суждения, но и, отправляясь от общих убеждений, строили здания научных теорий — прочные основания целых обширных областей науки.

Появление неевклидовой геометрии было началом революционного преобразования геометрии. Но так же, что характерно для революции, вместе с назреванием ее сил, росла и реакция. Именно тогда, когда открытие новой геометрии уже приближалось, появилась философия Канта с ее учением об априорности геометрии, о пространстве как априорной форме созерцания. Любая другая геометрия, кроме той, которая присуща этой форме созерцания, казалась немыслимой.

Лобачевский явно выступает против этих воззрений. Появление новой геометрии опровергает их и открывает неведомые, немыслимые раньше пути развития науки — революция совершается. Гений — это революция, революция — это гений в действии.

Тупость

Как история пятого постулата и неевклидовой геометрии демонстрирует человеческий гений, так демонстрирует она и неповоротливость ума, если избегать грубого слова «тупость».

Начать с того, что множество попыток доказать пятый постулат было основано на ошибках. Авторам этих доказательств только казалось, что они нашли доказательство. Так было даже в начале XIX века. Только немногие понимали, что опираются на дополнительные предположения, равносильные пятому постулату, и явно их формулировали. Ошибки были психологически обусловлены тем, что автору очень хотелось пятый постулат доказать, отказ от него был невообразимым, а положение, принятое открыто, на которое автор опирался, казалось само собою очевидным и ускользало от того, чтобы его явно формулировать.

---

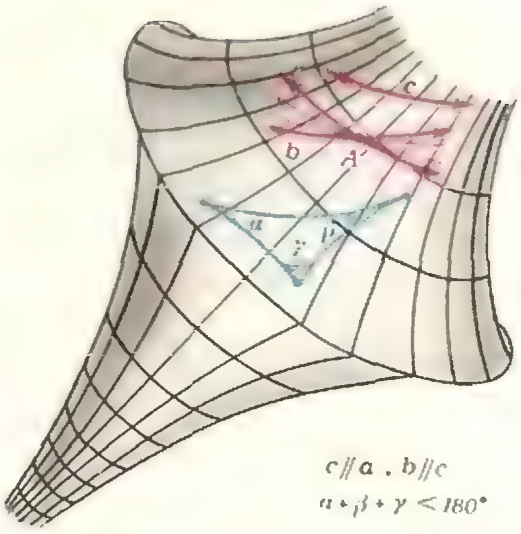
*) Собственно говоря, слово «геометрия» должно пониматься двояко: как чисто математическая теория и как теория реальных пространственных отношений. В этом втором качестве она подлежит проверке опытом (современная физика доказала, что наше пространство не является точно евклидовым). Но от чисто математической теории самой по себе требуется логическая стройность прежде всего и обязательно непротиворечивость. В таком виде та или иная геометрия — это совокупность предложений, выводимых из принятых посылок. А какие она находит приложения — это ее саму по себе не затрагивает.

Очень характерен пример Саккери: при всей глубине и тонкости его выводов, относящихся к неевклидовой геометрии, он в конце все же заключает, что ему удалось «вырвать с корнем» гипотезу, отрицающую пятый постулат, и очистить Евклида от пятен.

И Ламберт, далеко развивший неевклидову геометрию, только «почти» сделал вывод о ее выполнимости, и Гаусс мучительно долго «все более приходил» к убеждению о невозможности доказать пятый постулат.

Когда же неевклидова геометрия была открыта и обнародована и встал вопрос о ее реальном смысле, то тут несообразительность показала себя в полную силу.

Гаусс еще в 1827 г. развил основы общей теории геометрии на поверхностях, в которой роль прямолинейных отрезков играют кратчайшие линии, расположенные на поверхности. У него был получен, в частности, вывод, что на некоторых поверхностях (поверхностях отрицательной кривизны) сумма углов треугольника (стороны которого кратчайшие линии) меньше 180°. Он знал вместе с тем, что в неевклидовой геометрии верно то же. Но он не сопоставил эти два вывода, не догадался, что неевклидова геометрия должна осуществляться на некоторых поверхностях. Если бы он додумался до этого, то доказательство не представляло бы для него, при его исключительной силе математика, особого труда (этот вывод был получен итальянским математиком Бельтрами только 40 лет спустя).



$c \parallel a$. $b \parallel c$
$\alpha+\beta+\gamma < 180°$

Вероятно, мысли Гаусса в неевклидовой геометрии, с одной стороны, и в теории поверхностей, с другой, шли как бы параллельно, не пересекаясь. Явление довольно обычное. Людям сплошь и рядом не приходит в голову сопоставить вещи, которые кажутся совершенно различными, но при ближайшем рассмотрении оказываются тесно связанными или даже совпадающими. Так бывает и у одного человека, когда он знает обе «вещи», но не сопоставляет их. Так же бывает и в группе людей, когда одни знают одно, другие — другое, да не сопоставляют.

Именно так и было дальше с неевклидовой геометрией и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Миндинг, найдя формулы тригонометрии на этих поверхностях,— а они такие же, как в геометрии Лобачевского — не заметил этого, хотя работа Лобачевского была уже опубликована. Двумя годами раньше в том же журнале! Да и Лобачевский, который как геометр-профессионал мог бы прочитать работу Миндинга, не сделал этого сопоставления!

Так путешественники, подошедшие к горному хребту или подплывшие к острову с разных сторон, могут не сообразить, что открыли одно и то же.

Работу Миндинга развил в 1857 г. Кодацци, но и он не сообразил сопоставить свои выводы с неевклидовой геометрией. Да он, возможно, о ней и не знал, хотя часть работ Лобачевского была опубликована по-французски и по-немецки, а работа Больяи еще в 1832 г. вышла на латинском языке.

И только в 1868 г. Бельтрами, отправляясь от работ Миндинга и Кодацци, делает наконец нужное сопоставление и подробно доказывает, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется геометрия Лобачевского.

В промежутке, в 1859 году, Кэли создает теорию расстояния, содержащую модель геометрии Лобачевского, но не понимает этого, так как не сопоставляет свою теорию с этой геометрией. Хотя позже, в 1861 году, он публикует работу по геометрии Лобачевского!

И только в 1871 году Клейн делает это сопоставление — приходит к той простой модели в круге, о которой мы рассказали вначале. Указанием на эту элементарную модель решается вопрос о недоказуемости пятого постулата. Вот к чему, можно сказать, свелось то, над чем более 2000 лет бились умы математиков!

История неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди доходят до вещей, которые, когда они наконец ухвачены и понятны, оказываются простыми, и как люди зачастую не понимают, что делают и что лежит у них под руками. Ни Гаусс, ни Лобачевский не поняли то, что было у них почти в руках. Даже Гаусс и Лобачевский.

В наше время все еще находятся люди, занимающиеся «доказательством» пятого постулата и осаждающие математиков этими своими «трудами». Но так как вопрос о пятом постулате решен и решение это с помощью модели в круге нетрудно понять каждому, названные «доказательства» и «труды» относятся уже не к неповоротливости ума, а к глупости или даже к сфере медицины. Глупость — это совсем не то, что тупость — неповоротливость ума; напротив, у дурака может быть «легкость в мыслях необыкновенная», ум его может поворачиваться с головокружительной быстротою, да бестолку. Это не имеет никакого отношения к той неповоротливости ума, свойственной даже гениям, которую так ярко показывает трудная история пятого постулата и неевклидовой геометрии.

Характер

Гаусс, Больяи, Лобачевский — три математика, открывших неевклидову геометрию. Три человека — три характера.

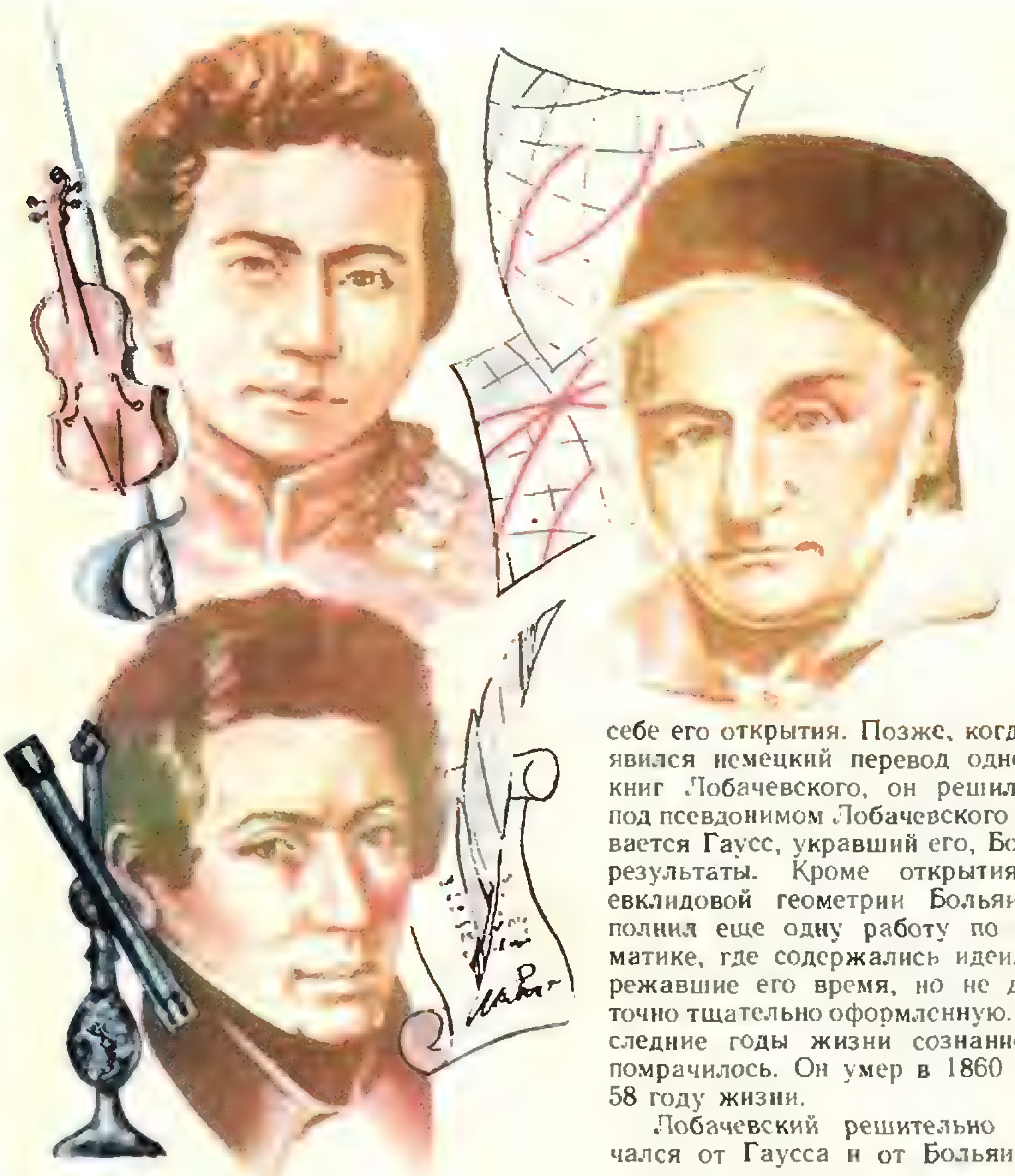
Фридрих Гаусс — математик чрезвычайной силы, о котором говорят «великий Гаусс», «princeps mathematicorum» (то есть король математиков), «старшина математиков»*).

Но Гауссу при всей его математической силе была свойственна интеллектуальная осторожность, нерешительность, которая проявилась, в частности, в том, что он более 30 лет занимался теорией параллельных, прежде чем решился выразить даже самому себе и в частных письмах твердое убеждение в правомерности неевклидовой геометрии. Дальше следовала уже иная осторожность — трусость, которая не дала ему выступить со своими выводами из опасения «крика беотийцев»...

Полной противоположностью Гауссу предстает перед нами Янош Больяи — самый молодой из трех: когда он додумался до неевклидовой геометрии, ему было всего 23 года (соответственно Гауссу — 47, Лобачевскому — 31). Лобачевский выступает публично в 32 года, Больяи — в 30, Гаусс — никогда. Работа Больяи по неевклидовой геометрии написана блестяще, разве что уж слишком кратко. Блеск его таланта соответствовал остальным чертам его пылкой натуры. Он был гусарский офицер, один из знаменитых венгерских гусар, дуэлянт. Как-то ему пришлось встретиться в дуэли на шпагах с несколькими противниками; схватки следовали одна за другой, и он оговорил себе право в перерывах играть на скрипке, чтобы восстано-

---

*) О Гауссе можно прочитать в «Кванте», 1977, № 8, с. 2 или в брошюре С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981).



вить гибкость кисти. Он приколол (не до смерти) всех своих противников.

Но гусарское самолюбие погубило Больяи. Не тем, что его самого убили на дуэли, а тем, что это самолюбие распространялось у него в область математики.

Гаусс прислал его отцу, своему старому знакомому, положительный отзыв о работе Яноша, написав, что очень хвалить его достижения не может, так как этим он хвалил бы сам себя, потому что те же результаты известны ему давно. Янош же решил, что Гаусс попросту присвоил себе его открытия. Позже, когда появился немецкий перевод одной из книг Лобачевского, он решил, что под псевдонимом Лобачевского скрывается Гаусс, укравший его, Больяи, результаты. Кроме открытия неевклидовой геометрии Больяи выполнил еще одну работу по математике, где содержались идеи, опережавшие его время, но не достаточно тщательно оформленную. В последние годы жизни сознание его помрачилось. Он умер в 1860 г., на 58 году жизни.

Лобачевский решительно отличался от Гаусса и от Больяи, соединяя смелость с упорством и основательностью, силу теоретической мысли с силой воли. Его открытие не встретило признания, и его считали даже немного сумасшедшим, как говорил о нем, например, Чернышевский. Признание, идущее от Гаусса, пришло позднее. Но Лобачевский не смущался и продолжал свои «сумасшедшие» исследования по «сумасшедшей» геометрии, публикуя вслед за первой обширной работой 1829—30 гг. следующие. Ослепнув к старости, свою последнюю книгу «Пангеометрия» он диктовал.

Деятельность Лобачевского была не только научной: 18 лет он был ректором Казанского университета, проявив на этом посту выдающуюся энергию, административное умение и понимание задач воспитания юношества. Его энергичная и умелая деятельность в тяжелое время холерной эпидемии 1835 года может показаться даже странной у человека, который занимался воображаемой геометрией, одной из абстрактнейших областей абстрактнейшей из наук — математики. Но, может быть, этому не следует особенно удивляться. Воля, необходимая для решительных действий в трудных условиях, также необходима для того, чтобы развить и отстаивать научные убеждения и истину вопреки всем «крикам беотийцев».

Талант, гений — это не только специальные способности, но и характер. Как Магеллану и Нансену была нужна решимость, чтобы отправиться в неизведанное плавание, так теоретику нужна интеллектуальная решимость, чтобы подумать «невероятное» и развивать его вопреки не только устоявшимся взглядам и традициям, но нередко и вопреки собственным сомнениям. Но мало убедиться в своих идеях для самого себя — их нужно передать другим людям. А это тоже может требовать решимости, потому что люди могут не понять, отбросить и даже подвергнуть насмешкам и поруганию новые идеи и выводы. Это могут сделать в первую очередь свои же коллеги — ученые, убежденные в незыблемости своих взглядов в своей академической непогрешимости,— мещане в академических креслах и на профессорских кафедрах, те «беотийцы», которым побоялся противопоставить себя Гаусс.

В недавнее время, да возможно и по сию пору, с легкой руки Бертольда Брехта принято было поносить Галилея за предательство истины — за то, что он отрекся от своих научных убеждений. То, что отрекаться от истины дурно, едва ли нуждается в особых объяснениях. Но в момент суда инквизиции Галилей был 68-летним стариком, через 3 года он ослеп, а ему грозили пыткой, заточением, перед ним стоял образ сожженного на костре Джордано Бруно. Остановитесь, читатель, и постарайтесь представить себе, что вас жгут на костре или вздергивают на дыбе. После этого мы продолжим разговор о верности истине — о ней так легко рассуждать, когда вам не грозят ни костер, ни пытки, ни заточение.

В действительности, Галилей, хотя и отрекся словесно, но истины не предал. Ослепший старец, узник инквизиции, он диктует свое главное научное сочинение и издает его за границей — в Голландии. Галилей исполнил свой долг ученого. По-видимому, на самом деле он не сказал инквизиторам знаменитые слова: «А все-таки она вертится!». Но он сказал то же, хотя и менее эффектно, но более весомо — своим научным трудом, своей книгой, написанной после суда инквизиции. Поэтому легенда, приписывающая ему те слова, справедлива по существу. Поэтому правильно он остался в памяти народа верным истине, верным своим научным убеждениям.

Но Гауссу ничего не грозило, кроме разве нелестных суждений коллег, а он скрыл свои научные убеждения, скрыл истину. Он поступил мудро с точки зрения мещанства, одинаково — прошлого или современного, подвизающегося в науке или всякого другого.

Охотно морализуя по поводу «отречения» Галилея или тех, кто когда-то «каялся в грехах менделизма-морганизма», мещанин будет делать все, чтобы «не испортить отношения» с кем следует. Он не будет ни отрекаться, ни каяться. Потому что ему не от чего отрекаться и не в чем каяться. у него все в порядке, все как полагается.

Этот конформизм, этот подлый дух приспособленчества противен настоящей науке, потому что она требует готовности подвергнуть сомнению и пересмотреть любые научные взгляды, научные положения, как бы ни казались они прочно установленными. Она требует дерзости мысли и дерзости в том, чтобы открыто выступить с дерзкой мыслью, как это было с открытием неевклидовой геометрии.

(Окончание см. на с. 15)

Е. Забабахин

Маленькие заметки

Наковальни Бриджмена

Этот простой, но остроумный прибор для получения огромных давлений был изобретен американским физиком Перси Уильямсом Бриджменом (1882—1961).

Если два конуса свести вершинами (рис. 1, *а*) и сжать вдоль оси, то образуется контактная площадка (рис. 1, *б*). Возникающее напряжение σ максимально в середине этой площадки, а на краях равно нулю (рис. 1, *в*). При усилении сжатия площадка увеличивается, но максимальное напряжение $\sigma_м$ остается тем же (пунктирные линии на рисунках 1, *б* и *в*).

Вблизи вершины этого устройства, называемого наковальней Бриджмена, материал сжат не только по вертикали, но и с боков, то есть сжатие его близко к всестороннему (подобно сжатию, вызванному гидростатическим давлением). При этом допустимое напряжение много больше обычного предела прочности. (Строго всестороннее сжатие не разрушает материала вообще.) К тому же, с ростом давления прочность увеличивается, так как затрудняется взаимное скольжение слоев материала (как при трении).

Максимальное напряжение $\sigma_м$ зависит от угла конуса: для больших углов α оно мало, но с заострением конуса растет. При некотором критическом угле $\alpha_{кр}$ достигаются условия разрушения, и конусы ломаются. Условие прочности такой наковальни оказывается весьма необычным: при $\alpha < \alpha_{кр}$ она ломается всегда, а при $\alpha > \alpha_{кр}$, наоборот, выдерживает любую силу (конечно, если радиус конуса достаточно велик).

Выигрыш в давлении, даваемый этим устройством, можно измерить в простом опыте, схематически показанном на рисунке 2. Два конуса с цилиндрическими ножками диаметром D сжимаются в тисках до разрушения этих ножек. После этого измеряется диаметр отпечатка d (с помощью краски). Очевидно, что

$$\sigma_с D^2 = \sigma_{ср} d^2,$$

где $\sigma_с$ — предел прочности материала при сжатии, $\sigma_{ср}$ — среднее давление в месте контакта. Для оценки можно считать, что $\sigma_{ср} = \sigma_м/2$, тогда

$$\frac{\sigma_м}{\sigma_с} \approx 2\left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Выигрыш тем больше, чем острее конус (если, конечно, он еще не разрушается).

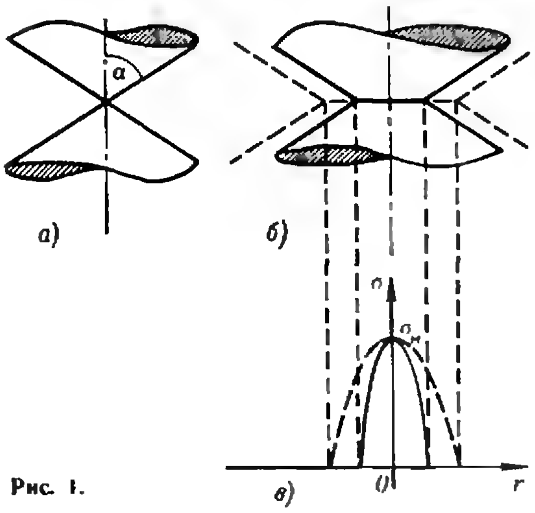


Рис. 1.

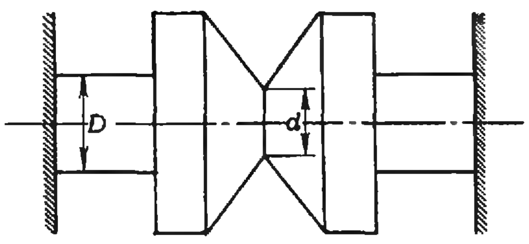


Рис. 2.

Практические наковальни делаются очень прочными, например алмазными, на которых сейчас получают давления порядка миллиона атмосфер. С помощью таких наковален исследуются свойства различных веществ при высоких давлениях (для этого вершины конусов слегка притупляют и испытуемый образец помещают между ними).

Ни упругость, ни пластичность...

Хорошо известны такие свойства твердых тел, как упругость и пластичность. Есть твердые тела, не обладающие этими свойствами; они похожи на очень вязкие жидкости, например на вязкий вар, текущие, хотя и медленно, при любой малой нагрузке. Но теперь инженеры знают пластмассы, поведение которых не сводится ни к одному из этих случаев. Это очень ярко видно на примере наблюдения за бутилметакрилатом (БМА).

Если пластинку из него согнуть вдвое, то сила, с которой ее надо удерживать, через несколько секунд значительно уменьшается (пластинка «привыкает» к новой форме), то есть обычной упругости здесь нет. Однако это и не пластичность, так как если пластинку отпустить, то она медленно, но полностью распрямляется. Если же ей помочь распрямиться и отпустить, то она снова несколько сгибается и лишь потом медленно сама выпрямляется. Это похоже на поведение чего-то живого, не желающего выполнять навязанные ему движения.

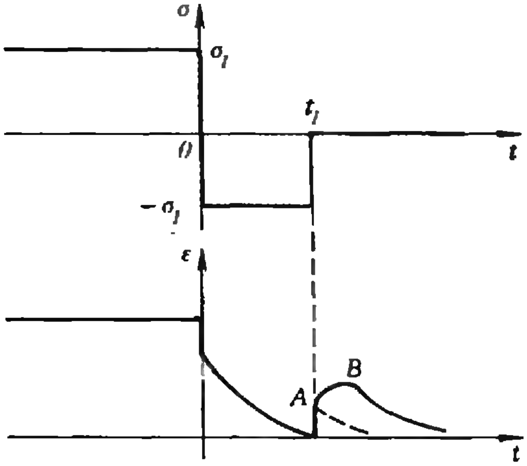


Рис. 1.

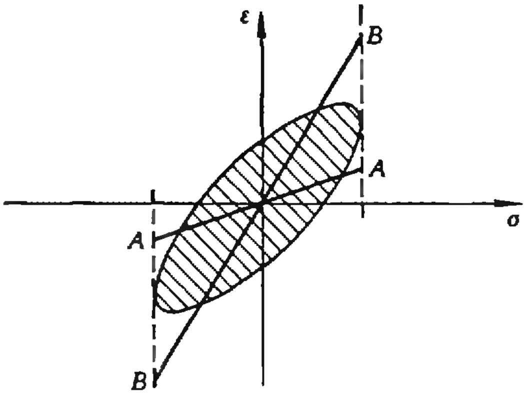


Рис. 2.

Проиллюстрируем сказанное рисунком 1, на котором показана последовательность соответствующих нагрузок (σ) и деформаций (ε) БМА. До $t=0$ долго поддерживаем напряжение $+\sigma_1$, затем к нему добавляем $-2\sigma_1$ и ждем момента t_1, когда деформация ε обратится в нуль. Здесь нагрузку снимаем, то есть добавляем $+\sigma_1$. Казалось бы, после этого деформация должна монотонно убывать до нуля. Но мы помним, что это не так (согнутая пластина «сопротивляется» помощи при разгибании), то есть в действительности процесс соответствует сплошной кривой *AB* с максимумом, а не пунктирной линии.

Своеобразно поведение этого материала при периодической нагрузке. Если колебания очень быстры, то он ведет себя как материал упругий и весьма жесткий (линия *AA* на рисунке 2). Если они очень медленны, то материал тоже похож на упругий, но гораздо более мягкий (линия *BB*). Наконец, для промежуточных частот деформация «отстает» от напряжения, процесс соответствует замкнутой кривой, площадь которой есть потеря энергии на тепло за один период колебаний. В этом случае совмещаются свойства упругости и вязкости, то есть материал работает одновременно как рессора и как амортизатор.

Описанное свойство может быть как полезным, так и вредным: например, деталь, отштампованная из БМА, может «вспомнить» исходную форму и сильно покоробиться.

Появление материалов нового класса, безусловно, интересно и в научном, и в практическом отношении. Изучением их занимается специальная отрасль науки — реология.

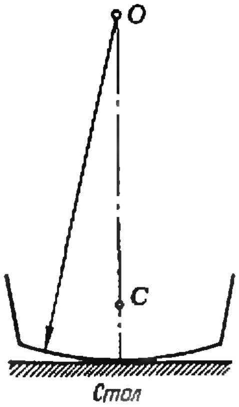


Рис. 1.

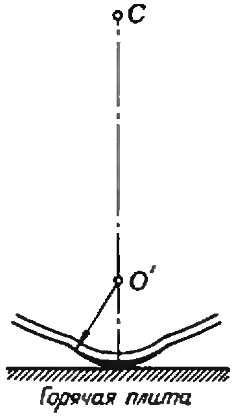


Рис. 2.

Странные колебания

Не приходилось ли вам когда-нибудь наблюдать такую картину: таз со слегка выпуклым дном устойчиво стоит на столе, а на горячей плите он почему-то начинает раскачиваться, и колебания эти не затухают довольно долгое время? (Хозяйкам известно, что некоторые кастрюли тоже способны «плясать» на плите.) Как это можно объяснить?

Устойчивость таза на столе вполне понятна — его центр тяжести C находится ниже центра кривизны дна O (рис. 1). Причина необычного поведения таза на горячей плите — в том, что в месте контакта с плитой дно сильно разогревается и выпучивается вниз, в результате чего местный центр кривизны O' оказывается ниже центра тяжести C (рис. 2), и равновесие становится неустойчивым. Этому способствует и то, что прогрев дна по толщине неравномерен: нижняя сторона его горячее, она расширяется больше, и выпуклость направлена именно вниз. На рисунке 2, где показан контакт с плитой, более горячая сторона дна таза зачернена. Эффект еще усиливается, если в таз налита холодная вода — это увеличивает разность температур и коробление дна. Качнувшись в сторону, таз на мгновение останавливается, контакт и выпуклость образуются в новом месте, он качнется обратно и т. д.

Холодный шар на горячей плите тоже будет неустойчив, но он станет не колебаться, а катиться в одном случайном направлении.

Если же таз горячий, а плита холодная, то эффект будет обратным — случайные колебания таза очень быстро затухнут, а катящийся шар — остановится.

Тупость и гений

(Начало см. на с. 7)

Но история пятого постулата и неевклидовой геометрии показывает также, с каким трудом люди, даже дерзко мыслящие, доходят до истин, которые, когда они уже открыты, оказываются простыми. Эта история показывает, насколько неповоротливой бывает мысль самых выдающихся ученых. Поэтому с дерзостью мысли они соединяют скромность в оценке своих достижений. Так, Дарвин сказал о себе в автобиографии: «Достойно удивления, что человек таких ограниченных способностей, как я, смог оказать некоторое влияние на мнения людей в науке».

Дерзость в достижениях и скромность в их оценке, глубокое понимание того, что достигнутое — только капля в океане недостигнутого и непознанного, этому, вместе с законами и теориями, тоже можно учиться у великих ученых, у истории науки.

А. Баков

Разбиение фигур

В последнее время большое развитие получила комбинаторная геометрия — наука, изучающая оптимальные конфигурации точек или фигур. Она все больше применяется в транспорте (укладка грузов), конструировании (компоновка деталей), архитектуре (планировка) и во многих других отраслях народного хозяйства.

Чтобы пояснить одну из очень известных задач комбинаторной геометрии, введем понятие диаметра фигуры. *Диаметр* фигуры — это такое число d, что расстояние между любыми двумя точками фигуры не превышает d, но для любого числа, меньшего d, в ней найдутся точки, расстояние между которыми превышает d. Например, круг диаметра (в традиционном смысле) d является фигурой диаметра d. Правильный треугольник со стороной d тоже имеет диаметр d.

Плоская (пространственная) фигура называется *ограниченной*, если она содержится в некотором круге (шаре). Если фигура имеет диаметр, то она, очевидно, ограниченная. Можно доказать, что верно и обратное.

Точка плоской фигуры называется *граничной*, если в любом круге с центром в этой точке имеются как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Фигура называется *замкнутой*, если она содержит все свои граничные точки. Например, плоская фигура $A_1=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ — замкнутая, а фигуры $A_2=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ и $A_3=\{(x;\ y)\,|\,0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ — не замкнутые.

Оказывается, если ограниченная фигура замкнута, то в ней найдется пара точек, расстояние между которыми равно диаметру фигуры.

Диаметр фигур A_1, A_2, A_3 равен 2. Расстояние между точками $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$ фигуры A_1 равно 2. В A_2 нет точек, расстояние между которыми равно 2. В незамкнутой фигуре A_3 такие точки есть (какие?).

Задача, о которой пойдет речь, заключается в следующем. Любую фигуру диаметра d можно разбить на «много» частей диаметра меньше d. А можно ли любую такую фигуру разбить на «небольшое» число частей диаметра меньше d? На какое минимальное число частей диаметра меньше d можно разбить любую фигуру диаметра d?

Первый шаг в решении этой проблемы сделал в 1933 г. польский математик Борсук. Теорема «Любая плоская фигура диаметра d содержится в некотором правильном шестиугольнике, расстояние между параллельными сторонами которого равно d», доказанная в 1920 г. венгром Палом, подсказала Борсуку идею. Разбив такой шестиугольник на 3 конгруэнтные части диаметра $d_1<d$ (рис. 1), Борсук, на основании теоремы Пала, заключил, что *любую плоскую фигуру диаметра d можно разбить на 3 части диаметра меньше d.*

Легко видеть, что правильный треугольник со стороной d нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d (почему?). С другой стороны, есть, конечно, фигуры диаметра d, которые легко разбиваются на 2 части диаметра меньше d.

Итак, одни плоские фигуры диаметра d можно разбить на 2 части диаметра меньше d, а другие можно разбить на 3 такие части, но нельзя на 2. Как их разграничить?

После доказательств Пала и Борсука естественно было попытаться разграничить их при помощи «объем-

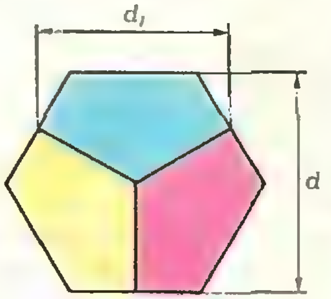


Рис. 1.

Эта заметка основана на докладе, который в ноябре 1981 г. девятиклассник Антон Баков (Свердловск) сделал на XIII конференции юных математиков в Батуми («Квант», 1982, № 4).

лющих» фигур. Здесь не годились ни «шестиугольник Пала» (любая плоская фигура диаметра d содержится в нем), ни круг диаметра d (многие фигуры диаметра d, например правильный треугольник со стороной d, не «влезут» в него). Искомыми фигурами оказались так называемые фигуры постоянной ширины.

В доказательстве своей теоремы Пал использовал опорные прямые. Прямая называется *опорной* к данной плоской фигуре, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и вся фигура лежит от нее по одну сторону (рис. 2). Число h называется *шириной* фигуры, если у нее есть параллельные опорные прямые, расстояние между которыми равно h. Вообще говоря, фигура может иметь много «ширин» (рис. 3). Если же ширина фигуры не зависит от направления опорных прямых, фигура называется *фигурой постоянной ширины* (рис. 4).

Оказывается, любая плоская фигура диаметра d содержится в некоторой фигуре постоянной ширины d. Было также доказано, что фигуру постоянной ширины d нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d.

Эти соображения позволили советскому математику В. Г. Болтянскому в 1969 г. доказать, что *плоскую фигуру диаметра d тогда и только тогда нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d, когда она содержится в единственной фигуре постоянной ширины d.*

Решение рассмотренной задачи послужило фундаментом для дальнейшего развития комбинаторной геометрии.

Сегодня эта задача решена не только для плоскости: доказан эквивалент теоремы Борсука для трехмерного пространства (там всегда достаточно 4 частей). Существует гипотеза, что для n-мерного пространства всегда достаточно $n+1$ частей.

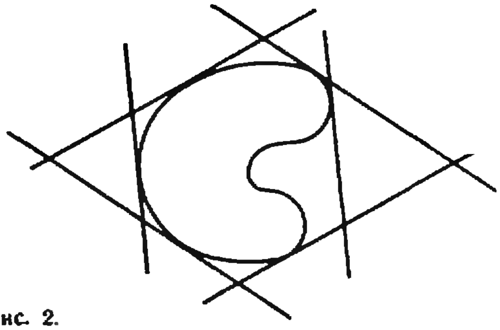


Рис. 2.

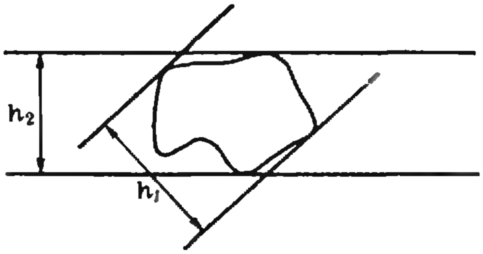


Рис. 3.

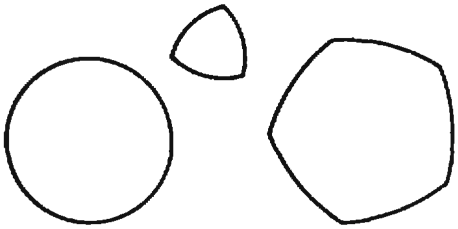


Рис. 4.

Задачи (добавлены В. Г. Болтянским)

1. Докажите, что диаметр многоугольника равен наибольшему из расстояний между его вершинами.

2. Опираясь на теорему Пала, докажите, что любую плоскую фигуру диаметра d можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}d\approx 0{,}866\,d$.

3. В правильном многоугольнике с нечетным числом сторон проведены дуги окружностей, каждая из которых соединяет концы стороны и имеет центр в противолежащей вершине (см. рис. 4). Докажите, что эти дуги ограничивают фигуру постоянной ширины.

4. Докажите, что правильный многоугольник с нечетным числом сторон, у которого наибольшая диагональ имеет длину d, не может быть разбит на две части, каждая из которых имеет диаметр меньше d.

5. От круга диаметра d отрезан сегмент, меньший полукруга. Полученная фигура F по-прежнему имеет диаметр d. Ее легко разбить на две части диаметра меньше d (как?). Следовательно, F содержится в разных фигурах постоянной ширины d. Приведите две такие фигуры.

6. Докажите, что вписанный многоугольник с четным числом сторон может быть разбит на две части меньшего диаметра. Верно ли это для произвольного многоугольника с четным числом сторон?

7. Пусть $|AB|>d$ и фигура M («двуугольник») представляет собой пересечение двух кругов радиуса d с центрами A и B. Докажите, что если фигура диаметра dцеликом содержится в двуугольнике M, то ее можно разбить на две части диаметра меньше d.

задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи по математике из этого номера предлагались этим летом на XXIII Международной математической олимпиаде. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 28 февраля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М776, М777» или «Ф788». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

Задачи

М776 — М780; Ф788 — Ф792

М776. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие что

$$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|CN|}{|CE|}=\lambda.$$

Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

М777. Дано уравнение $x^3-3xy^2+y^3=n$. Докажите, что

а) если натуральное n таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения;

б) при $n=2891$ это уравнение не имеет целочисленных решений.

М778*. Дан неравнобедренный треугольник $A_1A_2A_3$. Пусть a_i — его сторона, лежащая против вершины A_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, M_i — середина стороны a_i, T_i — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и S_i — точка, симметричная T_i относительно биссектрисы угла A_i треугольника. Докажите, что прямые M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 имеют общую точку.

М779*. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$1=x_0\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant\ldots$$

а) Докажите, что для любой такой последовательности $\{x_n\}$ существует n, при котором

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3{,}999.$$

б) Найдите такую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую указанному условию, для которой при любом n

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

А. Гришков

М780*. Дан квадрат K со стороной 100. Пусть L — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая к K, такая, что для любой точки P границы квадрата K найдется точка ломаной L, расстояние которой от P не больше $1/2$. Докажите, что на ломаной найдутся две точки X и Y, расстояние между которыми не более 1, такие, что длина части ломаной, заключенной между ними, не меньше 198.

Ф788. Длинная гладкая труба радиуса R наклонена под углом α к горизонту (рис. 1). Из точки A по внутренней поверхности трубы пускают вверх небольшое тело. Вектор начальной скорости тела составляет угол α с горизонтальной плоскостью и угол φ с прямой AB (см. рис. 1). При какой минимальной начальной скорости тело будет двигаться не отрываясь от поверхности трубы?

С. Кротов

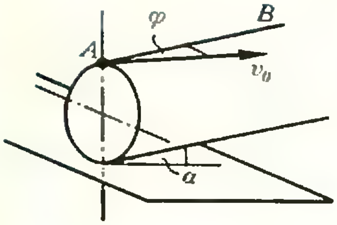


Рис. 1.

Ф789. Выточенную на токарном станке фигуру с плоским основанием поставили на дно сосуда и начали наливать в сосуд воду. На рисунке 2 приведен график зависимости силы F, с которой фигура давит на дно, от высоты H уровня воды в сосуде (вода под фигуру не подтекает). Определите по графику площадь основания фигуры, ее объем и плотность материала, из которого она сделана. Нарисуйте (приближенно) эту фигуру. На какой высоте площадь горизонтального сечения фигуры равна площади ее основания?

Д. Белов

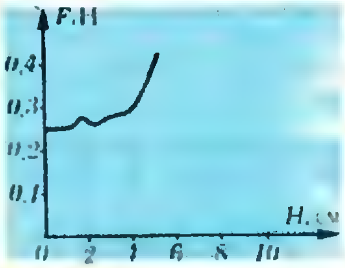


Рис. 2.

Ф790. Брусок массы m прикреплен с помощью пружины жесткости k к стене. На расстоянии d от бруска лежит второй брусок такой же массы (рис. 3). Какую минимальную скорость нужно сообщить правому бруску, чтобы после соударения брусков левый брусок вернулся в исходное положение? Коэффициент трения брусков о поверхность не зависит от скорости и равен μ; соударение брусков считать абсолютно упругим.

В. Петерсон

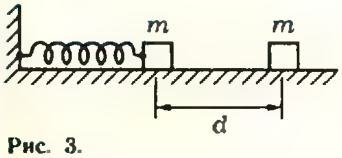


Рис. 3.

Ф791. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа. Масса поршня равна M, площадь — S. Какое количество теплоты надо подводить к газу в единицу времени, чтобы поршень двигался равномерно вверх со скоростью v? Атмосферное давление равно p_0. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

Д. Подлесный

Ф792*. Между Москвой и Ленинградом протянута двухпроводная телефонная линия. Сопротивление одного метра проволоки равно $r=0{,}05$ Ом. Из-за несовершенства изоляции сопротивление между проводами составляет

$R=10^7$ Ом на каждый метр линии. К концам линии в Москве подключают источник с напряжением $U=100$ В. Что покажет вольтметр, если его подключить а) к концам линии в Ленинграде? б) в середине линии?

З. Рафаилов

Problems

M776 — M780; P788 — P792

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The mathematics problems in this issue were proposed this summer at the XXIII International mathematics olympiad. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that February 28th, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 109006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter

M776. The diagonals AC and CE of the regular hexagon $ABCDEF$ are divided by the inner points M and N, respectively, so that $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=\lambda$. Determine λ if B, M and N are collinear.

M777. Prove that if n is a positive integer such that the equation $x^3-3xy^2+y^3=n$ has a solution in integers (x, y) then
a) it has at least three such solutions;
b) the equation has no solution in integers when $n=2891$.

M778*. A non-isosceles triangle $A_1A_2A_3$ is given with sides a_1, a_2, a_3 (a_i is the side opposite A_i). For all $i=1, 2, 3$, M_i is the midpoint of side a_i, T_i is the point where the incircle touches side a_i, and the reflection of T_i in the interior bissector of A_i yields the point S_i. Prove that the lines M_1S_1, M_2S_2 and M_3S_3 are concurrent.

M779*. Consider the infinite sequences $\{x_n\}$ of positive real numbers with the following properties:

$$x_0=1 \text{ and for all } i>0,\ x_{i+1}<x_i.$$

a) Prove that for every such sequence, there is an $n>1$ such that

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}>3.999.$$

b) Find such a sequence for which

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

for all n.

A. Grishkov

M780*. Let S be a square with sides of length 100 and let L be a path within S which does not meet itself and which is composed of line segments A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ with $A_0\neq A_n$. Suppose that for every point P of the boundary of S there is a point of L at a distance from P not greater than $1/2$. Prove that there are two points X and Y in L such that the distance between X and Y is not greater than 1 and the length of that part of L which lies between X and Y is not smaller than 198.

P788. A long smooth tube of radius R makes an angle equal to α with the horizon (see figure Рис. 1). A small body is propulsed upward from the point A on the inner surface of the tube. The initial velocity vector forms the angle α

enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write "NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)"

with the horizontal plane and the angle φ with the line AB (see Рис. 1). For what minimal initial speed will the body move without detaching itself from the tube's surface?

S. Krotov

P789. A detail with flat bottom, shaped on a lathe, is placed inside a receptacle, into which water is poured. The figure Рис. 2 shows how the force F with which the detail presses on the bottom depends on the water level H in the receptacle (no water seeps under the detail's bottom). Use the graph to determine the area of the detail's bottom, its volume and the density of the material out of which it is made. Make an approximate sketch of the detail. At what height is the area of its horizontal section equal to that of its bottom?

D. Belov

P790. A bar of mass m is attached to a wall by means of a spring of rigidity k. A second bar of the same mass lies at a distance d from the first one (figure Рис. 3). What minimal speed must the second bar be given in order to make the first bar return to its initial position after the bars collide with each other? The friction coefficient of the bars on the surface does not depend on velocity and equals μ; the collision may be assumed perfectly elastic.

V. Peterson

P791. A cylindrical receptacle closed by a piston contains 1 mole of ideal monoatomic gas. The piston's mass is M, its area is S. What quantity of heat must be supplied to the gas in unit time to make the piston move uniformely upward with velocity v? The atmospheric pressure is p_0. There is no friction between the piston and the walls of the receptacle.

D. Podlesnyi

P792*. A two-wire telephone line links Moscow and Leningrad. The resistance of one meter of the wire is $r = 0.05$ Ohm. Because of imperfections in the insulation, the resistance between the two wires is $R = 10^7$ Ohm per meter of the line. A source of tension $U = 100$ v is switched on to the ends of the wire in Moscow. What will the voltmeter reading be a) at the ends of the line in Leningrad? b) in the middle of the line?

Z. Rafailov

Решения задач

M750—M758; Ф768—Ф777

M750. *Докажите, что, как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в N цветов, найдутся а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета (а стороны идут параллельно линиям сетки — по вертикальным и горизонтальным прямым); б) l горизонтальных и m вертикальных прямых, которые пересекаются в центрах lm клеток одного цвета (l и m — любые натуральные числа); в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого — центры клеток одного цвета, при $N=2$; г)* то же для $N=3$.*

В решении мы многократно используем «принцип Дирехле»*).

а) Этот пункт — частный случай следующего.

б) Рассмотрим горизонтальную полосу бумаги ширины lN (рис. 1). Она состоит из бесконечного числа столбцов высоты lN. Среди них найдутся m одинаково окрашенных столбцов (общее число разных раскрасок конечно). Проведем через эти столбцы m вертикальных прямых.

Так как каждый из выбранных столбцов окрашен в N цветов, найдется цвет, который встретится в одном (и, стало быть, в любом) из них не меньше l раз (иначе высота столбца меньше lN). Через клетки этого цвета проведем l горизонтальных прямых.

в) Пусть клетки окрашены в красный и синий цвета. Рассмотрим цепочку попарно не пересекающихся квадратов 3×3, расположенных по «диагонали» (рис. 2). Сре-

---

*) См., например, статью В. Болтянского в «Кванте», 1977, № 2.

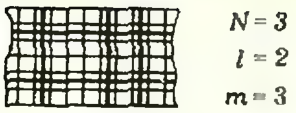


Рис. 1.

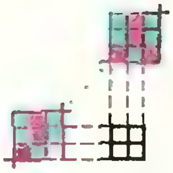


Рис. 2.

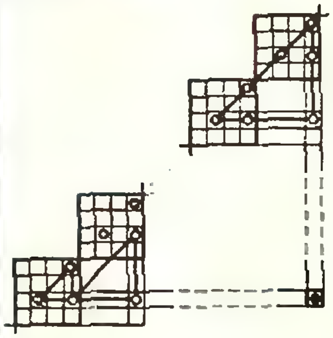


Рис. 3.

ди них найдутся два одинаково раскрашенных квадрата (число способов раскраски квадрата 3×3 в 2 цвета конечно). На диагонали каждого из квадратов есть по 2 клетки одного цвета (на рисунке 2 это красные клетки). Рассмотрим клетки, получающиеся в пересечении вертикальных и горизонтальных полосок, проходящих через эти красные клетки. Если хотя бы одна из них красная — задача решена. Если нет, то все они синего цвета, и из них легко выбрать такие три, что их центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник.

г) Будем рассуждать аналогично с решением пункта в). Рассмотрим бесконечную цепочку достаточно больших квадратов, расположенных по диагонали (что значит «достаточно большой» — выяснится ниже). Среди них всегда найдутся два одинаково раскрашенных. Пусть сторона большого квадрата настолько велика, что вдоль его диагонали можно поместить больше квадратов 4×4, чем число способов раскраски квадрата 4×4 в 3 цвета. Тогда на диагонали каждого из двух выбранных нами одинаковых больших квадратов будет по крайней мере по 2 одинаково раскрашенных квадрата 4×4 (рис. 3). На диагонали каждого из них найдутся как минимум по 2 одинаково окрашенных (и одинаково расположенных) клетки — на рисунке 3 их центры помечены красными точками; одинаковый цвет имеют и 4 соответственные клетки этих квадратов с синими центрами, а также 2 соответственные клетки больших квадратов с желтыми центрами. Если цвета каких-то двух из указанных трех групп клеток совпадают, то, очевидно, один из треугольников, выделенных на рисунке 3, будет искомым. В противном случае можно считать, что цвета всех этих клеток совпадают с цветами их центров. Тогда в какой бы из трех цветов — желтый, синий или красный — ни была окрашена клетка с черным центром (см. рис. 3), один из трех равнобедренных прямоугольных треугольников с общей вершиной в этом центре и двумя другими вершинами или в желтых точках, или в крайних синих, или в крайних красных будет «одноцветным».

С. Беспамятных

Эта задача тесно связана с так называемой «теоремой Ван-дер-Вардена о прогрессиях», о которой мы расскажем в одном из ближайших номеров.

М 751. *На окружности отмечены 3k точек, разделяющих ее на 3k дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.*

◆

Поделим образовавшиеся на окружности дуги длины 2 и 3 на равные части длины 1 и пометим эти $k+2k=3k$ точек деления черным цветом, а данные по условию $3k$ точек — красным. Всего будет отмечено $6k$ точек — вершины правильного $6k$-угольника (рис. 1). Далее будем рассуждать от противного.

Предположим, что утверждение задачи неверно, тогда каждой красной точке данной окружности L_0 диаметрально противоположна отмеченная черная точка. Поэтому против каждой из k дуг длины 1 с красными концами лежит дуга длины 1 с черными концами, то есть средняя часть одной из k дуг длины 3 с красными концами (см. рис. 1). Вырежем из окружности L_0 две такие противоположные единичные дуги и из двух оставшихся больших дуг сделаем новую окружность L_1 (рис. 2); она будет состоять из $6k-2$ единичных дуг, концами которых служат $3k-1$ красных и столько же черных точек. При этом диаметрально противоположные точки окружности L_0 перейдут в противоположные точки окружности L_1, поэтому против каждой красной точки будет по-прежнему располагаться черная. Красные точки разделят L_1 на участки длины 1, 2 или 3, причем единичных участков будет $k-1$ — на 1 меньше, чем было до перестройки, двойных будет $k+1$ — на 1 больше, а тройных, как и единичных, — на 1 меньше.

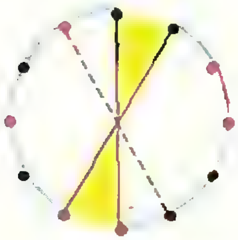


Рис. 1.

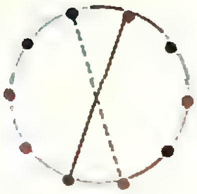


Рис. 2.

$k-1$ — на 1 меньше, чем было до перестройки, двойных будет $k+$ — на 1 больше, а тройных, как и единичных, — на 1 меньше.

Эту операцию выбрасывания двух дуг длины 1 можно проделать и с L_1, затем — с полученной окружностью L_2 и т. д., всего k раз (столько, сколько имелось первоначально единичных — и противолежащих им тройных — дуг с красными концами). В итоге получится окружность L_k, составленная из дуг длины 1, концами которых служат $2k$ красных и $2k$ черных точек, причем против каждой красной точки будет, как и раньше, располагаться черная. С другой стороны, участков длины 1 или 3 с красными концами на L_k уже не останется (на каждом шагу число тех и других уменьшалось на 1), то есть красные точки будут разбивать L_k на $2k$ участков равной длины (длины 2). Поэтому против каждой красной точки должна оказаться красная.

Требуемое противоречие получено.

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для окружности, разбитой на k единичных, l двойных и k тройных дуг, где $k+l$ — четное число.

В. Дубровский

◆

M752. *Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше, чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:*

а) не менее чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть a);

б) не менее чем n раз.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть дана цепочка из N клеток таблицы (каждая клетка граничит с предыдущей по общей стороне), в крайних клетках которой записаны числа a и b (рис. 1). Тогда 1) $|a-b| \leqslant N-1$; 2) любое целое число x, заключенное между a и b, записано в одной из клеток цепочки.*

Доказательство. Пусть x_i — число, записанное в i-й клетке цепочки, тогда первое утверждение вытекает из того, что

$$|a-b| = |a-x_2+x_2-x_3+\ldots+x_{N-1}-b| \leqslant$$
$$\leqslant |a-x_2|+|x_2-x_3|+\ldots+|x_{N-1}-b|,$$

а разность двух соседних чисел не больше 1. При доказательстве второго утверждения будем для определенности считать, что $a < x \leqslant b$. Двинемся по цепочке от первой клетки (с числом a) и найдем последнюю клетку, в которой еще записано число, не превосходящее x. Эта клетка — искомая: в ней записано x, поскольку иначе и в следующей клетке было бы число, не превосходящее x (ведь числа в соседних клетках отличаются не больше чем на 1).

а) Пусть M и m — наибольшее и наименьшее числа в таблице. Поскольку любые две клетки можно соединить цепочкой не более чем из $2n-1$ клеток, из неравенства леммы следует, что $|M-m| \leqslant 2n-2$. Поэтому в таблице встречается не более чем $2n-1$ различных чисел, а значит, хотя бы одно из них записано не менее чем в $[n^2/(2n-1)]$ клетках. Но $n^2/(2n-1) > n/2$, откуда и следует утверждение а).

б) Пусть M_k и m_k — наибольшее и наименьшее числа в k-м столбце. Если найдется такое число x, что $m_k \leqslant x \leqslant M_k$ сразу при всех k от 1 до n, то по второму утверждению леммы число x встречается в каждом столбце, то есть не менее n раз. Если же такого числа нет, то для некоторых номеров k и l имеем $m_k \leqslant M_k < m_l \leqslant M_l$, то есть любое число k-го столбца меньше любого числа l-го столбца. Применив то же утверждение к числу y, заключенному между M_k и m_l, и горизонтальным цепочкам между k-м и l-м столбцами, мы получим, что число y записано в каждой строке, и значит, не менее чем n раз.

Заменить в задаче б) число n на большее нельзя, как показывает таблица, изображенная на рисунке 2.

А. Берзиньш

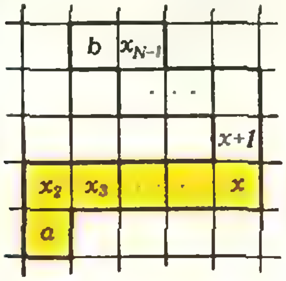
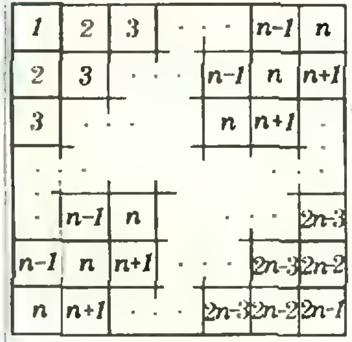


Рис. 1.



1	2	3	. . .		n-1	n
2	3	. . .		n-1	n	n+1
3	. . .			n	n+1	.
. . .						. . .
.	n-1	n		. . .		2n-3
n-1	n	n+1	. . .		2n-3	2n-2
n	n+1	. . .		2n-3	2n-2	2n-1

Рис. 2.

M753. *Числа a, b, c лежат в интервале $]0, \pi/2[$ и удовлетворяют равенствам*

$$\cos a = a,$$
$$\sin\cos b = b,$$
$$\cos\sin c = c.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания.

Ответ: $b<a<c$. Для доказательства заметим, что, поскольку $\sin x<x$ при всех положительных x, а $\cos x$ убывает в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, при всех $x\in\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ справедливо следующее двойное неравенство:

$$\sin\cos x<\cos x<\cos\sin x.$$

Отсюда вытекает, что

$$b=\sin\cos b<\cos b, \quad \cos c<\cos\sin c=c,$$

то есть

$$\cos b-b>0=\cos a-a>\cos c-c.$$

Но функция $y=\cos x-x$ убывает в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, следовательно, $b<a<c$.

С. Гессен

◆

M754. *а) Существуют ли многочлены*

$$P=P(x, y, z),$$
$$Q=Q(x, y, z),$$
$$R=R(x, y, z)$$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1.$$

а) Ответ: не существуют. Заметим, что система уравнений

$$x-y+1=0, \quad y-z-1=0, \quad z-2x+1=0$$

имеет решение $(x, y, z)=(1, 2, 1)$. При подстановке этих значений переменных в рассматриваемое тождество множители при многочленах P, Q и R, а с ними и вся левая часть, обращаются в нуль, и тождество нарушается, какие бы многочлены мы ни выбрали.

б) Ответ: существуют. Пусть $f=x-y+1$, $g=y-z-1$, $h=z-x+1$, тогда $f+g+h=1$ при всех значениях x, y и z. Возведя последнее тождество в седьмую степень, получим, что 1 представляется в виде суммы слагаемых вида $f^k\cdot g^l\cdot h^m$, где $k, l, m\geqslant 0$ и $k+l+m=7$, а значит, хотя бы одно из чисел k, l, m не меньше 3. Таким образом, каждое из этих слагаемых делится или на f^3, или на g^3, или на h^3. Группируя все слагаемые, делящиеся на f^3, и вынося f^3 за скобки, получим $f^3\cdot P$. Группируя те из оставшихся слагаемых, которые делятся на g^3, получим $g^3\cdot Q$. Сумма остальных слагаемых равна $h^3\cdot R$ (P, Q и R — какие-то многочлены от x, y, z). В итоге мы получим тождество нужного вида:

$$f^3\cdot P+g^3\cdot Q+h^3\cdot R=1.$$

П. Гусятников,
Ю. Нестеренко

От редакции. Эти задачи наводят на мысль, что верна общая теорема: *если многочлены F_1, F_2, …, F_m (от одного или нескольких переменных) не обращаются одновременно в нуль, то найдутся такие многочлены P_1, P_2, …, P_m, что $F_1P_1+F_2P_2+\ldots+F_mP_m=1$.* Такая теорема в самом деле верна, если учитывать не только действительные, но и комплексные значения переменных[*]. Более того, эта теорема — частный случай знаменитой теоремы Гильберта о корнях: *если многочлен G обращается в 0 при всех тех (комплексных) значениях переменных, при которых одновременно $F_1=0$, …, $F_m=0$, то существуют многочлены P_1, P_2, …, P_m и натуральное число r такие, что*

$$F_1P_1+F_2P_2+\ldots+F_mP_m=G^r.$$

◆

M755. *Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.*

Возьмем на лучах, соединяющих точку M с вершинами данного тетраэдра, точки A, B, C и D на расстоянии 1 от M. Очевидно, точка M будет находиться внутри нового тетраэдра $ABCD$ и его ребра видны из этой точки под теми же углами, что и ребра данного тетраэдра. Поэтому, не теряя общности, можно заменить данный тетраэдр на $ABCD$.

---

[*] О комплексных числах рассказывалось в статьях Л. Понтрягина в «Кванте», 1982, №№ 3, 4.

Первое решение. Поскольку точка M лежит внутри тетраэдра, луч DM проходит внутри его трехгранного угла при вершине D и потому пересекает плоскость ABC в некоторой точке P, причем точка P находится внутри треугольника ABC (рис. 1). Допустим, что косинусы углов AMD, BMD и CMD больше $-1/3$ (иначе доказывать нечего). Тогда сами эти углы меньше $\varphi = \arccos(-1/3)$, а значит углы AMP, BMP и CMP больше чем $180° - \varphi$. Отсюда вытекает, что длины отрезков AP, BP и CP больше $\sin\varphi$.

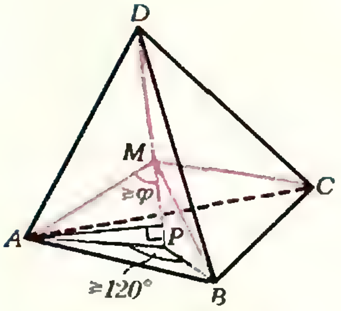


Рис. 1.

Действительно, возьмем, например, отрезок AP. Если угол AMP — острый, то $\sin\widehat{AMP} > \sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$. В то же время $|AP|$ не превосходит расстояния от точки A до прямой MP, которое равно $|AM|\cdot\sin\widehat{AMP} > 1\cdot\sin\varphi$ (см. рис. 1). Если же угол AMP — тупой или прямой, то AP — наибольшая сторона в треугольнике AMP и $|AP| > |AM| = 1 > \sin\varphi$.

Поскольку точка P лежит внутри треугольника ABC, один из углов APB, BPC и CPA не меньше 120°. Пусть $\widehat{APB} \geqslant 120°$, тогда

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 - 2|AP|\cdot|BP|\cdot\cos\widehat{APB} > \sin^2\varphi + {}$$
$$+ \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\cdot\cos 120° = 3(1-\cos^2\varphi) = \frac{8}{3}.$$

С другой стороны, полагая $\alpha = \widehat{AMB}$, мы имеем

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 - 2|AM|\cdot|BM|\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha).$$

Таким образом, $2(1-\cos\alpha) > 8/3$; следовательно, $\cos\alpha < -1/3$.

Второе решение. Обозначим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, $\overline{e_4}$ (рис. 2). Так как точка M лежит внутри тетраэдра, никакие три из них не компланарны. Разложим вектор $\overline{e_4}$ по остальным трем:

$$\overline{e_4} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + y_3\overline{e_3}.$$

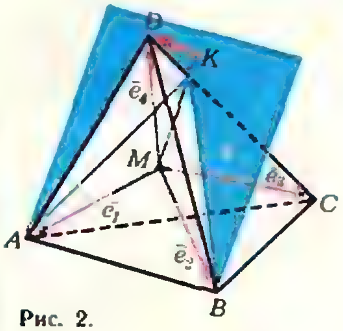


Рис. 2.

Заметим, что коэффициенты y_1, y_2 и y_3 отрицательны. В самом деле, рассмотрим, например, y_3. Вектор $\overline{e_4}$ есть сумма вектора $y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} = \overrightarrow{MK}$, где K — некоторая точка плоскости ABM, и вектора $\overrightarrow{KD} = y_3\overline{e_3}$, коллинеарного вектору $\overline{e_3}$ (см. рис. 2). Точка M лежит внутри тетраэдра, поэтому точки C и D лежат по разные стороны от плоскости ABM, а значит, векторы $\overrightarrow{MC} = \overline{e_3}$ и $\overrightarrow{KD} = y_3\overline{e_3}$ противоположно направлены, то есть $y_3 < 0$.

Положим $x_i = -y_i$ при $i = 1, 2, 3$ и $x_4 = 1$, тогда полученное разложение вектора $\overline{e_4}$ перепишется в виде

$$x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} + x_4\overline{e_4} = \overline{0}, \tag{1}$$

причем все числа x_i положительны. Пусть x_1 — наибольшее из них. Умножим обе части (1) скалярно на вектор $\overline{e_1}$:

$$x_1 + x_2\cos\alpha_2 + x_3\cos\alpha_3 + x_4\cos\alpha_4 = 0, \tag{2}$$

где α_i — угол между векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_i}$ ($i = 2, 3, 4$), и перегруппируем слагаемые:

$$\left(x_1 - \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)\right) + x_2\left(\cos\alpha_2 + \frac{1}{3}\right) + {}$$
$$+ x_3\left(\cos\alpha_3 + \frac{1}{3}\right) + x_4\left(\cos\alpha_4 + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Первое слагаемое в левой части неотрицательно, так как $x_1 \geqslant x_i$ при $i = 2, 3, 4$; поэтому хотя бы одно из остальных слагаемых неположительно: $x_i\left(\cos\alpha_i + \frac{1}{3}\right) \leqslant 0$ для некоторого i. Но $x_i > 0$; следовательно, $\cos\alpha_i < -1/3$.

Сделаем два замечания. Во-первых, постоянную $-1/3$ в условии уменьшить нельзя, как показывает пример правильного тетраэдра $ABCD$ и его центра M. В этом случае в формуле (2) надо положить $x_i=1$ ($i=1, 2, 3, 4$), $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\varphi$, откуда $\cos\varphi=-1/3$ — все ребра правильного тетраэдра видны из его центра под углом $\varphi=\arccos(-1/3)$.

Во-вторых, нетрудно показать, что всегда хотя бы одно ребро тетраэдра будет видно из его внутренней точки M под углом, косинус которого не меньше чем $-1/3$, то есть, что $\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}\geqslant-\frac{1}{3}$ хотя бы для одной пары векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}$ (см. второе решение). Действительно, в противном случае

$$(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2=\overline{e}_1^2+\overline{e}_2^2+\overline{e}_3^2+\overline{e}_4^2+$$
$$+2(\overline{e_1}\cdot\overline{e_2}+\overline{e_1}\cdot\overline{e_3}+\ldots+\overline{e_3}\cdot\overline{e_4})<4+2\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

— противоречие.

В. Дубровский, С. Гашков

М756. *В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно (быть может, с пересадками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.*

◆

Если закрыть все авиалинии, ведущие из столицы, то остальные города разобьются на несколько зон, так что из любого города любой зоны можно перелететь в любой другой город этой зоны (не пользуясь закрытыми линиями) и нельзя перелететь в города других зон. В каждую зону обязательно ведет хотя бы одна линия из столицы; докажем, что таких линий не менее двух.

Предположим, что это неверно, и в какую-то зону ведет только одна авиалиния из столицы. Пусть k — число городов в этой зоне, а l — общее число соединяющих их авиалиний. Условимся считать, что на каждой линии AB ежедневно совершаются 2 рейса — из A в B и обратно. Тогда число рейсов между городами зоны, совершаемых ежедневно, равно $2l$. С другой стороны, число всех рейсов, следующих из городов зоны, равно $10k$, причем только один из них заканчивается вне зоны — в столице. Поэтому $2l=10k-1$, что, очевидно, невозможно.

Итак, в каждую зону ведет не меньше чем 2 авиалинии из столицы. Откроем часть этих линий — по одной на зону, тогда по меньшей мере столько же, то есть не менее $100:2=50$, авиалиний останутся закрытыми. В то же время авиасообщение между любыми двумя городами страны, очевидно, восстановится.

А. Разборов

М757. *Из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... нетрудно выделить арифметическую прогрессию длины три: 1/2, 1/3, 1/6. Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию*
а) длины 4?
б) длины 5?
в) длины k, где k — любое натуральное число?

◆

Ответ: можно.

При любом натуральном k числа $\frac{1}{k!}, \frac{2}{k!}, \ldots, \frac{k}{k!}$ (где $k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$) образуют арифметическую прогрессию длины k с разностью $1/k!$ В то же время все они входят в последовательность 1, 1/2, 1/3, ..., потому что число $k!/m$ — целое при любом m, $1<m<k$.

В частности, при $k=4$ и $k=5$ получаем

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6} \text{ и } \frac{1}{120}, \frac{1}{60}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{24}$$

(вторую последовательность можно продолжить числом $\frac{1}{20}$).

Более общим образом прогрессию из пункта в) можно получить, разделив все члены произвольной арифметической прогрессии длины k, составленной из натуральных чисел, на любое их общее кратное. Ясно, что и обратно, любая конечная арифметическая прогрессия, содержащаяся в последовательности 1, 1/2, 1/3, ..., может быть получена таким способом. (Действительно, приведем все дроби — члены рассматриваемой прогрессии — к общему знаменателю. Тогда их числители образуют арифметическую прогрессию из натуральных чисел.)

Г. Гальперин

◆

М758*. *Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из последовательности 1, 2, 3, ..., 1982, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?*

Ответ: 43 числа; можно вычеркнуть числа 2, 3, ..., 44.

Если вычеркнуть указанные 43 числа, то условие задачи будет выполнено, ибо произведение любых двух из оставшихся чисел (исключая 1) будет больше чем $45^2=2025>1982$. Покажем теперь, что если вычеркнуть меньше чем 43 числа, то останутся 3 числа, произведение двух из которых равно третьему.

Рассмотрим 43 тройки чисел

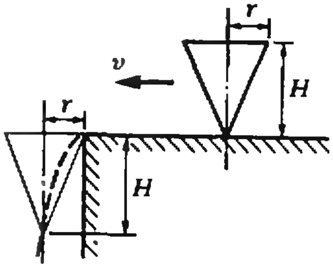
$$(2, 87, 2\cdot 87),\ (3, 86, 3\cdot 86), \ldots,\ (44, 45, 44\cdot 45).$$

Так как функция $x\cdot(89-x)$ на отрезке $[2; 44]$ возрастает, все выписанные числа различны и не превосходят $44\cdot 45=1980<1982$. Если вычеркнуть менее 43 чисел, то хотя бы одна из выписанных троек останется, и условие задачи будет нарушено.

Л. Курляндчик

◆

Ф768. *По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (см. рисунок). При какой скорости v поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной. Размеры волчка указаны на рисунке.*



Соскочив со стола, волчок будет двигаться по параболе (вращение лишь стабилизирует вертикальное положение оси волчка). Горизонтальная проекция v_x скорости волчка будет равна скорости v его поступательного движения по столу; вертикальная проекция будет меняться со временем по закону $v_y=gt^2/2$. Волчок не ударится о край стола, если за время τ, за которое он сместится по вертикали на H, его смещение по горизонтали будет больше или равно r (см. рисунок). Запишем это условие:

$$v_x\tau=v\tau\geqslant r, \qquad \tau=\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Таким образом, скорость поступательного движения волчка должна удовлетворять условию

$$v\geqslant\sqrt{\frac{r^2g}{2H}}.$$

А. Зильберман

◆

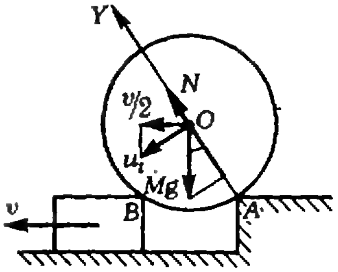
Ф769. *Массивный цилиндр радиуса R опирается на две подставки одинаковой высоты (см. рисунок). Одна подставка неподвижна, а другая выезжает из-под цилиндра со скоростью v. С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $R\sqrt{2}$? Считать, что в начальный момент подставки располагались очень близко друг к другу; трение между цилиндром и подставками отсутствует.*

До тех пор, пока цилиндр не оторвется от опор, ось цилиндра будет всегда находиться точно посередине между опорами. Следовательно, горизонтальная проекция скорости оси цилиндра (точки O на рисунке) равна $v/2$. Поскольку все точки оси движутся по окружности с центром в точке A, полная скорость u_t каждой точки оси направлена в любой момент времени перпендикулярно радиусу OA. Следовательно, все точки оси движутся с центростремительным ускорением $a_t=u_t^2/R$.

Запишем уравнение движения точки O в проекции на ось Y (см. рисунок):

$$Mg\cos\alpha-N=Ma_t=M\frac{u_t^2}{R}, \qquad (*)$$

где N — абсолютное значение силы реакции со стороны неподвижной опоры. По III закону Ньютона с такой же по абсолютной величине силой цилиндр давит на неподвиж-



ную опору. Из уравнения (*) находим

$$N=Mg\cos\alpha-M\frac{u_t^2}{R}.$$

В тот момент, когда расстояние между опорами равно $|AB|=R\sqrt{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{R\sqrt{2}}{2R}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Горизонтальная проекция скорости точки O равна $u_t\cos\alpha=v$, откуда $u=v/\sqrt{2}$. Таким образом, при $|AB|=R\sqrt{2}$

$$N=M\frac{g}{\sqrt{2}}-M\frac{v^2}{2R}.$$

Для того чтобы цилиндр не оторвался от опор до того, как $|AB|$ станет равным $R\sqrt{2}$, должно выполняться условие $\frac{g}{\sqrt{2}}>\frac{v^2}{2R}$, то есть $v<\sqrt{gR\sqrt{2}}$.

С. Кротов

Ф770. *В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда: $m_в=m_л=m=1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0=10^5$ Па до $p_1=2{,}5\cdot10^6$ Па. Определить, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до $p=14\cdot10^6$ Па.*

1) Решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми.

2) Оцените поправку, которую дает учет сжимаемости.

Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до $p'=20\cdot10^6$ Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды.

Удельные теплоемкости воды и льда — $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda=3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\varrho_л=0{,}9\varrho_в$, где $\varrho_в$ — плотность воды.

◆

1) Сначала найдем уменьшение температуры смеси в результате увеличения внешнего давления:

$$\Delta T=\frac{p_1}{p}\approx0{,}17\ \text{К}.$$

Столь малое изменение температуры указывает на то, что растает малое количество льда, то есть $\Delta m\ll m_л$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$A=\lambda\cdot\Delta m-(c_л+c_в)m\cdot\Delta T.$$

Оценим значение работы A внешней силы. Изменение объема смеси в результате таяния массы Δm льда равно

$$\Delta V=\frac{\Delta m}{\varrho_л}-\frac{\Delta m}{\varrho_в}=\Delta m\frac{\varrho_в-\varrho_л}{\varrho_в\varrho_л}\ll0{,}1\frac{m}{\varrho_л}\sim10^{-4}\ \text{м}^3,$$

следовательно,

$$A\approx p_1\cdot\Delta V\ll2{,}5\cdot10^2\ \text{Дж}.$$

Количество тепла ΔQ, необходимое для нагревания массы m льда и массы m воды на ΔT градусов, равно

$$\Delta Q=(c_л+c_в)m\cdot\Delta T\approx1{,}1\cdot10^3\ \text{Дж}.$$

Видно, что $A\ll\Delta Q$; поэтому можно для оценки считать, что $\lambda\cdot\Delta m\approx\Delta Q$, откуда

$$\Delta m=\frac{\Delta Q}{\lambda}\approx3{,}7\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

Изменение объема за счет таяния этой массы льда равно

$$\Delta V=\Delta m\frac{\varrho_в-\varrho_л}{\varrho_в\varrho_л}\approx4\cdot10^{-7}\ \text{м}^3.$$

Учитывая, что при медленном увеличении давления $\Delta V\sim\Delta p$, найдем работу внешней силы:

$$A=\frac{1}{2}p_1\cdot\Delta V\approx0{,}5\ \text{Дж}.$$

2) Примем во внимание сжимаемость льда и воды. Изменение объема льда и воды будет равно

$$\Delta V'=\frac{p_1}{p'}\cdot10^{-2}V_{ов}+\frac{p_1}{p'}\cdot10^{-2}\frac{V_{ол}}{2},$$

где $V_{ов}=10^{-3}$ м^3 и $V_{ол}=1{,}1\cdot10^{-3}$ м^3 — начальные объемы воды и льда. Подставляя числовые данные, находим

$$\Delta V'\approx2\cdot10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Работа A' внешней силы, затраченная на сжатие смеси, равна

$$A' = \frac{1}{2} p_1 \cdot \Delta V' \approx 2{,}5 \text{ Дж}.$$

Полная работа внешней силы равна

$$A_п = A + A' \approx 3 \text{ Дж}.$$

А. Буздин

◆

Ф771. *В схеме, приведенной на рисунке 1, диод Д и катушка с индуктивностью L в момент времени $t=0$ при помощи ключа К подключаются к источнику переменного напряжения $u = U_м \cos \omega t$. Определить силу тока в катушке как функцию времени; построить график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.*

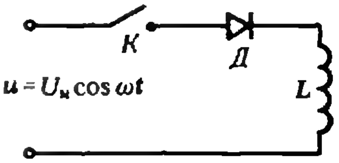


Рис. 1.

После замыкания ключа диод будет открыт, и ток в катушке будет определяться приложенным напряжением. Из условия $U_м \cos \omega t = Li'$ находим:

$$i = \frac{U_м}{\omega L} \sin \omega t.$$

В момент времени $t_1 = \pi/\omega$ $(\omega t_1 = \pi)$ ток в катушке станет равным нулю. С этого момента и до момента времени $t_2 = 3\pi/2\omega$ ток будет оставаться равным нулю, поскольку диод будет закрыт — на нем будет отрицательное напряжение. В момент t_2 диод снова откроется. В дальнейшем

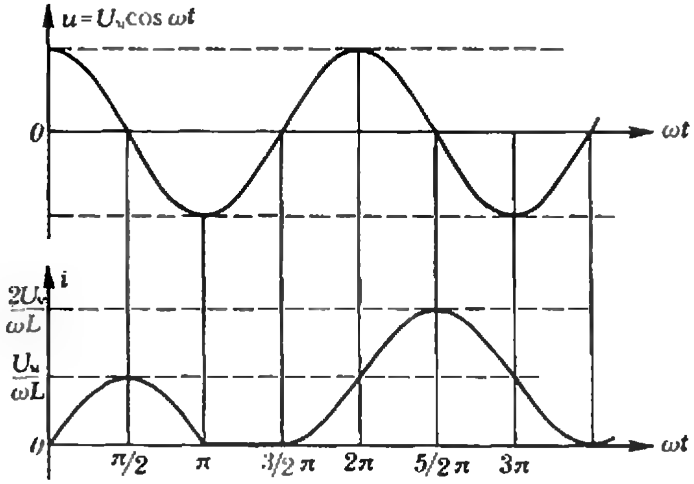


Рис. 2.

напряжение на катушке будет меняться со временем по закону

$$u = U_м \cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = U_м \sin \omega t.$$

Ток в катушке будет меняться по закону

$$i = \frac{U_м}{\omega L}(1 - \cos \omega t)$$

(тут учтено, что при $t = t_2$ $I = 0$).

На рисунке 2 приведены графики $u(t)$ и $i(t)$.

В. Скороваров

◆

Ф772. *Межпланетный корабль совершил мягкую посадку на Луну. Корабль имеет форму диска радиуса $r = 4$ м; его поверхность покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с*

Вследствие дифракции света на оправе объектива с помощью телескопа можно различить две точки на поверхности Луны, находящиеся на расстоянии не менее

$$R = \frac{\lambda}{D} L = 40 \text{ м}.$$

Объекты, размер которых меньше R, не отличимы от точечного объекта. Для того чтобы прочитать букву, нужно различить несколько ее элементов. Оценка числа этих элементов может быть сделана только приближенно. Для *диаметром объектива $D=6$ м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения? Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) равна $k=0{,}05$. Расстояние от Земли до Луны $L=4\cdot10^5$ км; фотографирование ведется в свете с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм. Оценить, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА.*

этого можно попытаться, например, изображать буквы цепочками соприкасающихся кружков. Число кружков в таких цепочках должно быть не меньше 5—6, чтобы буквы отличались друг от друга. Учитывая, что радиус этих кружков на поверхности Луны должен быть $R=40$ м, мы получим оценку размера букв: $l\approx400-500$ м.

При фотографировании освещенность любой точки изображения Луны в фокальной плоскости объектива создается за счет излучения всех элементов поверхности Луны, лежащих в пределах круга радиуса $R=40$ м, то есть площади $S=\pi R^2$. Если часть площади этого круга будет закрыта черным (неотражающим) диском площади $s=\pi r^2$, то освещенность изображения точки прилунения будет пропорциональна $(S-s)$, в то время как в других точках она пропорциональна S. Следовательно, контрастность изображения будет равна

$$k=\frac{S-(S-s)}{S}=\frac{s}{S}=\left(\frac{r}{R}\right)^2=10^{-2}.$$

Эта величина меньше заданной в условии надежно различимой контрастности изображения $k_{\min}=5\cdot10^{-2}$. Следовательно, межпланетный корабль обнаружить не удастся.

С. Козел

◆

Ф773. *На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить. Свободный конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент тело лежит на плоскости так, что нить горизонтальна (рис. 1). Нить начинают медленно вытягивать; при этом тело к моменту достижения отверстия описывает половину окружности. Найти величину коэффициента трения тела о плоскость.*

На рисунке 2 приведена траектория движения тела от начального положения до отверстия (плоскость рисунка совпадает с наклонной плоскостью). Точка O' — центр полуокружности, по которой движется тело.

Поскольку нить вытягивают медленно, можно считать, что в каждый момент времени тело находится в состоянии равновесия. Запишем условие равновесия тела для момента, когда нить составляет угол φ с горизонталью OO' (рис. 2).

В проекциях на ось X —

$$f\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=T\cos\varphi,\ \text{или}\ f\sin^2\varphi=T\cos\varphi. \qquad (1)$$

В проекциях на ось Y —

$$f\cos2\varphi+T\sin\varphi=mg\sin\alpha. \qquad (2)$$

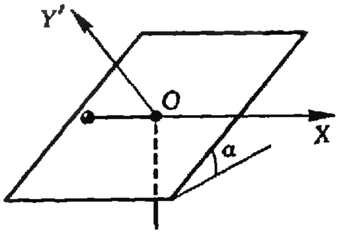


Рис. 1.

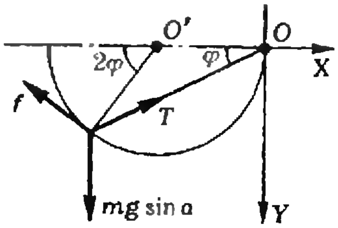


Рис. 2.

В проекциях на ось Y', перпендикулярную наклонной плоскости (см. рис. 1), —

$$mg\cos\alpha=N. \qquad (3)$$

Учитывая, что сила трения f равна по абсолютной величине μN, из (1)—(3) находим μ:

$$\mu=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

А. Зильберман

◆

Ф774. *Для многих веществ существуют такие значения температуры $T_{\text{тр}}$ и давления $p_{\text{тр}}$, при которых все три фазы*

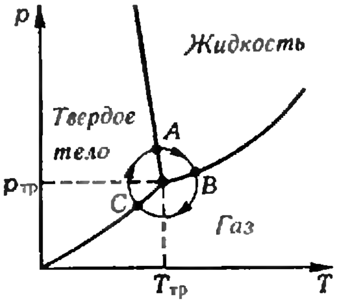
На рисунке приведена диаграмма состояния вещества в координатах $p-T$.

Рассмотрим цикл $A\to B\to C\to A$, который совершают над массой m вещества вблизи тройной точки. В этом цикле *вещества — газообразная, жидкая и твердая — находятся в равновесии друг с другом — так называемая тройная точка. Для воды $T_{тр}=0{,}0075°C$, $p_{тр}=4{,}58$ мм рт. ст; удельная теплота парообразования в тройной точке равна $r=595{,}8$ кал/г, удельная теплота плавления — $\lambda=79{,}7$ кал/г. Найти удельную теплоту сублимации (прямого перехода из твердого состояния в газообразное) воды вблизи тройной точки.*

последовательно происходят следующие превращения фаз: плавление → испарение → превращение пара (газа) непосредственно в твердое тело. Из первого начала термодинамики следует, что при неограниченном сужении цикла к тройной точке

$$rm+\lambda m-\theta m=0,$$

где θ — удельная теплота сублимации (работа системы за цикл равна нулю, притока тепла извне нет, полное изменение внутренней энергии системы также равно нулю). Следовательно,



$$\theta=r+\lambda.$$

Подставив числовые данные для воды, найдем удельную теплоту сублимации воды:

$$\theta=675{,}5 \text{ кал.}$$

В. Давыдов

◆

Ф775. *Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1=2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2=2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?*

Изменения тока при переключении амперметра малы. Значит, можно считать, что изменение тока в цепи при подключении амперметра мало и пропорционально изменению полного сопротивления цепи, то есть $\Delta I=\alpha\cdot\Delta R_{общ}$, где α — коэффициент пропорциональности. Но $\Delta R_{общ}=R_A$ (R_A — сопротивление амперметра). На разных пределах сопротивление амперметра разное.

Если I_0 — ток в цепи до подключения амперметра, то

$$\begin{aligned}\Delta I_1&=I_0-I_1=\alpha R_{A1},\\ \Delta I_2&=I_0-I_2=\alpha R_{A2},\end{aligned}\qquad(*)$$

где R_{A1} — сопротивление амперметра на пределе 10 мА, R_{A2} — на пределе 3 мА. Учитывая, что $\frac{R_{A1}}{R_{A2}}=\frac{3}{10}$, из (*) получаем

$$\frac{I_0-I_1}{I_0-I_2}=\frac{3}{10},$$

откуда

$$I_0=\frac{10I_1-3I_2}{7}\approx 2{,}97 \text{ мА}.$$

А. Зильберман

◆

Ф776. *В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1=30°C$). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau=5$ мин. Для того чтобы чайник не остыл, в него капают горячую воду ($t_2=45°C$). Масса одной капли $m_к=0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной 30°C?*

За одну минуту чайник остывает на $\Delta t_1=0{,}2$ градуса. Количество тепла, «теряемое» за это время чайником, равно

$$\Delta Q_1=cm\cdot\Delta t_1$$

(c — удельная теплоемкость воды). Если в минуту в чайник капают n капель, то количество тепла, передаваемое ими воде в чайнике, равно

$$\Delta Q_2=nm_кc\,(t_2-t_1).$$

Условие постоянства температуры воды в чайнике — $\Delta Q_1=\Delta Q_2$, то есть

На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще? Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит 0,3 литра воды. Температура окружающего воздуха $t_0=20°C$.

$$cm\cdot\Delta t_1=nm_{\text{к}}c\,(t_2-t_1).$$

Отсюда находим n:

$$n=\frac{m}{m_{\text{к}}}\,\frac{\Delta t_1}{t_2-t_1}\approx 20 \text{ капель в минуту.}$$

Если капать не n, а $3n$ капель в минуту, то вода в чайнике нагреется за одну минуту на

$$\Delta t_2=\frac{3\Delta Q_2-\Delta Q_1}{cm}=2\Delta t_1=0{,}4 \text{ градуса.}$$

А. Зильберман

◆

Ф777. *На невесомой нерастяжимой нити подвешен блок. Расстояние между точками подвеса равно диаметру блока; длина вертикальных участков нити равна l (рис. 1). Определить период малых колебаний системы в вертикальной плоскости, в которой лежит нить.*

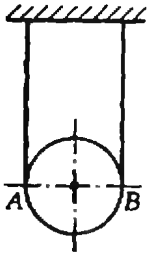


Рис. 1.

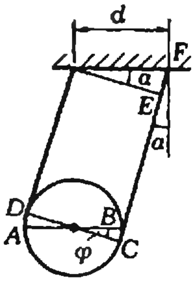


Рис. 2.

Покажем, что при малых углах отклонения блок движется поступательно, то есть в любой момент времени все точки блока имеют одну и ту же скорость.

Отклоним нити на малый угол α от вертикали. Пусть C и D — крайние точки касания нити с блоком (рис. 2). Посмотрим, какой угол составляют радиус-векторы точек C и B (D и A). Понятно, что длины дуг AD и CB равны

$$\Delta l=\frac{1}{2}|FE|=\frac{1}{2}\,d\alpha$$

(поскольку α мало, $\sin\alpha\approx\alpha$).

С другой стороны,

$$\Delta l=\frac{1}{2}\,d\varphi.$$

Следовательно, $\varphi=\alpha$. Это означает, что отрезок AB лежит по-прежнему на горизонтали, то есть блок движется поступательно.

Таким образом, кинетическая энергия блока в любой момент времени равна $mv_t^2/2$, где m — масса блока, v_t — скорость его центра в данный момент. Поэтому в любой момент времени полная энергия блока равна

$$\frac{mv_t^2}{2}+mgl\,(1-\cos\alpha_t),$$

то есть такая же, как у математического маятника длины l. Следовательно, колебания блока идентичны колебаниям математического маятника; период колебаний

$$T=2\pi\sqrt{l/g}.$$

В. Ильин

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М721—М735 и Ф748—Ф762 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Большинство читателей, приславших решения, успешно справились с задачами **М721, М724, М726, М727, М729, М731, М734**. Остальные задачи решили: *В. Айзенштадт* (Люберцы) **22, 23, 33**; *Т. Аколян* (Ереван) **22**; *М. Алексеев* (Москва) **22, 23**; *А. Аляев* (п. Пачелма Пензенской обл.) **28**; *М. Арасланов* (Запорожье) **23, 25, 28, 30**; *А. Бажилов* (София, НРБ) **23, 25**; *Л. Байрак* (Белгород) **32**; *В. Барабанов* (Севастополь) **23**; *А. Белоус* (Винница) **28**; *А. Беренштейн* (Москва) **33**; *А. Биргер* (Иваново) **23, 30, 32, 33**; *А. Благодарев* (Пенза) **32**; *И. Богуславский* (Москва) **22, 23, 25, 33**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **23, 28, 30, 35**; *В. Булавас* (Паневежис) **22, 25, 30, 32, 33**; *И. Вайнштейн* (Калинин) **23**; *В. Вайншток* (Калинин) **25**; *Г. Виннер* (Свердловск) **22, 23, 25, 28, 32**; *А. Виноградов* (Москва) **23, 28, 32, 35**; *Л. Вовк* (Киев) **22, 25, 32, 33**; *В. Волчков* (Донецк) **23, 25**; *С. Галкина* (Пенза) **25**; *М. Гараев* (Физули) **23, 33**; *О. Гарифуллин* (Пенза) **25**; *А. Герцык* (Ленинград) **35**; *М. Гликман* (Кишинев) **30, 32, 33**; *М. Горбунов* (Минск) **25, 28, 32**; *А. Громов* (Ленинград) **25**; *С. Громов* (Янгиюль) **25**; *А. Гутман* (Новокузнецк) **23**; *А. Дейнека* (Винница) **32**; *А. Добрин* (Киев) **28, 30, 32, 33, 35**; *В. Долотин* (Курск) **23**; *Л. Дочев* (София, НРБ) **25**; *А. Дробышев* (Ленинград) **23, 25**; *А. Дубицкас* (Таураге) **22, 23, 25**; *В. Епхиев* (Новосибирск) **28**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **23, 25, 33, 35**; *К. Зыков* (Москва) **30, 33**; *М. Ивко* (Павлодар) **25**; *В. Ивлев* (Джезказган) **25**; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **33**; *М. Йотов* (София, НРБ) **22, 25**; *Е. Кабаков* (Ленинград) **28**; *П. Кадышев* (Москва) **28**; *А. Карпович* (Киев) **30**; *А. Карташев* (Витебск) **32, 33**; *С. Кастелли* (Белград, СФРЮ) **22**; *Н. Кащенко* (Киев) **23, 25, 32, 33**; *В. Кидысюк*

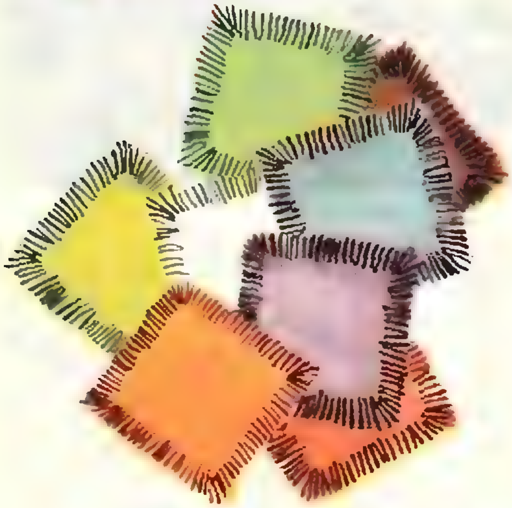
(Продолжение см. на с. 37)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Замените звездочки цифрами в выражении 52★2★ так, чтобы полученное число делилось на 36.

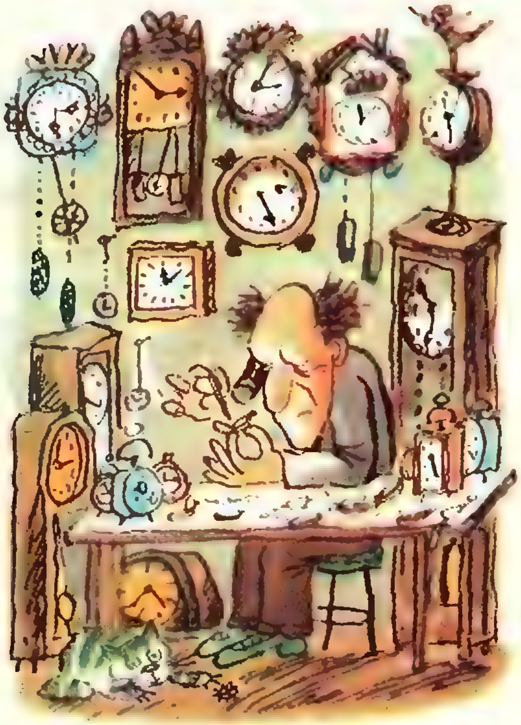
2. На стол кладут одну за другой 8 цветных квадратных салфеток (см. рисунок). При этом последующая салфетка закрывает часть хотя бы одной из предыдущих. Определите, какая салфетка была положена первой и какая из двух салфеток — коричневая или белая — была положена раньше?



3. Когда секундная стрелка на часах прошла 1 секунду, минутная стрелка прошла 6 минут, тем не менее часы исправны. Как это объяснить?

4. Для каких двузначных чисел сумма куба числа единиц и квадрата числа десятков равняется самому числу?

5. Какое наибольшее количество чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых 17 последовательных чисел была четна, а сумма любых 18 последовательных чисел была нечетна?



Эти задачи нам предложили
К. Ашурбеков, Ф. Бартенев,
В. Произволов, А. Савин, А. Швецов

А. Панов

Загадка фигуры № 51

Вырежьте из картона квадрат и разделите его на части так, как показано на рисунке 1,— вы получили головоломку «танграм», придуманную несколько тысячелетий назад в Китае и известную ныне во всем мире. Используя все семь элементов танграма, можно сложить много изящных фигурок; попробуйте составить, например, «женщину с веером» (рис. 2).

Но исходный квадрат можно разрезать и по-другому, например — как на рисунке 3. Именно так он разделен в головоломке «пифагор», выпускаемой в нашей стране. На рисунке 4 изображена фигура № 51 из инструкции к экземпляру пифагора, который изготовлен в г. Кузнецке; в инструкции предлагается составить эту фигуру из семи элементов пифагора.

Я долго пытался составить фигуру № 51. Самое близкое к ней из того, что мне удалось, показано на рисунке 5. В конце концов я засомневался: а можно ли это сделать?

Найти ответ помогла книга М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971). На с. 329 рассказывается о том, как была решена задача перечисления выпуклых многоугольников, которые можно составить из семи элементов танграма:

«Два китайских математика, Фу Трен-ван и Чуань Чи-сюнь, в 1942 году опубликовали статью, в которой рассмотрели эту задачу. Их подход к решению был весьма остроумен. Каждую из пяти больших частей танграма (два больших треугольника, один треугольник поменьше, квадрат и параллелограмм) можно разбить на равнобедренные прямоугольные треугольники, конгруэнтные двум самым маленьким треугольникам танграма. Всего при этом получится 16 совершенно одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. С помощью тонких рассуждений авторы показали, что из этих 16 треугольников можно построить 20 различных выпуклых многоугольников (многоугольники, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, различными не считаются). Отсюда уже нетрудно доказать, что лишь 13 из найденных 20 выпуклых многоугольников можно построить из деталей танграма».

Элементы пифагора разбиваются на те же самые 16 треугольников (рис. 6). Фигура № 51 — это выпуклый многоугольник; поэтому, если бы среди упомянутых 20 многоугольников ее не оказалось, ее тем более нельзя было бы сложить из элементов пифагора.

Давайте составим полный список этих 20 многоугольников.

Нам поможет эксперимент. Если заготовить много одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и попробовать складывать из них различные многоугольники, обнаружится, что выпуклые многоугольники получаются только тогда, когда соседние треугольники граничат по целой общей стороне (рис. 7, *а*). Если же прикладывать треугольники катетом к гипотенузе или со сдвигом (рис. 7, *б*), выпуклый многоугольник не сложится. В этом «правиле прикладывания» — ключ к описанию искомых многоугольников. Но доказывается оно довольно сложно и мы примем его просто как экспериментальный факт.

Наложим теперь произвольный выпуклый многоугольник, составленный из наших треугольников, на сетку из квадратов, стороны которых равны катетам треугольников, так, чтобы вершины одного из треугольников попали в узлы сетки (рис. 8). Тогда по «правилу прикладывания» вершины остальных треугольников также попадут в узлы сетки. Поскольку углы нашего многоугольника складываются из углов равнобедренных прямоугольных треугольников и, значит, могут равняться только 45°, 90° или 135° (напомню, что многоугольник тогда и только тогда является выпуклым, когда все его внутренние углы меньше 180°), его можно представить как прямоугольник с отрезанными уголками (рис. 8). Стороны этого прямоугольника идут по линиям сетки; если считать, что расстояние между соседними линиями равно 1, то длины его сторон будут выражаться целыми числами *a* и *b*. Чтобы полностью задать рассматриваемый мно-

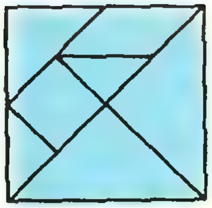


Рис. 1.

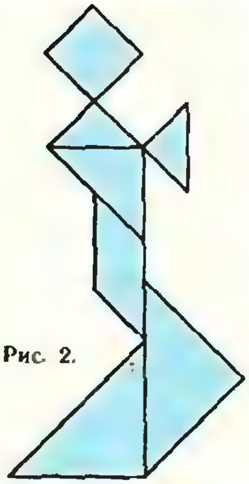


Рис. 2.

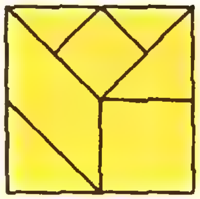


Рис. 3.

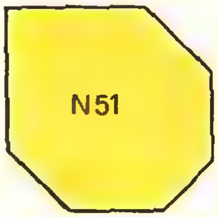


Рис. 4.

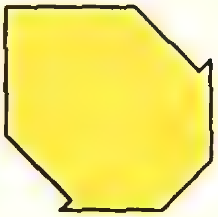


Рис. 5.

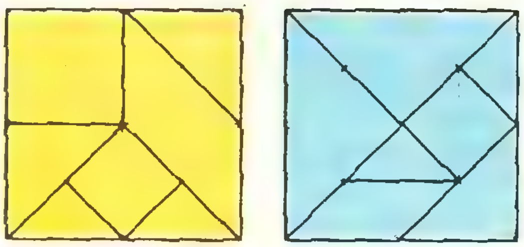


Рис. 6.

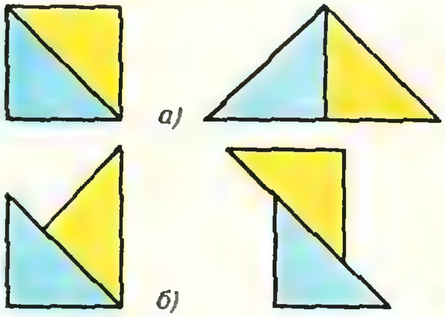


Рис. 7.

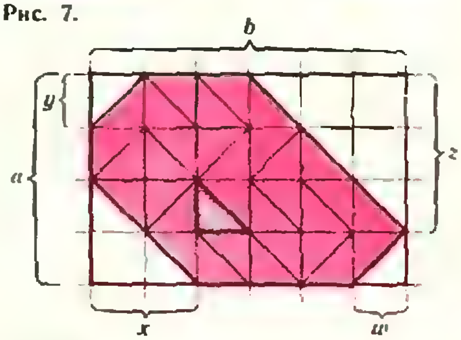


Рис. 8.

гоугольник, надо указать еще 4 целых неотрицательных числа x, y, z и w — длины катетов отрезаемых уголков (см. рис. 8). Зная эти шесть чисел, легко вычислить площадь многоугольника:

$$S=ab-\frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2+w^2).$$

Для искомых многоугольников она должна совпадать с суммарной площадью 16 равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длины 1: $S=16\cdot\frac{1}{2}=8$.

Итак, наша задача претерпела удивительное превращение: из чисто геометрической задачи о составлении многоугольников она превратилась в чисто арифметическую задачу о нахождении неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$2ab-16=x^2+y^2+z^2+w^2. \qquad (1)$$

При этом, конечно, надо еще, чтобы сумма длин катетов отрезаемых уголков, прилегающих к одной стороне прямоугольника, была не больше длины этой стороны. Другими словами, числа a, b, x, y, z и w должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\begin{aligned} &x+y\leqslant a, \quad y+z\leqslant b,\\ &z+w\leqslant a, \quad w+x\leqslant b. \end{aligned} \qquad (2)$$

Дальше геометрия и арифметика будут идти рука об руку.

Прежде всего, выясним, какими могут быть размеры прямоугольника.

С одной стороны, его площадь должна быть не меньше площади искомого многоугольника:

$$ab\geqslant 8. \qquad (3)$$

(Это неравенство легко получить и прямо из уравнения (1).)

С другой стороны, если отрезать от прямоугольника уголки наибольшей общей площади, то площадь остатка должна быть не больше 8. Из рисунка 9 видно, что суммарная площадь уголков, прилегающих к одной стороне прямоугольника, меньше площади равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого конгруэнтны этой стороне. Поэтому самый маленький по площади (непустой) остаток получается, если отрезать уголки от прямоугольника как на рисунке 10, *а* при $a<b$ и как на рисунке 10, *б* при $a=b$. В первом случае у нас останется параллелограмм площади $(b-a)\,a$, во втором — трапеция площади $a-\frac{1}{2}$. Следовательно, при $a<b$

$$(b-a)\,a\leqslant 8. \qquad (4)$$

а при $a=b$

$$a-\frac{1}{2}\leqslant 8. \qquad (5)$$

(Попробуйте вывести эти неравенства из условий (1) и (2)!)

Пары натуральных чисел $(a,\ b)$, удовлетворяющие неравенствам (3) и (4) или (3) и (5), легко найти простым перебором. Например, при $a=1$ получим, что $b\geqslant 8$ и $b-1\leqslant 8$, то есть $b=8$ или 9, при $a=2$ найдем, что $b=4$, 5 или 6 и т. д. Всего имеется 19 таких пар: (1, 8), (1, 9), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6), (6, 7), (7, 7), (7, 8), (8, 8), (8, 9).

Для каждой из этих пар нужно, согласно уравнению (1), найти все представления числа $2ab-16$ в виде суммы четырех квадратов x^2+y^2+

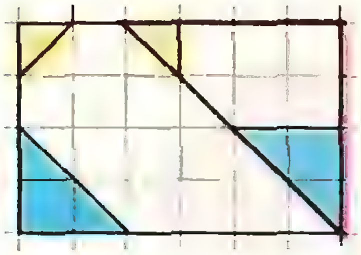
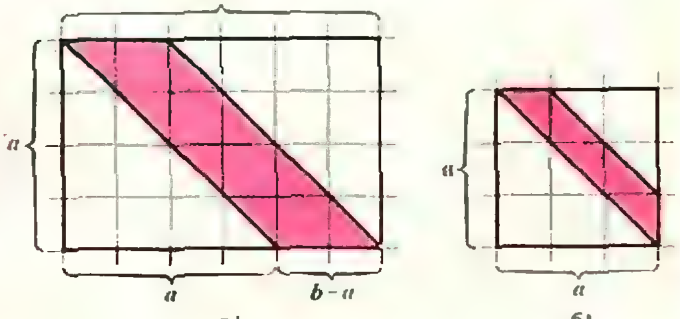


Рис. 9.



а)

б)

Рис. 10.

$+z^2+w^2$, а затем проверить неравенства (2), или нарисовать прямоугольник $a\times b$ и найти все способы отрезания уголков, при которых остается многоугольник площади 8. (Кстати, для некоторых из 19 пар (a, b) числа x, y, z, w подобрать не удается.) Результаты подобных расчетов суммированы в таблице, содержащей список всех 20 выпуклых многоугольников, которые можно сложить из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. (Попробуйте доказать «правильность» двух ее последних столбцов!)

a	b	x	y	z	w	*Т*	*П*
1	8	0	0	0	0		
1	9	0	1	0	1		
1	9	0	1	1	0		
2	4	0	0	0	0	+	
2	5	0	0	0	2	+	+
2	5	1	1	1	1	+	+
2	6	0	2	0	2	+	+
2	6	0	2	2	0	+	+
3	3	0	0	1	1	+	
3	3	0	1	0	1	+	+
3	4	0	2	0	2	+	
3	4	0	2	2	0	+	+
3	5	0	3	1	2	+	
3	5	0	3	2	1	+	+
4	4	0	0	0	4	+	+
4	4	2	2	2	2	+	+
4	6	0	4	0	4		+
5	5	0	3	0	5		+
5	5	1	4	1	4		+
8	9	0	8	0	8		

(В первых шести столбцах представлены все 20 выпуклых многоугольников, которые можно составить из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. В столбце *Т* знаком «+» отмечены те из них, которые можно сложить из элементов танграма; в столбце *П* — те, которые складываются из элементов пифагора.)

Теперь остается только нарисовать все 20 многоугольников из таблицы и убедиться, что среди них нет ни одного семиугольника, а уж тем более фигуры № 51!

Наша история подходит к благополучному завершению. Передо мной — новый, только что купленный экземпляр пифагора. С удовольствием замечаю, что в новой инструкции фигура № 51 — такая, как у нас на рисунке 5. Хотя, не будь прежней инструкции, эта статья и не была бы написана.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 32)

(Рязань) **32**; *К. Кноп* (Одесса) **30**; *Е. Ковальчук* (Киев) **22, 33**; *М. Коган* (Донецк) **32, 35**; *И. Копылец* (Карловка) **28**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **22, 23, 30, 32, 33**; *А. Костюк* (Бердичев) **22**; *К. Кохась* (Ленинград) **23, 32, 33**; *Ю. Кочетков* (Винница) **28**; *Е. Кочкин* (Волжский Волгоградской обл.) **32, 33**; *И. Кулагин* (Свердловск) **32**; *М. Лев* (Свердловск) **22**; *Б. Лееб* (Кельхайм, ФРГ) **28, 30**; *М. Левкин* (Душанбе) **22, 23, 25, 28**; *Д. Локшин* (Москва) **32**; *О. Мазуров* (Новосибирск) **23**; *И. Маркеев* (Москва) **22, 23**; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) **23, 25, 28, 35**; *О. Матвеев* (Свердловск) **25**; *Л. Наймарк* (Ленинград) **23**; *П. Наконечный* (Кривой Рог) **25**; *С. Некрасов* (Череповец) **25**; *А. Ненов* (Плевен, НРБ) **22, 23**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **25**; *А. Оленко* (Умань) **22, 25**; *Д. Орлов* (Владимир) **22, 25**; *Д. Першеев* (Москва) **23**; *К. Порайко* (Винница) **28, 35**; *А. Родионов* (Москва) **22, 23, 33**; *В. Романов* (Москва) **22, 23, 33, 35**; *Л. Рудый* (Кировск Мурманской обл.) **23, 25, 33, 35**; *Е. Рухлин* (Винница) **28**; *В. Садовский* (Ташкент) **23, 32, 33**; *А. Свиридов* (Москва) **25, 28, 32, 33, 35**; *А. Семенов* (Саратов) **23**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **25**; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) **32**; *О. Смирнов* (Остров) **23**; *В. Старобин* (Северодонецк) **32**; *С. Струков* (Воронеж) **22, 25, 28, 30, 32**; *А. Сурков* (Ленинград) **23**; *И. Терещак* (Стражске, ЧССР) **30**; *С. Типцов* (Киев) **23, 25, 30**; *М. Титаренко* (Винница) **35**; *Н. Титаренко* (Винница) **28**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **25, 28**; *Н. Федин* (Омск) **25**; *Б. Фридман* (Москва) **22; 33**; *С. Хирман* (Киев) **23**; *Л. Христоф* (София, НРБ) **32, 33**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **23**; *С. Цонев* (София, НРБ) **23, 25, 32**; *С. Чернышев* (Александров) **32**; *В. Шабунин* (Москва) **23, 25**; *С. Шкарин* (Москва) **25, 28, 30**; *Е. Шульман* (Вологда) **22**; *У. Эммус* (с. Тюки ЭССР) **25, 32**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **22, 28, 33, 35**; *С. Юровский* (Мытищи) **23, 25, 32, 33, 35.**

Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф748, Ф754, Ф758** и **Ф761**. Остальные задачи решили: *О. Андреев* (Киев) **59, 60**; *А. Бабаян* (Москва) **49, 52, 56, 60, 62**; *Л. Байрак* (Белгород) **57**; *В. Барабанов* (Севастополь) **57**; *Г. Баранов* (Донецк) **52, 55, 56, 59—62**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **50, 55—57, 59, 60**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **53**; *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) **55—57**; *В. Булавас* (Паневежис) **49,**

(Продолжение см. на с. 41)

Л. Баканина

Законы Ньютона

Основные законы динамики были установлены около трехсот лет тому назад великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643—1727). Ньютон сформулировал их следующим образом (А. Г. Дорфман. «Всемирная история физики». М., «Наука», 1974):

Закон I. *Всякое тело продолжает сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, поскольку оно не принуждается приложенными силами изменять это состояние.*

Закон II. *Изменение* ⟨*количества*⟩ *движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон III. *Действие всегда встречает равное противодействие, или воздействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.*

За 300 лет эти законы многократно подвергались экспериментальной проверке, и никаких нарушений обнаружено не было. Уточнялись лишь границы их применимости и вносились поправки, необходимые для областей микромира и скоростей, близких к скорости света.

Очевидно, что первый закон, по существу, постулирует существование таких систем отсчета (связанных с материальными объектами), в которых справедливы второй и третий законы Ньютона. Эти системы отсчета называют инерциальными.

Третий закон утверждает, что сила всегда является результатом взаимодействия двух каких-то тел. Если рассмотреть все тела, которые взаимодействуют с исследуемым телом, можно определить все силы, на него действующие. В современной физике силы взаимодействия делят на четыре больших класса: гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые (два последних класса относятся к ядерным взаимодействиям). В механике, кроме гравитационных сил, принято выделять силы упругости и силы трения. По происхождению две последние силы — электромагнитные, но каждая из них имеет свои особенности и потому рассматривается отдельно.

Основным является, конечно, второй закон, который в настоящее время чаще всего записывается в виде

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F}$ — действующая на тело сила, m — масса тела и $\vec{a}$ — приобретаемое телом ускорение. Если известны все действующие силы, с помощью этого закона можно найти ускорение тела, а следовательно, скорость и координаты в любой момент времени.

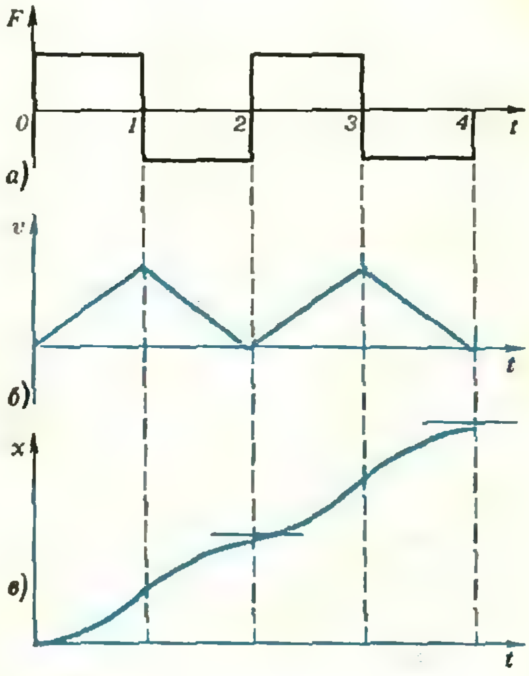


Рис. 1.

Поясним сказанное на конкретных задачах. Большинство из них предлагалось на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Сила, действующая на тело, периодически меняет свое направление на противоположное (рис. 1, а). Как движется тело под действием такой силы?*

Рассмотрим, как зависят от времени скорость тела и его перемещение вдоль линии действия силы (пусть это будет ось X). Для определенности будем считать, что начальные скорость и координата равны нулю.

На участке *0—1* сила постоянна и по модулю, и по направлению; следовательно, движение тела равноускоренное: скорость меняется пропорционально времени, а перемещение — пропорционально квадрату времени. В таком случае график скорости (точнее — ее проекции на выбранное направление) представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 1, *б*), а график перемещения (вернее — координаты x) — параболу, вершина которой находится в начале координат (рис. 1, *в*).

На участке *1—2* сила постоянна, но направлена в противоположную сторону. Скорость линейно падает со временем и в точке *2* обращается в нуль (время действия силы такое же, как на первом участке; значит, такое же и изменение количества движения). График координаты на этом участке — парабола, у которой вершина находится в точке *2*. В точке *1* происходит плавный переход одной параболы в другую, так как разрыва скорости в этой точке нет.

Дальше рассмотрение ведется аналогично. Как видно из полученных графиков, скорость нигде не меняет знак, лишь периодически обращается в нуль, а координата все время увеличивается. Другими словами, тело все время удаляется от первоначального положения, его движение вовсе не является периодическим, хотя именно такой ответ часто приходится слышать от абитуриентов на вступительных экзаменах.

Задача 2. *Два тела массой $M_1=7$ кг и $M_2=5$ кг связаны нитью и лежат на горизонтальном столе (рис. 2, а). К ним через блок, укрепленный на краю стола, подвешивают третье тело массой $M=1$ кг. Коэффициент трения между первыми двумя телами и столом $\mu=0,1$. Определите натяжение обеих нитей и силы трения, действующие на тела. Как изменится ответ, если $M=1,5$ кг?*

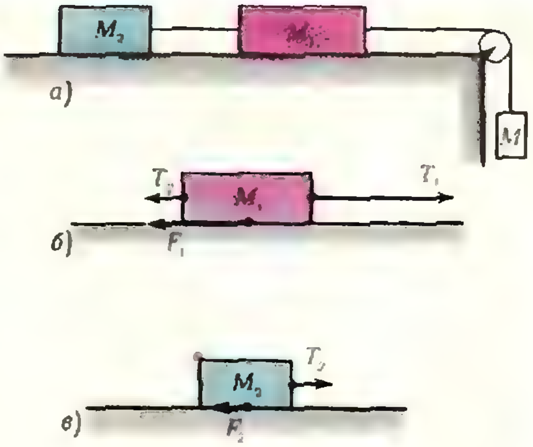


Рис. 2.

Так как значение силы трения существенно зависит от того, движется или покоится тело, прежде всего выясним, что происходит с данной системой тел. Очевидно, тела будут двигаться, если сила тяжести Mg больше максимальной силы трения покоя $F_{max}=\mu(M_1+M_2)g$.

В первом случае $Mg=10$ Н, а $F_{max}=12$ Н; следовательно, движения не возникает. При этом натяжение первой нити, перекинутой через блок, равно

$$T_1=Mg=10 \text{ Н}.$$

Рассмотрим силы, действующие на тело массой M_1 (рис. 2, *б*). Так как $T_1=10 \text{ Н}>\mu M_1 g=7$ Н, сила трения достигает своего максимального значения

$$F_1=\mu M_1 g=7 \text{ Н}.$$

Эта сила не может уравновесить натяжение T_1 первой нити, и вторая нить тоже натягивается. Ее натяжение равно

$$T_2=T_1-F_1=3 \text{ Н}.$$

На тело массой M_2 действуют две силы: натяжение нити T_2 и сила трения F_2 (рис. 2, *в*). Так как $T_2=3 \text{ Н}<\mu M_2 g=5$ Н, сила трения покоя F_2 уравновешивает натяжение нити:

$$F_2=T_2=3\ \text{Н}.$$

Во втором случае $Mg=15$ Н; следовательно, $Mg>F_{\max}$, и система тел движется как единое целое. При этом силы трения, действующие на тела, есть силы трения скольжения. Следовательно,

$$F_1=\mu M_1 g=7\ \text{Н} \quad \text{и} \quad F_2=\mu M_2 g=5\ \text{Н}.$$

Обозначим модуль ускорения всех тел через a и запишем второй закон Ньютона для каждого из тел, выбрав соответствующую ось координат:

$$Mg-T_1=Ma,$$
$$T_1-F_1-T_2=M_1 a,$$
$$T_2-F_2=M_2 a.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$T_1=Mg\frac{(M_1+M_2)\ (1+\mu)}{(M+M_1+M_2)}=14{,}65\ \text{Н},$$

$$T_2=Mg\frac{M(1+\mu)}{(M+M_1+M_2)}=6{,}12\ \text{Н}.$$

Распространенная ошибка абитуриентов — и в первом случае используется решение, пригодное только для движущейся системы.

Задача 3. *По «экватору» внутренней поверхности сферической оболочки массой M с постоянной по модулю скоростью движется небольшой шарик массой m, совершая полный оборот за время T (рис. 3). Считая, что внешних сил нет и трение отсутствует, определите, с какой силой шарик давит на сферу. Расстояние между центрами тяжести шарика и сферы равно d.*

Поскольку на систему «сфера — шарик» внешние силы не действуют, центр масс этой системы должен покоиться (что непосредственно следует из законов Ньютона). Это означает, что движутся не только шарик, но и сфера, причем оба они вращаются вокруг оси, проходящей через центр масс системы.

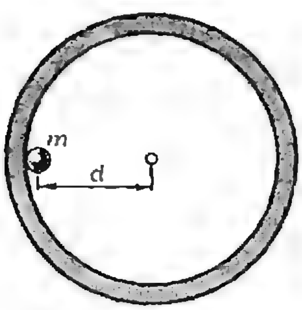


Рис. 3.

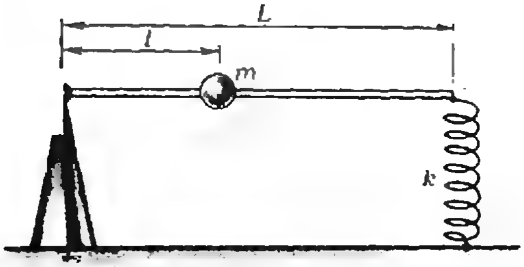


Рис. 4.

Обозначим расстояние от шарика до центра масс через r, тогда

$$mr=M(d-r), \text{ и } r=d\frac{m}{M+m}.$$

По третьему закону Ньютона сила, с которой шарик давит на сферу, равна по модулю силе, с которой сфера действует на шарик. Она и сообщает шарику центростремительное ускорение

$$a_{ц}=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{Md}{(M+m)}$$

Итак, искомая сила равна по модулю

$$F=ma_{ц}=\frac{4\pi^2 Mmd}{T^2(M+m)}$$

и направлена по радиусу от центра вращения.

Задача 4. *Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткостью k (рис. 4). Определите период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней груза массой m.*

Пусть груз сместился по вертикали на расстояние x. При этом пружина деформируется на $x_1=xL/l$, и со стороны пружины на конец штанги действует сила $F_1=kx_1=kxL/l$. Штанга невесома, поэтому суммарный момент сил, действующих на нее, должен быть равен нулю (иначе она приобрела бы бесконечно большое угловое ускорение):

$$F_1 L=F_2 l,$$

где F_2 — сила, действующая на штан-

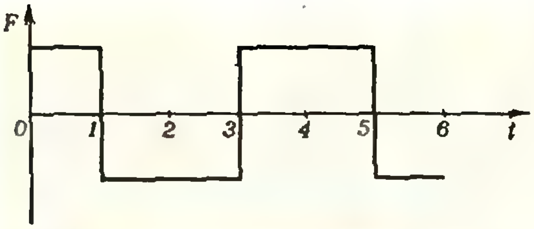


Рис. 5.

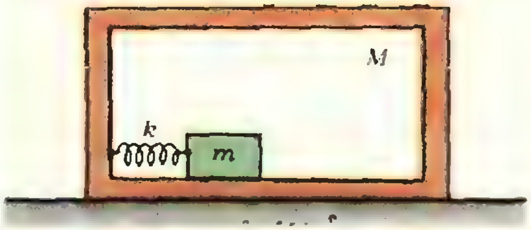


Рис. 6.

гу со стороны груза. Следовательно, на груз со стороны штанги действует возвращающая сила, равная

$$F_2 = F_1 \frac{L}{l} = k \left(\frac{L}{l}\right)^2 x.$$

Запишем для груза второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ или } ma_x = -k \left(\frac{L}{l}\right)^2 x.$$

Это — уравнение движения, описывающее свободные гармонические колебания. Оно аналогично уравнению движения груза на пружине, только роль жесткости пружины здесь играет выражение $k_1 = k(L/l)^2$.

Таким образом, период колебаний груза, а значит, и невесомой штанги, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi \frac{l}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Упражнения

1. Как будет двигаться тело, если действующая на него сила изменяется со временем так, как показано на рисунке 5?

2. Три бруска одинаковой массой $M = 5$ кг лежат на горизонтальном столе. Бруски связаны нитями, которые рвутся при натяжении $T = 20$ Н. Коэффициенты трения брусков о стол равны, соответственно, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}2$ и $\mu_3 = 0{,}1$. Брусок *3* тянут с силой F, которую постепенно увеличивают. Которая из нитей, скрепляющих бруски, порвется, и при какой минимальной силе F это произойдет? Как изменится ответ, если силу F прикладывать к бруску *1*?

3. Груз, подвешенный на нити длиной L, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Найдите период обращения груза, если нить отклонена от вертикали на угол α.

4. Коробка массой M стоит на горизонтальном столе (рис. 6). Коэффициент трения между столом и коробкой μ. Внутри коробки лежит тело массой m, которое может без трения двигаться по дну коробки. Оно прикреплено к стенке коробки пружиной жесткостью k. При какой амплитуде колебаний тела коробка начнет двигаться по столу?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 32)

55, **60**; *М. Верховодов* (Киев) **49, 53, 56, 57, 59**; *М. Гаджибабаев* (Махачкала) **57**; *И. Гайович* (Киев) **53, 59, 60**; *Д. Голенков* (Долгопрудный) **60**; *Э. Горячковский* (Кишинев) **52**; *М. Гостев* (Липецк) **49, 50, 52, 56, 60**; *А. Грабчак* (с. Ободовка Винницкой обл.) **60**; *О. Гришин* (Тула) **50, 56, 60**; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 56, 59, 60, 62**; *А. Дубровский* (Харьков) **59**; *А. Дунаевский* (Киев) **50, 52—57, 59, 60, 62**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 50, 55, 56, 60**; *С. Ефимов* (Баку) **56, 57**; *В. Житомирский* (Харьков) **49, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 62**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **49, 50, 52, 59, 60, 62**; *Д. Зайцев* (Горький) **49, 53, 56**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **52, 55—57, 59, 62**; *А. Зенков* (Свердловск) **57**; *М. Зиманов* (Алма-Ата) **59, 60**; *Д. Каледин* (Москва) **57, 59, 60**; *И. Калиновский* (Киев) **56, 60, 62**; *Е. Канцыпер* (Таллин) **57, 60**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **52**; *С. Кастелли* (Болград) **53, 57, 59, 60, 62**; *Ю. Кившарь* (Харьков) **57**; *В. Кидысюк* (Рязань) **51—53, 56, 57, 62**; *М. Козаченко* (Ровно) **55, 60**; *А. Комов* (Александров) **49—52, 57, 59, 60, 62**; *А. Корчагин* (Красноармейск) **49, 53, 56, 57, 59, 60**; *Н. Косматов* (Москва) **51**; *В. Криман* (Винница) **53—57, 59, 60**; *И. Крылов* (Куйбышев) **57**; *Д. Купцов* (Москва) **53, 55, 56, 59, 60**; *Н. Кухаркин* (Москва) **56, 59, 60**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **53—55, 57, 59, 60**; *М. Ларионов* (Свердловск) **56**; *С. Лиханский* (Херсон) **60**; *А. Лихачев* (Барнаул) **56**; *О. Лопин* (Фрунзе) **55, 56**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **51, 52, 56, 57, 60**; *К. Макарчук* (Киев) **62**; *А. Максимов* (Новосибирск) **56, 60, 62**; *А. Малай* (Каушаны) **60**; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) **52, 55, 57**; *Л. Маркович* (Брест) **50, 52, 56, 57, 60, 62**; *В. Маслов* (Омск) **59, 60**; *И. Медков* (Москва) **49, 51**; *В. Мороз* (Минск) **55—57, 60**; *С. Мусаев* (Баку) **59, 60**; *Д. Набутовский* (Новосибирск) **56, 57, 59**; *А. Носков* (Москва) **59**; *Р. Овчарек* (Шецин, ПНР) **60**; *А. Охапкин* (Чита)

(Окончание см. на с. 55)

Стандартные приемы программирования.

Урок 3. Переработка массивов на месте

Сравните свои решения подготовительных задач к этому уроку (см. «Квант» № 11, Урок 2) с приведенными здесь. Варианты *а*) — это правильные решения, варианты *б*) — это типичные ошибки (программы не дадут желаемого результата), варианты *в*) работать будут, и все же их нельзя признать приемлемыми.

Так же, как на прошлом уроке, давайте посмотрим, что общего в условиях задач. Главным общим моментом является то, что **результат должен получиться на том же месте, где находились исходные данные.** Теперь посмотрите на расчетные формулы в условиях задач (читатель простит употребление программистского знака «присваивание» вместо математического знака «равно», оно здесь естественно) и сравните расчетные формулы с решениями *б*); эти решения — «дословные» переводы формул на язык программирования. Мы столкнулись с той же проблемой, что и на прошлых уроках: разницей в правилах разговора на языке математики и языке программирования.

Когда математик пишет формулу транспонирования матрицы, то есть отражения ее элементов относительно диагонали (для всех i, j $a'_{ij} := a_{ji}$) он, по-видимому, имеет в виду, что по команде «Алле-оп!» все элементы матрицы разом подпрыгнут вверх и тут же все разом опустятся на свои места, но уже с измененными значениями. Но ЭВМ не может делать все сразу*); процесс обработки данных происходит в пространстве и во времени: сначала обрабатывается один элемент, затем другой и т. д. И к тому времени, когда начнется обработка i-го элемента, для которой нужно старое значение k-го элемента, k-й элемент

---

*) Некоторые современные ЭВМ уже научились и этому, но в языке паскаль такие возможности не отражены.

Решения подготовительных задач

Задача 1 (среднее арифметическое и среднее геометрическое)

а)

```
for i:=1 to n do
begin d:=a[i];
  a[i]:=(a[i]+b[i])/2;
  b[i]:=sqrt(d*b[i])
end;
```

Более быстрый вариант:

```
for i:=1 to n do
begin ai:=a[i]; bi:=b[i];
  a[i]:=(ai+bi)/2;
  b[i]:=sqrt(ai*bi)
end;
```

б)

```
for i:=1 to n do
begin a[i]:=(a[i]+b[i])/2;
    b[i]:=sqrt(a[i]*b[i])
end;
```

Задача 2 (деление на диагональный элемент)

а)

```
for i:=1 to n do
begin d:=a[i,i];
  for j:=1 to n do
    a[i,j]:=a[i,j]/d;
end;
```

б)

```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
   a[i,j]:=a[i,j]/a[i,i];
```

Задача 3 (транспонирование)

а)

```
for i:=1 to n-1 do
  for j:=i+1 to n do
  begin d:=a[i,j];
    a[i,j]:=a[j,i];
    a[j,i]:=d
  end;
```

б)

```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    a[i,j]:=a[j,i];
```

второе решение:

```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
  begin d:=a[i,j];
    a[i,j]:=a[j,i];
    a[j,i]:=d
  end;
```

уже может успеть получить новое значение. Аналогично, мы привыкли, что математическую фразу «для всех i при $i \in M$» мы переводим на язык программирования циклом с параметром i, пробегающим множество M. Чаще всего этот перевод правильный, но бывают и исключения, одним из которых часто является переработка массивов на месте. Посмотрите на второе решение *б*) задачи 3 и попробуйте понять, что сделает программа и почему в результате ее работы матрица останется в неизменном виде.

Итак, стало понятно, что если один из элементов перерабатываемого на месте массива нужен для вычисления нового значения другого элемента, то его надо как-то сохранить. Простейшее решение — снять копию с исходного массива и записать результат в другое место — на практике часто не годится. Программируя задачу больших размеров (или задачу не очень больших размеров, но на ЭВМ с небольшой памятью), вы можете столкнуться с ситуацией, когда массив занимает почти всю память и на копию просто нет места. В этом и заключается недостаток вариантов *в*): при больших размерах массивов программе не хватит памяти. Однако, как показывают варианты *а*), необходимости в копировании массива нет: вполне можно обойтись одним дополнительным элементом (в программах — это переменная с именем *d*) для сохранения значения, необходимого для вычисления нескольких новых значений.

Теперь можно сделать окончательные выводы.

в)

```
for i:=1 to n do
begin c[i]:=a[i];
  a[i]:=(a[i]+b[i])/2;
  b[i]:=sqrt(c[i]*b[i])
end;
```

```
for i:=1 to n do
begin d[i]:=a[i,i];
  for j:=1 to n do
  a[i,j]:=a[i,j]/d[i];
end;
```

```
for  :=1 to n do
  for j:=1 to n do
    c[j,i]:=a[i,j];
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    a[i,j]:=c[i,j];
```

1. При переработке массивов на месте необходимо принимать меры к сохранению значений элементов, нужных при последующих вычислениях. Как правило, для этого достаточно ОДНОГО вспомогательного элемента.

В крайнем случае, когда одного элемента явно мало, можно взять массив меньшей размерности (например, одномерный массив вместо матрицы). Разумеется, бывают случаи, когда массив на месте обработать нельзя, и тогда приходится снимать копию.

2. Если элементы обрабатываются не в порядке их расположения в массиве, то циклы перебора элементов массива следует организовать специальным образом.

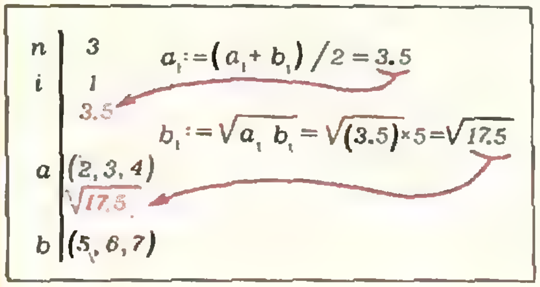
Например, в задаче 3 одновременно обрабатываются пары элементов, симметричные относительно диагонали, поэтому организация цикла отличается от «дословного» перевода математической формулы.

Посмотрим теперь, почему начинающие программисты не видят ошибки в вариантах *б*), и научимся правильно делать самостоятельную проверку решений. Проверяя небольшой фрагмент программы, программист мысленно пытается выполнить соответствующие действия, но при этом часто делает не то, что будет делать программа, а то, что он хочет, чтоб она делала. Для контроля мелких фрагментов можно порекомендовать проверять программу на небольших конкретных примерах, применяя так называемую *ручную прокрутку*, то есть пооперационное выполнение программы вручную. Помните, что ручная прокрутка требует аккуратности и внимательности.

Проверим, например, вариант *б*) задачи 1. Для этого возьмем небольшие массивы, скажем $a=(2,\ 3,\ 4)$, $b=(5,\ 6,\ 7)$, и прокрутим программу $n=3$, $i=1$, $a[1]=$ $=(2+5)/2=3{,}5$, $b[1]=\sqrt{2\cdot 5}=\sqrt{10}$ и т. д. Это и есть та самая типичная ошибка: мы сделали то, что сами хотим от ЭВМ, а не то, что сделает ЭВМ на самом деле!

Правильная прокрутка выполняется так: *а*) выписывается таблица всех действующих в проверяемом фрагменте идентификаторов и их значений, *б*) на каждом шаге старое значение зачеркивается и заменяется новым.

Прокрутим тот же пример:



Ошибка стала видна на первом же шаге.

И, наконец, последний вопрос: не ухудшается ли программа по скорости при стремлении обойтись без вспомогательных массивов? Ответ неоднозначен. В механике есть «золотое правило»: во сколько раз выигрываем в силе, во столько раз проигрываем в расстоянии. В программировании есть свое «золотое правило»: выигрываем в скорости — теряем в памяти, и наоборот. Но, в отличие от механики, в программировании бывают исключения. Как отмечалось на прошлом уроке, индексация — это трудоемкая операция, и поэтому *все программы вариантов а) работают быстрее программ вариантов в)*. Но в общем случае запрет использовать вспомогательную память замедляет программу и требует от программиста некоторой хитрости и хорошего комбинационного зрения. Так же, как хоккеист должен уметь владеть шайбой на максимальной скорости, а при необходимости уметь обвести соперника «на пятачке» (не сходя с места), программист должен уметь «выжать» из программы максимальную скорость, а при необходимости «сработать на пятачке» (без дополнительной памяти). Для этого он должен *постоянно совершенствовать и расширять свой арсенал технических приемов.*

Контрольное задание

3.1. Симметрично переверните массив $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то есть поменяйте местами элементы a_1 и a_n, a_2 и a_{n-1} и т. д.

3.2. Выполните циклический сдвиг массива на k элементов: a_1 должен перейти на место a_{k+1}, a_2 — на место a_{k+2} и т. д., при этом элементы, вышедшие за границу массива, переходят в его начало: a_{n-k+1} в a_1, a_{n-k+2} в a_2 и т. д.

Обе задачи сделайте в двух вариантах: с записью результата в другой массив и с записью в тот же (без вспомогательного массива). Качественно оцените, какой вариант быстрее.

Подготовительные задачи к уроку 4

1. Даны два массива длины n и m, упорядоченные по возрастанию (в обоих массивах каждый элемент меньше своего соседа справа), и пустой массив длины $n+m$, в который надо переписать элементы двух данных массивов, сохраняя упорядоченность. При этом следует выбирать по одному элементу из исходных массивов и помещать этот элемент сразу на свое место.

2. Дан основной массив и два пустых массива. Выберите в основном массиве ненулевые элементы и рассортируйте их: положительные запишите в один из пустых массивов, отрицательные — в другой. В конце запишите в результирующие массивы по одному нулю, «закрывающему» массив.

3. Даны два массива длины n: (a_i) и (b_i). Вычислите сумму $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (эта сумма — так называемое «скалярное произведение n-мерных векторов»).

4. Дан массив a длины $2n$ и массив b длины n. Перепишите в массив b элементы с четными номерами из массива a: $a_{2i} \to b_i$.

Традиционные вопросы: что общего в условиях и решениях этих задач? чем задачи 1 и 2 отличаются от задач 3 и 4?

Рецензии, библиография

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по физике, выпускаемые в 1983 году издательством «Наука» в серии Библиотечка «Квант». В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет. Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой» принимают без ограничений предварительные заказы (открытки) на эти книги.

1. Б. С. Бокштейн. *Атомы блуждают по кристаллу* (I кв.). Цена 40 к.

Эта книга — о диффузии. Именно диффузия лежит в основе многих сложных процессов, протекающих в твердых телах и определяющих такие свойства тел, как прочность и долговечность. Книга рассказывает о том, как перемещаются атомы в кристаллах, каким строгим законам подчиняются блуждания атомов, а также о том, к чему приводит нарушение этих законов — о диффузионных катастрофах.

2. А. В. Бялко. *Наша планета — Земля* (I кв.). Цена 40 к.

Глобальные явления, происходящие на Земле, во многом определяются природой нашей звезды — Солнца. Ему посвящена одна из глав книги, в которой рассказывается о строении Солнца, о термоядерных реакциях, происходящих в его недрах, о солнечном ветре. Остальные главы книги посвящены непосредственно Земле. Чем определяется строение атмосферы Земли, от чего зависит глобальный климат Земли и чем определяется климат местный, как течениями переносятся воды океанов, почему возникают циклоны и антициклоны — об этом можно прочитать в книге.

3. А. А. Михайлов. *Земля и ее вращение* (III кв.). Цена 40 к.

Автор — академик АН СССР, много лет проработавший в Пулковской обсерватории,— популярно рассказывает о планете, на которой мы живем: о форме Земли, ее массе, средней плотности. Много места уделено вопросу вращения Земли вокруг своей оси и обращению ее вокруг Солнца. Специальные главы посвящены открытию земных полюсов и их движению, морским приливам и их влиянию на вращение Земли.

4. С. Р. Филонович. *Самая большая скорость* (II кв.). Цена 40 к.

Скорость света принадлежит к небольшой группе мировых, или фундаментальных, постоянных. Она входит в формулировки физических законов, относящихся к самым, казалось бы, далеким разделам физики. Более трехсот лет насчитывает история измерений скорости света. Новые измерения не только приводили к уточнению значения скорости света, но часто опровергали или подтверждали физические теории, способствовали прогрессу техники. В книге прослеживается история измерений этой замечательной константы.

5. М. Д. Франк-Каменецкий. *Самая главная молекула* (I кв.). Цена 40 к.

Подобно тому, как выяснение строения атома привело к рождению квантовой физики, открытие строения ДНК — самой главной молекулы живой природы — привело к появлению новой молекулярной биологии. В книге рассказано о физических, химических и биологических свойствах ДНК (в частности, о ДНК как носителе генетической информации). Большое внимание уделено открытиям последних лет, приведшим к возникновению генной инженерии.

6. В. С. Эдельман. *Вблизи абсолютного нуля* (I кв.). Цена 40 к.

В книге рассматривается круг вопросов, которыми занимается физика низких температур. Рассказывается о том, как достигаются температуры, близкие к абсолютному нулю, и какие явления наблюдаются при низких температурах (сверхтекучесть, сверхпроводимость), как электроны движутся в жидком гелии и что такое квантовый кристалл. В книге описаны также технические применения сверхпроводимости, такие как создание сильных магнитных полей и высокодобротных колебательных систем.

* * *

Недавно в серии Библиотечка «Квант» вышла в свет книга:

М. И. Каганов, В. М. Цукерник. *Природа магнетизма*. Цена 40 к.

Хотя магниты были открыты на заре цивилизации, понимание природы магнетизма пришло только недавно — после создания квантовой механики. Один из основоположников этой науки Дирак высказал убеждение, что в природе должны быть магнитные заряды. Он назвал их монополями. Много усилий потратили ученые на поиски монополей, но обнаружены они не были. Однако микроскопические источники магнитного поля в природе есть — об этом подробно рассказывается в одной из глав книги. В других главах объясняется, почему различные тела ведут себя по-разному, если их подвергнуть воздействию магнитного поля, что такое магнетики и почему важное место среди них занимают магниты, или ферромагнетики — макроскопические источники магнитного поля.

Л. Владимирова

Задачи Новосибирской ФМШ

В конце 1981 года сибирские физики преподнесли школьникам нашей страны хороший подарок — новый задачник по физике*). Основу его составляют задачи, предлагавшиеся на занятиях в физико-математической школе при Новосибирском государственном университете, на различных олимпиадах и в летних школах.

Задачник этот имеет свое собственное лицо. Познакомиться и поработать с ним будет полезно всем, кто хочет заниматься физикой серьезно, а в дальнейшем и профессионально.

В книге собрано свыше двух тысяч задач различной сложности: от «обычных» задач, которые можно использовать для проверки усвоения разделов школьной программы, до задач, требующих сообразительности, нестандартного мышления. Для большинства задач приводятся только ответы. Все это позволит использовать книгу для занятий в классе, в работе физических кружков, на школьных олимпиадах, для самостоятельных размышлений.

Есть в книге задачи качественные, требующие ясного понимания физических явлений и процессов. Возможно, над этими задачами придется довольно долго подумать. Действительно, не так уж просто дать обоснованный ответ на вопрос: когда быстрее высохнет белье, развешенное в кухне,— если открыть форточку, тогда как на улице моросит холодный осенний дождь, или если ее не открывать? Или на такой вопрос: почему два легких тела, плавающие на поверхности, оба смачиваемые или не смачиваемые водой, притягиваются друг к другу, а в случае, когда одно тело водой смачивается, а другое нет,— отталкиваются?

Бо́льшая же часть задач требует не только рассуждений, но и аккуратных вычислений, построения графиков физических закономерностей. А вычислить школьник может очень многое — и скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно улетело из туманности Андромеды; и минимальное и максимальное давления внутри сферической капли жидкости, плавающей в другой жидкости; и максимальное магнитное давление на поверхность сверхпроводника; да и мало ли что еще!

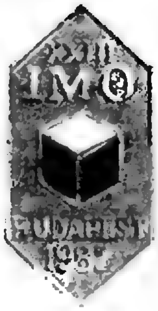
Практически каждая из 13 глав книги содержит задачи по темам, обычно не включаемым в школьные задачники. Для примера можно указать такие темы, как «Преобразования Галилея», «Движения идеальной и вязкой жидкостей», «Вероятность термодинамического состояния», «Сверхпроводники в магнитном поле», «Излучение и отражение электромагнитных волн». Уже только одно это перечисление говорит о том, что авторы затрагивают важные и глубокие вопросы физики.

Самые трудные задачи, задачи с нестандартными формулировками (а их в сборнике довольно много) — чаще всего и самые интересные. Авторы сборника надеются, что решение таких задач будет побуждать школьников к чтению популярных (а может быть и не только популярных!) книг, к более глубокому изучению физики.

Ю. Брук

---

*) И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев, В. Г. Харитонов. *Задачи по физике* (учебное пособие). (М., «Наука», 1981). Цена 95 коп.



А. Абрамов, А. Савин

XXIII Международная математическая олимпиада

Добрая традиция — в середине лета заканчивать сезон математических соревнований школьников Международной математической олимпиадой (ММО) — продолжена и в 1982 году: с 5 по 14 июля венгерские города Будапешт и Цеглед принимали участники XXIII олимпиады.

Ребятам, добившимся права участия в этой олимпиаде, пришлось труднее, чем их старшим товарищам, выступавшим ранее. В связи с быстрым ростом числа стран-участниц (в Венгрии их было уже 30 — это рекорд олимпиад) численность команд была сокращена с 8 до 4 участников, и естественно, что уровень требований при отборе в команды повысился; возросла и ответственность, а следовательно, и нагрузки. Поэтому результат каждого из участников нашей команды, сумевших преодолеть отборочные барьеры, а затем достойно выступить в Будапеште (все четверо награждены медалями, в неофициальном зачете команда опередила многие сильные коллективы и заняла второе место), заслуживает высокой оценки. Но обо всем по порядку.

Система отбора команды в этом году была несколько изменена. В зимние каникулы в поселке Черноголовка под Москвой состоялся первый недельный сбор, на котором после серии контрольных заданий из 12 победителей Всесоюзных олимпиад последних лет были отобраны 6 кандидатов в команду СССР. Окончательный состав был определен в конце месячного тренировочного сбора, прошедшего в июне также в Черноголовке. Членами сборной СССР стали К. Матвеев (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ), Г. Перельман (Ленинград, с. ш. № 239), А. Спивак (Москва, ФМШ № 18 при МГУ) и В. Титенко (д. Блужа Минской обл.). Хорошо были подготовлены и запасные участники С. Матюшов и С. Самборский (Москва, ФМШ № 18 при МГУ) — они помогли команде, сами были готовы к участию в ММО и по праву стали до начала приемных экзаменов студентами механико-математического факультета МГУ. (Поскольку сроки проведения тренировочных сборов и ММО совпадают со сроками вступительных экзаменов в вузы, как члены команды, так и запасные участники зачисляются в выбранные ими вузы без экзаменов. Читатели, видимо, согласятся, что этот путь поступления не самый простой.)

На июньском сборе будущие участники ММО готовились по программе, разработанной в последние годы,— решали задачи, регулярно занимались спортом; культурная программа сбора тоже была обширной. В подготовке команды на всех этапах активно участвовали А. Земляков, Б. Ивлев, С. Конягин, В. Прасолов. Интересные и яркие занятия провели О. Ляшко, А. Разборов. Руководителями команды были А. М. Абрамов и Т. А. Сарычева.

Команда прибыла в Будапешт 7 июля. А с 6 по 8 июля в г. Цеглед международное жюри под председательством академика А. Часара (ВНР) заканчивало последний подготовительный этап — отбирало задачи для олимпиады, утверждало тексты переводов, оценивало задачи в баллах.

Как и в предыдущие годы, в каждый из двух дней олимпиады (9 и 10 июля) участникам отводилось по 4,5 часа на решение трех задач. Читатели могут принять заочное участие в ММО — попробовать за такое же время решить эти задачи и, конечно, записать решения. Тексты пяти задач приводятся в Задачнике «Кванта» (с. 18). Задачи М778 и М779 (эта задача, составленная А. Гришковым, предложена СССР) давались в первый день. Формулировка третьей задачи первого дня такова:

Функция $f(n)$ *определена для всех натуральных* n *и принимает целые неотрицательные значения. Известно, что* $f(n)$ *удовлетворяет условиям:* а) *при любых* m и n $f(m+n)-f(m)-f(n)$ *принимает значения* 0 *или* 1; б) $f(2)=0$; в) $f(3)>0$; г) $f(9999)=3333$. *Найти* $f(1982)$.

Задачи М776, М777, М780 — задачи второго дня. Полное решение каждой задачи оценивалось в 7 баллов.

Как всегда, свои предварительные оценки руководители команд защищали при обсуждении работ с координаторами, представителями страны-организатора, а после завершения координации жюри на заключительном заседании приняло решение о распределении призовых мест. Из 119 участников 10 человек, набравших от 37 до 42 очков, награждены первыми премиями и золотыми медалями; 20 участников, показавших результат от 30 до 36 очков, получили вторые премии и серебряные медали; третьи премии и бронзовые медали вручены 31 участнику за результат от 21 до 29 очков. Абсолютные победители олимпиады — Г. Перельман (СССР), Ле Ту Куок Тханг (Вьетнам) и Б. Хайбл (ФРГ) удостоены специальных призов, учрежденных командой Кувейта. Призы за решение отдельных задач не присуждались.

Личные результаты советских участников таковы: К. Матвеев, стабильно выступающий на всех олимпиадах, набрал 37 очков и заслуженно награжден золотой медалью; о классе Г. Перельмана говорит его результат — 42 из 42; один из победителей Всесоюзной математической олимпиады этого года А. Спивак набрал 30 очков и получил серебряную медаль; бронзовая награда (28 очков) у В. Титенко, результат Володи в творческом отношении заслуживает высокой оценки — он нашел блестящие решения обеих самых трудных задач.

По итогам олимпиады команды расположились в следующей последовательности (в скобках указано число очков, набранных командой): ФРГ (145), СССР (137), ГДР (136), США (136), Вьетнам (133), Венгрия (125), Чехословакия (115), Финляндия (113), Болгария (108), Великобритания (103), Румыния (99), Югославия (98), Польша (96), Нидерланды (92), Франция (89), Австрия (82), Канада (78), Израиль (75), Швеция (74), Австралия (66), Бразилия (66), Монголия (56), Греция (55), Бельгия (50), Куба (44), Колумбия (34), Алжир (23), Венесуэла (23), Тунис (19), Кувейт (4).

Существенно отметить, что командный зачет имеет подчеркнуто неофициальный характер. К сожалению, любая статья об олимпиаде неизбежно напоминает спортивный отчет, поскольку речь идет об очках, местах, медалях. Но к Международной олимпиаде, как, пожалуй, ни к каким другим соревнованиям, применим в полной мере олимпийский девиз «Главное — не победа, а участие». Пусть не каждый участник занял первое место, но в выигрыше остались все — новые страны начинают проводить национальные олимпиады, растет массовость олимпийского движения в математике, во всех странах мира увеличивается число ребят, решающих сначала хитрые олимпиадные задачки, а затем и серьезные математические проблемы. Этим, наверное, и объясняется престижность ММО, постоянный рост числа стран-участниц (их стало уже больше, чем членов Международной федерации хоккея!).

Заканчивая обсуждение итогов, необходимо сказать о высокой оценке международным жюри работы венгерских математиков — организаторов олимпиады. Итоги показали, что рекомендации, подготовленные комиссией по отбору задач во главе с доктором Й. Пеликаном, четырехкратным победителем ММО в 1963—

Советские участники XXIII Международной математической олимпиады. Слева направо: В. Титенко, К. Матвеев, А. Спивак, Г. Перельман.

1966 г., позволили дать хорошо сбалансированный как по тематике, так и по трудности набор задач олимпиады. Четко работали координационные комиссии. Высокий профессионализм организаторов олимпиады лишний раз свидетельствует как об уровне венгерской математической школы, так и о большом опыте работы с юными математиками — напомним, что Венгрия одной из первых стран в мире начала еще в прошлом веке проводить математические олимпиады.

Гостеприимные хозяева помогли участникам ближе ознакомиться с Венгрией, ее историей и культурой. Надолго останутся в памяти экскурсии по Будапешту, который справедливо относят к числу красивейших городов мира. Состоялась поездка с купанием на озеро Балатон, прогулка на теплоходе по Дунаю, ставшему со времен Иоганна Штрауса менее голубым, но оставшемуся прекрасным. А привезенные сувениры — знаменитые «змея», «домино» и, конечно, «волшебный кубик» — будут напоминать участникам олимпиады о встрече с создателем этих игрушек Эрнё Рубиком.

Как всегда, обстановка на олимпиаде была самой теплой и дружественной. Участники со всех континентов (лишь Антарктида пока не была представлена) постоянно общались, рассказывали друг другу о своих странах, обменивались задачами и сувенирами.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 13 июля в актовом зале Садоводческого Университета Будапешта. XXIII олимпиада закончилась — для многих читателей «Кванта» начался новый олимпийский цикл.

13.IPHO'82

Л. Асламазов

XIII Международная физическая олимпиада

Олимпиада 1982 года проходила с 19 по 29 июня в Федеративной Республике Германии, в курортном городе Маленте близ Гамбурга. В ней приняло участие 17 стран: Австрия, Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Италия, Нидерланды, Польша, Румыния, Советский Союз, Финляндия, Франция, ФРГ, Чехословакия, Швеция и Югославия. Впервые на олимпиаду приехали школьники из Австрии, Греции и Нидерландов. Таким образом, круг стран, участвующих в физической олимпиаде, в этом году расширился.

Как и в прежние годы, каждая страна выставила команду из пяти человек — учащихся общеобразовательных и профессиональных школ. Их возраст не превышал 20 лет. Каждую команду сопровождали два руководителя.

В состав команды нашей страны вошли:

Яан Калда (Таллин, с.ш. № 1),

Борис Макеев (Москва, с.ш. № 361),

Александр Панасюк (Одесса, с.ш. № 117),

Владимир Ухов (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),

Павел Цветков (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Руководителями команды были О. Ф. Кабардин (заведующий лабораторией Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР) и М. В. Грабиленков (начальник отдела ученого методического совета Министерства просвещения СССР).

Олимпиаду открыл министр образования и науки ФРГ Б. Енгольм. Он огласил приветствие участникам Президента ФРГ К. Карстенса. Об истории международных физических олимпиад рассказал почетный гость олимпиады профессор Кунфалви (Венгрия), который принимал участие во всех предыдущих олимпиадах.

Как обычно, олимпиада проводилась в два тура — теоретический и экспериментальный. Дни соревнований были отделены друг от друга днем отдыха. Для решения задач каждого тура отводилось пять часов. При этом разрешалось пользоваться электронными калькуляторами, которые получили все участники в подарок от организаторов олимпиады. Тексты задач были написаны на четырех языках: английском, немецком, русском, французском.

Приведем условия предлагавшихся задач.

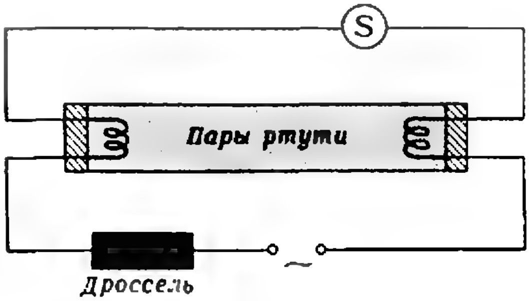


Рис. 1.

Красивый рисунок на эмблеме олимпиады имеет вполне определенный физический смысл — он иллюстрирует обтекание вращающегося цилиндра жидкостью (или газом). На рисунке ясно видно, как из-за вращения цилиндра скорость жидкости внизу оказывается меньше, чем вверху. В соответствии с законом Бернулли, там, где скорость течения жидкости меньше, ее давление больше. Поэтому на цилинд будет действовать подъемная сила, перпендикулярная направлению течения. Этот эффект был открыт в 1852 году немецким физиком Г. Магнусом.

Приведем любопытный пример практического использования эффекта Магнуса. В 1924 году на верфях города Киля была построена шхуна, на которой вместо мачт были установлены вращающиеся цилиндры. В результате обдувания их ветром возникала сила, приводящая шхуну в движение.

Теоретический тур

Задача 1. «Люминесцентная лампа».

Дана люминесцентная лампа, включенная в сеть по схеме, приведенной на рисунке 1. Частота переменного напряжения в сети $\nu = 50$ Гц. Измеряются следующие величины: сетевое напряжение $U = 228{,}5$ В, сила тока в цепи $I = 0{,}6$ А, напряжение на люминесцентной лампе $U' = 84$ В, омическое сопротивление балластного дросселя $R_д = 26{,}3$ Ом. Люминесцентную лампу можно рассматривать как омическое сопротивление.

а) Какой индуктивностью L обладает дроссель?

б) Определите величину сдвига фаз φ между напряжением и током.

в) Какая активная мощность P выделяется в приборе?

г) Дроссель кроме ограничения тока выполняет еще одну важную функцию. Назовите и объясните ее.

Указание. Стартер S имеет контакт, который замыкается вскоре после включения лампы, а затем размыкается и остается разомкнутым.

д) Нарисуйте кривую зависимости испущенного лампой светового потока от времени.

е) Почему лампа горит все время, хотя приложенное переменное напряжение через регулярные промежутки времени проходит через нуль?

ж) У люминесцентных ламп описанного типа иногда последовательно дросселю подключается конденсатор емкостью 4,7 мкФ Как это влияет на работу лампы и для какой цели предусмотрена такая возможность?

Задача 2. «Качающаяся вешалка».

Дана вешалка из проволоки, которая качается с маленькой амплитудой в плоскости чертежа (рис. 2). В положениях *а*) и *б*) длинная сторона расположена горизонтально.

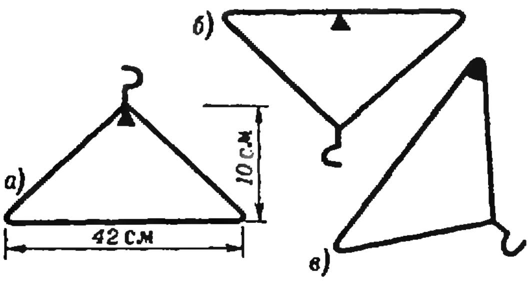


Рис. 2.

Две другие стороны равны между собой. Во всех трех случаях периоды колебаний одинаковы. Где лежит центр масс и каков период колебаний?

Из рисунков можно найти только размеры. Распределение массы вешалки в деталях неизвестно.

Задача 3. «Воздушный шар с подогревом воздуха».

Имеется воздушный шар с постоянным объемом $V = 1{,}10$ м³. Масса оболочки (объемом которой можно пренебречь) составляет $m_0 = 0{,}187$ кг. Шар стартует при температуре окружающего воздуха $t_1 = 20$°С и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м². Плотность воздуха при этих условиях равна $\rho_1 = 1{,}20$ кг/м³.

а) Какую температуру t_2 должен иметь нагретый воздух внутри шара, чтобы шар мог свободно парить в воздухе?

б) Воздух внутри привязанного к тросу шара нагревается до постоянной температуры $t_3 = 110$°С. Найдите действующую на трос силу.

в) Предположим, что шар герметичен (тогда плотность воздуха в шаре остается постоянной). Шар поднимается в изотермической атмосфере с температурой $t_1 = 20$°С и давлением на уровне Земли $p_0 = 1{,}013 \times 10^5$ Н/м². Температура воздуха внутри шара постоянна и равна $t_3 = 110$°С. Какой высоты h достигнет шар при этих условиях?

г) Шар (описанный в предыдущем вопросе) смещается из положения равновесия на высоту $\Delta h = 10$ м и затем отпускается. Опишите качественно, как он движется после этого.

Экспериментальный тур

Задача 4. «Измерения на линзе».

Даны симметричная двояковыпуклая линза, плоское зеркало, вода, линейка, а также карандаш и штатив с муфтой. При решении задачи можно пользоваться только этими предметами.

а) Определите фокусное расстояние линзы с максимальной погрешностью ±1%.

б) Определите показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза. Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$.

Для фокусного расстояния тонкой линзы имеется выражение

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где n — показатель преломления линзы, r_1 и r_2 — радиусы кривизны обеих преломляющих поверхностей. Для симметричной двояковыпуклой линзы $r_1 = -r_2 = r$, для симметричной двояковогнутой линзы $r_1 = -r_2 = -r$.

Задача 5. «Движение катящегося цилиндра».

Движение цилиндра складывается из вращательного движения вокруг оси и горизонтального поступательного движения. В этом опыте определяются только ускорение поступательного движения и вызывающие его силы.

К цилиндру с радиусом R и массой M, который лежит на горизонтальной поверхности, приложена сила на расстоянии r_i ($i = 1, ..., 6$) от оси цилиндра (рис. 3). После

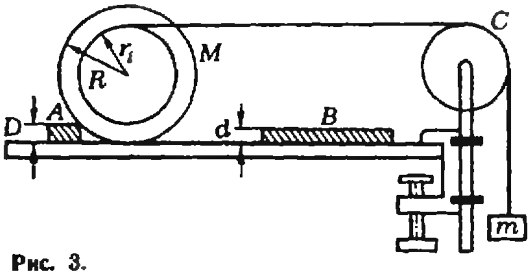


Рис. 3.

того как цилиндр освободили, он катится с постоянным ускорением.

а) Определите экспериментально линейные ускорения оси цилиндра для различных расстояний r_i $(i=1,...,6)$.

б) По найденным значениям ускорений a_i рассчитайте горизонтальные силы реакций F_i, действующие между цилиндром и горизонтальной поверхностью.

в) Изобразите зависимость F_i от r_i графически. Обсудите результат.

Перед началом опыта плоскую поверхность расположите горизонтально. Для данного опыта достаточно установить горизонтальное положение с погрешностью ±1 мм на 1 метр длины.

Даны следующие размеры:

$R=5$ см, $r_1=0{,}75$ см,
$M=3{,}275$ кг, $r_2=1{,}5$ см,
$m=2\times50$ г, $r_3=2{,}25$ см,
$D=1{,}5$ см, $r_4=3{,}0$ см,
$d=0{,}1$ мм, $r_5=3{,}75$ см,
$r_6=4{,}5$ см.

Трением и массой ролика при расчетах пренебречь.

Секундомер подключается к контактам A и B, как показано на приведенной электронной схеме (рис. 4). Он работает, если контакт A размыкается, и отключается, если контакт B замыкается. Транзисторная схема нужна для того, чтобы после замыкания контакта B фиксировать положение реле, даже если затем из-за ударов или прыжков цилиндра контакт прерывается на несколько миллисекунд.

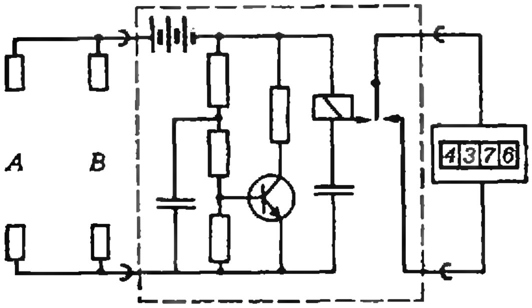


Рис. 4.

Как видно, некоторые необходимые для решения задач знания выходят за рамки школьной программы в СССР. Однако программа олимпиады была объявлена заранее, и все школьники имели возможность к ней подготовиться.

Каждая из трех теоретических задач оценивалась по 10-бальной шкале, полное решение двух экспериментальных задач оценивалось в 20 баллов. Таким образом, максимальное число баллов, которое мог получить участник, равнялось 50. Конкурсные задачи и критерии оценок были подготовлены, как обычно, страной—организатором олимпиады. Проверка работ осуществлялась рабочим жюри, назначенным организаторами.

Перед проведением каждого тура тексты задач, их решения и предлагаемые критерии оценок утверждались Международной комиссией, в состав которой входили руководители всех команд. Председателем этой комиссии был известный немецкий физик профессор Вилфред Кун (автор школьных учебников по физике в ФРГ). Руководители команд получили ксерокопии работ школьников и могли ознакомиться с ними до заседания жюри. Международная комиссия утверждала также результаты проверки работ и определяла победителей олимпиады.

Максимальное число баллов — 43 — получил школьник из ФРГ Манфред Лен. Дипломы первой степени были присуждены также и тем участникам, которые набрали более 90% баллов от лучшего результата. Среди них четверо советских школьников: Б. Макеев, А. Панасюк, В. Ухов и П. Цветков. Это большой успех нашей команды, ни одна другая не получила столько первых премий. В неофициальном командном первенстве наша страна заняла первое место, затем шли Польша, Румыния, Венгрия, ФРГ. Следует отметить большой успех на олимпиаде школьников из социалистических стран.

Дипломы второй степени получили участники, набравшие не менее 78% баллов от наилучшего результата, в том числе советский школьник Я. Калда. Дипломами третьей степени были награждены школьники, набравшие не менее 65% баллов от наилучшего результата.

Кроме дипломов победители олимпиады награждались призами. Так, четыре советских школьника получили в качестве призов мини-компьютеры, на которых можно составлять довольно сложные программы, например — позволяющие решать дифференциальные уравнения.

Физическое общество ФРГ учредило также несколько специальных призов: за лучшее решение каждой из пяти задач, самому молодому

Команда Советского Союза на XIII Международной физической олимпиаде. Слева направо: А. Панасюк, П. Цветков, Б. Макеев, В. Ухов, Я. Калда.

участнику олимпиады, участнику, набравшему максимальное число баллов, и школьнику, участвовавшему в международных физических олимпиадах наибольшее число раз. Последние два приза получил уже упоминавшийся школьник из ФРГ М. Лен (он трижды участвовал в международных физических олимпиадах). Самым юным участником оказался школьник из Югославии Д. Мозетик (он родился 7 июля 1966 года). А вот один из призов за лучшее решение задачи получил советский школьник А. Панасюк (он лучше всех решил вторую задачу).

На закрытии олимпиады выступил статс-секретарь Министерства образования и науки ФРГ Э. Кухлвейн. Он отметил, что олимпиада — это не только соревнование; она способствует популяризации физики среди учащихся. Ведь собравшиеся на международную олимпиаду школьники представляют национальные олимпиады, которые на ранних этапах охватывают огромное количество участников. Кухлвейн пожелал всем участникам олимпиады успехов в будущей научной работе и сообщил также, что все члены команды ФРГ получат стипендию для продолжения образования.

Затем выступил заместитель министра образования земли Шлезвиг-Гольштейн (где проходила олимпиада) Я. Шафер. Он говорил о социальной ответственности высоко одаренных людей перед обществом и высказал убеждение, что олимпиада внесла свой вклад в дело взаимопонимания между народами. На память о самой северной земле ФРГ — земле Шлезвиг-Гольштейн — Я. Шафер подарил всем участникам олимпиады памятные книги.

Председатель Международной комиссии профессор В. Кун подвел итоги олимпиады. Из 84 участников I премии получили 14, II премии — 19, III премии — 23 школьника; 10 участников, набравших более 50% от максимального числа баллов, получили поощрительные грамоты. Кун отметил, что важна не только победа в олимпиаде, но и само участие в ней. Те, кто не получил наград в этот раз, не должны огорчаться. Это вовсе не означает, пошутил профессор, что они не могут стать Нобелевскими лауреатами. Особенно трудно было командам, которые выступали на олимпиаде впервые. Но теперь у них появился опыт, и пусть этот опыт передастся следующим поколениям участников.

Затем победителям были вручены дипломы и призы. Приятно отметить, что среди награжденных две девушки из команды Греции. В заключение самодеятельный оркестр студентов Кильского университета исполнил произведения Моцарта и Гайдна.

Олимпиада в Маленте была прекрасно организована. Школьники жили в благоустроенном общежитии спортивной школы футбольного союза Шлезвиг-Гольштейна. Они могли пользоваться бассейном, спортивным залом, игровыми площадками. Соревнования проходили в конференц-зале гостиницы «Интермар». Участники олимпиады ознакомились с историческими, культурными и научными достопримечательностями окрестностей Маленте. Они совершили интересные экскурсии в город Киль, где посетили музей деревянного зодчества и оперный театр, наблюдали за парадом парусников на парусной регате. Киль известен как город, в котором родился знаменитый физик Макс Планк. Участники олимпиады посетили университет, в котором он долгое время работал. Впечатляющей была поездка в старинный город Любек.

Но особенно интересным было посещение Центра экспериментальной физики в Гамбурге, где расположен ускоритель электронов ДЭЗИ и самое большое в мире накопительное электронно-позитронное кольцо ПЕТРА. Кольцо имеет длину 2,3 км, а энергия частиц достигает 38 ГэВ. Многие эксперименты на этом ускорителе проводятся совместно с учеными других стран, в том числе и Советского Союза.

Международные физические олимпиады уже стали доброй традицией. Следующую олимпиаду намечено провести в 1983 году в Румынии, затем — в Швеции. Уверен, что среди читателей «Кванта» есть будущие участники этих олимпиад.

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1983/84 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых впоследствии становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ. Занятия проводятся в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Ульяновская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Ионов Сергей Валентинович*
3. Класс	*девятый*
4. Номер и адрес школы	*Чуфаровская средняя школа*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*фрезеровщик*
мать	*доярка*
6. Подробный домашний адрес	*433120, Ульяновская обл., Вешкаймский р-он, п. Чуфарово, ул. Заводская, д. 9, кв. 7.*

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1983 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией МФТИ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1983 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—8 — для учащихся восьмых классов, задачи 6—12 — для учащихся девятых классов. В задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 3—10 — для восьмых классов, 6—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Катер, плывущий вниз по реке, догоняет спасательный круг. Через $t=30$ мин после встречи с кругом катер поворачивает назад и снова встречает круг на расстоянии $l=5$ км от места первой встречи. Определите скорость течения реки. Мощность двигателя катера постоянна.

2. В каком случае двигатель автомобиля должен совершить большую работу: для разгона с места до скорости $v_1=40$ км/ч или на увеличение скорости от $v_1=40$ км/ч до $v_2=60$ км/ч? Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения автомобиля, а время разгона в обоих случаях одно и то же.

3. Коэффициент полезного действия тепловой машины $\eta=30\%$. Каким станет КПД, если количество теплоты, получаемое от нагревателя, увеличить на 5%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшить на 10%?

4. Тетраэдр спаян из медных проволочек длиной $l=10$ см и сечением $S=3$ мм^2. Определите сопротивление тетраэдра между двумя его вершинами. Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}018$ Ом · мм^2/м.

5. В сосуде с водой плавает кусок льда, внутри которого находится кусочек пенопласта. Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает?

6. С большой высоты вертикально вниз падает мяч. Определите ускорение мяча сразу после абсолютно упругого столкновения с землей. Поверхность земли горизонтальна.

7. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении осевого вращения Земли. Радиус орбиты спутника в три раза больше радиуса Земли $R_З=6400$ км. Через какое время спутник в первый раз пройдет над точкой запуска?

8. Батарея с электродвижущей силой $\mathcal{E}=12$ В и внутренним сопротивлением $r=4$ Ом подключена к нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки тепловая мощность, выделяемая на ней, будет максимальной?

9. Радиоактивный газ радон с атомной массой $A=222$ распадается на α-частицу с атомной массой $A_1=4$ и осколок с атомной массой $A_2=218$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α-частица? Кинетической энергией радона по сравнению с выделившейся энергией пренебречь.

10. Два баллона, заполненные одним и тем же газом, соединены трубкой с краном. Вначале кран закрыт. Объемы баллонов $V_1=2$ л и $V_2=3$ л. Давление и температура газа в баллонах $p_1=1,5$ атм, $t_1=50°C$ и $p_2=1$ атм, $t_2=100°C$ соответственно. В некоторый момент кран открывают. Найдите давление и температуру газа после установления равновесия. Теплообменом с окружающей средой и объемом трубки пренебречь.

11. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108°C$ и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=4,2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования $L=2,26\cdot10^3$ кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой за время установления равновесия пренебречь.

12. Конденсатор емкости $C=10$ мкФ, заряженный до напряжения $U=150$ В, разряжается через два последовательно соединенных резистора сопротивлением $R_1=5$ Ом и $R_2=15$ Ом. Какое количество теплоты выделится при этом на каждом резисторе?

Математика

1. Из пункта кольцевой дороги в одном направлении выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что n-й обгон мотоциклистом велосипедиста произошел в тот момент, когда велосипедист прошел m кругов, причем велосипедист ни разу не обогнал мотоциклиста. Найдите отношение средних скоростей велосипедиста и мотоциклиста за промежуток времени от старта до n-го обгона.

2. Точка N — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Площадь треугольника ABN равна 1 см². Найдите площадь трапеции.

3. Можно ли перевезти 50 контейнеров, вес которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг, на семи грузовиках, если на каждый из них нельзя грузить больше трех тонн?

4. На плоскости даны две различные точки A и B. Найдите множество точек M таких, что

$$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BM}|-|\overrightarrow{MA}|.$$

5. Докажите, что не существует таких целых чисел x и y, что $x^2-y^2=1982$.

6. Через точку A проведены прямые, касающиеся окружности в точках B и C. Известно, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, принадлежит данной окружности. Найдите $\widehat{BAC}$.

7. Три различных числа, записанные в одном порядке, составляют арифметическую прогрессию, а в другом порядке — геометрическую. Найдите эти числа, если их сумма равна 9.

8. Внутри сферы находится куб, не имеющий общих точек со сферой. На сколько частей разделится сфера плоскостями граней куба?

9. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — длины последовательно занумерованных сторон выпуклого четырехугольника площади S. Докажите, что

$$S<\frac{a_1a_3+a_2a_4}{2}.$$

10. Партию деталей решили поровну разложить по ящикам. Сначала в каждый ящик положили по 12 деталей, но при этом осталась одна деталь. Тогда из одного ящика вынули все детали и в оставшиеся ящики удалось разложить все детали поровну. Сколько деталей было в партии, если в каждый ящик помещается не более 20 деталей?

11. Определите, при каких положительных значениях a из неравенства $|x-3|<a$ следует неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<0,01.$$

12. На координатной плоскости Oxy найдите все точки, из которых парабола $y=x^2$ видна под прямым углом.

13. Определите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3y-a\sqrt{x^2+1}=1 \\ x+y+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 32)

57; *И. Панасенкова* (Москва) **57**; *В. Пекар* (Киев) **50, 60**; *И. Пильников* (Тамбов) **56, 57, 60**; *С. Попырин* (Москва) **59, 60**; *О. Пузырко* (Пярну) **59**; *М. Пустильник* (Свердловск) **49, 50, 55—57, 59, 60**; *М. Розенберг* (Ленинград) **59, 60**; *Н. Розенвайн* (Киев) **50, 52**; *С. Розыскнов* (Керчь) **60**; *В. Ромашин* (Донецк) **52, 53, 56, 57, 62**; *В. Рыбенков* (Махачкала) **49, 50, 53, 56, 59, 60, 62**; *А. Рыляков* (Саратов) **55—57, 60, 62**; *Р. Садыгов* (Сиазань) **60**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **57, 60, 62**; *С. Симанов* (Долгопрудный) **59**; *Р. Сулейманов* (Янгиабад) **56**; *К. Сытник* (Марганец) **57, 60**; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) **50, 52, 53, 59, 60**; *О. Третьяков* (Омск) **53, 56**; *О. Фатьянов* (Курск) **56, 57, 59, 60, 62**; *Н. Федин* (Омск) **49, 50, 52, 53, 56, 57, 60, 62**; *В. Фельдмин* (Саратов) **50, 53, 55—57, 59, 62**; *Л. Фельдман* (Саратов) **56, 57, 59, 60, 62**; *А. Хельвас* (Долгопрудный) **52, 53, 56, 57, 59, 60, 62**; *А. Хомяков* (Белорецк) **60**; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) **49, 50, 53, 56**; *С. Чеканов* (Саратов) **50, 56, 59, 60, 62**; *И. Шойхет* (Ташкент) **52**; *Р. Шпильский* (Киев) **56**; *А. Шугай* (Запорожье) **49, 50, 52, 60**; *Ю. Щербаков* (Запорожье) **60**; *А. Щетинин* (Запорожье) **49**; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) **43, 60**.

Напечатано в 1982 году

С Новым годом! 1 3
Годовщина замечательной статьи 3 2
Космическая весна человечества 4 2
На орбите — новый музей 4 18
Народное образование в СССР 9 3

* * *

Пастухов Б. Верность ленинским заветам, делу партии 5 2
Прокофьев М. С новым учебным годом! 9 2

* * *

Гнеденко Б. Математика в СССР 11 2
Кикоин И. Физика в Союзе Советских Социалистических Республик 12 3

* * *

Геллер Б., Брук Ю. Симеон Дени Пуассон 2 14
Гнеденко Б. Михаил Васильевич Остроградский 10 5
Лишевский В. Даниил Бернулли 3 7
Френкель В. Рыцарь научно-популярной книги (к столетию со дня рождения Я. И. Перельмана) 11 18
Явелов Б. Луи де Бройль 9 28

Статьи по математике

Александров А. Тупость и гений 11 12
12 7
Александров П. Математика и человеческая культура 8 2
Баков А. Разбиение фигур 12 16
Васильев Н., Зелевинский А. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения 1 12
Дубровский В. Алгоритм волшебного кубика 7 22
Дубровский В. Математика волшебного кубика 8 22
Мартынов Б. О максимумах функции Ван-дер-Вардена 6 8
Ногин Д. Кто пойдет за лимонадом? 10 19
Осипов Ю. Гравитационный захват 9 4
Понтрягин Л. Комплексные числа 3 3
Понтрягин Л. Основная теорема алгебры 4 3
Тадеев В. Простые, двойные, гармонические 7 2
Тихомиров В. Аэродинамическая задача Ньютона 5 11
Тоом А. Долго ли палке упасть? 2 10
Шубин М. Топология и ...рельеф местности 8 10

Статьи по физике

Асламазов Л., Кикоин И. Что такое волна? 6 2
Бокштейн Б. Атомы блуждают по кристаллу 11 5
Боровой А. Год чудес 4 10
5 3
Буздин А., Тугушев В. Как создавалась физика низких температур 9 19
Варламов А., Шапиро А. В голубом просторе 3 10
Забабахин Е. Маленькие заметки 12 13
Кикоин К. Что такое потенциальная яма 8 16
Левинштейн М. Эффект Ганна 10 11
Марочник Л. Кометы 7 10
Меледин Г., Сербо В. Конденсация света в вещество 7 19
Мигдал А. Судьба нейтронных звезд 1 4
Михайлов А. Значение астрономии 10 2
Стасенко А. Летать быстрее и дальше 9 12
Сурдин В. Солнечное затмение 31 июля 1981 года 7 26
Фабрикант В. Можно ли услышать рев мамонта? 4 20
Франк-Каменецкий М. Самая главная молекула 8 4
Эфрос А. Что такое теория протекания 2 2

Лаборатория «Кванта»

Алексеев И., Свирида Д. И светит и греет 3 17
Амстиславский Я. Необычные явления вокруг обычных источников света 6 15
Боровой А., Климов Ю. Что происходит на границе 11 22
Варламов А. Сто лет назад 10 22
Людомирский М., Панфилов А. Почему висит кольцо? 4 22
Майер В. Свет, воздух и вода 8 28
Микаэлян Л. Домашние опыты с поляризованным светом 7 32
Шишков С. Водоворот 2 21
Шмелев А. Новогодний физический фейерверк 1 20

Математический кружок

Евграфов М. Механика волшебного кубика 3 20
Камышко И. Поль Дирак и задача о трех рыбаках 9 30
Ходулев А. Расселение фишек 7 28

Искусство программирования

Заочная школа программирования

Урок 17 1 49
Урок 18 2 48
Урок 19 3 52
Урок 20 4 50

Стандартные приемы программирования

Урок 1 10 52
Урок 2 11 62
Урок 3 12 42
Звенигородский Г. VI Всесоюзная летняя школа юных программистов 6 54
Первин Ю. Сортировки по текстовым ключам
Слияния 2 51
Включение и распределение 5 51

Первин Ю. Однажды вечером в семье программиста 8 60

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—6
8—12

* * *

Бартенев Ф. Кантование кубика 6 36
Бартенев Ф., Савин А. Метод перебора 2 36
Бендукидзе А. Треугольник Паскаля 10 45
Иванова Н. Самосовмещения фигур и геометрические задачи 3 40
Калинин А. Причеши ежа 4 36
Нахшин В. Понятие определения и определение понятий 9 50
Панов А. Загадка фигуры № 51 12 34
Савин А. Камушки и шахматная доска 1 36
Савин А. Веселая викторина 7 56

* * *

Кириллова И. Из книг Я. И. Перельмана 11 42
Луганский Л. «Стойте справа, проходите слева...» 5 30
Родина Н. Архимедова сила и киты 8 50

Задачник «Кванта»

Задачи М721—М780; Ф733—Ф792 1—12
Решения задач М488, М681—М758; Ф692—Ф777 1—12

* * *

Зильберман А. Два способа расчета электрических цепей 4 33
Зильберман А. Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением 7 54
Кротов С. О теореме единственности в электростатике 2 32
Кротов С. Об оптимальных траекториях движения 6 30

* * *

Список решивших 3, 6, 9, 12
Победители конкурса «Кванта» 3 26
Премии «Кванта» 9 32

Практикум абитуриента

Быстрый И. О сокращении показателей 6 40
Горнуша П. В чем разница? 8 59
Левитас Г. Используя графики 9 54
Назаретов А. Плоскость в пространстве 6 38
Рыжик В. Надо ли искать ОДЗ? 4 39
Сатьянов П. Формулы и графики 11 46
Смоляков А. Почему так? 8 59

* * *

Баканина Л. Законы сохранения при ядерных превращениях 7 58
Баканина Л. Законы Ньютона 12 38
Данилин В. Кинематика. Относительность движения 10 48
Маринчук М. Квадратное уравнение в задачах по физике 8 54
Можаев В. Фотоны 3 42
Морозов Е. Оптические системы 5 35
Скороваров В. Переменный электрический ток 2 39
Тугушев В. Электрические цепи с нелинейными элементами 1 41

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1981 году

Ворошиловградский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко 6 44
Ереванский государственный университет 4 43
Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького 6 45
Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко 6 41
Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина 2 46
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 3 47
5 54
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 5 46
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе 6 45
Московский автомобильно-дорожный институт 6 46
Московский архитектурный институт 6 48
2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова 6 49
Московский гидромелиоративный институт 4 45
Московский инженерно-физический институт 3 46
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 2 44
Московский институт стали и сплавов 4 44
Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина 3 51
Московский технологический институт лёгкой промышленности 6 51
Московский технологический институт пищевой промышленности 4 46
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 5 40
Московский физико-технический институт 1 46
Московский институт химического машиностроения 3 48
Московский институт электронного машиностроения 2 43
5 54
Московский электротехнический институт связи 1 48
6 14
Московский энергетический институт 2 45
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 6 48
Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола 4 47
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 5 44
Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола 4 48
Ростовский государственный университет им. М. А. Суслова 6 42
Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина 6 43

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина 5 48
Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта 6 51
Харьковский институт радиоэлектроники 3 49
Харьковский государственный университет им. А. М. Горького 6 44

Рецензии, библиография

Гутенмахер В. Пособие по математике для поступающих в вузы 2 58
Зайдель А. Что умеет микрокалькулятор 1 58
Ядренко М., Козлов М. Путешествие в мир случайных событий 10 56

* * *

Арикштейн А. Этот прочный непрочный мир 9 29
Брук Ю. Задачи Новосибирской ФМШ 12 45
Зорич И. Астрономия: наука и ее творцы 4 58
Левинштейн М. Эйнштейн — изобретатель 10 56

* * *

Новые книги 8 15
10 43
12 44

Информация

XIII конференция юных математиков в Батуми 4 54
Красноярская летняя школа 3 57
III Московский турнир юных физиков 2 55
IV Московский турнир юных физиков 9 57

* * *

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 53
Новый прием на Малый мехмат 1 54
Вечерняя физическая школа при МГУ 6 56
Заочная физическая школа 4 57
Заочная физико-техническая школа 1 56
12 53
Заочная физико-техническая школа при МИСиС 6 56

* * *

Об итогах конкурса «Малый интеркосмос» 4 52
Встреча с читателями 5 10
Семинар руководителей НОУ 5 49

Олимпиады

XXIII Международная математическая олимпиада 12 46
XIII Международная физическая олимпиада 12 49

XVI Всесоюзная олимпиада

Олимпиада по математике 11 51
Олимпиада по физике 11 54
Экспериментальный тур олимпиады по физике 11 57
Призеры олимпиады 11 60

* * *

Всероссийская олимпиада 10 59
Задачи республиканских олимпиад 2 34

Новости науки

Кузнецов В. Самый тяжелый изотоп 107-го элемента 3 16
Кузнецов В. Протонная радиоактивность 4 42
Астрономия и древняя летопись 7 38

Наша обложка

Котов Ю. Фантазии ЭВМ 2 54
Котов Ю. 3 38
Пухначёв Ю. 8 21

«Квант» улыбается

Бернштейн П. «Советы» абитуриентам 6 53
Крыжановский Л. Научный подход 5 28
Патрикеева Н. Курьезы 11 25
Всё врут календари? 3 19
Только у нас! 4 17
Яблоко со всех сторон 7 61
Словарь студента 8 53
Как определить объем кита, плавающего у берегов Гренландии 9 61
Вокруг ЭВМ 10 55

Смесь

Жак Я. Две «школьные» задачи в жизни 2 47
Михайленко Н. А как вы думаете? 1 48
Явелов Б. 150 лет тому назад 10 58
Уголок коллекционера 4 53
Игра, задача или спорт? 7 25
Константин Эдуардович Циолковский 9 18
Любопытный факт 9 46
Рассказывают, что ... 11 11
Новое совершенное число 11 50
Советуем купить! 2 54
8 59
Спрашивайте — отвечаем 6 14
8 9

Шахматная страничка *(3-я с. обложки)*

Играют компьютеры 1
Машина угадывает счет 2
Майя остается чемпионкой 3
Патовые рекорды 4
Шахматная машина времени 5
Шахматные лестницы 6
На пересечении линий 7
Жертва ферзя в партиях чемпиона мира 8
Как выигрывать проигрывая 9
Еще раз о жертве ферзя 10
Путешествие в прошлое 11
Новогодние сюрпризы 12

Законы Ньютона

1. См. рис. 1.

2. В первом случае раньше всего порвется нить между брусками *2* и *3* (при этом все бруски остаются неподвижными). Это произойдет при силе $F_1=25$ Н. Во втором случае порвется нить между брусками *1* и *2* при силе $F_2=37{,}5$ Н (бруски движутся).

3. $T=2\pi\sqrt{(L\cos\alpha)/g}$.

4. $x_м>\mu(M+m)g/k$.

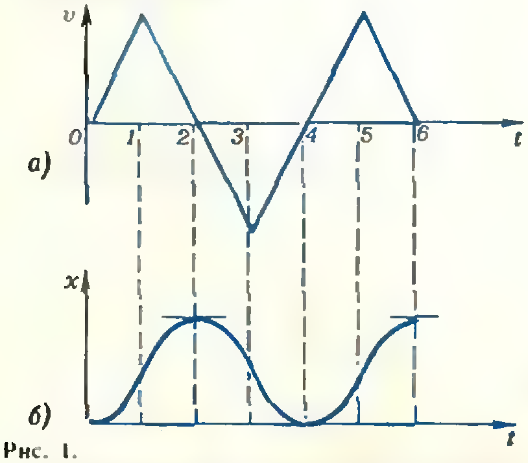


Рис. 1.

XIII Международная физическая олимпиада

Задача 1.

а) Общее сопротивление прибора $z=\dfrac{228{,}5\ \text{В}}{0{,}6\ \text{А}}=380{,}8$ Ом. Омическое сопротивление лампы $R_л=\dfrac{84\ \text{В}}{0{,}6\ \text{А}}=140$ Ом, откуда общее омическое сопротивление $R=140\ \text{Ом}+26{,}3\ \text{Ом}=166{,}3$ Ом. Индуктивное сопротивление дросселя

$$\omega L=\sqrt{z^2-R^2}=342{,}6\ \text{Ом},$$

следовательно,

$$L=\frac{\sqrt{z^2-R^2}}{2\pi\nu}=1{,}09\ \text{Гн}.$$

б) Сдвиг фаз определяется из условия $\operatorname{tg}\varphi=\omega L/R=2{,}06$; соответственно, $\varphi=64{,}1°$.

в) Активная мощность $P=I^2R=59{,}87$ Вт.

г) При размыкании контакта в стартере на дросселе возникает высокое индуктивное напряжение, достаточное для зажигания лампы (сетевое напряжение меньше напряжения зажигания).

д) Зависимость светового потока от времени показана на рисунке 2.

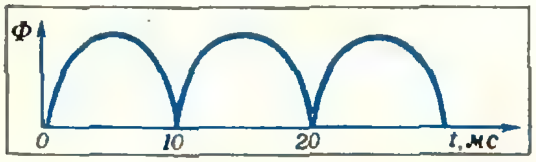


Рис. 2.

е) Время рекомбинации ионов и электронов в газовом разряде достаточно большое — вот почему лампа горит все время.

ж) Емкостное сопротивление конденсатора емкостью $C=4{,}7$ мкФ равно $1/\omega C=677{,}3$ Ом. Общее сопротивление системы в таком случае

$$z'=\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}=373{,}7\ \text{Ом}.$$

Оно почти такое же, как у прибора без конденсатора; следовательно, лампа обладает теми же эксплуатационными свойствами и зажигается по тому же принципу. Различие состоит только в том, что сдвиг фаз теперь противоположен по знаку сдвигу фаз φ:

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}=-2{,}01,\ \text{и}\ \varphi'=-63{,}6°.$$

В зданиях с большим количеством люминесцентных ламп дополнительные конденсаторы используются для компенсации сдвига фаз.

Задача 2.

Обозначив расстояние от точки опоры до центра масс через s, массу через m и момент инерции относительно точки опоры через I, для периода колебаний T записываем

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}. \qquad (1)$$

При этом I определяется через момент инерции I_0 относительно центра масс:

$$I=I_0+ms^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) имеем

$$I_0+ms^2=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 mgs, \qquad (3)$$

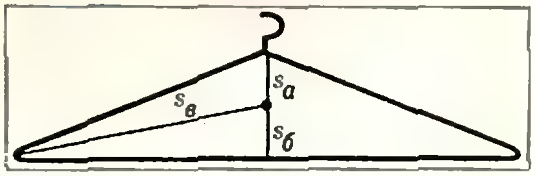


Рис. 3.

где $s=s_а$, $s_б$ и $s_в$ (рис. 3). Это квадратное уравнение может иметь не больше двух различных решений. Так как $s_в>21_{см}>s_а+s_б=10$ см, равными могут быть только $s_а$ и $s_б$. Поэтому

$$s_а=s_б=5\ \text{см},\ s_в=\sqrt{21^2+5^2}\ \text{см}=21{,}6\ \text{см}.$$

Запишем уравнение (3) для случаев а) и в). Исключив момент инерции I_0, получаем

$$m(s_в^2-s_а^2)=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 mg(s_в-s_а).$$

Отсюда

$$T=2\pi\sqrt{\frac{s_в+s_а}{g}}=1{,}03\ \text{с}.$$

Задача 3.

а) Запишем условие парения шара:

$$m_{t_2}+m_0=m_{t_1}.$$

где m_t — масса воздуха в объеме шара при температуре t, или

$$\varrho_2 V + m_0 = \varrho_1 V.$$

Отсюда

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{m_0}{V} = 1{,}03 \text{ кг/м}^3.$$

Воспользовавшись соотношением $\varrho_1/\varrho_2 = T_2/T_1$, получаем $T_2 = T_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 341{,}53$ К, или $t_2 = 68{,}38°\text{C}$.

б) Сила F, действующая на трос, равна разности между архимедовой силой F_A и силой тяжести $F_т$:

$$F = F_A - F_т.$$

Архимедова сила $F_A = m_1 g = \varrho_1 V g$, где $m_1 = \varrho_1 V$ — масса вытесненного воздуха при плотности ϱ_1. Сила тяжести $F_т = m_2 g = (\varrho_3 V + m_0) g$, где m_e — масса воздуха внутри шара при температуре $t_3 = 110°\text{C}$ и соответствующей плотности $\varrho_3 = \varrho_1 T_1/T_3 = 0{,}918$ кг/м^3 плюс масса оболочки m_0. Таким образом, действующая на трос сила равна

$$F = F_A - F_т = ((\varrho_1 - \varrho_3) V - m_0) g = 1{,}2 \text{ Н}.$$

в) Шар достигает высоты h такой, на которой плотность наружного воздуха ϱ_h имеет то же значение, что и эффективная плотность

$$\varrho_э = \frac{m_2}{V} = \frac{\varrho_3 V + m_0}{V} = 1{,}088 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность воздуха на высоте h определяется по барометрической формуле

$$\varrho_h = \varrho_1 e^{-\varrho_1 g h/p_0}.$$

Отсюда для h имеем

$$h = \frac{p_0}{\varrho_1 g} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_h} = \frac{p_0}{\varrho_1 g} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_э} = 843{,}14 \text{ м}.$$

г) Для небольшой разности высот (10 м по сравнению с 843 м) изменение плотности с высотой может быть приблизительно представлено линейной функцией. Поэтому возвращающая к положению равновесия сила пропорциональна величине отклонения от положения равновесия, а это является условием возникновения гармонических колебаний.

Задача 4.

а) Для определения фокусного расстояния F линзу кладут на зеркало, а в муфте штатива закрепляют карандаш. Линзу и зеркало передвигают до тех пор, пока смотрящий перпендикулярно вниз наблюдатель не увидит карандаш и его изображение рядом друг с другом (рис.). Так как зеркало отражает световые лучи, они проходят сквозь линзу два раза и получаемое изображение соответствует изображению в случае установленных друг за другом двух линз:

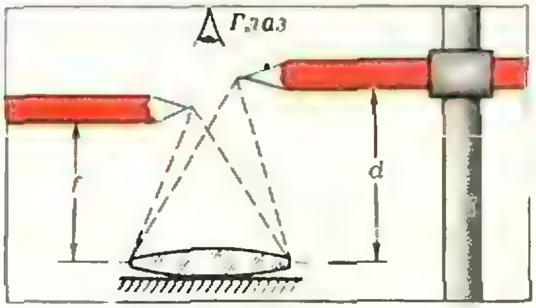


Рис. 4.

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}.$$

Для изображения с увеличением равным единице $d = f$; следовательно, $F = d$.

б) Показатель преломления n материала линзы определяется из уравнения

$$\frac{1}{F} = (n-1)\frac{2}{r}.$$

Радиус кривизны r симметричной двояковыпуклой линзы можно найти следующим образом. Если на зеркало налить немного воды и на воду положить стеклянную линзу, то между нею и зеркалом образуется плоско-вогнутая водяная линза (рис.). Один ее радиус кривизны равен радиусу стеклянной линзы, а другой — бесконечно большой. Для этой линзы

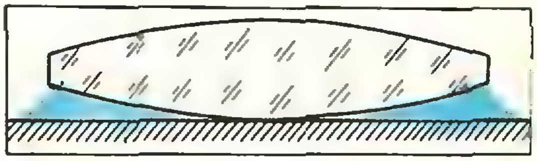


Рис. 5.

$$\frac{1}{F_в} = (n_в - 1)\left(-\frac{1}{r}\right),$$

и

$$r = -(n_в - 1) F_в.$$

Однако измерить на опыте (аналогичном описанному в пункте а)) можно лишь фокусное расстояние комбинации стеклянной и водяной линз:

$$\frac{1}{F_к} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_в}.$$

Затем надо вычислить фокусное расстояние $F_в$ водяной линзы, радиус кривизны r стеклянной линзы и ее показатель преломления n:

$$n = \frac{(n_в - 1) F_к}{2(F_к - F)} + 1.$$

Задача 5.

а) Для ускорения центра тяжести цилиндра (линейного ускорения оси цилиндра) имеем

$$a = \frac{2S}{t^2},$$

где s — путь, пройденный цилиндром за время t.

б) Обозначим ускорение тела массы m через a_m, натяжение каната через T и запишем уравнение движения тела:

$$m a_m = mg - T. \qquad (1)$$

Ускорение a центра тяжести цилиндра определяется разностью сил натяжения каната T и реакции F между цилиндром и плоскостью:

$$Ma = T - F. \qquad (2)$$

Если цилиндр поворачивается на угол θ, то тело проходит путь $x_m = (R + r)\theta$. Поэтому

$$a_m = (R+r)\frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) получаем значение силы реакции:

$$F = mg - \left(M + m\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right)a.$$

в) График зависимости силы F от расстояния r приведен на рисунке 6. Характерно, что при $r = 3$ см сила меняет знак. Это можно объяснить так. При малых значениях r момент силы натяжения слишком маленький, чтобы сообщить угловое ускорение, при котором цилиндр не проскальзывает, поэтому сила реакции направлена противоположно направлению движения центра тяжести цилиндра и создает дополнительный вращающий момент. При больших r момент силы натяжения слишком большой, и сила реакции направлена таким образом, чтобы создавать противоположный вращающий момент.

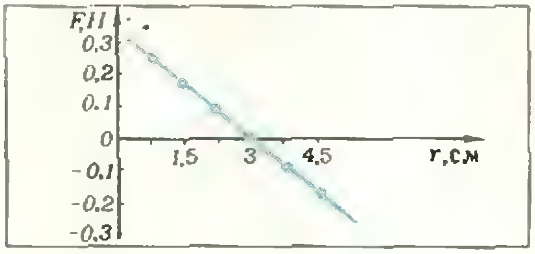


Рис. 6.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Ответ:

$$\begin{array}{ccccc}
IV & \cdot & II & = & VIII \\
\cdot & & \cdot & & \cdot \\
I & \cdot & IV & = & IV \\
\| & & \| & & \| \\
IV & \cdot & VIII & = & XXXII
\end{array}$$

2. Можно: нужно затянуть один из узлов и протянуть через второй (рис. 7).

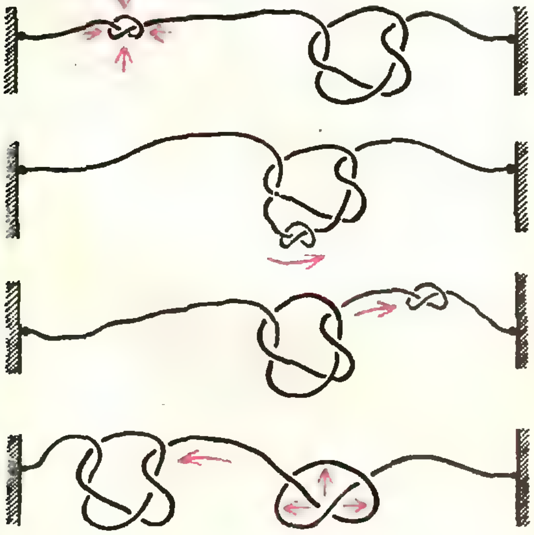


Рис. 7.

3.

$$\begin{array}{r}
8 \\
48 \\
+\quad 648 \\
9648 \\
89648 \\
189648 \\
\hline
289648
\end{array}$$

4. Если делимое, делитель и частное — нечетные числа, то остаток должен быть четным числом и поэтому не может оканчиваться на 7.

Олимпиада по математике

(см. «Квант» № 11)

Мы приводим здесь решения тех задач, которые не вошли в Задачник «Кванта». В Задачник вошли: из 8 класса — задача 8 (-М752), из 9 класса — задача 3 (М751), 4 (М755), 6 (М758), из 10 класса — задачи 1 (М753), 4 (М760), 7 (М754), 8 (М759).

8 класс

1. Ответ: $r_1 r_2$. Решение. Прямая O_1O_2 является осью симметрии угла MO_1K и обеих окружностей, поэтому четырехугольник MO_1KO_2 разбивается этой прямой на два конгруэнтных треугольника и $S_{MO_1KO_2} = 2S_{O_1MO_2}$. Далее, если радиус O_1M взять за основание треугольника O_1MO_2, то его высотой будет радиус O_2H второй окружности, проведенный к точке касания H (рис. 8). Осталось воспользоваться формулой для площади треугольника.

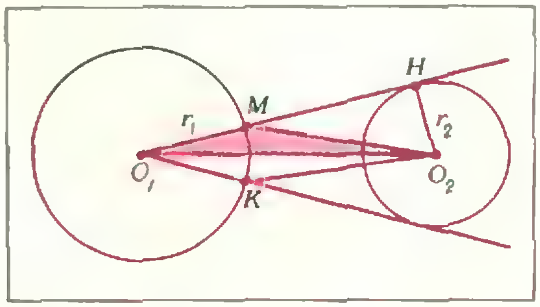


Рис. 8.

2. Ответ: три числа. Решение. Выпишем несколько первых членов

$$(a_n) = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$
$$(b_n) = 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

Мы видим, что числа 1, 2, 3 встречаются в обеих последовательностях. Докажем теперь, что все члены второй последовательности, начиная с b_4, в первой последовательности не встречаются и, более того, заключены строго между ее соседними членами:
при $n \geqslant 4$

$$a_{n-1} < b_n < a_n. \qquad (*)$$

Для этого заметим, что при $n = 4$ и $n = 5$ (*) выполняется, и если (*) справедливо для двух соседних значений $n = k$ и $k+1$, то (*) будет выполняться и для $n = k+2$: складывая неравенства

$$b_k < b_{k+1} < a_{k+1},$$

$$a_{k-1} < b_k < a_k$$

получим нужное неравенство

$$a_{k+1}<b_{k+1}<a_{k+2}.$$

Проведенные рассуждения показывают, что неравенство (*) выполняется при всех $n \geqslant 4$, а это и нужно было доказать.

3. **Доказательство** проведем рассуждением от противного. Именно, допустим, что существуют наборы показателей $(k_1, \ldots, k_n)$ и числа m, удовлетворяющие условию задачи, но такие, что $n<m$. Среди этих наборов выберем все наборы наименьшей длины, то есть с наименьшим значением n, и среди выбранных рассмотрим набор $(k_1, \ldots, k_n)$ с наименьшим значением суммы $k_1+\ldots+k_n$. Среди чисел k_i в этом наборе нет одинаковых: если, например, $k_1=k_2$, то из равенства $2^{k_1}+2^{k_2}=2^{k_1+1}$ следовало бы, что набор $(k_1+1, k_3, \ldots, k_n)$ меньшей длины удовлетворяет условию задачи, в противоречие с выбором $(k_1, \ldots, k_n)$.

Далее, все числа k_i не превосходят $m-1$: если, например, $k_1 \geqslant m$, то из равенства $2^{k_1}-2^{k_1-m}=2^{k_1-m}(2^m-1)$ следовало бы, что набор $(k_1-m, k_2, \ldots, k_n)$ с меньшей суммой k_i удовлетворяет условию задачи, опять-таки, в противоречие с выбором $(k_1, \ldots, k_n)$. Итак, все k_i различны и не превосходят $m-1$, поэтому

$$2^{k_1}+\ldots+2^{k_n}<1+2+\ldots+2^{m-1}=2^{m-1},$$

что противоречит тому, что $2^{k_1}+\ldots+2^{k_n}$ делится на 2^m-1. Тем самым утверждение задачи доказано.

4. **Доказательство.** Ради краткости назовем числа, не превосходящие 1/6, *хорошими*. Среди восьми неотрицательных чисел с суммой 1 найдутся по крайней мере три хороших — в противном случае не менее шести чисел будут больше 1/6 и сумма всех чисел будет больше 1. Далее, среди хороших чисел найдутся два, соответствующих вершинам куба — концам одной из диагоналей граней куба. В самом деле, диагонали граней куба вместе с вершинами куба разбиваются на два тетраэдра. Из трех хороших вершин хотя бы две являются вершинами одного тетраэдра.

Теперь ясна стратегия первого игрока: первым ходом он выбирает грань, диагональ которой имеет хорошие концы. Тогда при любом выборе второго игрока выбранные грани будут граничить по ребру, одна из вершин которого хорошая. Поэтому первому игроку остается из двух возможных граней выбрать ту, которой принадлежит хорошая точка, что и требовалось доказать.

5. **Ответ:** 100. **Решение.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{1982}$ — числа от 1 до 1982, расположенные в каком-то порядке. Обозначим через a_i наибольшее среди первых 99 чисел. Если $a_i>a_{100}$, то при просмотре пар слева направо на некотором шаге a_i будет меняться местами с a_{100}. Значит, все числа, стоящие левее a_{100}, будут меньше a_{100}. Аналогичное рассуждение показывает, что наименьшее среди чисел $a_{101}, a_{102}, \ldots, a_{1982}$ превосходит a_{100}. Итак, мы доказали, что среди чисел от 1 до 1982 есть ровно 99 чисел, меньших a_{100}. Следовательно, $a_{100}=100$.

6. **Ответ:** Знайка прав. **Решение.** Спроектируем все острова на берег пристани. Так как общий периметр островов равен 8 м, общая длина проекций будет меньше 4 м. Следовательно, от пристани до ближайшего просвета между островами нужно плыть меньше 2 м. Доплыв до просвета, далее плывем перпендикулярно берегам, не встречая препятствий, и достигаем противоположного берега, проплыв в общей сложности менее 3 м.

7. **Решение.** Пересечем параболу прямой $y=kx+b$; абсциссы точек пересечения x_1 и x_2 суть корни уравнения $x^2=kx+b$, поэтому по теореме Виета $x_1+x_2=k$ не зависит от b. Проведем еще одну прямую, параллельную первой, то есть с тем же угловым коэффициентом k; сумма абсцисс точек пересечения по-прежнему будет равна k. Полусумма абсцисс точек пересечения, равная абсциссе середины отрезка, высекаемого на прямой параболой, равна $k/2$ и, таким образом, прямая, соединяющая середины двух построенных отрезков, параллельна оси координат. Чтобы построить саму ось Oy, достаточно провести хорду параболы, перпендикулярную уже построенной прямой, и далее провести прямую, перпендикулярную этой хорде и проходящую через ее середину — это и будет ось Oy. Построенная ось Oy пересекает параболу в ее вершине, так что ось Ox строится как перпендикуляр к оси Oy в вершине параболы. Тем самым оси координат восстановлены. Чтобы найти единицу длины, построим биссектрису угла xOy — она пересечет параболу как раз в точке с координатами (1, 1). Задача решена.

9 класс

1. **Ответ:** в субботу. **Решение.** Для краткости перенумеруем мальчиков римскими числами — I, II, III. Заметим, что мальчик II, побывавший в библиотеке в понедельник, до этого мог быть там лишь три раза — в пятницу, во вторник и в субботу — см. таблицу. Мальчик III, ходящий в библиотеку через три дня, перед понедельником мог побывать в библиотеке в четверг, когда не было II, а до четверга III был в библио-

Таблица

	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	...
II	—	—	—	+	—	—	+	—	—	+	—	—	+	
III	— 	— 	— 		— +			— 	 +	 —	 —	 —	 +	
или	—	—	—	+	—	—	—	—	+	—	—	—	+	
I				+	—	+	—	—	+	—	+	—		

теке либо в воскресенье, когда опять не было II, либо в субботу, когда был и II. Остается проверить, мог ли мальчик I быть в библиотеке в субботу, когда были II и III. Нетрудно видеть, что мог (см. таблицу). Задача решена.

2. Ответ: k^2. Решение. В указанных на рисунке 9 обозначениях

$$\gamma=\pi-\alpha-\beta,\ \delta=\alpha+\beta,\ \varepsilon=2\pi-2\alpha-2\beta=2\gamma.$$

Соединим M с центром параллелограмма O.

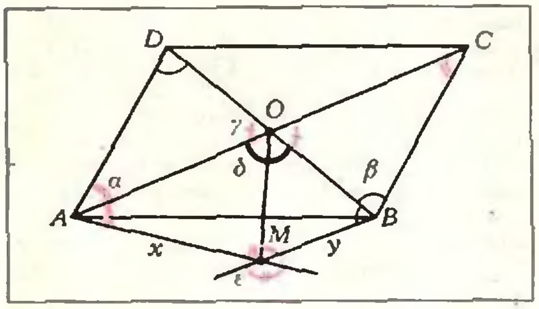


Рис. 9.

Точка O равноудалена от прямых AD и AM, BC и BM, AD и BC и, следовательно, от AM и BM — MO является биссектрисой угла AMB. Следовательно, $O\widehat{M}A=O\widehat{M}B=\frac{\varepsilon}{2}=\gamma$ и мы получаем две пары подобных треугольников: $\Delta AOD\sim\Delta AMO\Rightarrow x=|OM|\cdot k$ и $\Delta BOC\sim\Delta BMO\Rightarrow y=|OM|\cdot\frac{1}{k}$. Итак, $x/y=k\cdot|OM|/\frac{1}{k}\cdot|OM|=k^2$.

5. Доказательство. Применив к левой части доказываемого неравенства неравенство о средних $\left(\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\right)$, получим

$$2^{\sqrt[3]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}.$$

Применив то же неравенство к показателю степени, получим

$$\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}=\sqrt[24]{x^7}.$$

Из этих двух неравенств и следует доказываемое.

7. Доказательство. Рассмотрим фигуру из 12 клеток, указанную на рисунке 11. Она обладает тем свойством, что каждая ее клетка окружена не менее чем четырьмя клетками этой же фигуры. Та клетка фигуры, в которой написано наименьшее для этой фигуры число, и будет искомой (таких клеток может быть и несколько).

Замечание. Легко построить пример, показывающий, что число 4 в условии задачи увеличено быть не может: например, в клетку с координатами (x, y) запишем число $x+2y$.

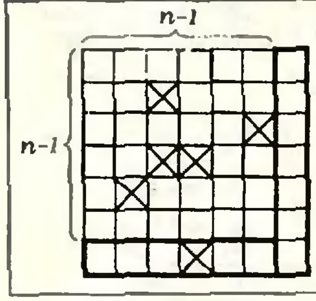


Рис. 10.

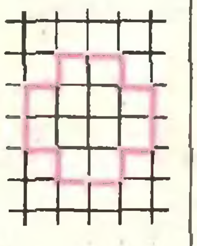


Рис. 11.

8. Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что сумма всех данных чисел неотрицательна — в противном случае приведенные ниже рассуждения применяются к числам $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$.

Для всех пар индексов (i, k) таких, что $i, k=0, 1, 2, i\neq k$, обозначим через C_{ik} множество, состоящее, во-первых, из всех чисел данной последовательности, номера которых при делении на 3 дают остаток i, и, во-вторых, из всех положительных чисел последовательности, номера которых при делении на 3 дают в остатке k. При любых i и k множества C_{ik} удовлетворяют условиям (а) и (б) задачи. Докажем, что среди C_{ik} есть множество, удовлетворяющее и условию (в).

Обозначим через $\bar{C}_{ik}$ сумму всех чисел, входящих в C_{ik}. В сумму

$$S=\bar{C}_{01}+\bar{C}_{02}+\bar{C}_{10}+\bar{C}_{12}+\bar{C}_{20}+\bar{C}_{21}\qquad(*)$$

четырежды входят все положительные члены данной последовательности и дважды — все отрицательные. Так как сумма всех чисел неотрицательна, S не меньше, чем удвоенная сумма положительных чисел, которая в свою очередь не меньше $|a_1|+\ldots+|a_n|$. Итак,

$$S\geqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|,$$

и из (*) следует, что для некоторой пары индексов (i, k)

$$|\bar{C}_{ik}|\geqslant(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)/6.$$

Требуемое доказано.

Замечание. Как показывает последовательность

$$1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,$$

постоянная 1/6 в условии задачи увеличена быть не может.

10 класс

2. См. решение задачи 2 из 9 класса.

3. Ответ: не существует. Решение. Предположим противное. Затем выберем наименьшее среди всех натуральных чисел, делящихся на $A=\underbrace{11\,1\ldots1}_{m}$ и имеющих сумму цифр, меньшую, чем m. Обозначим его через B. Так как все числа $A, 2A, 3A, \ldots, 9A$ имеют сумму цифр, не меньшую чем m, получаем

$$B\geqslant 10A=10\cdot\frac{10^m-1}{9}>10^m.\qquad(**)$$

Пусть

$$B=k_r\cdot 10^r+\ldots+k_1\cdot 10+k_0,$$

где $k_r, k_{r-1}, \ldots, k_1, k_0$ — цифры числа B, $0\leqslant k_j\leqslant 9$, $j=0, 1, \ldots, r-1$, $1\leqslant k\leqslant 9$. Из (**) следует, что $r\geqslant m$. Так как $10^m-1=9A$ делится на A, число

$$B_1=B-(10^r-10^{r-m})=B-10^{r-m}\cdot(10^m-1)$$

делится на A. Кроме того, оно меньше, чем B, и отлично от нуля (сумма цифр натурального числа B меньше m). Действительно, если $k_{r-m}<9$, то сумма цифр числа B_1 равна сумме цифр числа B. Если же $k_{r-m}=9$, то сумма цифр B_1 даже меньше, чем сумма цифр B. Следовательно, исходное предположение неверно.

5. Доказательство. Покажем, что перестановками можно добиться того, что все отмеченные клетки будут лежать ниже диагонали, идущей от левого верхнего угла таблицы в правый нижний. Поскольку отмечено всего $n-1$ клеток, в каком-то из n столбцов вообще нет отмеченных клеток — переставляем его с крайним правым столбцом. Рассмотрим теперь строки таблицы. Все их правые клетки не будут отмеченными, но в некоторой строке будут отмеченные клетки — поменяем эту строку с нижней (см. рис. 10). Проделаем ту же процедуру с квадратом из $(n-1)\times(n-1)$ клеток, примыкающим к левому верхнему углу, и так далее, пока все отмеченные клетки не окажутся ниже рассматриваемой диагонали.

6. Доказательство. Обозначим числа совокупности $\{0, 1, 2, ..., n\}$ через $a_0, a_1, ..., a_n$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$|a-a_0|\leq|a-a_1|\leq...\leq|a-a_n|.$$

Для каждого натурального числа k в интервале $|x-a|<k/2$ лежит не более k чисел из нашей совокупности. Следовательно, для значений k от 1 до n справедливы неравенства

$$|a-a_k|\geq k/2.$$

Кроме того, очевидно что $|a-a_0|\geq\langle a\rangle$. После перемножения всех этих неравенств получим

$$|a|\cdot|a-1|\cdot...\cdot|a-n|=$$
$$=|a-a_0|\cdot|a-a_1|\cdot...\cdot|a-a_n|\geq$$
$$\geq\langle a\rangle\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot...\cdot\frac{n}{2}=\langle a\rangle\frac{n!}{2^n},$$

что и требовалось доказать.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 9)

Задание 17 (К. Вэтни, 1923 г.). Пешка должна превращаться, но в какую фигуру? Проигрывает 1. e8С? Kf6! 2. С:f7 Kh5! 3. С:h5. Черные запатовали свои пешки и выиграли партию в поддавки! Не годится и 1. e8K? Kf6! 2K:f6 h5 3. K:h7 f6 4. K:f6 h4 и далее пешка черных доходит до первой горизонтали, превращаясь в слона, который легко отдается (аналогично 3. K:h5). Легко проверить, что выигрывают черные в поддавки и при превращении белой пешки в ферзя или ладью.

Решает 1. e8Kp! Пешка становится королем! 1...Kf6 2. Kp:f7 Kg8 3. Kp:g8 h5 4. Kp:h7 h4 5. Kpg6 h3 6. Kpg5 h2 7. Kpg4! h1Kp! При другом превращении пешки белый король сразу становится под удар. Теперь же короли не станут подходить друг к другу ближе чем на 2 поля (сделавший следующий шаг проигрывает). Ничья.

Задание 18. Лb6! С:a2 2. Лg6 С:b1 3. g5 С:c2 4. g4 С:d3 5. Ch4! С:e4 6. g3 С:g6. Белым пат, сражение в поддавки закончилось в их пользу.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, А. Малкин,
Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 251-82-42

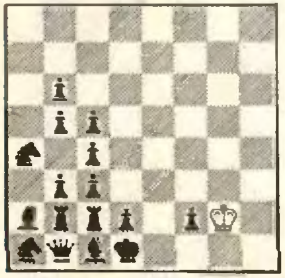
Сдано в набор 16.10.82. Подписано в печать 1.12.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,07 Т-20950
Тираж 175044 экз. Цена 40 коп. Заказ 2601

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром» Государственного
комитета СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

НОВОГОДНИЕ СЮРПРИЗЫ

В теории окончаний хорошо известна следующая позиция. **Белые: Kpd2; черные: Kpa1, Kh8, п.a2.** Проигрывает 1.Kpc2, но к ничьей ведет 1.Kpc1. Теперь белый король спокойно переступает с c1 на c2 и обратно, не опасаясь приближения черного коня. Этой идее можно придать весьма необычный вид.

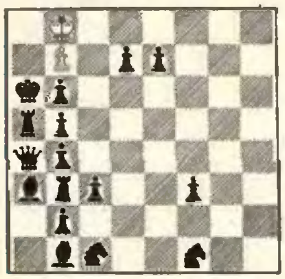


Б. Сидоров, 1982 г. Ничья.

1.Kpf1! b4 2.Kp:f2 (только теперь можно взять пешку) **2...b5 3.Kpf1 Kb6 4.Kpf2 Kd5 5.Kpf1 Ke3+ 6. Kpf2** и т. д.

Проигрывает, однако, 1.Kp:f2?, в этом случае после 5...Ke3 клубок черных фигур мгновенно распутывается.

Одинокий король, конечно, не в состоянии одержать победу над всеми черными фигурами. Другое дело, если в его распоряжении имеется хотя бы одна пешка...



Ю. Бухвальд, 1964 г. Выигрыш.

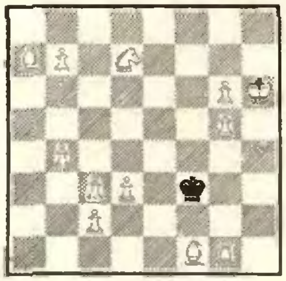
1. Kpc7 Ce4 (в случае 1.Kpa8 или Kpc8 этот ход слоном решил бы дело в пользу черных) **2.b8Ф** и **3.Ф:b6×.** У черных есть и более сильная защита — 1...c2!!! Ответ белых кажется невероятным. 2. Kpb8!! Белый король возвращается на место. Черные заперли своего слона, и теперь у них нет защиты от 3.Kpa8 и 4.b8K× (2...Лc3 3.Kpa8 Лc8+ 4.bcC×!)

В «Кванте», 1980, № 12 рассматривались задачи, в которых мат давался в 1/2 и даже в 2/3 хода. Вот еще один пример, для решения которого ход — слишком много (идея задачи принадлежит Э. Рекстину).

Белые: Kpd8, Лg6; черные: Kpf7, Фh8, Kf8. Мат в 2/3 хода.

Первая треть хода уже сделана — белая пешка g7 снята с доски. Вслед за ней покидает доску черный ферзь (вторая треть хода) и, наконец, его место занимает белый конь (последняя треть хода). Итак, полный ход **g7:h8K×.**

Один из самых популярных трюков в необычных задачах заключается во вращении доски. На следующей диаграмме мат дается при любом положении доски, причем пешка превращается в четыре различные фигуры.



К. Ханнеман, 1922 г. Мат в 2 хода.

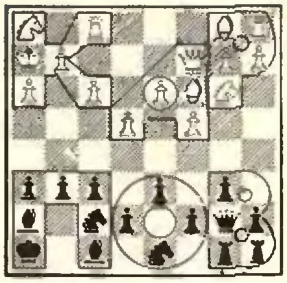
Диаграмма: **1.b8Л!** (1.b8Ф пат) **1...Kpf4 2.Лf8×.**

Доска повернута на 90° по ходу часовой стрелки: **1.d8C!** (1.d8Ф пат) **1...Kpd4 2.Cf6×.**

На 180°: **1.f8K! Kpd5 2.Cb7×.**

На 270°: **1.d8Ф+** (наконец-то пешка может превратиться в ферзя) **1...Kpe6 2.Фe7×.**

Следующая необычная задача посвящена победе А. Карпова в Мерано. Полный комплект из 32 шахматных фигур изобразил фамилию чемпиона мира.



В. Лихачев, 1982 г. Может ли эта позиция возникнуть после 18 ходов?

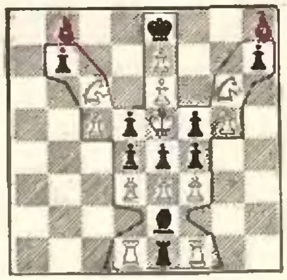
Число 18 напоминает о том, что матч в Мерано завершился в 18-м поединке. Непонятно, правда, как вообще могли фигуры расположиться таким образом.

Секрет прост — надо развернуть доску на 180°.

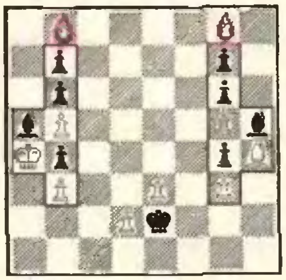
1.c4 d6 2.f3 f6 3.Kh3 Kh6 4.Kf2 Kf7 5.h3 Cf5 6.e4 h6 7.Cd3 Ch7 8.0—0 b6 9.Kph2 g6 10.Kh1 Cg7 11.Cc2 0—0 12.d3 Фc8 13.Kd2 Фb7 14.Kb3 Kc6 15.Cd2 Лfb8 16.Cc3 Kcd8 17.Cb1 Kph8 18.Фc2 Cf8.

Конкурсные задания

В канун Нового года шахматные композиторы в основном занимаются тем, что придумывают задачи с праздничным сюжетом. В № 23 перед вами — новогодняя елка, а в № 24 — две свечки в канделябрах.

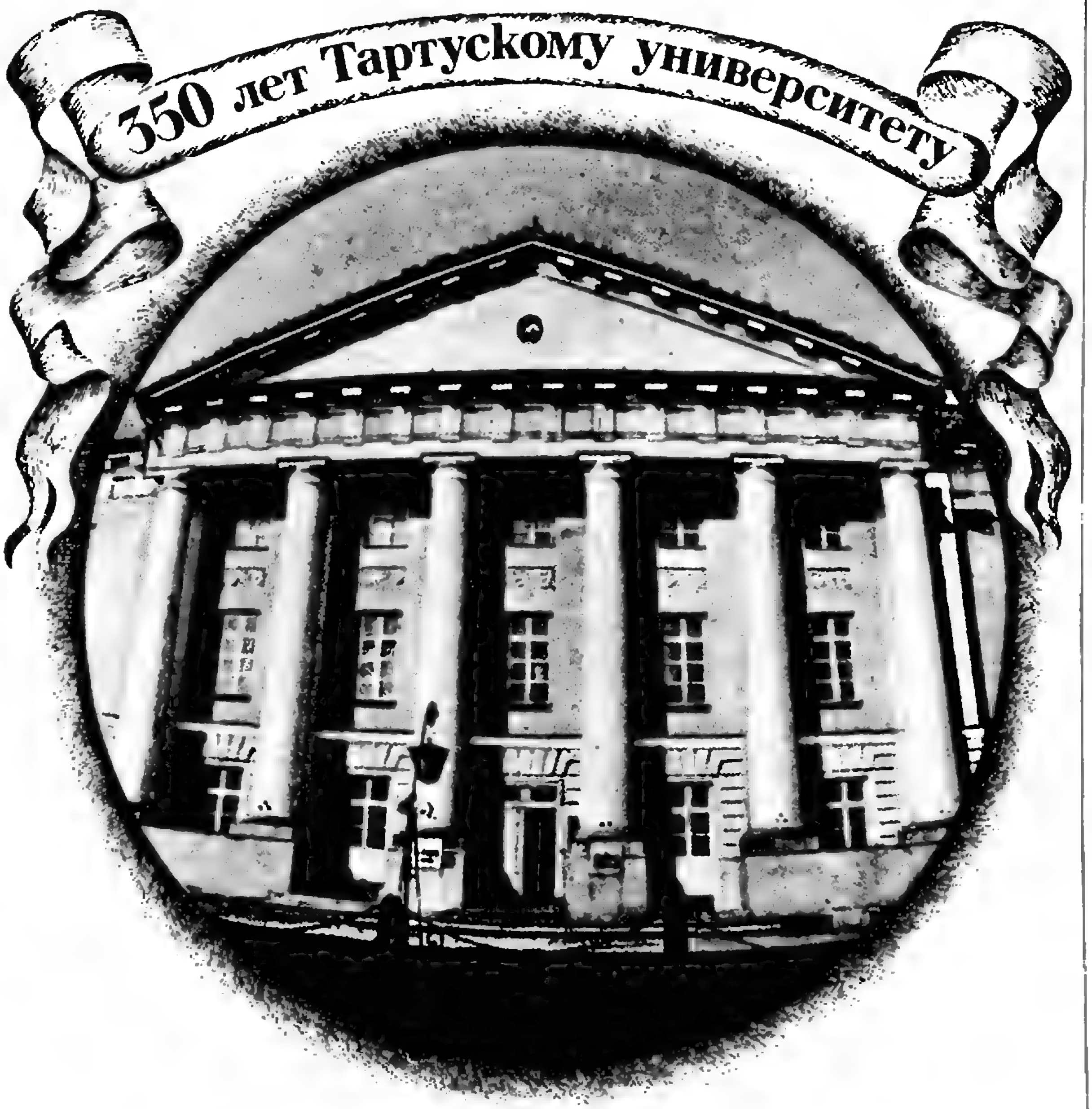


23. Мат в 2 хода.



24. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 февраля 1983 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24»).



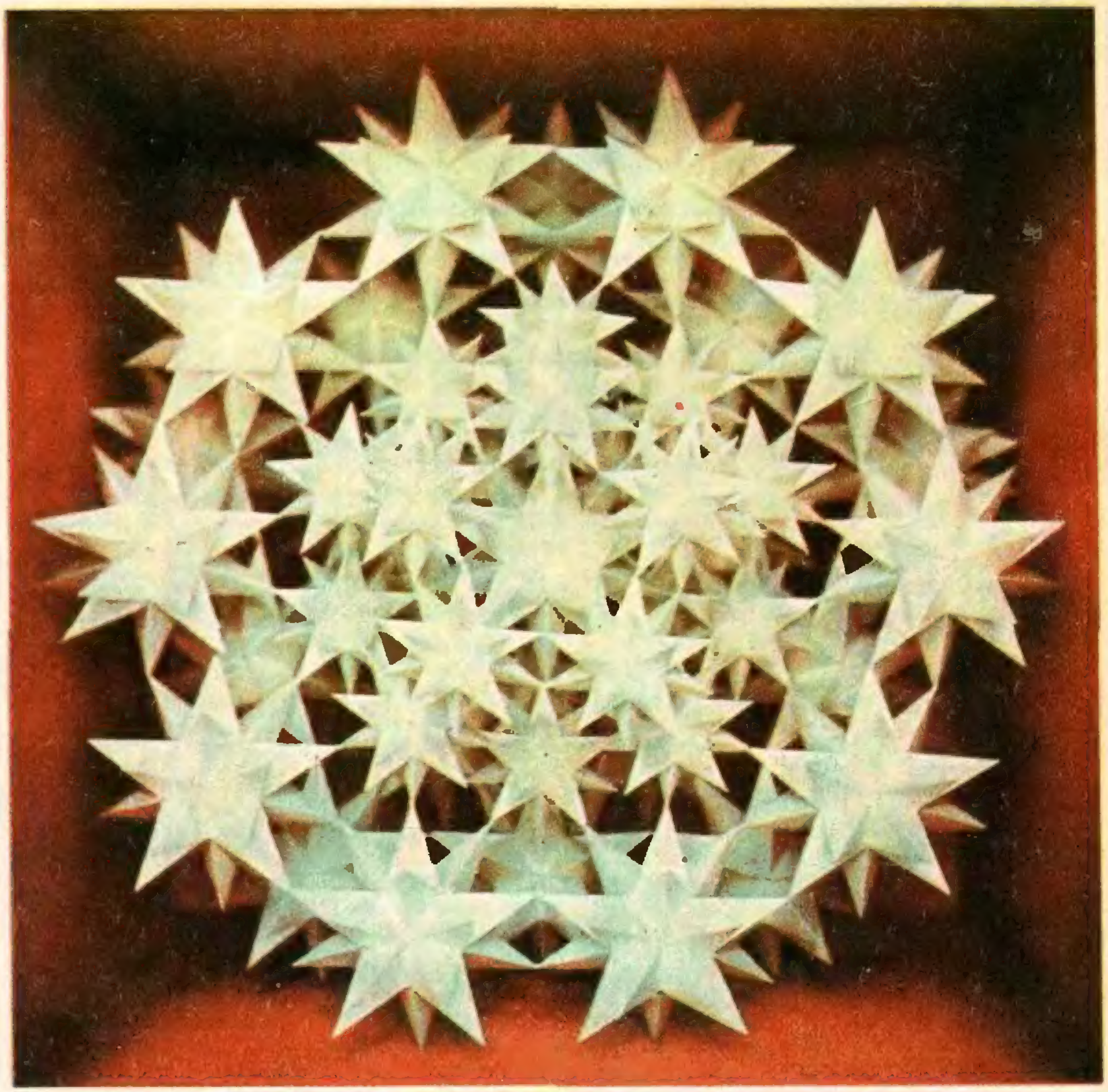
Исполнилось 350 лет со дня основания Тартуского университета. Это один из старейших и известнейших университетов Советского Союза.

В Тарту работали такие замечательные математики, как М. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского, Т. Клаузен, Ф. Г. Миндинг. Работы академика В. Я. Струве и его учеников прославили Тартуский университет как мировой астрономический центр. Воспитанником университета был известный физик Э. Х. Ленц (правило Ленца, закон Джоуля — Ленца). Профессору Тартуского университета Б. С. Якоби, физику и электротехнику, принадлежит изобретение гальванопластики, им был сконструирован первый в мире электродвигатель. Здесь работал профессор Б. Б. Голицын, один из основоположников сейсмологии. Выпускником Тартуского университета был известный естествоиспытатель К. М. Бэр (он открыл закон подмыва берегов рек). Здесь учился создатель «Толкового словаря живого великорусского языка» В. И. Даль. В университете работали выдающиеся хирурги Н. И. Пирогов и Н. Н. Бурденко, известный историк академик Е. В. Тарле.

В наши дни Тартуский университет — видный центр образования, культуры и науки Советского Союза, кузница кадров Эстонской Советской Социалистической Республики.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии — макет конструкции из звездчатых многогранников, родившийся в воображении А. М. Бреславец и исполненный Н. Н. Малышевой. Он экспонировался в этом году в Москве на выставке Архитектурная бионика, новые формы и конструкции», экспонаты которой подчеркивали глубокие связи, существующие между природными формами и современными конструкциями. Он заинтересовал нас не только математической правильностью, но и праздничным видом: с Новым Годом, дорогие читатели!